Frekvenssiaineistojen analyysi
Harjoitukset 20.09.2001

1.1. Eräässä kokeessa oli 100 monivalintatehtävää ja jokaisessa tehtävässä 4 vastausvaihtoehtoa, joista täsmälleen yksi oli oikea. Arvaaja valitsee jokaiseen tehtävään vastauksensa täysin satunnaisesti. Mitä jakaumaa noudattaa arvaajan oikeiden vastausten lukumäärä? Mikä on todennäköisyys, että arvaajalla on ainakin 50 oikeaa vastausta?

1.2. Heitetään harhatonta rahaa kahdesti. Olkoon Y = kruunujen lukumäärä heittosarjassa.

(a) Määritä Y:n todennäköisyysjakauma.

(b) Määritä Poissonin jakauma, jolla on sama odotusavo kuin (a)–kohdan jakaumalla. Vertaa näiden kahden jakauman variansseja.

(c) Olkoon kruunujen todennäköisyys π. Oletetaan, että kahden heiton sarjassa ei saada yhtään kruunua. Laske π:n suurimman uskottavuuden estimaatti. Onko sen antama π:n arvo uskottava?

1.3. Jatketaan edellisen tehtävän tarkastelua.

(a) Laske binomitodennäköisyydet, kun (i) π=0.6 ja N=2, (ii) π=0.4 ja N=2.

(b) Oletetaan, että havaitaan $Y = 1$. Määritä uskottavuusfunktio ja piirrä sen kuvaaja.

(c) Osoita edellisen kohdan uskottavuusfunktiota käyttäen, että π:n suurimman uskottavuuden estimaatti on 0.5.

1.4. Eräässä 750 aikuisen otoksessa Yhdysvaltain väestöstä 24 % uskoi jälleensyntymään. Muodosta jälleensyntymään uskovien prosenttiosuudelle 95 %:n luottamusväli. Tulkitse tulos.

1.5. Oletetaan, että X ja Y ovat toisistaan riippumattomia Poissonin jakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia. Olkoon X:n odotusarvo μ_1 ($X \sim \text{Poi}(\mu_1)$) ja Y:n odotusarvo μ_2 ($Y \sim \text{Poi}(\mu_2)$). Osoita, että $X + Y$ noudattaa Poissonin jakaumaa, jonka odotusarvo on $\mu_1 + \mu_2$ ($X + Y \sim\text{Poi}(\mu_1 + \mu_2)$) .

1.6. Tutkittiin uuden lääkkeen vaikutusta tautia A sairastaviin potilaisiin. Uuden lääkkeen odotettiin olevan tähän asti käytössä ollutta standardilääkettä parempi. Sadan potilaan koeryhmä kokeili uutta lääkettä. Ryhmästä 40 ilmoitti jo käytössä olleen lääkkeen olevan parempi kuin uusi lääke ja 60 potilasta ilmoitti uuden lääkkeen tehonneen nykyistä paremmin.

(a) Olkoon π_1 todennäköisyys, että nykyinen lääkke tehoaa paremmin kuin uusi ja π_2 todennäköisyys, että uusi lääkke tehoaa paremmin kuin nykyinen. Testaa hypoteesi $H_0 : \pi_1 = \pi_2$. Raportoi ja tulkitse kaksipuolisen testin antama P–arvo.

(b) Muodosta 95 %:n luottamusväli todennäköisyydelle, että uudella lääkkeellä saadaan enemmän helpotusta kuin nykyisellä.

1.7. Tarkastellaan vielä edellistä tehtävää. Tutkijat halusivat tehdä niin suuren otoksen, että estimaatti poikkeaa 95 %:n varmuudella todennäköisyydestä π_2 korkeintaan 0.08.

(a) Kuinka suuri otos tarvitaan?

(b) Kuinka suuri otos tarvitaan, jos tiedetään, että $\pi_2 \geq 0.75$?