Yleistetyt lineaariset mallit

1. harjoitukset, 4. vko 2002

1.1. Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos binomijakaumasta $Bi(m, \theta)$, missä m on tunnettu ja θ tuntematon parametri.

   (a) Osoita, että $T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i$ on parametrin on θ tyhjentävä tunnusluku.

   (b) Määritä X_1:n ehdollinen jakauma, kun $t(X_1, X_2, \ldots, X_n) = t$ on annettu. (Vastaus: $\binom{m}{x_1}\binom{nm-m}{t-x_1}/\binom{nm}{t}$).

1.2. Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos geometrisesta jakaumasta $Geo(\theta)$, jonka todennäköisyysfunktio on $f(x; \theta) = \theta(1-\theta)^{x-1}$ ja θ on tuntematon parametri. Osoita, että $t(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i$ on parametrin on θ tyhjentävä tunnusluku.

1.3. X_1, X_2 on otos normaalijakaumasta $N(\mu, 1)$, missä μ on tuntematon parametri. Osoita, että $t(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ on parametrin μ tyhjentävä tunnusluku. Onko se minimaalisesti tyhjentävä?

1.4. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on otos normaalijakaumasta $N(\mu_0, \sigma^2)$, missä σ^2 on tuntematon parametri ja μ_0 tunnettu. Osoita, että $t(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$ on parametrin σ^2 tyhjentävä tunnusluku.

1.5. X_1, X_2 on otos jakaumasta, jonka tiheysfunktio on $f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$, $\theta > 0$, θ on tuntematon parametri. Osoita, että $t(X_1, X_2) = X_1 X_2$ on parametrin θ tyhjentävä tunnusluku.

1.6. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on otos tasajakaumasta $U(0, \theta)$, missä θ on tuntematon parametri. Olkoon tarkasteltava tunnusluku $T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

   (a) Osoita, että X_i:n ehdollinen tiheysfunktio $f_i(x_i|t) = (n-1)/nt$, $0 < x_i < t$.

   (b) Laske $\mathrm{E}(X_i|T = t)$ ja sen avulla $2\,\mathrm{E}(\sum_{i=1}^n X_i|T = t)$. (Vastaus: $(n+1)t/2n$, $(n+1)t$, Huomaa $P(X_i = t|t) = 1/n$).

   (c) Onko $\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ θ):n tyhjentävä tunnusluku?

1.7. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on otos jakaumasta, jonka tiheysfunktio on $f(x; \theta) = \exp(\theta - x)$, $\theta \leq x < \infty$, missä θ on tuntematon parametri. Osoita, että $T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ on parametrin θ tyhjentävä tunnusluku.

1.8. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on otos Bernoullin jakaumasta $Ber(\theta)$, missä θ on tuntematon parametri. Otosavaruudessa on 2^n pistettä, joilla on positiivinen todennäköisyys. $T = \sum_{i=1}^n X_i$ on parametrin θ tyhjentävä otosfunktio.

(a) Onko $\mathbf{t}^T = (\sum_{i=1}^m X_i, \sum_{i=m+1}^n X_i)$ on parametrin θ tyhjentävä otosfunktio, kun $1 < m < n$.

(b) Onko $t^T = (\sum_{i=1}^m X_i, \sum_{i=m+1}^n X_i)$ minimaalisesti tyhjentävä?

1.9. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on otos jakaumasta, jonka tiheysfunktio on $f(x;\theta) = \theta_2^{-1} \exp[(\theta_1 - x)/\theta_2]$, $x > \theta_1$. Osoita, että $(\sum_{i=1}^n X_i, \min(X_1, X_2, \ldots, X_n))$ on parametrivektorinn (θ_1, θ_2) minimaalisesti tyhjentävä otosfunktio.