Yleistetyt lineaariset mallit
3. harjoitukset, 6. vko 2002

3.1. Osoita, että

(a) Poissonin jakauma $f(x;\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!},\ x = 0, 1, \ldots$ ja $\theta > 0$

(b) trinomijakauma $f(x_1, x_2, x_2; \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!}\theta_1^{x_1}\theta_2^{x_2}\theta_3^{x_3}$, missä $n = x_1 + x_2 + x_3,\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$ ja $0 < \theta_i < 1,\ i = 1, 2, 3$

kuuluvat eksponentiaaliseen perheeseen ja esitä jakaumat luonnollisen parametrisoinnin avulla.

3.2. Osoita, että

(a) eksponenttijakauma $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x},\ x > 0$ ja $\theta > 0$

(b) gammajakauma $f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}},\ \alpha > 0, \beta > 0, x > 0$

kuuluvat eksponentiaaliseen perheeseen.

3.3. Etsi eksponentiaalisen perheen ominaisuuksia käyttäen minimaalisesti tyhjentävä ja täydellinen tunnusluku (tunnusvektori)

(a) geometrisen jakauman $f(x;\theta) = \theta(1-\theta)^{x-1},\ x = 1, 2, \ldots$ parametrille $\theta > 0$.

(b) gammajakauman parametrivektorille (α, β).

3.4. Olkoon $X_1, \ldots, X_n$ otos normaalijakaumasta $N(0, \sigma^2)$.

(a) Mikä on parametrin σ^2 MVUE?

(b) Jos otos on Geometrisesta jakaumasta, niin mikä on jakauman parametrin θ MVUE?

Perustelut.

3.5. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on otos tasajakaumasta $U(0, \theta)$. Tasajakauma ei kuulu eksponentiaaliseen perheeseen (Miksi?). Tiedämme, että tunnusluku $T = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ on minimaalisesti tyhjentävä. Osoita, että T on myös täydellinen. (Ohje: $f(t;\theta) = nt^{n-1}/\theta^n,\ 0 \leq t \leq \theta$. Jos $\mathrm{E}[g(T)] = \int_0^\theta \frac{g(t)nt^{n-1}}{\theta^n}dt = 0$ kaikilla $\theta > 0$, niin $\int_0^\theta g(t)t^{n-1}dt = 0,\ \theta > 0$. Derivoidaan sitten jälkimmäinen integraali ylärajan suhteen.)

3.6. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on otos normaalijakaumasta $N(\theta_1, \theta_2)$, missä θ_1 ja θ_2 ovat tuntemattomia parametreja. Osoita tyhjentävyyttä ja täydellisyyttä hyväksikäyttäen, että $\bar{X}$ ja $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ovat riippumattomia. (Vihje: Totea ensin, että $\bar{X}$ on θ_1:n täydellinen tyhjentävä tunnusluku, kun θ_2 tunnetaan.)

3.7. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on otos normaalijakaumasta $N(\theta_1, \theta_2)$. Selitä tehtävän 6 tuloksen avulla, miksi suureen

$$T = \frac{\bar{X} - \theta_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/[n(n-1)]}}$$

jakauma ei riipu parametrista θ_2. Mitä jakaumaa T noudattaa?