Yleistetyt lineaariset mallit
4. harjoitukset, 7. vko 2002
(Tee vähintään 7 harjoitusta seuraavista)

4.1. Tarkastellaan sellaista satunnaisvektoria $\mathbf{X}^T = (X_1, X_2)$, että $\mathrm{E}(X_1) = \theta$ ja $\mathrm{E}(X_2) = 0$ sekä

$$\mathrm{Var}(\mathbf{X}) = \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

Osoita, että $T = X_1 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}} X_2$ on θ:n harhaton tunnusluku. Laske T:n varianssi.

4.2. Olkoon $f(x;\theta)$ satunnaismuuttujan X tiheysfunktio, T on θ:n harhaton tunnusluku ja $U = \frac{\partial \log f(x;\theta)}{\partial \theta}$. Osoita tehtävän 1 tuloksen avulla, etttä

$$\mathrm{var}(T) \geq \frac{1}{\mathrm{var}(U)},$$

missä $\mathrm{var}(U) = \mathrm{E}(U^2)$.

4.3. Osoita, että $\mathrm{var}(U) = -\mathrm{E}(\frac{\partial^2 \log f(X;\theta)}{\partial \theta^2})$, missä U määritelty samoin kuin tehtävässä 2 (Ks. GJJ, s. 13, Lemma 2.1).

4.4. Määritä U ja tarkista tehtävässä 3 todistettu tulos

(a) Poissonin jakauman $\mathrm{Po}(\theta)$ ja

(b) binomijakauman $\mathrm{Bi}(\theta)$ tapauksessa.

4.5. Jokaisella epänegatiivisesti definiitillä matriisilla on olemassa ns. Choleskyn hajotelma $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$, missä $\mathbf{A}$ on yläkolmiomatriisi. Olkoon annettu matriisi $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$. Lausu matriisin $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ alkiot $\mathbf{\Sigma}$:n alkioiden avulla.

4.6. Oletetaan, että matriisin $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ Choleskyn hajotelma on $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$, missä $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Olkoon $\mathbf{V}$ sellainen satunnaisvektori, että $\mathrm{E}(\mathbf{V}^T) = (0,0)$ ja $\mathrm{Var}(\mathbf{V}) = \mathbf{I}_2$. Määritellään $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{V} + \boldsymbol{\mu}$, missä $\boldsymbol{\mu}^T = (\mu_1, \mu_2)$ on $\mathbf{X}$:n odotusarvo. Kirjoita auki satunnaismuuttujien X_1 ja X_2 lausekkeet.

4.7. Olkoot $\mathbf{X}_1$ $(p \times 1)$ ja $\mathbf{X}_1$ $(q \times 1)$ sellaisia satunnaisvektoreita, että $\mathrm{E}(\mathbf{X}_1) = \boldsymbol{\mu}_1, \mathrm{E}(\mathbf{X}_2) = \boldsymbol{\mu}_2$ ja

$$\mathrm{Var}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & \mathbf{\Sigma}_{12} \\ \mathbf{\Sigma}_{21} & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{pmatrix},$$

missä $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^T, \mathbf{X}_2^T)$, $\mathrm{Var}(\mathbf{X}_1) = \mathbf{\Sigma}_{11}$, $\mathrm{Var}(\mathbf{X}_2) = \mathbf{\Sigma}_{22}$ ja $\mathrm{Cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbf{\Sigma}_{12}$. Laske satunnaisvektorin $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{X}_2$ odotusarvo ja osoita, että $\mathrm{Var}(\mathbf{Z}) = \mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}$.

4.8. Olkoon satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yhteisjakauman tiheysfunktio $f(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \theta_2)$ ja satunnaisvektori $\mathbf{T}^T = (T_1, T_2)$ on parametrivektorin $\boldsymbol{\theta}^T = (\theta_1, \theta_2)$ harhaton estimaattori, jonka kovarianssimatriisi $\mathrm{Var}(\mathbf{T}) = \mathbf{\Sigma}_{11}$. $\mathbf{U}$ on sellainen 2×1-satunnaisvektori, että $\mathrm{Var}(\mathbf{U}) = \mathbf{\Sigma}_{22}$ ja $\mathrm{Cov}(\mathbf{T}, \mathbf{U}) = \mathbf{\Sigma}_{12}$. Osoita, että

$$\mathbf{\Sigma}_{11} \geq \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}.$$

Epäyhtälö tarkoittaa ts. sitä, että matriisi $\mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}$ on epänegatiivisesti definiitti.

4.9. Olkoon tilanne sama kuin tehtävässä 8, mutta määritellään satunnaismuuttujat U_j siten, että $U_j = \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log f(X_1, \ldots, X_n; \theta_1, \theta_2)$, $j = 1, 2$. Nyt tiedetään, että $\mathrm{Cov}(\mathbf{T}, \mathbf{U}) = \mathbf{I}_2$. Johda tätä tietoa käyttäen CRR

$$\mathbf{\Sigma}_{11} \geq \mathbf{\Sigma}_{22},$$

missä $\mathbf{\Sigma}_{22} = \mathrm{Var}(\mathbf{U})$. $\mathrm{Var}(\mathbf{U})$ on ns. informaatiomatriisi ja sitä merkitään usein $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}}$.