Ei-parametrinen regressio
Harjoitus 7
6.5.2008

1. Etsi harjoitystyösi aineistoon sopiva usean selittäjän lokaalinen polynomimalli. Havainnollista mallia graafisesti.

2. Osoita, että funktion

$$PLS(\boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{g}) + \lambda \boldsymbol{g}'\boldsymbol{K}\boldsymbol{g},$$

missä $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\nabla}$, yksikäsitteinen minimi saavutetaan, kun

$$\hat{\boldsymbol{g}} = (\boldsymbol{I} + \lambda\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{y}.$$

3. Osoita, että

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K})^{-1} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}' + \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{\Delta}^{-1} + \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}',$$

missä $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}'\boldsymbol{\nabla})^{-1}$ ja $\boldsymbol{X} = [\mathbf{1}, (1, \ldots, n)']$.

4. Osoita, että tasoittajamatriisin

$$\boldsymbol{S}_\lambda = (\boldsymbol{I} + \lambda\boldsymbol{K})^{-1}$$

kaksi ensimmäista ominaisarvoa ovat aina ykkösiä.

5. Osoita kuutiosplinin katkaistun polynomikantaesityksen

$$g(t) = \sum_{j=0}^{3} \beta_j t^j + \sum_{k=1}^{K} \theta_k (t - \kappa_k)_+^3$$

avulla, että luonnollisen kuutiosplinin määrittelyistä seuraa rajoitteet

$$\beta_2 = \beta_3 = 0 \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{K} \theta_k = \sum_{k=1}^{K} \theta\kappa_k = 0.$$