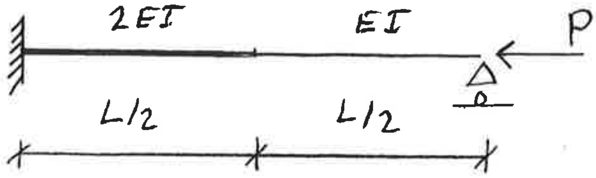
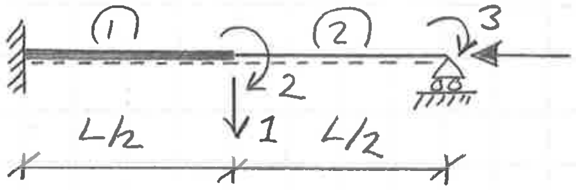
Määritä oheisen puristetun palkin kriittinen kuorma elementtimenetelmällä. Käytä kahta Eulerin-Bernoullin palkkielementtiä.



Jaetaan pilari kahteen elementtiin
$\Rightarrow$ kolme vapausastetta



$$P = \lambda \frac{EI}{L^2}$$

Saadaan yleistetty lineaarinen ominaisarvotehtävä $\underline{K}\,\bar{x} = \lambda \underline{S}\,\bar{x}$, jossa $\underline{K}$ on systeemin lineaarinen jäykkyysmatriisi ja $\lambda \underline{S}$ muodostaa systeemin geometrisen jäykkyysmatriisin.

Elementtikohtaiset matriisit Eulerin-Bernoullin palkkiteorian elementille ovat

$$\underline{K}^{(e)} = \frac{EI}{\ell}\begin{bmatrix} 12/\ell^2 & 6/\ell & -12/\ell^2 & 6/\ell \\ & 4 & -6/\ell & 2 \\ & & 12/\ell^2 & -6/\ell \\ \text{symm.} & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \underline{S}^{(e)} = \tilde{N}^{(e)}\begin{bmatrix} \frac{6}{5\ell} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5\ell} & \frac{1}{10} \\ & \frac{2\ell}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{\ell}{30} \\ & & \frac{6}{5\ell} & -\frac{1}{10} \\ \text{symm.} & & & \frac{2\ell}{15} \end{bmatrix}$$

nyt $\tilde{N}^{(1)} = \tilde{N}^{(2)} = P$
$= \lambda \frac{EI}{L^2}$

vastaten paikallisia vapausasteita v_1, v_1', v_2, v_2'

Elementtien paikallisten vapausasteiden ja rakenteen globaalien vapausasteiden välillä on seuraavanlainen riippuvuus:
(Merkit. globaaleja vap. ast. $\delta_1, \delta_2, \delta_3$)

elem	1	2	3	4
1	–	–	1	2
2	1	2	–	3

← elem. paik. vap.ast.

Nyt globaaleiksi matriisialkioiksi saadaan siis

$$K_{11} = K^1_{33} + K^2_{11} = \frac{8\cdot 12}{L^3}\cdot 2EI + \frac{8\cdot 12}{L^3}EI = 288\, EI/L^3$$
$$K_{12} = K^1_{34} + K^2_{12} = -24\, EI/L^2$$
$$K_{13} = K^2_{14} = 24\, EI/L^2$$
$$K_{22} = K^1_{44} + K^2_{22} = 16EI/L + 8EI/L = 24\, EI/L$$
$$K_{23} = K^2_{24} = 4EI/L$$
$$K_{33} = K^2_{44} = 8EI/L$$

$$S_{11} = S^1_{33} + S^2_{11} = P\cdot\frac{24}{5L} = \lambda\frac{24EI}{5L^3}$$
$$S_{12} = S^1_{34} + S^2_{12} = 0, \quad S_{13} = S^2_{14} = \frac{P}{10} = \lambda\frac{EI}{10L^2}$$
$$S_{22} = S^1_{44} + S^2_{22} = P\frac{2L}{15} = \lambda\frac{2EI}{15L}$$
$$S_{23} = S^2_{24} = -P\frac{L}{60} = -\lambda\frac{EI}{60L}, \quad S_{33} = S^2_{44} = P\frac{L}{15} = \lambda\frac{EI}{15L}$$

Eli matriisimuodossa kirjoitettuna

$$\frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 288/L^2 & -24/L & 24/L \\ & 24 & 4 \\ \text{symm.} & & 8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{Bmatrix} = \lambda\frac{EI}{L}\begin{bmatrix} \frac{24}{5L^2} & 0 & \frac{1}{10L} \\ & \frac{2}{15} & -\frac{1}{60} \\ & & \frac{1}{15}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{Bmatrix}$$

Tästä voidaan ominaisarvot λ_i ja niitä vastaavat ominaisvektorit ratkaista.

Jos merkitään $\tilde{\delta} = \delta_1/L$ saadaan systeemi käsinlaskua varten sopivaan muotoon

$$\begin{bmatrix} 288 - \lambda\frac{24}{5} & -24 & 24 - \lambda\frac{1}{10} \\ & 24 - \lambda\frac{2}{15} & 4 + \lambda\frac{1}{60} \\ & & 8 - \lambda\frac{1}{15}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\tilde{\delta}_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

Josta kriittinen kuormaparametrin λ_{kr} arvo saadaan ehdosta että kerroinmatriisin determinantin on oltava nolla. $\Rightarrow \lambda_{kr} = 26.316$

Tutkitaan nyt ratkaisun suppenemista ja sitä kuinka käytännössä voidaan elementtimenetelmäratkaisun virhettä arvioida ja probleeman tarkkaa ratkaisua ekstrapoloida numeerisen ratkaisun tuloksista.

Mikäli tunnetaan edeltäkäsin käytetyn elementin suppenemisnopeus (tarkasteltavalle suureelle) eli virheen asymptoottinen pienenemisnopeus verkkoa tihennettäessä, joka olkoon muotoa

$$\text{virhe} \sim C h^n$$

jossa C on posit. vakio, h verkkoparametri (= suurimman elementin karakteristinen pituus) ja n on kyseisen suureen suppenemisnopeus, niin parannettu arvio suureelle saadaan laskemalla vähintään kahdella eri elementtiverkolla joiden tuloksista tarkkaa arvoa voi yrittää ekstrapoloida.

Tarkastellaan esimerkkinä kriittisen kuormaparametrin tarkan arvon ekstrapolointia. Elementtimenetelmäratkaisuille $\lambda_1 = \lambda(h_1)$ ja $\lambda_2 = \lambda(h_2)$ pätee siis

$$\lambda_1 = \lambda_{ex} + C h_1^n$$
$$\lambda_2 = \lambda_{ex} + C h_2^n$$

Eliminoidaan $C = (\lambda_1 - \lambda_{ex}) h_1^{-n}$ ylemmästä yht. ja sijoitetaan alempaan jolloin saadaan

$$\lambda_2 = \lambda_{ex} + (\lambda_1 - \lambda_{ex}) \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^n$$

josta ratkaistaan $\lambda_{ex} = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1 \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^n}{1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^n}$

Ohessa tulokset 2 ja 10 elementin verkolle laskettuna (tasavälinen elem. jako)

2 elem	
1	26.316455
2	107.61133
10 elem	
1	25.184801
2	82.825679

Eulerin-Bernoullin elementin ominaisarvojen suppenemisnopeus on $n = 4$, ja nyt $h_1 = L/2$, $h_2 = L/10$
$\Rightarrow h_2/h_1 = 1/5$

Alimman omin. arvon extrapoloitu arvo $\lambda^1_{ex} = \dfrac{25.185 - 26.316\left(\frac{1}{5}\right)^4}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^4}$

$= 25.1832$

Toisen omin. arvon ekstrapoloitu arvo $\lambda^2_{ex} = \dfrac{82.826 - 107.611\left(\frac{1}{5}\right)^4}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^4}$

$= 82.786$

Mikäli suppenemisnopeutta ei tiedetä voidaan soveltaa rajalle ekstrapolointia l. Richardson ekstrapolointia.

Lasketaan nyt myös tulos 50 elementillä

$\lambda^1 = 25.1831$

$\lambda^2 = 82.770$

Sovelletaan ekstrapolointia näin alimman nurjahduskuorman suhteen merk. $\bar{h} = h/L$

$\lambda_{00} = 26.316 \qquad \bar{h}_0 = \frac{1}{2}$

$\lambda_{10} = 25.185 \qquad \bar{h}_1 = \frac{1}{10} \qquad \lambda_{ik} = \lambda_{i,k-1} + \dfrac{\lambda_{i,k-1} - \lambda_{i-1,k-1}}{\frac{\bar{h}_{i-k}}{\bar{h}_i} - 1}$

$\lambda_{20} = 25.183 \qquad \bar{h}_2 = \frac{1}{50}$

(ks. Numeerinen matematiikka siv 109)

$$\lambda_{11} = \lambda_{10} + \frac{\lambda_{10} - \lambda_{00}}{\frac{\bar{h}_0}{\bar{h}_1} - 1} = 24.90225$$

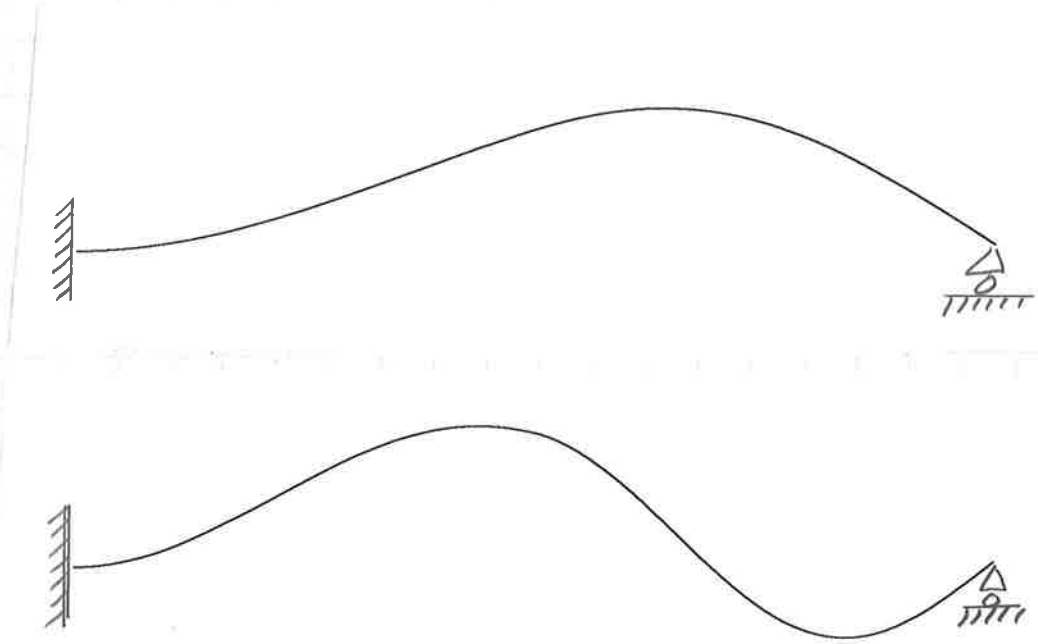
$$\lambda_{21} = \lambda_{20} + \frac{\lambda_{20} - \lambda_{10}}{\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}_2} - 1} = 25.1825$$

$$\lambda_{22} = \lambda_{21} + \frac{\lambda_{21}-\lambda_{11}}{\frac{\bar{h}_0}{\bar{h}_2}-1} = 25.194$$

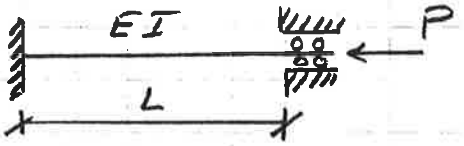
=> Parannettu arvio kriittiselle kuormalle nyt $P_{kr} = 25.19\, EI/L^2$ joka kuitenkin on huonompi arvio kuin λ_{20}.

Pienimmän neliösumman menettelyä voidaan myös soveltaa, jolloin suppenemisnopeus n voidaan myös estimoida.

Nurjahdusmuodot 1 ja 2 ovat seuraavanlaisia



H2.45



$P_{cr} = ?$

differenssimenetelmällä.

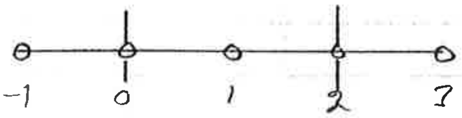
$v^{(4)} + k^2 v'' = 0$ korvataan differenssilausekkeella

$$\frac{1}{h_i^4}\left(v_{i-2} - 4v_{i-1} + 6v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2}\right) + \frac{k^2}{h_i^2}\left(v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}\right) = 0$$

otettuna pisteessä i, $h_i = x_{i+1} - x_i$ on hilaväli $k^2 = \frac{P}{EI}$,
saadaan differenssimolekyyli

(1) — $(\lambda-4)$ — $(6-2\lambda)$ — $(\lambda-4)$ — (1), missä $\lambda = k^2h^2$

1°) kaksi hilaväliä $h = \frac{L}{2}$



RE: $v_0 = v_2 = 0$
$v_0' = 0 \Rightarrow v_{-1} = v_1$ ja $v_2' = 0 \Rightarrow v_3 = v_1$

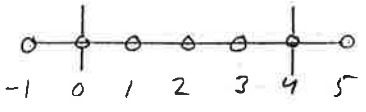
differenssiyhtälö pisteessä 1: $v_1 + (6-2\lambda)v_1 + v_1 = 0$

$\Rightarrow (8-2\lambda)v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0$ suora tsp. tila ei nurjahdusta
tai $8 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \Rightarrow \tilde{P}_{cr} = \frac{\lambda EI}{h^2}$, $h = \frac{L}{2}$
$\Rightarrow \tilde{P}_{cr} = \frac{16EI}{L^2}$ (merkit. diff. appr. saatua kriittisen kuorman arvoa $\tilde{P}_{cr}$:llä)

Analyyttinen tulos on $P_{cr} = 4\pi^2 \frac{EI}{L^2}$

$\Rightarrow$ suhteellinen virhe $e_r = \frac{|P_{cr} - \tilde{P}_{cr}|}{P_{cr}} = 0{,}595$ eli 59,5%

2°) hilaväli $h = \frac{L}{4}$ (käytetään symmetriaa hyväksi)



RE: $v_0 = v_4 = 0$, $v_{-1} = v_1$, $v_5 = v_3$
symmetria $v_3 = v_1$

piste 1: $v_1 + (6-2\lambda)v_1 + (\lambda-4)v_2 + v_1 = 0$
piste 2: $(\lambda-4)v_1 + (6-2\lambda)v_2 + (\lambda-4)v_1 = 0$

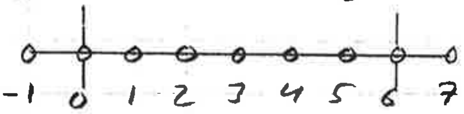
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 8-2\lambda & \lambda-4 \\ \lambda-4 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

eli: $\underline{K}\,\bar{v} = \bar{0}$, jotta ei triviaali ratkaisu $\Rightarrow \det \underline{K} = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 4$

$\Rightarrow \tilde{P}_{cr} = \dfrac{32EI}{L^2} \Rightarrow e_r = 0{,}189$ eli $18{,}9\,\%$

3°) hilaväli $h = \dfrac{L}{6}$



RE: $v_0 = v_6 = 0$, $v_{-1} = v_1$, $v_7 = v_5$

symm. $v_5 = v_1$, $v_2 = v_4$

pist 1: $v_1 + (6-2\lambda)v_1 + (\lambda-4)v_2 + v_3 = 0$

pist 2: $(\lambda-4)v_1 + (6-2\lambda)v_2 + (\lambda-4)v_3 + v_2 = 0$

pist 3: $v_1 + (\lambda-4)v_2 + (6-2\lambda)v_3 + (\lambda-4)v_2 + v_1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7-2\lambda & \lambda-4 & 1 \\ \lambda-4 & 7-2\lambda & \lambda-4 \\ 1 & \lambda-4 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{eli} \quad \underline{K}\,\bar{v} = \bar{0}$$

$$\det \underline{K} = 0 \Rightarrow (7-2\lambda)\left[(7-2\lambda)(3-\lambda) - (\lambda-4)^2\right] - (\lambda-4)\left[(\lambda-4)(3-\lambda) - (\lambda-4)\right] + \left[(\lambda-4)^2 - (7-2\lambda)\right] = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4) = 0 \Rightarrow \lambda_{cr} = 1$$

$\Rightarrow \tilde{P}_{cr} = \dfrac{36EI}{L^2} \Rightarrow e_r = 0{,}088$ eli $8{,}8\,\%$

Suoritetaan nyt <u>suppenemisnopeustarkastelu</u>

Numeerisesta analyysistä tiedämme: $\|e\| = \|u - \tilde{u}\| \leq Ch^p$, (*) missä $\|\cdot\|$ on jokin normi (u = tarkka ratk. $\tilde{u}$ likiv.) ja C on <u>ratkaisusta u riippumaton</u> vakio ja potenssi p ilmaisee suppenemisvauhdin (menetelmä, sitä parempi mitä suurempi p on; tietyn asteiselle approksimaatiolle on kuitenkin olemassa sille ominainen suurin mahdollinen p. Jos p on suurin mahdollinen ko. approksimaatioasteelle, sanotaan menetelmää optimaaliseksi). h = verkkoparametri l. hilaväli.

Tarkastellaan nyt ko. tilannetta piirtämällä edellä lasketut tulokset $(-\log\frac{h}{L}, \log|e_r|)$ koordinaatistoon, josta voidaan arvioida minkälainen hila tarvittaisiin, jotta päästäisiin 4 %:in tarkkuuteen kriittisessä kuormassa $\tilde{P}_{cr}$.

---

*) kyseessä on tietenkin asymptoottinen tulos, eli $\|e\| \leq Ch^p$ kun $h \to 0$

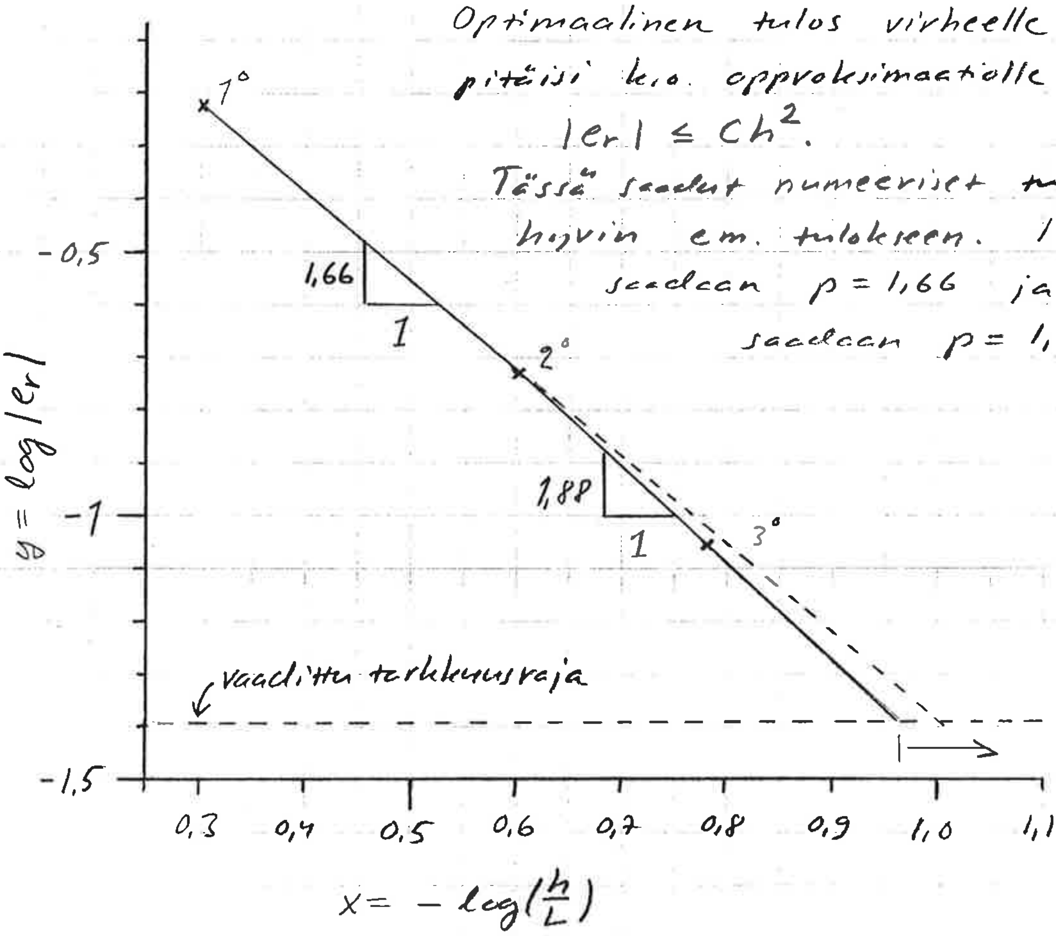
h/L	x $-\log(h/L)$	y $\log\lvert e_r\rvert$	e_r
1/2	0,301	−0,225	0,595
1/4	0,602	−0,724	0,189
1/6	0,778	−1,055	0,088
?	?	−1,398	0,04

← vaadittu tarkkuus 4%

Optimaalinen tulos virheelle $|e_r| = \dfrac{|P_{cr} - \tilde{P}_{cr}|}{|P_{cr}|}$ pitäisi k.o. approksimaatiolle olla

$$|e_r| \leq Ch^2.$$

Tässä saadut numeeriset tulokset yhtyvät hyvin em. tulokseen. 1° & 2° perusteella saadaan $p = 1,66$ ja 2° & 3° perust. saadaan $p = 1,88$ (ks. oheinen kuvio).



vaadittu $y_v = -1,398$ $x_v = ?$ lin. ekstrapolaatio

$$y_v - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_v - x_1) \Rightarrow x_v = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(y_v - y_1)$$

1° & 2° perusteella $x_v = 1,009$ eli $x > x_v \Rightarrow \frac{h}{L} < 10^{-x_v} = 0,098$
$\Rightarrow \sim 10,2$ osaväliä

2° & 3° perusteella $x_v = 0,9604$ eli $x > x_v \Rightarrow \frac{h}{L} < 10^{-x_v} = 0,1096$
$\Rightarrow \sim 9,1$ osaväliä

Edellä esitetyn perusteella voitenee olettaa että $e_r \lessapprox 0,04$ kun sauva jaetaan 9 osaväliin.

Laskettaessa eri hilaväleillä (verkoille) voidaan saaduista datoista ekstrapoloimalla saada hyvin tarkka arvo halutulle suureelle

Sovelletaan aluksi rajalle ekstrapolointia l. Richardson-ekstrapolointia.
Merkitään $P = \lambda EI/L^2$ ja $\bar{h} = \frac{h}{L}$

$\lambda_{00} = 16$ $\quad \bar{h}_0 = \frac{1}{2}$

$\lambda_{10} = 32$ $\quad \bar{h}_1 = \frac{1}{4}$

$\lambda_{20} = 36$ $\quad \bar{h}_2 = \frac{1}{6}$

$$\lambda_{ik} = \lambda_{i,k-1} + \frac{\lambda_{i,k-1} - \lambda_{i-1,k-1}}{\frac{\bar{h}_{i-k}}{\bar{h}_i} - 1}$$

(ks. Numeerinen Matematiikka siv 109)

$$\lambda_{11} = \lambda_{10} + \frac{\lambda_{10} - \lambda_{00}}{\frac{\bar{h}_0}{\bar{h}_1} - 1} = 32 + \frac{32-16}{\frac{1/2}{1/4} - 1} = 48$$

$$\lambda_{21} = \lambda_{20} + \frac{\lambda_{20} - \lambda_{10}}{\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}_2} - 1} = 36 + \frac{36-32}{\frac{1/4}{1/6} - 1} = 44$$

$$\lambda_{22} = \lambda_{21} + \frac{\lambda_{21} - \lambda_{11}}{\frac{\bar{h}_0}{\bar{h}_2} - 1} = 44 + \frac{44-48}{\frac{1/2}{1/6} - 1} = 42$$

$\Rightarrow$ Parannettu arvio kriittiselle kuormalle nyt $P_{cr} = 42 \frac{EI}{L^2}$
(virhe 6,38 %)

Mikäli suppenemisnopeus tiedetään apriori voidaan sitä tietoa käyttää hyväksi.
Jos siis $e_r \sim Ch^p$, jossa $p = 2$ ko differenssimolekyylille, saadaan

$$e_r \sim Ch^p \Rightarrow P \sim P_{cr} + Ch^p$$

$$\Rightarrow \lambda \sim \lambda_{cr} + C\bar{h}^p$$

Jos p tunnetaan ovat C ja λ_{cr} ratkaistavissa kun tunnetaan kaksi lukuparia $(\bar{h}_1, \lambda_1)$ ja $(\bar{h}_2, \lambda_2)$

Siis :
$$\lambda_1 = \lambda_{cr} + c\bar{h}_1^p$$
$$\lambda_2 = \lambda_{cr} + c\bar{h}_2^p$$

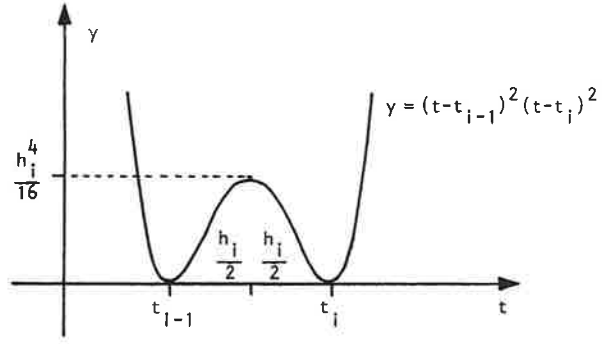
$$\Rightarrow c = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\bar{h}_2^p - \bar{h}_1^p} \quad \Rightarrow \lambda_{cr} = \lambda_2 - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\bar{h}_2^p - \bar{h}_1^p}\bar{h}_2^p$$

Sovelletaan nyt probleemaamme $p=2$ ja

a) $\lambda_1 = 16 \quad \bar{h}_1 = \frac{1}{2}$
$\lambda_2 = 32 \quad \bar{h}_2 = \frac{1}{4}$
$$\Rightarrow \lambda_{cr} = 32 - \frac{32-16}{(\frac{1}{4})^2 - (\frac{1}{2})^2}\left(\frac{1}{4}\right)^2$$
$$= 37\tfrac{1}{3} \quad \text{(virhe 5,44\%)}$$

b) $\lambda_1 = 32 \quad \bar{h}_1 = \frac{1}{4}$
$\lambda_2 = 36 \quad \bar{h}_2 = \frac{1}{6}$
$$\Rightarrow \lambda_{cr} = 36 - \frac{36-32}{(\frac{1}{6})^2 - (\frac{1}{4})^2}\left(\frac{1}{6}\right)^2$$
$$= 39\tfrac{1}{5} \quad \text{(virhe 0,70\%)}$$

sillä $\max|(t-t_{i-1})^2(t-t_i)^2| = \frac{h_i^4}{2^4}$ kuvion 2.5 perusteella.



Kuvio 2.5. Virhefunktion $(t-t_{i-1})^2(t-t_i)^2$ kuvaaja.

Haluttu tulos saadaan kirjoittamalla $|x(t)-u_3(t)| = |x(t)-p_3(t) + p_3(t)-u_3(t)| \leq |x(t)-p_3(t)| + |p_3(t)-u_3(t)|$. Jälkimmäiselle erotukselle saadaan työlään laskun tuloksena arvio

$$|p_3(t)-u_3(t)| \leq \frac{1}{96} h^4 \|x^{(4)}\|_\infty, \text{ joten}$$

$$|x(t)-u_3(t)| \leq \frac{5}{384} h^4 \|x^{(4)}\|_\infty. \tag{2.81}$$

Lisäämällä elementtien lukumäärää saadaan virhe pienenemään ilman hankaluuksia. Virhearvioissa ei myöskään esiinny kovin korkean kertaluvun derivaattoja.

El

2.3.6 RICHARDSONIN EKSTRAPOLOINTI

Yleensä interpoloinnin virhe kasvaa nopeasti suureksi, jos siirrytään välin $[t_0,t_N]$ ulkopuolelle eli käytetään interpoloivaa funktiota *ekstrapolointiin*.

Eräissä tilanteissa ekstrapolointi on kuitenkin tehokasta.

Laskettava suure saattaa riippua parametrista h, esimerkiksi erotusosamäärä

$$D(h) = \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

voidaan muodostaa eri arvoilla h, jos x:n arvot voidaan laskea. Jos laskettavan suureen riippuvuus parametrista on muotoa

$$D(h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \ldots + a_kh^k + R_{k+1}(h) \quad \text{ja}$$

$a_0 = \lim_{h\to 0} D(h)$ on haettu tarkka tulos (jota ei voida suoraan laskea) ja kertoimet a_i ovat h:sta riippumattomia ja jäännöstermi $R_{k+1}(h) = O(h^{k+1})$ kyseeseen tuleville k-arvoille, voidaan eri h_i-arvoilla lasketuista $D(h_i)$-arvoista muodostaa a_0:lle uusi $D(h_i)$-arvoja tarkempi approksimaatio.

Valitaan sopiva laskeva jono h-arvoja $h_0 > h_1 > h_2 > \ldots$. Esimerkiksi $h_i = r^ih_0$. Valinta $r = 1/2$ antaa ns. *Rombergin jonon*. Pyöristysvirheiden vaikutuksen vähentämiseksi ja laskentatyön pienentämiseksi käytetään usein myös ns. *Bulirschin jonoa*, jossa $h_i = \frac{1}{n_i}h_0$, $n_i = 2n_{i-2}$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$.

Kutakin h_i-arvoa kohti lasketaan luku $D_{i0} = D(h_i)$, $i = 0(1)M$. Näin tunnetaan funktiosta $D(h)$ sen arvoja eri argumentin arvoilla. Haettu suure on $D(0) = a_0$. Koska sitä ei voida suoraan laskea, approksimoidaan funktiota D interpolointipolynomilla $\tilde{D}_M(h) = \sum_{i=0}^{M} b_ih^i$, jolle pätee $\tilde{D}_M(h_i) = D_{i0}$. Tämän jälkeen valitaan $\tilde{D}_M(0)$ a_0:n approksimaatioksi.

Ratkaisu suoritetaan Nevillen algoritmin mukaisesti muodostamalla vaiheittain polynomit $\tilde{D}_{ik}$, joille pätee $\tilde{D}_{ik}(h_j) = D_{j0}$, $j = i-k(1)i$ ja etsimällä näiden arvot $D_{ik} = \tilde{D}_{ik}(0)$.

Kun laskenta järjestetään Nevillen algoritmin mukaiseksi kaavioksi, ei itse polynomeja tarvitse lainkaan muodostaa. Algoritmi ja kaavio saavat muodon:

$$D_{i0} = D(h_i), \quad i = 0(1)M$$

$$D_{ik} = D_{i,k-1} + \frac{D_{i,k-1} - D_{i-1,k-1}}{\frac{h_{i-k}}{h_i} - 1}, \quad 1 \leq k \leq i \leq M$$

$$
\begin{array}{lllll}
h_0 & D_{00} & & & \\
h_1 & D_{10} & D_{11} & & \\
h_2 & D_{20} & D_{21} & D_{22} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
h_M & D_{M0} & D_{M1} & D_{M2} & \cdots \; D_{MM}
\end{array}
$$

Taulukon muodostaminen merkitsee itse asiassa kertoimien a_i, $i = 1(1)\ldots$ eliminoimista yhtälöryhmästä

$$D_{00} = a_0 + a_1 h_0 + a_2 h_0^2 + a_3 h_0^3 + \ldots$$
$$D_{10} = a_0 + a_1 h_1 + a_2 h_1^2 + a_3 h_1^3 + \ldots$$
$$D_{20} = a_0 + a_1 h_2 + a_2 h_2^2 + a_3 h_2^3 + \ldots$$
$$\vdots$$

vaiheittain.

Esimerkiksi kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä voidaan ratkaista

$$a_0 = \frac{h_1 D_{00} - h_0 D_{10}}{h_1 - h_0} + a_2 \frac{h_1 h_0^2 - h_0 h_1^2}{h_0 - h_1} + \ldots$$

$$= D_{10} + \frac{D_{10} - D_{00}}{\frac{h_0}{h_1} - 1} + a_2 \frac{h_1 h_0^2 - h_0 h_1^2}{h_0 - h_1} + \ldots = D_{11} + a_2 \frac{h_1 h_0^2 - h_0 h_1^2}{h_0 - h_1} + \ldots .$$

Jos $h_1 = r h_0$, havaitaan, että $D_{11} = a_0 + O(h_0^2)$, kun $D_{00} = a_0 + O(h_0)$. Yleisesti voidaan helposti laskea, että

$$D_{ik} - a_0 = O(h_{i-k}^{k+1}),$$

jos $a_i \neq 0$, $i = 0(1)k+1$. Lisäksi pätee

$$\lim_{i \to \infty} \frac{D_{i,k+1} - a_0}{D_{i,k} - a_0} = 0.$$

Tavallisesti ekstrapolointi keskeytetään, kun M on jokin pieni kokonaisluku (2...4). Ekstrapoloinnin virheelle voidaan johtaa virhekaava Lagrangen interpoloinnin virhekaavan avulla ja käyttää sitä hyväksi ekstrapoloinnin keskeyttämiseen, kun haluttu tarkkuus on saavutettu.

Ekstrapolointia voidaan soveltaa myös, jos $D(h)$:n sarjakehitelmä etenee h^2:n potenssien mukaan (vaikka joka toinen $a_i = 0$) valitsemalla uusi muut-

tuja $z = h^2$, jonka kaikki potenssit ovat mukana sarjassa. Menetelmä on tällöin erikoisen tehokas.

Rationaalinen ekstrapolointi syntyy, kun polynomin sijasta käytetään rationaalifunktiota approksimoimaan $D(h)$:ta.

Esimerkki 2.11. $D(h) = (1+h)^{1/h} = e + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots$, missä vakiot a_i eivät riipu h:sta. Valitaan $h_i = 2^{-i}$, $i = 0(1)3$, jolloin $D(h_i) = D_{i0} = (1 + (0.5)^i)^{2^i}$ ja $\frac{h_{i-k}}{h_i} = 2^k$, joten $D_{ik} = D_{i,k-1} + \frac{D_{i,k-1} - D_{i-1,k-1}}{2^k - 1}$.

Saadaan taulukko

i	D_{i0}	D_{i1}	D_{i2}	D_{i3}
0	2.0000			
1	2.2500	2.5000		
2	2.4414	2.6328	2.6771	
3	2.5658	2.6902	2.7093	2.7093

Oikea likiarvo on $e \approx 2.7183$.

↳ E)

2.3.7 MUIDEN FUNKTIOIDEN KÄYTTÖ

Lineaarisen approksimaation $u(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(t)$ määräämättömät kertoimet $\{c_i\}_1^N$ saadaan lineaarisesta yhtälöryhmästä

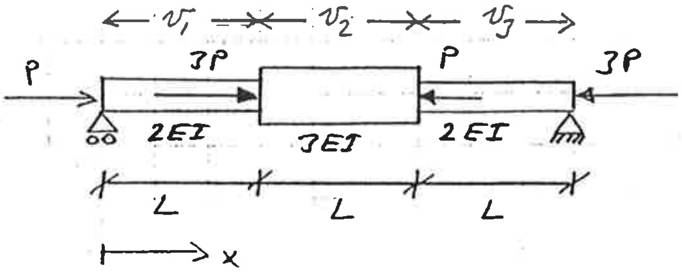
$$\sum_{i=1}^{N} \varphi_i(t_j) c_i = x_j, \quad j = 1(1)N, \tag{2.82}$$

joka on ryhmän (2.1) erikoistapaus. Koska tehtävä on kohdan 2.4 eräs erikoistapaus, kertoimille c_i saadaan toinen ratkaisutapa luvussa 2.4. Erikoisesti *trigonometrinen interpolointi* ratkeaa miellyttävästi.

Interpolointi rationaalifunktioilla palautuu lineaariseksi tehtäväksi, sillä ehtoyhtälöt

$$u(t_j) = \frac{\sum_{i=0}^{N} c_i t_j^i}{1 + \sum_{i=1}^{M} d_i t_j^i} = x_j, \quad j = 0(1)N+M,$$

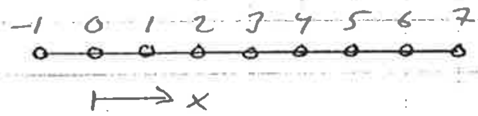
H 2.46



Systeemi :
$$\begin{cases} v_1^{(4)} + k_1^2 v_1'' = 0 & , 0 \le x \le L \\ v_2^{(4)} + k_2^2 v_2'' = 0 & , L \le x \le 2L \\ v_3^{(4)} + k_3^2 v_3'' = 0 & , 2L \le x \le 3L \end{cases} \qquad \begin{aligned} k_1^2 &= \frac{P}{2EI} = \frac{1}{2}k^2 \quad (k = \frac{P}{EI}) \\ k_2^2 &= \frac{4P}{3EI} = \frac{4}{3}k^2 \\ k_3^2 &= \frac{3P}{2EI} = \frac{3}{2}k^2 \end{aligned}$$

Differenssimolekyyli (1)—($\lambda_i - 4$)—($6 - 2\lambda_i$)—($\lambda_i - 4$)—(1) , $\lambda_i = k_i^2 h^2$

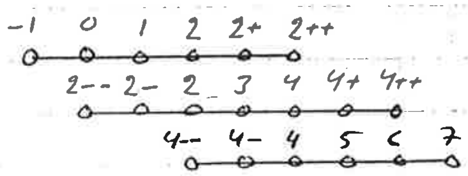
lasketaan hilavälillä $h = \frac{L}{2}$



$\lambda_1 = \frac{1}{2}\lambda$; $\lambda = k^2 h^2$ osalle 1 :

$\lambda_2 = \frac{4}{3}\lambda$ osalle 2 :

$\lambda_3 = \frac{3}{2}\lambda$ osalle 3 :



RE: $v(0) = v(3L) = 0 \Rightarrow v_0 = 0 = v_6$

$v''(0) = v''(3L) = 0 \Rightarrow v_{-1} = -v_1 \wedge v_7 = -v_5$

piste 1: $-v_1 + (6 - 2\lambda_1)v_1 + (\lambda_1 - 4)v_2 + v_{2+} = 0$

$\Rightarrow (5 - \lambda)v_1 + (\frac{1}{2}\lambda - 4)v_2 + v_{2+} = 0$ (1')

v_{2+} ja v_{2-} saadaan lausuttua taipumien v_i avulla, kun otetaan huomioon yht. sop. ehdot $v_1'(L) = v_2'(L)$ ja $EI_1 v_1''(L) = EI_2 v_2''(L)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -v_1 + v_{2+} = -v_{2-} + v_3 \\ 2(v_1 - 2v_2 + v_{2+}) = 3(v_{2-} - 2v_2 + v_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{2-} \\ v_{2+} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 + v_3 \\ -2v_1 - 2v_2 + 3v_3 \end{Bmatrix}$$

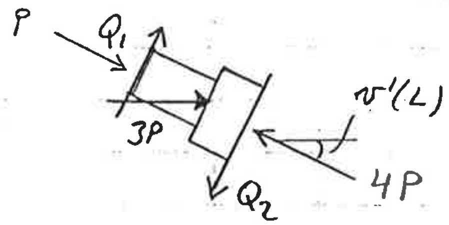
$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} v_{2-} \\ v_{2+} \end{Bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 + v_3 \\ -2v_1 - 2v_2 + 3v_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_{2-} = \frac{1}{5}(4v_1 + 2v_2 - v_3) \\ v_{2+} = \frac{1}{5}(v_1 - 2v_2 + 6v_3) \end{cases}$$

piste 2 : (osalle 1) ∴ $(\frac{1}{2}\lambda - 4)v_1 + (6 - \lambda)v_2 + (\frac{1}{2}\lambda - 4)v_{2+} + v_{2++} = 0$ (2')

piste 2 : (osalle 2) ∴ $v_{2--} + (\frac{4}{3}\lambda - 4)v_{2-} + (6 - \frac{8}{3}\lambda)v_2 + (\frac{4}{3}\lambda - 4)v_3 + v_4 = 0$

$\Rightarrow v_{2--} = (\frac{16}{5} - \frac{16}{15}\lambda)(v_1 + v_3) + (\frac{32}{15}\lambda - \frac{22}{5})v_2 - v_4$

v_{2--} ja v_{2++} voidaan ratkaista taipumien v_i avulla oheisen tasapainoehdon avulla (& edell. yhtälö)



$$Q_1 + 3P v'(L) - Q_2 = 0$$

$$\Rightarrow -EI_1 v_1'''(L) + 3P v_1'(L) = -EI_2 v_2'''(L)$$

$$\Rightarrow 2v_1'''(L) - 3k^2 v_1'(L) = 3v_2'''(L)$$

$$\Rightarrow 2(-v_0 + 2v_1 - 2v_{2+} + v_{2++}) - 3\lambda(-v_1 + v_{2+}) = 3(-v_{2--} + 2v_{2-} - 2v_3 + v_4)$$

$$\Rightarrow 3v_{2--} + 2v_{2++} = (\tfrac{8}{5} - \tfrac{12}{5}\lambda)v_1 + (\tfrac{4}{5} - \tfrac{6}{5}\lambda)v_2 + (-\tfrac{12}{5} + \tfrac{18}{5}\lambda)v_3 + 3v_4$$

$$\Rightarrow v_{2++} = (-4 + \tfrac{6}{15}\lambda)v_1 + (7 - \tfrac{12}{5}\lambda)v_2 + (-6 + \tfrac{57}{15}\lambda)v_3 + 3v_4$$

Nyt saadaan yhtälöstä (2')

$$(\lambda - \tfrac{44}{5})v_1 + (\tfrac{73}{5} - 10\lambda)v_2 + (4\lambda - \tfrac{54}{5})v_3 + 3v_4 = 0 \qquad (2)$$

Ja tietenkin yhtälöstä (1')

$$(\tfrac{26}{5} - \lambda)v_1 + (\tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{22}{5})v_2 + \tfrac{6}{5}v_3 = 0 \qquad (1)$$

piste 3: $\frac{1}{5}(4v_1 + 2v_2 - v_3) + (\frac{4}{3}\lambda - 4)v_2 + (6 - \frac{8}{3}\lambda)v_3 + (\frac{4}{3}\lambda - 4)v_4 + v_{4+} = 0$

Lausutaan v_{4-} ja v_{4+} taipumien v_i avulla, ottamalla huomioon yhteensopivuusehdot $v_2'(2L) = v_3'(2L)$ ja $EI_2 v_2''(2L) = EI_3 v_3''(2L)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -v_3 + v_{4+} = -v_{4-} + v_5 \\ 3(v_3 - 2v_4 + v_{4+}) = 2(v_{4-} - 2v_4 + v_5) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{4-} \\ v_{4+} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_3 + v_5 \\ -3v_3 + 2v_4 + 2v_5 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} v_{4-} \\ v_{4+} \end{Bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3 + v_5 \\ -3v_3 + 2v_4 + 2v_5 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_{4-} = \frac{1}{5}(6v_3 - 2v_4 + v_5) \\ v_{4+} = \frac{1}{5}(-v_3 + 2v_4 + 4v_5) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ diff. yhtälö pisteessä 3 on

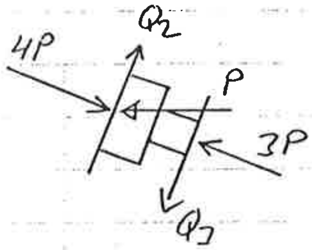
$$\tfrac{4}{5}v_1 + (\tfrac{4}{3}\lambda - \tfrac{18}{5})v_2 + (\tfrac{28}{5} - \tfrac{8}{3}\lambda)v_3 + (\tfrac{4}{3}\lambda - \tfrac{18}{5})v_4 + \tfrac{4}{5}v_5 = 0 \qquad (3)$$

piste 4: (osalle 2) $v_2 + (\frac{4}{3}\lambda - 4) v_3 + (6 - \frac{8}{3}\lambda) v_4 + (\frac{4}{3}\lambda - 4) v_{4+} + v_{4++} = 0$

piste 4: (osalle 3) $v_{4--} + (\frac{3}{2}\lambda - 4) v_{4-} + (6 - 3\lambda) v_4 + (\frac{3}{2}\lambda - 4) v_5 + v_6 = 0$

$$\Rightarrow v_{4--} = (\frac{24}{5} - \frac{9}{5}\lambda) v_3 + (\frac{18}{5}\lambda - \frac{38}{5}) v_4 + (\frac{24}{5} - \frac{9}{5}\lambda) v_5$$

v_{4++} voidaan lausua taipumien v_i avulla tarkastelemalla pisteen 4 tasapainoa oheisen kuvan mukaisesti



$$Q_2 - P v'(2L) - Q_3 = 0$$

$$\Rightarrow -EI_2 v_2'''(2L) - P v_2'(2L) = -EI_3 v_3'''(2L)$$

$$\Rightarrow 3(-v_2 + 2v_3 - 2v_{4+} + v_{4++}) + \lambda(-v_3 + v_{4+}) = 2(-v_{4--} + 2v_{4-} - 2v_5)$$

$$\Rightarrow v_{4++} = v_2 + (\frac{\lambda}{3} - 2) v_3 - \frac{4}{3} v_5 + \frac{4}{3} v_{4-} - (\frac{\lambda}{3} - 2) v_{4+} - \frac{2}{3} v_{4--}$$

$$= v_2 + (\frac{24}{15}\lambda - 4) v_3 + (\frac{16}{3} - \frac{38}{15}\lambda) v_4 + (\frac{11}{15}\lambda - \frac{8}{3}) v_5$$

$\Rightarrow$ differenssilauseke pisteessä 4:

$$2v_2 + (\frac{8}{3}\lambda - \frac{36}{5}) v_3 + (\frac{146}{15} - \frac{14}{3}\lambda) v_4 + (2\lambda - \frac{88}{15}) v_5 = 0 \qquad (4)$$

piste 5: $v_{4-} + (\frac{3}{2}\lambda - 4) v_4 + (6 - 3\lambda) v_5 - v_5 = 0$

$$\Rightarrow \frac{6}{5} v_3 + (\frac{3}{2}\lambda - \frac{22}{5}) v_4 + (\frac{26}{5} - 3\lambda) v_5 = 0 \qquad (5)$$

Kootaan nyt yhtälöt (1) ... (5) matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} \frac{26}{5} - \lambda & \frac{1}{2}\lambda - \frac{22}{5} & \frac{6}{5} & 0 & 0 \\ \lambda - \frac{44}{5} & \frac{73}{5} - 5\lambda & 4\lambda - \frac{57}{5} & 3 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{3}\lambda - \frac{18}{5} & \frac{28}{5} - \frac{8}{3}\lambda & \frac{4}{3}\lambda - \frac{18}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 2 & \frac{8}{3}\lambda - \frac{36}{5} & \frac{146}{15} - \frac{14}{3}\lambda & 2\lambda - \frac{88}{15} \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & \frac{3}{2}\lambda - \frac{22}{5} & \frac{26}{5} - 3\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \bar{0}$$

lyhyesti merkittynä $\underline{K}\bar{v} = \bar{0}$, kriittinen kuormaparametri λ_{cr} saadaan ehdosta $\det \underline{K} = 0$, joka johtaa yleistettyyn ominaisarvoprobleemaan

$$\underline{K}_1 \bar{v} = \lambda \underline{K}_2 \bar{v} \qquad (*)$$

jonka alin ominaisarvo λ_{min} antaa kriittisen kuorman. Nyt

$$\underline{K}_1 = \begin{bmatrix} 26/5 & -22/5 & 6/5 & 0 & 0 \\ -44/5 & 73/5 & -54/5 & 3 & 0 \\ 4/5 & -18/5 & 28/5 & -18/5 & 4/5 \\ 0 & 2 & -36/5 & 146/15 & -88/15 \\ 0 & 0 & 6/5 & -22/5 & 26/5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4/3 & 8/3 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 & 14/3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan ominaisarvotehtävä pienellä ohjelmapätkällä (sivu 7), joka käyttää NAG aliohjelmakirjaston rutiinia FØ2BJF, joka ratkaisee yleistetyn ominaisarvotehtävän reaalisille matriiseille $\underline{K}_1$ ja $\underline{K}_2$.

Alin ominaisarvo $\lambda_{min} = 0,309361 \Rightarrow P_{cr} = 1,2374 \frac{EI}{L^2}$

nurjahdusmuoto l. ominaisarvoa λ_{min} vastaava ominaisvektori

$$\bar{v} = \begin{Bmatrix} 0,262 \\ 0,462 \\ 0.566 \\ 0.535 \\ 0.334 \end{Bmatrix}$$

Differenssimenetelmää voidaan soveltaa myös siten, että jatkuvuus- ja tasapainoehtoja ei huomioida palkin kentässä kohdissa, joissa on taivutusjäykkyyden tai puristavan voiman epäjatkuvuus. Koko palkille käytetään yhtälöä $v^{(4)} + k_i^2 v'' = 0$, jossa k_i:n arvoksi epäjatkuvuuskohdassa käytetään viereisten hilapisteiden keskiarvoa (esim). Hilapisteet voidaan myös valita siten, että ne eivät ole ko. epäjatkuvuuskohdissa.
Oheisen pitkien laskelmien jälkeen tuntuvat nämä tavat paljon järkevämmiltä (= vähemmän työtä).

Ratkaistaan nyt tehtävä em. tavalla käyttäen samaa differenssihilaa.

piste 1: $\lambda_1 = \frac{1}{2}\lambda$
2: $\lambda_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\lambda + \frac{4}{3}\lambda) = \frac{11}{12}\lambda$
3: $\lambda_3 = \frac{4}{3}\lambda$
4: $\lambda_4 = \frac{1}{2}(\frac{4}{3}\lambda + \frac{3}{2}\lambda) = \frac{17}{12}\lambda$
5: $\lambda_5 = \frac{3}{2}\lambda$

Differenssiyhtälöt:

piste 1: $(5-\lambda)v_1 + (\frac{1}{2}\lambda - 4)v_2 + v_3 = 0$

piste 2: $(\frac{11}{12}\lambda - 4)v_1 + (6 - \frac{11}{6}\lambda)v_2 + (\frac{11}{12}\lambda - 4)v_3 + v_4 = 0$

piste 3: $v_1 + (\frac{4}{3}\lambda - 4)v_2 + (6 - \frac{8}{3}\lambda)v_3 + (\frac{4}{3}\lambda - 4)v_4 + v_5 = 0$

piste 4: $v_2 + (\frac{17}{12}\lambda - 4)v_3 + (6 - \frac{17}{6}\lambda)v_4 + (\frac{17}{12}\lambda - 4)v_5 = 0$

piste 5: $v_3 + (\frac{3}{2}\lambda - 4)v_4 + (5 - 3\lambda)v_5 = 0$

Josta saadaan taas ominaisarvoprobleema $\underline{K}_1 \bar{v} = \lambda \underline{K}_2 \bar{v}$

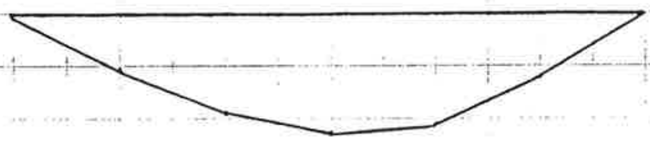
$$\underline{K}_1 = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{12} & 11/6 & -11/12 & 0 & 0 \\ 0 & -4/3 & 8/3 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & -17/12 & 17/6 & -17/12 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & 3 \end{bmatrix}$$

Alin ominaisarvo on $\lambda_{cr} = 0,220265 \Rightarrow P_{cr} = 0,8811 \dfrac{EI}{L^2}$

Ominaisvektori:

$$\bar{v} = \begin{Bmatrix} 0,277 \\ 0.470 \\ 0,578 \\ 0,570 \\ 0,298 \end{Bmatrix}$$



Elementtimenetelmällä, käyttäen koko palkille 30 Timoshenkon palkkielementtiä, saadaan $P_{cr} = 1.232\ EI/L^2$
Tuloksen pitäisi olla tiheästä elementtiverkosta johtuen melko tarkka.