Monimuuttujaiset kasvukäyrät
Harjoitus 3.
13.2.2007

1. Olkoon W_1 ja W_2 riippumattomia ja

$$W_1 \sim W_p(\nu_e, \mathbf{\Sigma}) \text{ sekä } W_2 \sim W_p(\nu_h, \mathbf{\Sigma}),$$

jos n on suuri, niin

$$\chi^2 = -(\nu_e - 0.5(p - \nu_h)) \log(\lambda) \sim \chi^2(p\nu_h),$$

missä

$$\lambda = \frac{\mid W_1 \mid}{\mid W_1 + W_2 \mid}.$$

Tutki approksimaation tarkkuuta simuloimalla eri n:n arvoilla.

2. Osoita, että

$$\text{a) } \mathrm{tr}[\boldsymbol{S}_h(\boldsymbol{S}_h + \boldsymbol{S}_e)^{-1}] = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (1 + \lambda_i)^{-1},$$

missä λ_i on matriisin $\boldsymbol{S}_e^{-1/2} \boldsymbol{S}_h \boldsymbol{S}_e^{-1/2}$ i. ominaisarvo ja että

$$\text{b) } \mathrm{tr}[\boldsymbol{S}_\mathrm{h} \boldsymbol{S}_\mathrm{e}^{-1}] = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{p}} \lambda_\mathrm{i} \quad .$$

3. Olkoon $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{n1} \sim IN(\boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{\Sigma})$ ja $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n2} \sim IN(\boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{\Sigma})$. Eräs kovarianssimatriisin harhaton estimaattori on

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \{ \sum_{i=1}^{n_1} (\boldsymbol{y}_i - \bar{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y}_i - \bar{\boldsymbol{y}})' + \sum_{i=1}^{n_2} (\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}})' \}.$$

Mitä jakaumaa noudattavat *a*) $\bar{\boldsymbol{y}} - \bar{\boldsymbol{x}}$ ja *b*) $\boldsymbol{S}$?

4. (jatkoa) Miten voisit testata hypoteesia $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ $(H_1 : \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2)$?

5. Olkoot $\boldsymbol{A}$ positiivisesti definiitti $p \times p$ matriisi. Osoita, että matriisifunktio

$$f(\mathbf{\Sigma}) = \log \mid \mathbf{\Sigma} \mid \; + \; \mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{A})$$

saavuttaa 1-käsitteisen miniminsä pisteessä $\mathbf{\Sigma} = \boldsymbol{A}$, kun $\mathbf{\Sigma}$ on p.d.