

## Yleistetyt lineaariset mallit

2. harjoitukset, 5. vko 2002

2.1. Olkoon  $X_1, X_2, X_3$  on otos tasajakaumasta  $U(0, \theta)$ . Tarkastellaan järjestystunnuslukuja  $T_1 = \min(X_1, X_2, X_3)$ ,  $T_2 = \text{med}(X_1, X_2, X_3)$  ja  $T_3 = \max(X_1, X_2, X_3)$ . Satunnaismuuttujien  $T_1, T_2, T_3$  yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$g(t_1, t_2, t_3) = \frac{6}{\theta^3}, \quad 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \theta.$$

(a) Johda  $g$ :n avulla  $T_2$ :n ja  $T_3$ :n yhteisjakauma ja  $T_3$ :n reunajakauma sekä ehdollinen tiheysfunktio  $g(t_2|t_3)$ .

(b) Laske  $E(2T_2|t_3)$ .

(c) Määritä estimaattori  $m(T_3) = E(2T_2|T_3)$ .

2.2. (Jatkoa tehtävään 1)

(a) Osoita laskemalla, että  $m(T_3) = E(2T_2|T_3)$  on harhaton.

(b) Laske  $\text{var}[m(T_3)]$ .

(c) Perustelee tulokset Raon ja Blackwellin lauseen avulla.

2.3. (Jatkoa tehtävään 1.)

(a) Osoita, että  $(T_1, T_3)$  on  $\theta$ :n tyhjentävä otosfunktio. Onko se minimaalisesti tyhjentävä?

(b) Osoita, että  $E(2T_2|T_1, T_3) = T_1 + T_3$  on  $\theta$ :n harhaton estimaattori.

2.4.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  on otos tasajakaumasta  $U(0, \theta)$ . Tarkastellaan järjestystunnuslukuja  $T_1 = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $T_2 = \text{med}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  ja  $T_3 = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Nyt  $2T_2$  on  $\theta$ :n harhaton estimaattori. Osoita, että  $E(2T_2|T_3)$  on  $\theta$ :n harhaton estimaattori ja sen varianssi on korkeintaan yhtä suuri kuin estimaattorin  $2T_2$  varianssi.

2.5. Olkoon  $X_1, X_2, \dots, X_n$  on otos Poissonin jakaumasta  $\text{Po}(\lambda)$ . Estimaattori  $T_1 = X_1$  on  $\lambda$ :n harhaton estimaattori. Osoita, että  $T = E(X_1 | \sum_{i=1}^n X_i)$  on harhaton. Mitä on  $T$ :n varianssi?

2.6.  $X$  on havainto binomijakaumasta  $\text{Bi}(3, \theta)$ .

(a) Osoita, että  $X$  on  $\theta$ :n täydellinen tyhjentävä otosfunktio ja

(b)  $X/3$  on  $\theta$ :n harhaton minimivarianssinen estimaattori.

(c) Jos  $X$  on havainto binomijakaumasta  $\text{Bi}(n, \theta)$ , niin  $X/n$  on  $\theta$ :n harhaton minimivarianssinen estimaattori.

2.7. Olkoon  $X_1, X_2, \dots, X_n$  on otos Poissonin jakaumasta  $\text{Po}(\lambda)$ .

- (a) Osoita, että  $T = \sum_{i=1}^n X_i$  on parametrin  $\lambda$  täydellinen tunnusluku.
- (b) Osoita, että  $T/n$  on MVUE (minimivarianssinen harhaton estimaattori).

2.8. Olkoon satunnaismuuttujien  $X_1, X_2$  yhteisjakauma

$$f(x_1, x_2; \theta_1, \theta_2) = \theta_1^{x_1} \theta_2^{x_2} (1 - \theta_1 - \theta_2)^{1 - x_1 - x_2},$$

missä  $0 < \theta_1 < 1$ ,  $0 < \theta_2 < 1$ ,  $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$  ja  $0 \leq x_1 + x_2 \leq 1$ . Onko  $(X_1, X_2)$  täydellinen?