Monimuuttujaiset kasvukäyrät
Harjoitus 2.
6.2.2007

1. Olkoon $\boldsymbol{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, missä
$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ ja } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}.$$
Mitä jakaumia noudattavat seuraavat vektorit $\boldsymbol{y}_1 = (y_1, y_2)'$, $\boldsymbol{y}_2 = (y_3, y_4)'$ ja $\boldsymbol{y}_1 \mid \boldsymbol{y}_2$? Laske myös korrelaatiot ρ_{12} ja ρ_{24}.

2. Jos
$$\boldsymbol{y} \sim N(\boldsymbol{X\beta}, \sigma^2 \boldsymbol{I}),$$
ja $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$, niin mitä jakaumaa noudattaa $\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}$?

3. Olkoon satunnaisvektorit $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ peräisin multinormaalijakaumasta $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ $(n > p)$. Suurimman uskottavuuden estimaattorit $\boldsymbol{\mu}$:lle ja $\boldsymbol{\Sigma}$:lle ovat tällöin
$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y}_i = \bar{\boldsymbol{y}}$$
ja
$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{y}_i - \bar{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y}_i - \bar{\boldsymbol{y}})'.$$
Osoita, että $E(\hat{\boldsymbol{\mu}}) = \boldsymbol{\mu}$ ja $E(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}) = \frac{n-1}{n}\boldsymbol{\Sigma}$.

4. Jos
$$\boldsymbol{y} \sim N(\boldsymbol{X\beta}, \sigma^2 \boldsymbol{I}),$$
missä $n \times k$ matriisin sarakeaste on täysi, niin johda parametrin σ^2 REML-estimaattori $\hat{\sigma}^2_{REML}$.

5. Osoita, että
$$E(\hat{\sigma}^2_{REML}) = \sigma^2.$$

6. Olkoon $\boldsymbol{y} \sim N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$. Osoita, että
$$\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i z_i^2,$$
missä λ_i:t ovat yhtälön $\mid \Sigma^{1/2}\boldsymbol{A}\Sigma^{1/2} - \lambda \boldsymbol{I} \mid = 0$ juuria, $\boldsymbol{A}$ on symmetrinen ja $z_i \sim IN(0,1)$.