

Monimuuttujaiset kasvukäyrät

Harjoitus 1.

30.1.2007

1. Tarkastellaan muunnosta

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}, i = 1, \dots, n,$$

missä $\mathbf{A} \in R^{q \times p}$ ja $\mathbf{b} \in R^q$. Näytä, että

$$\text{a) } \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b} \text{ ja b) } \mathbf{S}_y = \mathbf{A}\mathbf{S}_x\mathbf{A}'.$$

2. Osoita, että Mahalanobiksen etäisyys

$$D_{ij} = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$$

on lineaarisesta muunnoksesta $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ($|\mathbf{A}| \neq 0$) riippumaton.

3. Jos $E(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}$ ja $\text{Var}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma}$, niin osoita että

$$\text{a) } \text{Var}(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x}\mathbf{x}') - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}', \text{ b) } E(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}) = \text{tr}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}.$$

4. Tee ominaisarvohajotelma (käsin ja koneella) matriiseille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ja

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Laske ominaisarvot matriisille $\mathbf{R} = \{r_{ij}\}$, missä $r_{ij} = 1$, kun $i = j$ ja $r_{ij} = r \neq 0$, kun $i \neq j$ (vihje $|\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{B}| = |\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{A}|$).

6. Olkoon satunnaisvektorit $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ peräisin multinormaalijakaumasta $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ($n > p$). Osoita, että suurimman uskottavuuden estimaattorit $\boldsymbol{\mu}$:lle ja $\boldsymbol{\Sigma}$:lle ovat tällöin

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i = \bar{\mathbf{y}}$$

ja

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})'$$