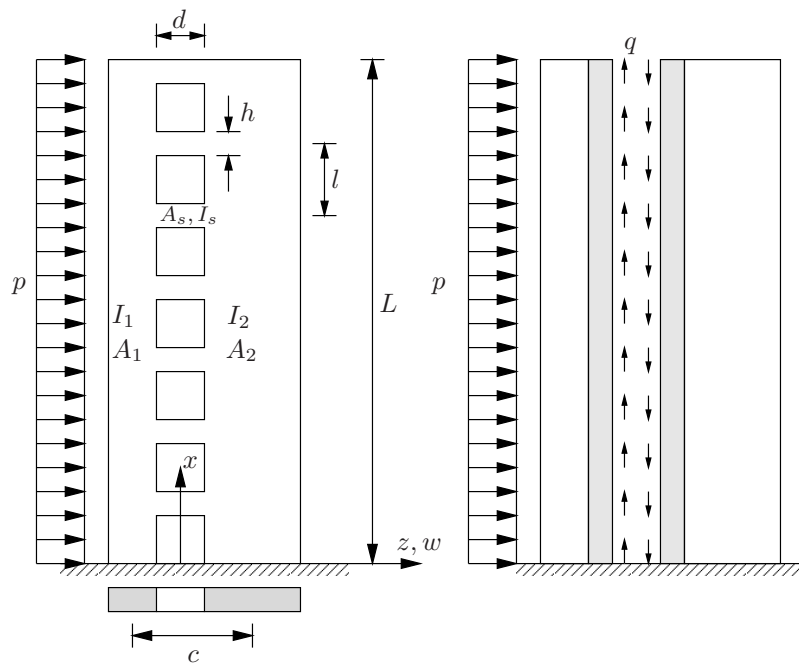


Rakenteiden
mekaniikan
sovellutuksia

luentomoniste

Markku Tuomala



Luku 1

Vaakakuormituksen jakautuminen matalissa rakennuksissa

Vaakakuormituksia rakenteisiin aiheuttavat mm. tuuli ja maanjäristys. Tuulikuorman resultantti voidaan määrittää kaavalla

$$R = p_0 A, \quad (1.1)$$

missä

$$p_0 = C \mu G v^2 \quad (1.2)$$

on tuulen paine, A on tuulipinta, μ on muotokerroin, v on tuulen nopeus, G on puuskerroin ja C on vakio.

Maanjäristyskuorma voidaan määrittää yksinkertaisesti kaavalla

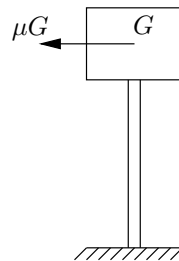
$$R = \mu G, \quad (1.3)$$

missä G on rakennuksen katon massa ja μ on seisminen kerroin, joka on suuruusluokkaa 0.1 – 0.4.

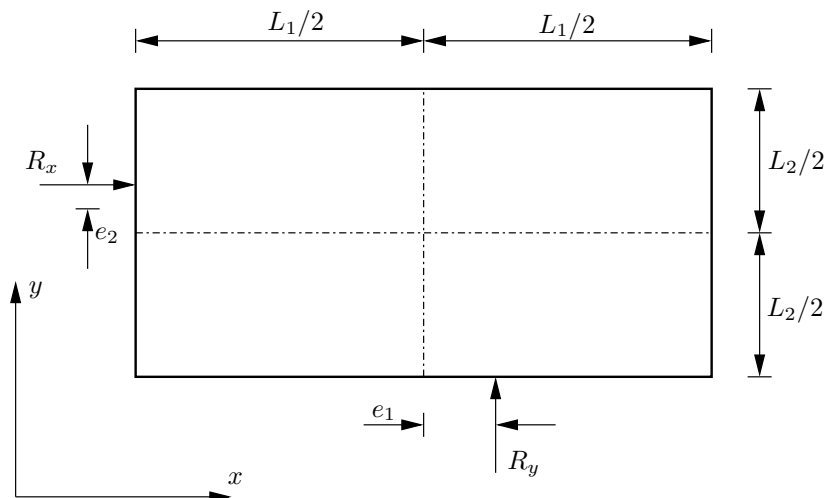
Suunnitteluohjeet edellyttävät usein analysointia epäkeskiselle kuormalle. Tällöin symmetrisenkin rakenne on tutkittava vääntökuormituksen tapauksessa, kuva 1.2.

Kuvan 1.2 epäkeskisyyys on

$$e_1 = \begin{cases} \pm 0.1L_1 & \text{DIN,} \\ \pm 0.05L_1 & \text{USA} \end{cases} \quad \text{ja} \quad e_2 = \begin{cases} \pm 0.1L_2 & \text{DIN,} \\ \pm 0.05L_2 & \text{USA,} \end{cases} \quad (1.4)$$



Kuva 1.1 Maanjäristyskuorma.



Kuva 1.2 Kuorman epäkeskisyys.

missä DIN viittaa Saksan normeihin ja USA vastaavasti USA:n normeihin.

Kuvassa 1.3 on esitetty tukiseinien sijoitteluja. Tapaukset a, b, c ja d ovat huonoja vääntökuormituksen tapauksessa, sijoittelut e ja f ovat parempia.

Kuvassa 1.4 on esitetty kaksikerroksisen rakennuksen toisen kerroksen kehäjäykistyksiä. Kuvan 1.4a jäykistys on huono, mutta kuvien b, c, d ja e kehäjäykistykset ovat vakaita.

Staattisesti määrättyssä tapauksessa tukiseinille tulevat kuormat on helppo määrittää tasapainoehtojen perusteella. Kuvan 1.5 kahden tukiseinän systeemille saadaan tasapainoehdot

$$F_1 + F_2 = R, \quad (1.5)$$

$$0.6LR - F_2L = 0, \quad (1.6)$$

kun kuormaresultantin epäkeskisyys on $e = 0.1L$. Tasapainoyhtälöiden ratkaisu on

$$F_1 = 0.4R, \quad F_2 = 0.6R, \quad (1.7)$$

jonka perusteella seinät mitoitetaan kuormille

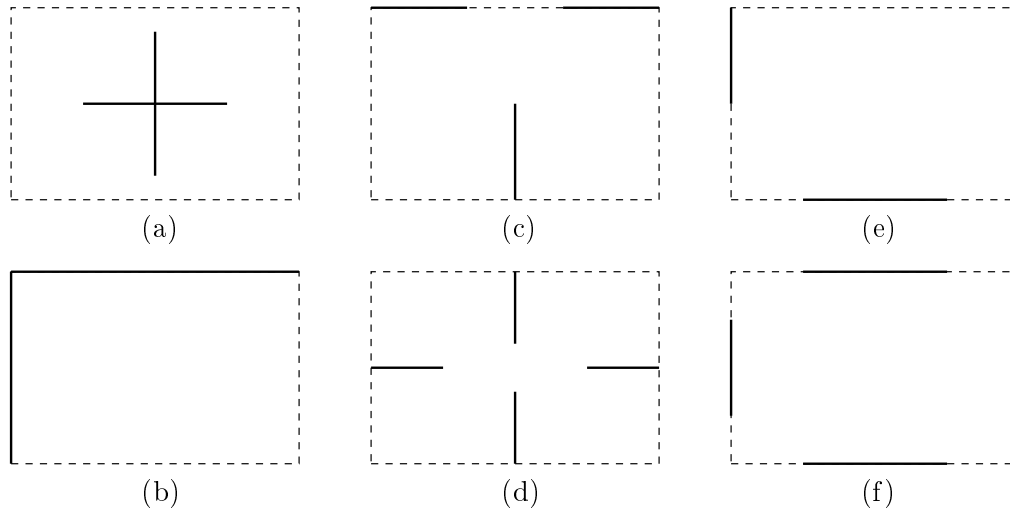
$$F_1 = \pm 0.6R, \quad F_2 = \pm 0.6R. \quad (1.8)$$

Kuvan 1.6 tapauksessa resultantin epäkeskisyudeksi on otettu $0.1L$, ja seinille tulevat kuormat ovat

$$F_1 = F_2 = \frac{0.6a}{b}R \quad \text{ja} \quad F_3 = R, \quad (1.9)$$

missä a ja b ovat rakennuksen pohjan sivumitat.

Staattisesti määräämättömien tukiseinäjärjestelmien tapauksessa on tasapainon lisäksi tutkittava muodonmuutoksia ja yhteensopivuusyhtälöitä.



Kuva 1.3 Tukiseinien sijoittelu.

1.1 Tukiseinäjärjestelmän leikkauskeskiö

Otaksutaan seinän yläpään siirtymän δ aiheutuvan leikkausmuodonmuutoksesta eli liukumasta γ . Tällöin seinän yläpään siirtymä (seinän suuntaan) on

$$\delta = \gamma H = \frac{F}{GA} H, \quad (1.10)$$

missä H on seinän korkeus, GA on seinän leikkausjäykkyys ja F on seinään kohdistuva voima seinän suunnassa (seinän kohtisuorassa suunnassa voima otaksutaan nolaksi).

Otaksutaan lisäksi yläpohjan olevan tasossaan jäykkä levy, jonka siirtymät globaalissa (x, y) -koordinaatistossa ovat u , v ja φ (leikkauskeskiön siirtymät ja kiertymä). Olkoon jäykistysseiniä n kappaletta. Seinän numero k keskipisteen siirtymät ovat leikkauskeskiön siirtymien ja kiertymän avulla lausuttuina

$$\hat{u}_k = u - (y_k - y_v)\varphi, \quad (1.11)$$

$$\hat{v}_k = v + (x_k - x_v)\varphi. \quad (1.12)$$

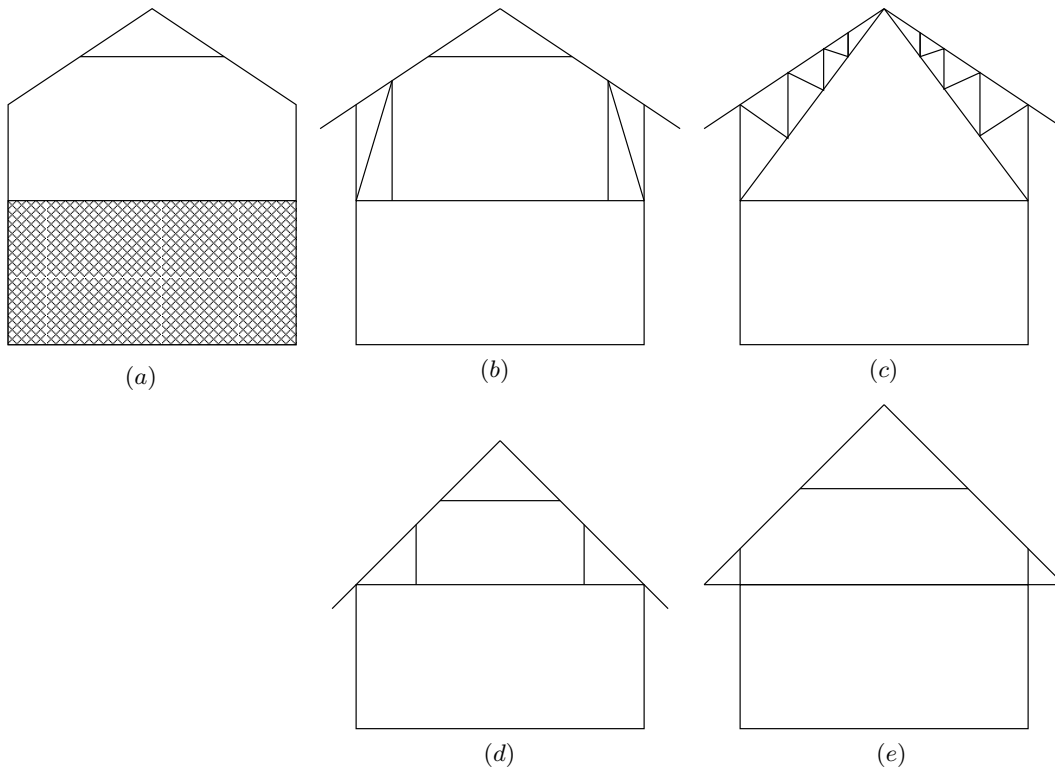
Seinän k suuntainen siirtymä on

$$\begin{aligned} \delta_k &= \hat{u} \cos \alpha_k + \hat{v} \sin \alpha_k \\ &= u \cos \alpha_k + v \sin \alpha_k + [(x_k - x_v) \sin \alpha_k - (y_k - y_v) \cos \alpha_k] \varphi \\ &= u \cos \alpha_k + v \sin \alpha_k + r_k \varphi, \end{aligned} \quad (1.13)$$

jossa

$$r_k = (x_k - x_v) \sin \alpha_k - (y_k - y_v) \cos \alpha_k \quad (1.14)$$

on kohtisuora etäisyys leikkauskeskiöstä.



Kuva 1.4 Kehäjäykistystä.

Projisoimalla seinävoimat x :n ja y :n suunnille saadaan tasapainoehdot

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_k \cos \alpha_k, \quad (1.15)$$

$$R_y = \sum_{k=1}^n F_k \sin \alpha_k. \quad (1.16)$$

Muodostamalla seinävoimien momentti pisteen V suhteen kolmanneksi tasapainoyhtälöksi tulee

$$M_v = \sum_{k=1}^n [(x_k - x_v)F_k \sin \alpha_k - (y_k - y_v)F_k \cos \alpha_k] = \sum_{k=1}^n F_k r_k, \quad (1.17)$$

jossa r_k on kohtisuora etäisyys leikkauskeskiöstä seinän k tangentille.

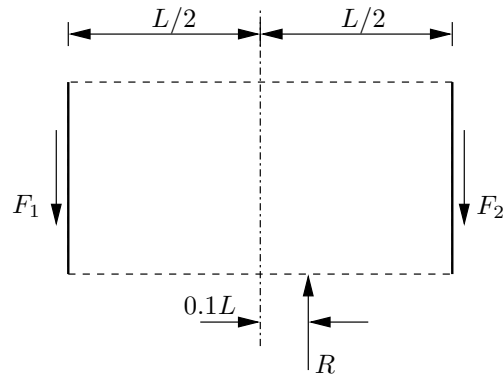
Leikkauskeskiön (vääntökeskiön) määritelmän mukaan puhdas rotaatio vääntökeskiön V ympäri ei aiheuta resultantteja R_x , R_y .

Seinävoima on

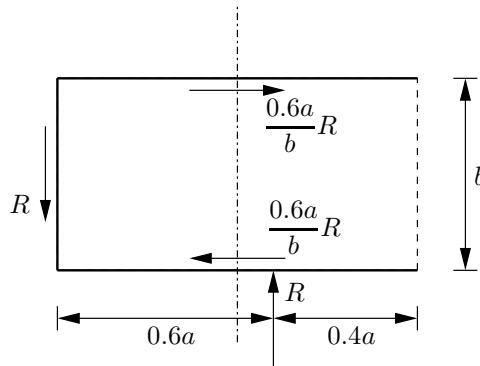
$$F_k = \frac{GA_k}{H} \delta_k. \quad (1.18)$$

Seinän suuntaisen siirtymän ja seinävoiman kaavojen avulla tasapainoehdot saadaan kirjoitettua muotoon

$$u \sum_{k=1}^n \frac{GA_k}{H} \cos^2 \alpha_k + v \sum_{k=1}^n \frac{GA_k}{H} \sin \alpha_k \cos \alpha_k + \varphi \sum_{k=1}^n \frac{GA_k}{H} r_k \cos \alpha_k = R_x, \quad (1.19)$$



Kuva 1.5 Staattisesti määrätty tuenta.



Kuva 1.6 Kolmen tukiseinän systeemi, kuorman epäkeskisyyys $0.1L$.

$$u \sum_{k=1}^n \frac{GA_k}{H} \sin \alpha_k \cos \alpha_k + v \sum_{k=1}^n \frac{GA_k}{H} \sin^2 \alpha_k + \varphi \sum_{k=1}^n \frac{GA_k}{H} r_k \sin \alpha_k = R_y \quad (1.20)$$

ja

$$u \sum_{k=1}^n \frac{GA_k}{H} r_k \cos \alpha_k + v \sum_{k=1}^n \frac{GA_k}{H} r_k \sin \alpha_k + \varphi \sum_{k=1}^n \frac{GA_k}{H} r_k^2 = M_v. \quad (1.21)$$

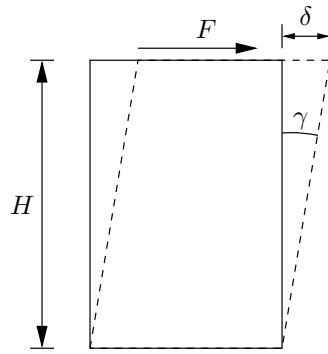
Kahdessa ensimmäisessä tasapainoehdossa puhdas rotaatio, ($u = 0, v = 0, \varphi \neq 0$), ei aiheuta resultantteja R_x ja R_y , jos kiertymän φ kertoimet niissä ovat nollia eli jos

$$\sum_{k=1}^n \frac{GA_k}{H} r_k \cos \alpha_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n \frac{GA_k}{H} r_k \sin \alpha_k = 0. \quad (1.22)$$

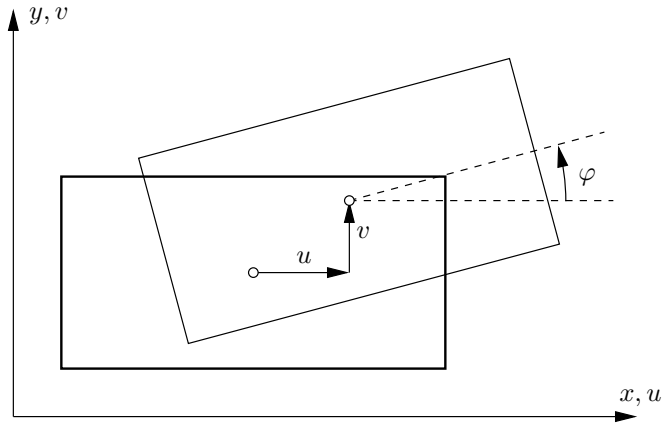
Sijoittamalla näihin ehtoihin kohtisuoran etäisyyden, r_k , kaava saadaan yhtälöt

$$\left(\sum_{k=1}^n GA_k \sin^2 \alpha_k \right) x_v - \left(\sum_{i=1}^n GA_k \cos \alpha_k \sin \alpha_k \right) y_v = \sum_{i=1}^n GA_k [x_k \sin^2 \alpha_k - y_k \cos \alpha_k \sin \alpha_k], \quad (1.23)$$

$$\left(- \sum_{k=1}^n GA_k \sin \alpha_k \cos \alpha_k \right) x_v + \left(\sum_{i=1}^n GA_k \cos^2 \alpha_k \right) y_v = \sum_{i=1}^n GA_k [-x_k \sin \alpha_k \cos \alpha_k + y_k \cos^2 \alpha_k], \quad (1.24)$$



Kuva 1.7 Tukiseinän liukuma.



Kuva 1.8 Yläpohjan siirtymävapausasteet.

joista ratkaistaan vääntökeskiön asema (x_v, y_v) .

Samoihin vääntökeskiön määrittäviin yhtälöihin päädytään asettamalla kolmannessa tasapainoyhtälössä translaatioiden u ja v kertoimet nolliksi. Tällöin puhdas translaatio, ($u \neq 0, v \neq 0, \varphi = 0$), ei aiheuta vääntömomenttia M_v .

Jos seinät ovat x - tai y -akseleiden suuntaiset, niin vääntökeskiön määrittävät kaavat yksinkertaistuvat muotoon

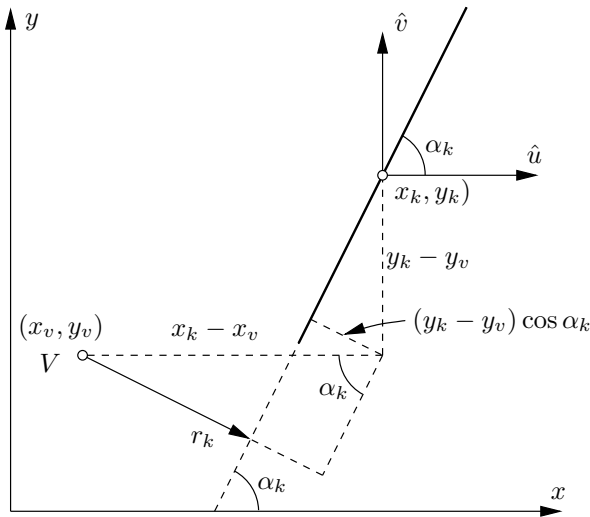
$$x_v = \frac{\sum_{k=1}^t x_k G A_k}{\sum_{k=1}^t G A_k}, \quad y_v = \frac{\sum_{l=t+1}^n y_l G A_l}{\sum_{l=t+1}^n G A_l}, \quad (1.25)$$

missä seinät $k = 1, \dots, t$ ovat y -akselin suuntaiset ja seinät $l = t + 1, \dots, n$ ovat x -akselin suuntaiset.

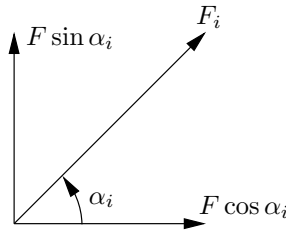
1.2 Kuormituksen jakautuminen seinille

Ulkoisen kuorman aiheuttama vääntömomentti on

$$M_v = R_y(x_0 - x_v) - R_x(y_0 - y_v), \quad (1.26)$$



Kuva 1.9 Tukiseinän kohtisuora etäisyys leikkauskeskiöstä.



Kuva 1.10 Tukiseinän voiman F_i komponentit.

missä (x_0, y_0) on kuorman vaikutuspiste.

Ottamalla huomioon vääntökeskiön määrittelevät yhtälöt, (kahdessa ensimmäisessä φ :n kertoimet ja kolmannessa u :n ja v :n kertoimet ovat nollia),

$$\sum_{k=1}^n \frac{GA_k}{H} r_k \cos \alpha_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n \frac{GA_k}{H} r_k \sin \alpha_k = 0 \quad (1.27)$$

tasapainoehtoiksi tulee

$$u \sum_{k=1}^n \frac{GA_k}{H} \cos^2 \alpha_k + v \sum_{k=1}^n \frac{GA_k}{H} \sin \alpha_k \cos \alpha_k = R_x, \quad (1.28)$$

$$u \sum_{k=1}^n \frac{GA_k}{H} \sin \alpha_k \cos \alpha_k + v \sum_{k=1}^n \frac{GA_k}{H} \sin^2 \alpha_k = R_y \quad (1.29)$$

ja

$$\varphi \sum_{k=1}^n \frac{GA_k}{H} r_k^2 = M_v. \quad (1.30)$$

Kahden ensimmäisen yhtälön avulla siirtymille u ja v saadaan ratkaisut

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n GA_k \sin^2 \alpha_k & - \sum_{k=1}^n GA_k \sin \alpha_k \cos \alpha_k \\ - \sum_{k=1}^n GA_k \sin \alpha_k \cos \alpha_k & \sum_{k=1}^n GA_k \cos^2 \alpha_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} HR_x \\ HR_y \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

missä on merkitty

$$\det = \left(\sum_{k=1}^n GA_k \cos^2 \alpha_k \right) \left(\sum_{k=1}^n GA_k \sin^2 \alpha_k \right) - \left(\sum_{k=1}^n GA_k \sin \alpha_k \cos \alpha_k \right)^2, \quad (1.32)$$

ja kolmannesta (väntökeskiön suhteen lausutusta) tasapainoehdosta ratkaistaan kiertymälle φ

$$\varphi = \frac{H}{\sum_{k=1}^n GA_k r_k^2} M_v. \quad (1.33)$$

Levyn i suuntainen siirtymä on

$$\delta_i = u \cos \alpha_i + v \sin \alpha_i + \varphi r_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.34)$$

ja levyn i voima on

$$F_i = \frac{GA_i}{H} \delta_i, \quad (1.35)$$

eli

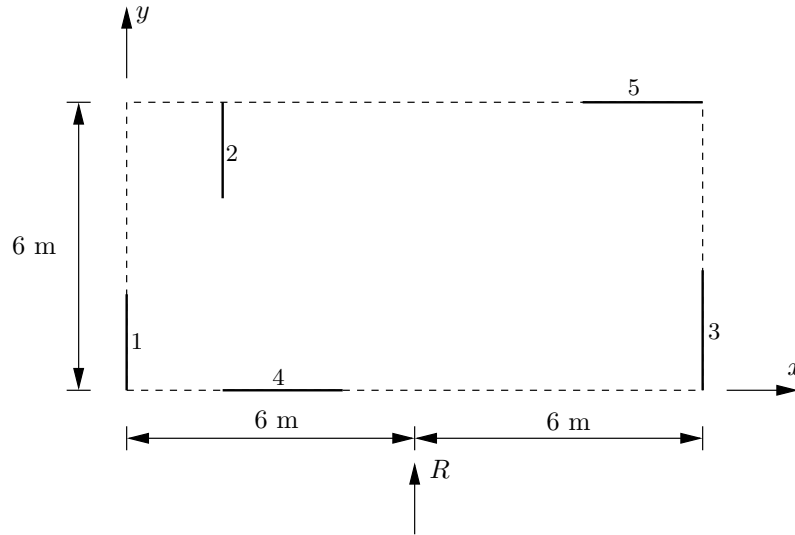
$$\begin{aligned} F_i = GA_i \frac{1}{\det} & \left(\cos \alpha_i \left(\sum_{k=1}^n GA_k \sin^2 \alpha_k - \sin \alpha_i \sum_{k=1}^n GA_k \sin \alpha_k \cos \alpha_k \right) R_x \right. \\ & + GA_i \frac{1}{\det} \left(- \cos \alpha_i \sum_{k=1}^n GA_k \sin \alpha_k \cos \alpha_k + \sin \alpha_i \sum_{k=1}^n GA_k \cos^2 \alpha_k \right) R_y \\ & \left. + \frac{r_i GA_i}{\sum_{k=1}^n GA_k r_k^2} M_v. \right) \quad (1.36) \end{aligned}$$

Jos kaikki seinät ovat x - tai y -akseleiden suuntaisia, niin resultanttien, (voimien ja momentin), R_x , R_y ja M_v osuudet seinävoimiin F_i voidaan jakaa osiin

$$F_j^{R_x} = \frac{GA_j}{\sum_{k=t+1}^n GA_k} R_x, \quad j = t+1, \dots, n \quad (x : n \text{ suuntaan}), \quad (1.37)$$

$$F_i^{R_y} = \frac{GA_i}{\sum_{k=1}^t GA_k} R_y, \quad i = 1, \dots, t \quad (y : n \text{ suuntaan}), \quad (1.38)$$

$$F_j^M = - \frac{(y_j - y_v) GA_j}{\sum_{k=1}^n GA_k r_k^2} M_v, \quad j = t+1, \dots, n \quad (x : n \text{ suuntaiset seinät}), \quad (1.39)$$



Kuva 1.11 Viiden tukiseinän järjestelmä.

Taulukko 1.1 Viiden tukiseinän systeemi.

	x_k	GA_k	$x_k GA_k$	y_j	GA_j	$y_j GA_j$	$F_k^{R_y}$	$F_k^{R_x}$	F_k^M	F_k
1	0	2	0				4.44		-1.53	2.91
2	2	4	8				8.89		-1.81	7.08
3	12	3	36				6.67		3.34	10.01
4				0	3	0		0	1.62	1.62
5				6	4	24		0	-1.61	-1.61
Σ		9	44		7	24				

$$F_i^M = \frac{(x_i - x_v)GA_i}{\sum_{k=1}^n GA_k r_k^2} M_v, \quad i = 1, \dots, t \quad (y : n \text{ suuntaiset seinät}), \quad (1.40)$$

missä

$$\sum_{k=1}^n GA_k r_k^2 = \sum_{k=1}^t GA_k (x_k - x_v)^2 + \sum_{k=t+1}^n GA_k (y_k - y_v)^2. \quad (1.41)$$

Esimerkki 1.1 Määritetään kuvan 1.11 tukiseinien voimat.

Esimerkin tapauksessa seinät $i = 1, \dots, 3$ ovat y :n suuntaiset ja seinät $j = 4, 5$ ovat x :n suuntaiset. Kootaan laskelmat taulukkoon 1.1.

Kuormaresultantit ovat

$$R_x = 0, \quad R_y = 20, \quad (1.42)$$

ja epäkeskisyydet huomioonottaen resultanttien vaikutuskohta on

$$x_0 = 6 + 1.2, \quad y_0 = 3 - 0.6. \quad (1.43)$$

Lasketaan sitten taulukon tiedoilla summat

$$\sum_{k=1}^3 x_k GA_k = 44, \quad \sum_{l=4}^5 y_l GA_l = 24 \quad (1.44)$$

y -akselin ja x -akselin suuntaisille seinille. Koska kaikki seinät ovat nyt joko x - tai y -akselin suuntaisia, vääntökeskiön paikka ratkeaa yksinkertaisemmista kaavoista (1.25) ja tuloksena saadaan

$$x_v = \frac{44}{9} \approx 4.89, \quad y_v = \frac{24}{7} \approx 3.43. \quad (1.45)$$

Kun vääntökeskiön paikka on tiedossa, niin voidaan laskea kuormaresultantin aiheuttama vääntömomentti

$$M_v = 20 \cdot (7.2 - 4.89) = 46.2, \quad (1.46)$$

jossa on otettu huomioon kuorman otaksuttu epäkeskisyys.

Lasketaan vielä seinän 1 seinävoimat kuormista R_y ja M_v :

$$F_1^{R_y} = \frac{2}{9} \cdot 20 = 4.44, \quad (1.47)$$

$$F_1^M = \frac{(x_1 - x_v)GA_1M_v}{\sum_{k=1}^5 GA_k r_k^2} \quad (1.48)$$

$$= \frac{-4.89 \cdot 2 \cdot 46.2}{2 \cdot 4.89^2 + 4 \cdot 2.89^2 + 3 \cdot 7.11^2 + 3 \cdot 3.43^2 + 4 \cdot 2.57^2} \approx -1.53.$$

Seinien voimat on esitetty taulukossa 1.1

Esitys perustuu kirjoitukseen [Heinisuo, 1985], jossa on myös esitetty enemmän sunnittelemiin liittyviä asioita.

Luku 2

Vaakakuormituksen jakautuminen korkeissa rakennuksissa

Tarkastellaan jaksollisia kehärakenteita, joiden pilarit ovat läpimeneviä massiivisia tai levymäisiä paarteita (tai näiden yhdistelmiä). Poikkisiteet tai välitasot otaksutaan taipuisiksi mutta venymättömiksi. Paarteiden (pilareiden) painopisteiden siirtymät akselin z suunnassa otaksutaan nolliksi eli $u_z = 0$.

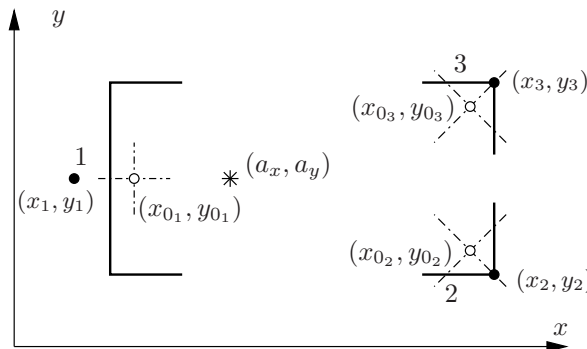
Koska poikkisiteet ovat venymättömiä, poikkileikkaus säilyttää muotonsa ja sillä on kolme siirtymävapausastetta. Siirtymät poikkisiteen kohdalla korkeudella z ovat siten

$$u_x = v_x - \varphi(y - a_y), \quad (2.1)$$

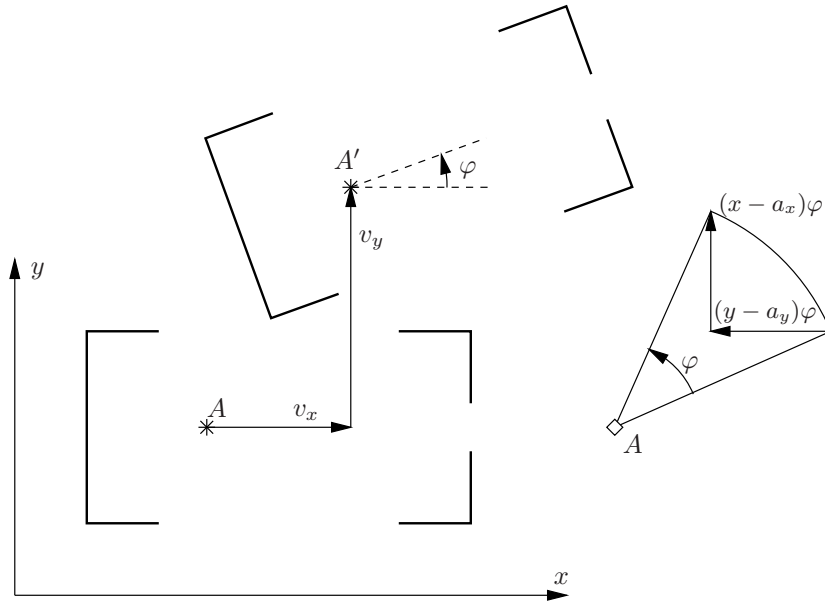
$$u_y = v_y + \varphi(x - a_x), \quad (2.2)$$

missä $A := (a_x, a_y)$ on poikkileikkauksen vääntökeskiö, (joka seuraavassa yritetään määrittää), v_x , v_y ja φ ovat poikkileikkauksen jäykän kappaleen liikkeen vapausasteet (vääntökeskiön translaatiot ja kiertymä vääntökeskiön ympäri), u_x ja u_y ovat poikkileikkauksen mielivaltaisen pisteen (x, y) siirtymät. Kaavojen (2.1) ja (2.2) avulla voidaan nyt määrittää paarteen i leikkauskeskiön (vääntökeskiön) (x_i, y_i) siirtymät tason z kohdalla:

$$v_{x_i}(z) = v_x(z) - \varphi(z)(y_i - a_y), \quad (2.3)$$



Kuva 2.1 Vääntökeskiö (a_x, a_y) , seinien i vääntökeskiöt (x_i, y_i) ja painopisteet (x_{0_i}, y_{0_i}) .



Kuva 2.2 Poikkileikkauksen vapausasteet v_x , v_y ja φ .

$$v_{y_i}(z) = v_y(z) + \varphi(z)(x_i - a_x). \quad (2.4)$$

Paarteen mielivaltaisen pisteen (x, y) siirtymät ovat edellä olevien kaavojen perusteella

$$u_{x_i}(x, y, z) = v_{x_i}(z) - \varphi(z)(y - y_i), \quad (2.5)$$

$$u_{y_i}(x, y, z) = v_{y_i}(z) + \varphi(z)(x - x_i), \quad (2.6)$$

$$u_{z_i}(x, y, z) = -v'_{y_i}(z)(y - y_{0_i}) - v'_{x_i}(z)(x - x_{0_i}) - \varphi'(z)\omega_i(x, y), \quad (2.7)$$

missä (x_{0_i}, y_{0_i}) on paarteen i painopiste ja koordinaatista z riippuvan funktion $f(z)$ derivaatta on

$$f'(z) \equiv \frac{df(z)}{dz}. \quad (2.8)$$

Sijoittamalla paarteen i leikkauskeskiön siirtymien kaavat aksiaalisen siirtymän lausekkeeseen tulee

$$u_{z_i}(x, y, z) = -[v'_y + \varphi'(x_i - a_x)](y - y_{0_i}) - [v'_x - \varphi'(y_i - a_y)](x - x_{0_i}) - \varphi'\omega_i(x, y) \quad (2.9)$$

eli

$$u_{z_i}(x, y) = -v'_y(y - y_{0_i}) - v'_x(x - x_{0_i}) - \varphi'\bar{\omega}_i, \quad (2.10)$$

missä on otettu käyttöön merkintä

$$\bar{\omega}_i(x, y) = (y - y_{0_i})(x_i - a_x) - (x - x_{0_i})(y_i - a_y) + \omega_i(x, y). \quad (2.11)$$

Paarteen i venymä on

$$\varepsilon_{z_i}(x, y, z) = u'_{z_i}(x, y, z), \quad (2.12)$$

ja paarteen aksiaalinen jännitys on

$$\sigma_{z_i} = E\varepsilon_{z_i} = E[-v''_y(y - y_{0_i}) - v''_x(x - x_{0_i}) - \varphi''\bar{\omega}_i]. \quad (2.13)$$

Normaalijännityksen avulla lausutaan koko poikkileikkauksen (kaikki paarteet mukaan) resultantit

$$M_y = - \sum_{i=1}^n \int_{A_i} (x - x_{0_i}) \sigma_{z_i} dA, \quad (2.14)$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} (y - y_{0_i}) \sigma_{z_i} dA, \quad (2.15)$$

$$B = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \bar{\omega}_i \sigma_{z_i} dA, \quad (2.16)$$

eli taivutusmomentit ja bimomentti. Sijoittamalla normaalijännityksen kaava resultanttien lausekkeisiin saadaan

$$M_y = E \left\{ \left(\sum_{i=1}^n I_{y_i} \right) v_x'' + \left(\sum_{i=1}^n I_{xy_i} \right) v_y'' + \left[\sum_{i=1}^n (x_i - a_x) I_{xy_i} - \sum_{i=1}^n (y_i - a_y) I_{y_i} \right] \varphi'' \right\}, \quad (2.17)$$

$$M_x = -E \left\{ \left(\sum_{i=1}^n I_{xy_i} \right) v_x'' + \left(\sum_{i=1}^n I_{x_i} \right) v_y'' + \left[\sum_{i=1}^n (x_i - a_x) I_{x_i} - \sum_{i=1}^n (y_i - a_y) I_{xy_i} \right] \varphi'' \right\}, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} B = & -E \left\{ \left[\sum_{i=1}^n (x_i - a_x) I_{xy_i} - \sum_{i=1}^n (y_i - a_y) I_{y_i} \right] v_x'' + \left[\sum_{i=1}^n (x_i - a_x) I_{x_i} - \sum_{i=1}^n (y_i - a_y) I_{xy_i} \right] v_y'' \right. \\ & \left. + \left[\sum_{i=1}^n (x_i - a_x)^2 I_{x_i} + \sum_{i=1}^n (y_i - a_y)^2 I_{y_i} - 2 \sum_{i=1}^n (x_i - a_x)(y_i - a_y) I_{xy_i} + \sum_{i=1}^n I_{\omega_i} \right] \varphi'' \right\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Bimomentin kaavan johdossa on otettu huomioon yksittäisen paarteen vääntökeskiön määrittävät kaavat

$$\int_{A_i} (x - x_{0_i}) \omega_i dA = \int_{A_i} (y - y_{0_i}) \omega_i dA = \int_{A_i} \omega_i dA = 0. \quad (2.20)$$

Taivutusmomenttien ja bimomentin kaavoissa olevat paarteiden poikkipintasuureet ovat

$$I_{x_i} = \int_{A_i} (y - y_{0_i})^2 dA, \quad (2.21)$$

$$I_{y_i} = \int_{A_i} (x - x_{0_i})^2 dA, \quad (2.22)$$

$$I_{xy_i} = \int_{A_i} (x - x_{0_i})(y - y_{0_i}) dA, \quad (2.23)$$

$$I_{\omega_i} = \int_{A_i} \omega_i^2 dA. \quad (2.24)$$

Vääntökeskiön asema saadaan ratkaistua ehdosta, että puhdas rotaatio ($v_x = v_y = 0$) ei aiheuta momenteja M_x ja M_y . Asettamalla vääntökulman toisen derivaatan kertoimet momenttien kaavoissa nolliksi saadaan kaksi lineaarista yhtälöä

$$\begin{bmatrix} \sum I_{x_i} & -\sum I_{xy_i} \\ -\sum I_{xy_i} & \sum I_{y_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i I_{x_i} - \sum y_i I_{xy_i} \\ -\sum x_i I_{xy_i} + \sum y_i I_{y_i} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

joista ratkaistaan vääntökeskiön asema poikkileikkauksessa. Jos kaikille paarteille pätee

$$I_{xy_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.26)$$

niin vääntökeskiö voidaan määrittää yksinkertaisemmista kaavoista

$$a_x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i I_{x_i}}{\sum_{i=1}^n I_{x_i}}, \quad a_y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i I_{y_i}}{\sum_{i=1}^n I_{y_i}}. \quad (2.27)$$

Kun koko poikkileikkauksen vääntökeskiö on tiedossa, niin taivutusmomenttien ja bimomentin ja niitä vastaavien muodonmuutossuureiden väliset yhtälöt hieman yksinkertaistuvat muotoon

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_x \\ B \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \sum I_{y_i} & \sum I_{xy_i} & 0 \\ -\sum I_{xy_i} & -\sum I_{x_i} & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{I}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x'' \\ v_y'' \\ \varphi'' \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

missä on merkitty

$$\bar{I}_\omega = \sum_{i=1}^n (x_i - a_x)^2 I_{x_i} + \sum_{i=1}^n (y_i - a_y)^2 I_{y_i} - 2 \sum_{i=1}^n (x_i - a_x)(y_i - a_y) I_{xy_i} + \sum_{i=1}^n I_{\omega_i}. \quad (2.29)$$

Muodonmuutossuureet momenttien avulla lausuttuina ovat

$$\begin{bmatrix} v_x'' \\ v_y'' \\ \varphi'' \end{bmatrix} = \frac{1}{ED} \begin{bmatrix} \sum I_{x_i} & \sum I_{xy_i} & 0 \\ -\sum I_{xy_i} & -\sum I_{y_i} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{D}{\bar{I}_\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_y \\ M_x \\ B \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

missä on merkitty

$$D = (\sum I_{x_i})(\sum I_{y_i}) - (\sum I_{xy_i})^2. \quad (2.31)$$

Paarteen i normaaliännitys on

$$\sigma_{z_i} = \frac{(\sum I_{y_i})M_x + (\sum I_{xy_i})M_y}{D}(y - y_{0_i}) - \frac{(\sum I_{x_i})M_y + (\sum I_{xy_i})M_x}{D}(x - x_{0_i}) + \frac{B}{\bar{I}_\omega}\bar{\omega}_i. \quad (2.32)$$

Jos osasauvojen pääakselit ovat yhdensuuntaiset ja x ja y ovat pääakselit, niin $I_{xy_i} = 0$ ja jännityksen kaava yksinkertaistuu muotoon

$$\sigma_{z_i} = \frac{M_x}{\sum I_{x_i}}(y - y_{0_i}) - \frac{M_y}{\sum I_{y_i}}(x - x_{0_i}) + \frac{B}{\bar{I}_\omega}\bar{\omega}_i. \quad (2.33)$$

Määritetään seuraavaksi paarteiden taivutusmomentit

$$M_{x_i} = \int_{A_i} \sigma_{z_i} (y - y_{0_i}) dA, \quad (2.34)$$

$$M_{y_i} = - \int_{A_i} \sigma_{z_i} (x - x_{0_i}) dA \quad (2.35)$$

ja bimomentti

$$B_i = \int_{A_i} \omega_i \sigma_{z_i} dA. \quad (2.36)$$

Sijoittamalla paarteiden taivutusmomenttien kaavoihin normaalijännityksen σ_{z_i} lauseke päädytään kaavoihin

$$M_{x_i} = \frac{(\sum I_{xy_i})I_{x_i} - (\sum I_{x_i})I_{xy_i}}{D} M_y + \frac{(\sum I_{y_i})I_{x_i} - (\sum I_{xy_i})I_{xy_i}}{D} M_x + \frac{I_{x_i}(x_i - a_x) - I_{xy_i}(y_i - a_y)}{\bar{I}_\omega} B, \quad (2.37)$$

$$M_{y_i} = \frac{(\sum I_{x_i})I_{y_i} - (\sum I_{xy_i})I_{xy_i}}{D} M_y + \frac{(\sum I_{xy_i})I_{y_i} - (\sum I_{y_i})I_{xy_i}}{D} M_x + \frac{I_{y_i}(y_i - a_y) - I_{xy_i}(x_i - a_x)}{\bar{I}_\omega} B, \quad (2.38)$$

ja

$$B_i = \frac{I_{\omega_i}}{\bar{I}_\omega} B. \quad (2.39)$$

Jos paarteiden pääakselit ovat x :n ja y :n suuntaiset, niin $I_{xy_i} = 0$ ja tällöin paarremomenttien kaavat tulevat muotoon

$$M_{x_i} = \frac{I_{x_i}}{\sum I_{x_i}} M_x + \frac{I_{x_i}(x_i - a_x)}{\bar{I}_\omega} B, \quad (2.40)$$

$$M_{y_i} = \frac{I_{y_i}}{\sum I_{y_i}} M_y + \frac{I_{y_i}(y_i - a_y)}{\bar{I}_\omega} B, \quad (2.41)$$

$$B_i = \frac{I_{\omega_i}}{\bar{I}_\omega} B. \quad (2.42)$$

Leikkausvoimien momentti vääntökeskiön suhteen on

$$M_{zs} = \sum_{i=1}^n Q_{y_i}(x_i - a_x) - \sum_{i=1}^n Q_{x_i}(y_i - a_y) + \sum_{i=1}^n B'_i, \quad (2.43)$$

missä paarteen i bimomentti on

$$B_i = -EI_{\omega_i} \varphi''. \quad (2.44)$$

Ottamalla huomioon tasapainoehdot

$$Q_{y_i} = M'_{x_i}, \quad Q_{x_i} = -M'_{y_i} \quad (2.45)$$

saadaan

$$M_{zs} = \sum_{i=1}^n M'_{x_i}(x_i - a_x) + \sum_{i=1}^n M'_{y_i}(y_i - a_y) + \sum_{i=1}^n B'_i. \quad (2.46)$$

Jos kaikkien paarteiden pääakselit yhtyvät x :n ja y :n suuntiin, niin

$$\begin{aligned} M_{zs} &= \frac{\sum I_{x_i}(x_i - a_x)}{\sum I_{x_i}} M'_x + \frac{\sum I_{y_i}(y_i - a_y)}{\sum I_{y_i}} M'_y \\ &+ \frac{\sum [I_{x_i}(x_i - a_x)^2 + I_{y_i}(y_i - a_y)^2]}{\bar{I}_\omega} B' + \frac{\sum I_{\omega i}}{\bar{I}_\omega} B' \\ &= \frac{\bar{I}_\omega}{\bar{I}_\omega} B' = B'. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Vääntömomentin M_{zs} kaksi ensimmäistä termiä ovat nollia vääntökeskiön määrittely-yhtälöiden perusteella, ja kolmannessa termissä on käytetty hyväksi poikkileikkauksen käyrästymisjäyhyyden kaavaa. Samalla tavalla käsitellään tapaus, jossa jonkin tai joidenkin paarteiden pääakselit eivät yhdy x :n ja y :n suuntiin.

Kokonaisvääntömomentti on

$$M_z = M_{zs} + M_{zv}, \quad (2.48)$$

missä M_{zv} on Saint Venantin väännön osuus.

Momenttien tasapainoyhtälöt ovat

$$M''_x = -p_y, \quad (2.49)$$

$$M''_y = p_x, \quad (2.50)$$

$$M'_z = -m, \quad (2.51)$$

missä p_y ja p_x ovat y - ja x -akselin suuntaiset jakautuneet kuormat ja m on jakautunut vääntömomenttikuorma.

Lausumalla momentit siirtymäsuureiden avulla saadaan pääakselistossa tasapainoyhtälöt muotoon

$$\left(\sum_{i=1}^n EI_{y_i} \right) v_x^{(4)} = p_x, \quad (2.52)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n EI_{x_i} \right) v_y^{(4)} = p_y, \quad (2.53)$$

$$E\bar{I}_\omega \varphi^{(4)} - G\bar{I}_v \varphi^{(2)} = m, \quad (2.54)$$

missä on merkitty

$$\bar{I}_v = \sum_{i=1}^n I_{v_i}. \quad (2.55)$$

Merkitsemällä

$$\bar{k} = \sqrt{\frac{G\bar{I}_v}{E\bar{I}_\omega}} \quad (2.56)$$

väännön differentiaaliyhtälöksi tulee

$$\varphi^{(4)} - \bar{k}^2 \varphi^{(2)} = \frac{m}{E\bar{I}_\omega} \quad (2.57)$$

tai bimomentin avulla lausuttuna

$$B^{(2)} - \bar{k}^2 B = -m. \quad (2.58)$$

Jälkimmäistä muotoa voidaan käyttää staattisesti määrityssä tapauksessa.

Väännön differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$\varphi(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh \bar{k}z + C_4 \cosh \bar{k}z + \varphi_0, \quad (2.59)$$

missä φ_0 on yksityisratkaisu. Tasaisen vääntömomenttikuorman, $m(z) = m_0$, tapauksessa

$$\varphi_0 = -\frac{m_0}{2G\bar{I}_v} z^2. \quad (2.60)$$

Ulokepalkin tyven reunaehdot ovat

$$\varphi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_4 = 0, \quad (2.61)$$

$$\varphi'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 + \bar{k}C_3 = 0. \quad (2.62)$$

Vääntömomentti on nyt

$$\begin{aligned} M_z &= M_{zv} + M_{zs} \\ &= G\bar{I}_v \varphi' - E\bar{I}_\omega \varphi''' = G\bar{I}_v C_2 - m_0 z. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Poikkileikkauksen bimomentti on

$$B = -E\bar{I}_\omega \varphi'' = -E\bar{I}_\omega \left(\bar{k}^2 C_3 \sinh \bar{k}z + \bar{k}^2 C_4 \cosh \bar{k}z - \frac{m_0}{G\bar{I}_v} \right). \quad (2.64)$$

Koska

$$G\bar{I}_v = \bar{k}^2 E\bar{I}_\omega, \quad (2.65)$$

saadaan

$$B = -G\bar{I}_v (C_3 \sinh \bar{k}z + C_4 \cosh \bar{k}z) + \frac{m_0}{\bar{k}^2}. \quad (2.66)$$

Reunaehdosta

$$M_z(L) = 0 \quad (2.67)$$

seuraa

$$C_2 = \frac{m_0 L}{G\bar{I}_v} \quad (2.68)$$

ja vääntymän reunaehdosta saadaan

$$C_3 = -\frac{m_0 L}{\bar{k} G\bar{I}_v}. \quad (2.69)$$

Bimomentin reunaehdosta

$$B(L) = 0 \quad (2.70)$$

seuraa

$$-G\bar{I}_v C_3 \sinh \bar{k}L - G\bar{I}_v C_4 \cosh \bar{k}L + \frac{m_0}{\bar{k}^2} = 0, \quad (2.71)$$

josta saadaan ratkaistua

$$C_4 = \frac{m_0 L}{\bar{k} G \bar{I}_v} \tanh \bar{k}L + \frac{m_0}{\bar{k}^2 G \bar{I}_v \cosh \bar{k}L}. \quad (2.72)$$

Bimomentin lausekkeeksi tulee

$$B(z) = \frac{m_0}{\bar{k}^2} \left\{ \bar{k}L \sinh \bar{k}z - \frac{\bar{k}L \sinh \bar{k}L + 1}{\cosh \bar{k}L} \cosh \bar{k}z + 1 \right\}. \quad (2.73)$$

Bimomentti tyvessä on

$$B(0) = \frac{m_0}{\bar{k}^2} \left\{ 1 - \frac{\bar{k}L \sinh \bar{k}L + 1}{\cosh \bar{k}L} \right\}. \quad (2.74)$$

Leikkausvoiman laskussa tarvittava bimomentin derivaatta on

$$B'(z) = \frac{m_0}{\bar{k}} \left\{ \bar{k}L \cosh \bar{k}z - \frac{\bar{k}L \sinh \bar{k}L + 1}{\cosh \bar{k}L} \sinh \bar{k}z \right\} \quad (2.75)$$

ja tyvellä

$$B'(0) = m_0 L. \quad (2.76)$$

Huipulla vaikuttavan pistekuorman tapausta käsitellään seuraavassa esimerkissä.

Differentiaaliyhtälön

$$B^{(2)} - \bar{k}^2 B = -m \quad (2.77)$$

ratkaisu on tasaisen vääntömomenttikuorman tapauksessa

$$B(z) = C_1 \sinh \bar{k}z + C_2 \cosh \bar{k}z + \frac{m_0}{\bar{k}^2}. \quad (2.78)$$

Tyvellä $M_z(0) = m_0 L$, $M_v(0) = G\bar{I}_v \varphi'(0) = 0$, joten

$$M_z(0) = M_\omega(0) + M_v(0) = B'(0) = m_0 L. \quad (2.79)$$

Bimomentin derivaatta on

$$M_\omega = B' = C_1 \bar{k} \cosh \bar{k}z + C_2 \bar{k} \sinh \bar{k}z, \quad (2.80)$$

ja reunaehdosta $B'(0) = m_0 L$ seuraa

$$C_1 = \frac{m_0 L}{\bar{k}}. \quad (2.81)$$

Reunaehdosta

$$B(L) = C_1 \sinh \bar{k}L + \cosh \bar{k}L + \frac{m_0}{\bar{k}^2} = 0 \quad (2.82)$$

seuraa

$$C_2 = -\frac{m_0 L}{\bar{k}} \tanh \bar{k}L - \frac{m_0}{\bar{k}^2 \cosh \bar{k}L}, \quad (2.83)$$

ja bimomentin lausekkeeksi tulee kuten edellä

$$B(z) = \frac{m_0}{\bar{k}^2} \left\{ \bar{k}L \sinh \bar{k}z - \frac{\bar{k}L \sinh \bar{k}L + 1}{\cosh \bar{k}L} \cosh \bar{k}z + 1 \right\}. \quad (2.84)$$

Jos parametri $\bar{k}L$ on pieni, niin voidaan hyvällä tarkkuudella käyttää yksinkertaistettua differentiaaliyhtälöä

$$B'' = -m, \quad (2.85)$$

josta integroidaan tasaisen kuorman tapauksessa

$$B' = -m_0z + C, \quad B = -m_0 \frac{z^2}{2} + Cz + D. \quad (2.86)$$

Reunaehtojen

$$B(L) = 0, \quad B'(0) = m_0L \quad (2.87)$$

perusteella

$$C = m_0L, \quad D = -\frac{1}{2}m_0L^2. \quad (2.88)$$

Bimomentin lausekkeeksi tulee

$$B(z) = -\frac{1}{2}m_0(z - L)^2 \quad (2.89)$$

ja

$$B(0) = -\frac{1}{2}m_0L^2. \quad (2.90)$$

Bimomentin derivaatta on

$$B'(z) = -m_0(z - L) \quad (2.91)$$

ja

$$B'(0) = m_0L. \quad (2.92)$$

Huipulla vaikuttavan pistevääntömomentin M tapauksessa

$$B(z) = -M(L - z) \quad (2.93)$$

ja

$$B'(z) = M. \quad (2.94)$$

Tyvellä $z = 0$

$$B(0) = -ML, \quad \text{ja} \quad B'(0) = M. \quad (2.95)$$

Huipulla vaikuttavasta x :n suuntaisesta pistekuormasta P_x aiheutuu taivutusmomentti

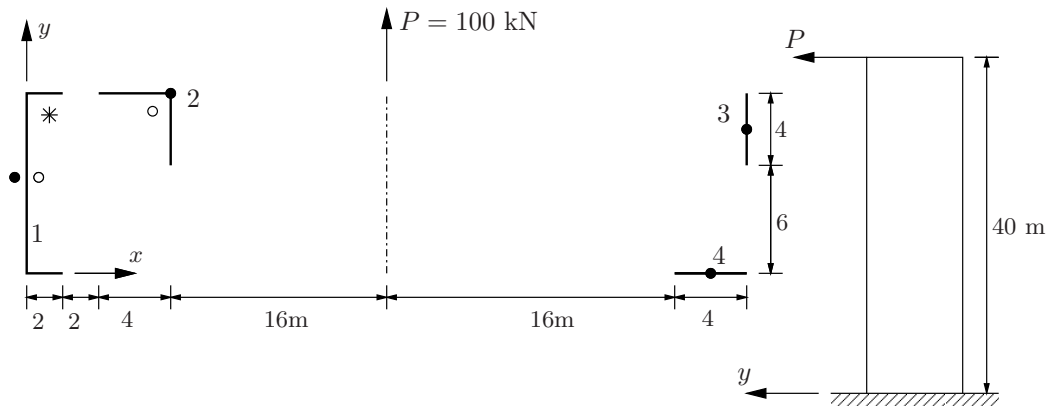
$$M_y(z) = P_x(L - z) \quad (2.96)$$

ja leikkausvoima

$$Q_x = -\frac{dM_y}{dz} = P_x. \quad (2.97)$$

Vastaavasti y :n suuntaisesta pistekuormasta P_y aiheutuu taivutusmomentti

$$M_x(z) = -P_y(L - z) \quad (2.98)$$



Kuva 2.3 Kerrostalon poikkileikkaus.

ja leikkausvoima

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz} = P_y. \quad (2.99)$$

Tasaisen x :n suuntaisen kuorman $p_x = \text{vakio}$ tapauksessa syntyy ulokkeeseen momentti (y :n ympäri)

$$M_y(z) = \frac{1}{2}p_x(L - z)^2 \quad (2.100)$$

ja leikkausvoima

$$Q_x = -\frac{dM_y}{dz} = p_x(L - z). \quad (2.101)$$

Vastaavasti y :n suuntaisesta vakiokuormasta p_y aiheutuu

$$M_x(z) = -\frac{1}{2}p_y(L - z)^2 \quad (2.102)$$

ja leikkausvoima

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz} = p_y(L - z). \quad (2.103)$$

Esimerkki 2.1 Määritetään voimien jakautuminen kuvan 2.3 kerrostalon poikkileikkauksen tukiseinille.

Kuvan 2.3 rakennuksen tukiseinien paksuus on 0.3 m. Kuorma $P = 100$ kN vaikuttaa globaalisen y -akselin suuntaan keskellä rakennuksen huipulla, $z = 40$ m. Tässä tapauksessa pistekuormalla on korvattu maanjäristyskuormitus.

Vääntökeskiön paikka määritetään yhtälöistä

$$\begin{bmatrix} \sum I_{x_i} & -\sum I_{xy_i} \\ -\sum I_{xy_i} & \sum I_{y_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i I_{x_i} - \sum y_i I_{xy_i} \\ -\sum x_i I_{xy_i} + \sum y_i I_{y_i} \end{bmatrix}. \quad (2.104)$$

Määritetään ensin yksittäisten profiilien vääntökeskiöt, painopisteet ja poikkileikkauksuureet ja kootaan saadut tulokset taulukoihin 2.1 ja 2.2.

Vääntökeskiön asema ratkaistaan yhtälöryhmästä

$$\begin{bmatrix} 54.19 & 2.13 \\ 2.13 & 6.22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75.58 + 20.98 \\ 16.72 + 40.73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96.56 \\ 57.45 \end{bmatrix}, \quad (2.105)$$

Taulukko 2.1 Poikkileikkaussuureita.

i	x_i	y_i	I_{x_i}	I_{y_i}	I_{xy_i}	I_v	I_{ω_i}
1	-0.34	5.00	49.00	1.03		0.1206	18.536
2	7.85	9.85	3.58	3.58	-2.13	0.0693	0.086
3	39.85	8.00	1.60	0.01		0.0343	0
4	38.00	0.15	0.01	1.60		0.0343	0
Σ			54.19	6.22	-2.13	0.2585	18.62

Taulukko 2.2 Poikkileikkaussuureita.

i	$x_i I_{x_i}$	$y_i I_{y_i}$	$x_i I_{xy_i}$	$y_i I_{xy_i}$
1	-16.66	5.15		
2	28.10	35.26	-16.72	-20.98
3	63.76	0.08		
4	0.38	0.24		
Σ	75.58	40.73	-16.72	-20.98

josta seuraa

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \frac{1}{332.52} \begin{bmatrix} 6.22 & -2.13 \\ -2.13 & 54.19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 96.56 \\ 57.45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.438 \\ 8.744 \end{bmatrix}. \quad (2.106)$$

Lasketaan kaksi kuormitustapausta: (a) pistekuorma P vaikuttaa vääntökeskiön kautta ja (b) väännön osuus.

a) Pistevoima P vaikuttaa vääntökeskiön $x = 1.438$ m ja $y = 8.744$ m kautta
Pistekuorman aiheuttamat taivutusmomentit ovat

$$M_x = P(z - L), \quad M_y = 0, \quad (2.107)$$

ja niitä vastaavat leikkausvoimat ovat

$$Q_y = P, \quad Q_x = 0. \quad (2.108)$$

Paarteiden taivutusmomenttien kaavoissa ainoastaan M_x on nyt nolasta eriävä. Tällöin saadaan

$$M_{x_i}^t = \frac{(\sum I_{y_i})I_{x_i} - (\sum I_{xy_i})I_{xy_i}}{D} P(z - H), \quad (2.109)$$

$$M_{y_i}^t = \frac{(\sum I_{xy_i})I_{y_i} - (\sum I_{y_i})I_{xy_i}}{D} P(z - H), \quad (2.110)$$

joissa t tarkoittaa taivutuskuormaa, momentti $M_x = P(z - H)$ ja

$$D = (\sum I_{x_i})(\sum I_{y_i}) - (\sum I_{xy_i})^2. \quad (2.111)$$

Esimerkin tapauksessa $D = 332.52$ ja $P = 100$ kN. Kootaan jälleen parremomenttien ja leikkausvoimien laskelmat taulukkoon 2.3.

b) Väännön osuus

Vääntökuormituksen tapauksessa tarvitaan koko poikkileikkauksen käyrästymisjäyhyys

$$\bar{I}_{\omega} = \sum_{i=1}^n (x_i - a_x)^2 I_{x_i} + \sum_{i=1}^n (y_i - a_y)^2 I_{y_i} - 2 \sum_{i=1}^n (x_i - a_x)(y_i - a_y) I_{xy_i} + \sum_{i=1}^n I_{\omega_i}. \quad (2.112)$$

Taulukko 2.3 Momentit ja leikkausvoimat, $z = 0$.

	$I_{x_i} \sum I_{y_i}$	$I_{y_i} \sum I_{x y_i}$	$I_{x y_i} \sum I_{y_i}$	$I_{x y_i} \sum I_{x y_i}$	$M_{y_i}^t$	$M_{x_i}^t$	$Q_{x_i}^t$	$Q_{y_i}^t$
1	304.78	-2.19	0	0	26.32	-3666.6	0.658	91.66
2	22.27	-7.62	-13.25	4.537	-67.72	-213.2	-1.693	5.33
3	9.95	-0.02	0	0	0.24	-119.6	0.006	2.99
4	0.06	-3.41	0	0	41	-0.8	1.025	0.02
\sum							0.00	100

Taulukko 2.4 Vääntöön liittyviä poikkileikkaussuureita.

i	$x_i - a_x$	$y_i - a_y$	$(y_i - a_y)^2 I_{y_i}$	$(x_i - a_x)^2 I_{x_i}$	$-2(x_i - a_x)(y_i - a_y) I_{x y_i}$
1	-1.78	-3.74	14.407	155.252	0
2	6.41	1.11	4.411	147.095	30.31
3	38.41	-0.74	0.006	2360.525	0
4	36.56	-8.59	118.061	13.366	0
\sum			136.885	2676.238	30.31

Suoritetaan tarvittavat laskelmat taulukossa 2.4.

Taulukon 2.4 laskelmien perusteella tulee

$$\bar{I}_\omega = 18.62 + 2843.433 = 2862.053, \quad (2.113)$$

$$\bar{k} = \sqrt{\frac{G\bar{I}_v}{E\bar{I}_\omega}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{0.2585}{2862.053}} \approx 0.00672, \quad (2.114)$$

$$\bar{k}L \approx 0.2688. \quad (2.115)$$

Vääntökuormitustapauksen vääntömomentti on

$$M_z = Pe = 100 \text{ kN} \cdot 18.56 \text{ m} = 1856 \text{ kNm}. \quad (2.116)$$

Väännön differentiaaliyhtälön

$$\varphi^{(4)} - \bar{k}^2 \varphi^{(2)} = \frac{m}{E\bar{I}_\omega} \quad (2.117)$$

ratkaisu on

$$\varphi(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh \bar{k}z + C_4 \cosh \bar{k}z + \varphi_0, \quad (2.118)$$

missä φ_0 on yksityisratkaisu. Esimerkin tapauksessa on ratkaistavana ulokepalkki, jonka päässä vaikuttaa pistevääntömomentti.

Palkin reunaehdot ovat

$$M_z(L) = Pe, \quad (2.119)$$

$$B(L) = 0, \quad (2.120)$$

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_4 = 0, \quad (2.121)$$

$$\varphi'(0) = 0 \Rightarrow C_2 + \bar{k}C_3 = 0. \quad (2.122)$$

Poikkileikkauksen bimomentti on

$$B = -E\bar{I}_\omega \varphi'' = -E\bar{I}_\omega (\bar{k}^2 C_3 \sinh \bar{k}z + \bar{k}^2 C_4 \cosh \bar{k}z). \quad (2.123)$$

Koska

$$G\bar{I}_v = \bar{k}^2 E\bar{I}_\omega, \quad (2.124)$$

saadaan

$$B = -G\bar{I}_v(C_3 \sinh \bar{k}z + C_4 \cosh \bar{k}z). \quad (2.125)$$

Vääntömomentti on

$$\begin{aligned} M_z &= M_{zv} + M_{zs} \\ &= G\bar{I}_v \varphi' - E\bar{I}_\omega \varphi''' = G\bar{I}_v C_2. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Reunaehdosta

$$M_z(L) = Pe \equiv M \quad (2.127)$$

seuraa

$$G\bar{I}_v C_2 = M \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{M}{G\bar{I}_v}. \quad (2.128)$$

Reunaehdosta

$$B(L) = 0 \quad (2.129)$$

seuraa

$$C_3 \sinh \bar{k}L + C_4 \cosh \bar{k}L = 0, \quad (2.130)$$

ja vääntymän reunaehdosta seuraavan yhtälön

$$C_3 = -\frac{C_2}{\bar{k}} = -\frac{M}{\bar{k}G\bar{I}_v} \quad (2.131)$$

perusteella tulee

$$C_4 = -\frac{\sinh \bar{k}L}{\cosh \bar{k}L} C_3 = \frac{\sinh \bar{k}L}{\bar{k}G\bar{I}_v \cosh \bar{k}L} M. \quad (2.132)$$

Vääntökulman reunaehdon perusteella

$$C_1 = -C_4. \quad (2.133)$$

Bimomentin lausekkeeksi tulee

$$B(z) = \frac{M}{\bar{k}} \left\{ \sinh \bar{k}z - \frac{\sinh \bar{k}L}{\cosh \bar{k}L} \cosh \bar{k}z \right\}. \quad (2.134)$$

Bimomentti tyvessä on

$$B(0) = -\frac{M}{\bar{k}} \frac{\sinh \bar{k}L}{\cosh \bar{k}L} = -\frac{M}{\bar{k}} \tanh \bar{k}L = -\frac{1856}{0.00672} \cdot 0.2625 = -72500. \quad (2.135)$$

Kun bimomentti on ratkaistu, niin sen avulla saadaan lausuttua väännöstä aiheutuvat paarremomentit

$$M_{x_i}^v = \frac{I_{x_i}(x_i - a_x) - I_{xy_i}(y_i - a_y)}{\bar{I}_\omega} B, \quad (2.136)$$

$$M_{y_i}^v = \frac{I_{y_i}(y_i - a_y) - I_{xy_i}(x_i - a_x)}{\bar{I}_\omega} B, \quad (2.137)$$

joissa indeksi v viittaa vääntöön.

Taulukossa 2.5 on laskettu paarremomenttien arvot tasolla $z = 0$ eli tyvessä, jossa

$$\frac{B(0)}{\bar{I}_\omega} = -\frac{72500}{2862} \approx -25.44. \quad (2.138)$$

Taulukko 2.5 Taivutusmomentit

i	$(x_i - a_x)I_{x_i}$	$(y_i - a_y)I_{y_i}$	$(x_i - a_x)I_{xy_i}$	$(y_i - a_y)I_{xy_i}$	$M_{y_i}^v$	$M_{x_i}^v$
1	-87.22	-3.86	0	0	98.2	2218.9
2	22.95	3.94	-13.65	-2.343	-447.5	-643.5
3	61.46	-0.0075	0	0	0.2	-1563.5
4	0.37	-13.76	0	0	350	-9.4

Taulukko 2.6 Momentit ja leikkausvoimat

i	M_{x_i}	M_{y_i}	$Q_{x_i}^v$	$Q_{y_i}^v$	Q_{x_i}	Q_{y_i}
1	124.5	-1447.7	2.503	-56.56	3.161	35.1
2	-515.2	-856.7	-11.407	16.40	-13.10	21.73
3	0.4	-1683.1	0.005	39.86	0.01	42.85
4	391	-10.2	8.923	0.24	9.95	0.26

Paarteiden leikkausvoimien laskussa tarvittava bimomentin derivaatta on

$$B'(z) = M \left\{ \cosh \bar{k}z - \frac{\sinh \bar{k}L}{\cosh \bar{k}L} \sinh \bar{k}z \right\}. \quad (2.139)$$

Tyvessä

$$B'(0) = M \approx 1856 \text{ kNm} \quad \text{ja} \quad \frac{M}{I_\omega} \approx 0.6485 \frac{\text{kN}}{\text{m}^5}. \quad (2.140)$$

Paarteiden leikkausvoimat vääntökuormasta (indeksi v) ja yhteensä taivutus- ja vääntökuormasta on laskettu taulukkoon 2.6.

Luku 3

Poikkisitein jäykistetyin sauvan vääntö

3.1 Poikkisitein jäykistetty U-profilii

Tarkastellaan esimerkkinä U-profilia, johon on hitsattu säännöllisin välimatkoin poikkittaisia jäykisteitä. Profilin poikkileikkauksen muodon otaksutaan säilyvän deformaation aikana, jolloin poikkileikkauksella on kolme vapausastetta: vääntökeskiön siirtymät ja kiertymä vääntökeskiön ympäri. Ohuseinämaisten sauvojen teorian mukaisesti otaksutaan lisäksi, että leikkausmuodonmuutos seinämän keskipinnalla on nolla eli

$$\gamma_{zs}(s, z) = 0, \quad (3.1)$$

kun z on sauvan akseli ja s on profilia vastapäivään kiertävä koordinaatti.

Leikataan siteet auki keskikohdasta. Koska poikkileikkauksen muodon otaksutaan säilyvän deformaation aikana, siteeseen ei synny normaalivoimaa. Siteen keskikohdassa siteen taivutusmomentti on nolla siteen jäykän kiinnityksen ansiosta. Siten leikkausvoimat X_i ovat ainoat tuntemattomat, staattisesti määräämättömät suureet siteen aukileikkaukskohdassa. Tuntemattomat voimat, X_i :t, ratkaistaan yhteensopivuusehdoista: siirtymäero siteen keskikohdassa on nolla.

Profilin väännöstä aiheutuva z -akselin suuntainen siirtymä on

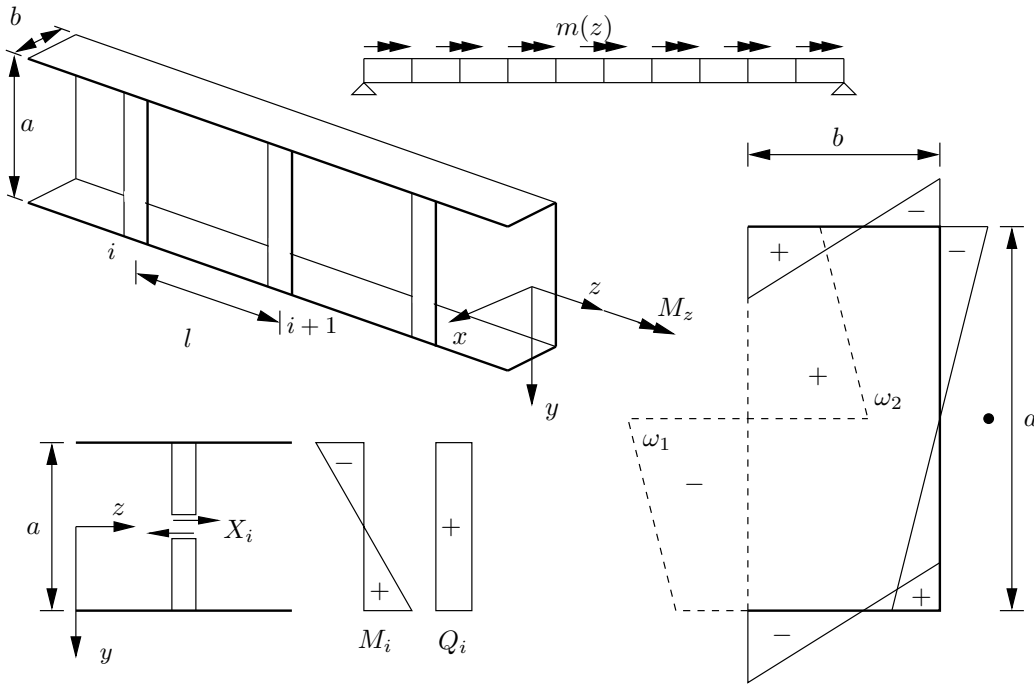
$$w(s, z) = -\omega(s)\varphi'(z). \quad (3.2)$$

Kuvan 3.1 perusteella pisteiden 1 ja 2 välinen väännöstä (kuormituksesta) aiheutuva siirtymäero, kun $X_i = 0$, on

$$\delta_{i0} = w_2 - w_1 = -(\omega_2 - \omega_1)\varphi' = -2\Omega\varphi', \quad (3.3)$$

koska

$$\omega_2 - \omega_1 = \int_1^2 d\omega = 2\Omega = 2ab. \quad (3.4)$$



Kuva 3.1 Poikkisiteiden jäykistämä sauva.

Siteen leikkausvoima $X_k = 1$ aiheuttaa siirtymäeron δ_{ik} kohdassa i . Poikkisiteen taipumasta aiheutuu siteeseen k siirtymäero

$$\delta_{kk}^a = 2 \left[\frac{1}{3EI_s} \left(\frac{a}{2} \right)^3 + \frac{\zeta}{GA_s} \left(\frac{a}{2} \right) \right] = \frac{a^3}{12EI_s} + \frac{a\zeta}{GA_s}. \quad (3.5)$$

Kaavassa (3.5) on otettu huomioon leikkausvoiman osuus siteen taipumaan, ja ζ on siteen poikkileikkauksen siirtymäkerroin (suorakaiteelle $\zeta = 1.2$).

Poikkileikkaustasossa vaikuttavat palkin akselin suuntaiset pistevoimat aiheuttavat bimomentin $B = \sum P_i \omega_i$. Poikkisiteessä vaikuttavat voimat $X_k = 1$ aiheuttavat vaikutuskohdassa bimomentin

$$B_k = -1\omega_1 + 1\omega_2 = \omega_2 - \omega_1 = 2\Omega. \quad (3.6)$$

Pistebimomentti B_k aiheuttaa staattisesti määrättyyn perusmuotoon siirtymäeron

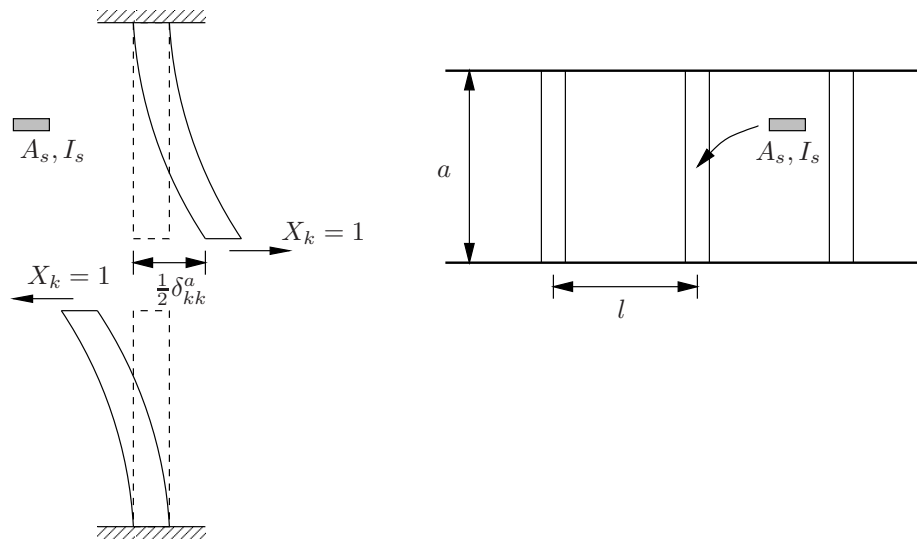
$$\delta_{ik}^b = w_2 - w_1 = -(\omega_2 - \omega_1) \varphi'_{B_k}(z_i) = -2\Omega \varphi'_{B_k}(z_i). \quad (3.7)$$

Pistebimomentin aiheuttama vääntökulma ratkaistaan väännön differentiaaliyhtälöstä. Esimerkiksi vapaasti tuetun sauvan tapauksessa reunaehdot ovat

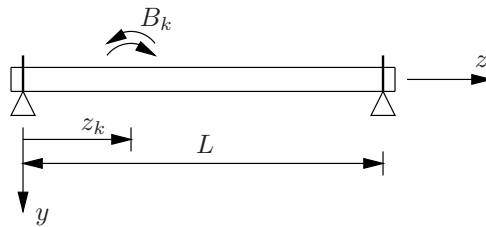
$$\varphi(0) = \varphi(L) = B(0) = B(L) = 0, \quad (3.8)$$

ja tällöin saadaan

$$\delta_{ik}^b = \frac{(2\Omega)^2}{LGI_v} \left\{ kL \frac{\cosh(kz_i) \cosh[k(L - z_k)]}{\sinh kL} - 1 \right\}, \quad \text{kun } i \leq k, \quad (3.9)$$



Kuva 3.2 Poikkisiteen taipuma kuormasta $X_k = 1$.



Kuva 3.3 Bimomentti kohdassa z_k .

$$\delta_{ik}^b = \frac{(2\Omega)^2}{LGI_v} \left\{ kL \frac{\cosh[k(L - z_i)] \cosh(kz_k)}{\sinh kL} - 1 \right\}, \quad \text{kun } i \geq k, \quad (3.10)$$

joissa on merkitty

$$k = \sqrt{\frac{GI_v}{EI_\omega}}. \quad (3.11)$$

Siirtymäero siteen aukileikkauskohdassa on yhteensä

$$\delta_{ik} = \delta_{ik}^a + \delta_{ik}^b, \quad (3.12)$$

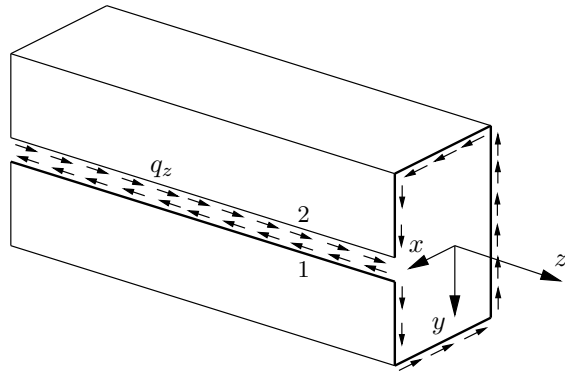
missä

$$\delta_{ik}^a = 0, \quad \text{jos } i \neq k. \quad (3.13)$$

Yhteensopivuusehdot siteiden kohdalla voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$\sum_{j=1}^N \delta_{ij} X_j + \delta_{i0} = 0, \quad \text{kun } i = 1, \dots, N, \quad (3.14)$$

missä N on siteiden lukumäärä.



Kuva 3.4 Ekvivalentin levyn leikkausvuo.

3.2 Poikkisiteitä vastaava levyjäykiste

Jos poikkisiteitä on riittävän paljon, niin ne voidaan korvata jäykkyydeltään samanarvoisella levyllä. Tällöin keskimääräinen jakautunut bimomentti on

$$b = \frac{B_i X_i}{l} = 2\Omega \frac{X_i}{l}, \quad (3.15)$$

missä l on siteiden välimatka. Väännön differentiaaliyhtälö tulee tässä tapauksessa muotoon

$$EI_\omega \varphi^{(4)} - GI_v \varphi'' = m_z + b' = m_z + 2\Omega q'(z). \quad (3.16)$$

Leikkausvuota $q(z)$ vastaava vääntömomentti on

$$M_z^q = 2\Omega q(z). \quad (3.17)$$

Viimeinen termi väännön differentiaaliyhtälössä (3.16) on vääntömomentin M_z^q derivaatta z :n suhteen. Leikkausvuon $q(z)$ määrittämiseksi muodostetaan yhteensopivuusyhtälö. Leikkausmuodonmuutos eli liukuma seinämän keskipinnalla on

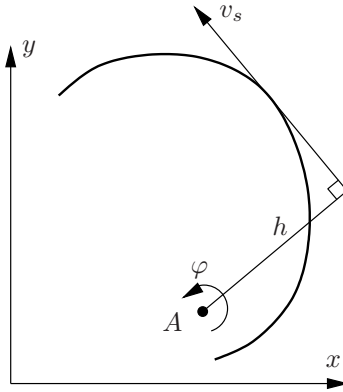
$$\begin{aligned} \gamma_{zs} &= \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial z} \\ &= \frac{\tau}{G} \\ &= \frac{1}{G} \frac{q(z)}{t(s)}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

missä $t(s)$ on levyn tai profiilin seinämän vahvuus, v_s on siirtymä koordinaatin s suuntaan ja

$$v_s(s, z) = h(s)\varphi(z). \quad (3.19)$$

Sijoittamalla profiilin keskipinnan tangentin suuntainen siirtymä v_s liukuman kaavaan (3.18) saadaan palkin aksiaaliselle siirtymälle kaava

$$w(s, z) = \int_0^s \frac{\tau}{G} ds - \omega(s)\varphi'(z) + w_0(z), \quad (3.20)$$



Kuva 3.5 Vääntökulma φ ja tangentin suuntainen siirtymä v_s .

missä $w_0(z)$ on siirtymä kohdassa $s = 0$.

Diskreettien siteiden aukileikkausta vastaavasti ajatellaan levy leikatuksi auki keskeltä. Reunojen 1 ja 2 yhteensopivuuden nojalla saadaan ehto

$$\oint \frac{q(z)}{Gt(s)} ds - (\omega_2 - \omega_1)\varphi' = 0, \quad (3.21)$$

eli

$$\oint \frac{ds}{Gt(s)} q(z) = 2\Omega\varphi' = -(\omega_2 - \omega_1) = \Delta. \quad (3.22)$$

Merkitsemällä

$$\delta = \oint \frac{ds}{Gt(s)} \quad (3.23)$$

saadaan leikkausvuolle esitys

$$q(z) = \frac{2\Omega}{\delta}\varphi' = \frac{\Delta}{\delta}. \quad (3.24)$$

Väännön differentiaaliyhtälön (3.16) viimeinen termi voidaan nyt kirjoittaa muotoon

$$2\Omega q' = G \frac{4\Omega^2}{G\delta} \varphi'' = GI_v^0 \varphi'', \quad (3.25)$$

missä on otettu käyttöön määritelmä

$$I_v^0 = \frac{4\Omega^2}{G\delta}. \quad (3.26)$$

Sijoittamalla leikkausvuon $q(z)$ kaava väännetyin sauvan differentiaaliyhtälöön tulee

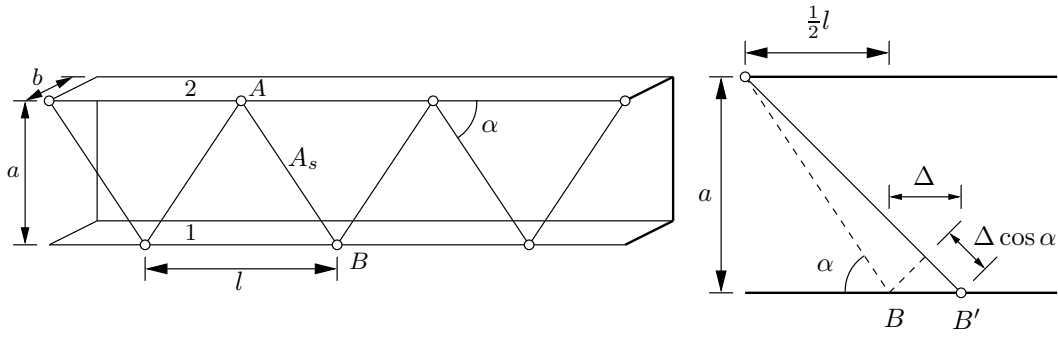
$$EI_\omega \varphi^{(4)} - G(I_v + I_v^0)\varphi'' = m_z(z). \quad (3.27)$$

Merkitään

$$\bar{I}_v = I_v + I_v^0. \quad (3.28)$$

Vääntömomentti M_v (Saint Venantin vääntö) on tällöin

$$M_v(z) = G\bar{I}_v \varphi''(z). \quad (3.29)$$



Kuva 3.6 Ristikolla jäykistetty U-profilili.

Jos otetaan huomioon vain levyn osuus δ :n lausekkeessa eli

$$\delta \approx \delta_{levy}, \quad (3.30)$$

niin esimerkiksi kuvan 3.1 U-profilin poikkisiteiden tapauksessa saadaan

$$\frac{\Delta}{X} = \frac{1}{l}\delta = \frac{a^3}{12EI_s} + \frac{1.2a}{GA_s}, \quad (3.31)$$

josta saadaan δ :lle

$$\delta = al \left(\frac{a^2}{12EI_s} + \frac{1.2}{GA_s} \right), \quad (3.32)$$

ja edelleen

$$I_v^0 = \frac{4\Omega^2}{al \left(\frac{a^2G}{12EI_s} + \frac{1.2}{A_s} \right)}, \quad (3.33)$$

joissa I_s ja A_s ovat poikkisiteen taivutusjäyhyys ja poikkipinta-ala.

Esimerkki 3.1 Määritetään kuvan 3.6 jäykistysristikon kanssa samanarvoinen (ekvi-valentti) jäykistyslevy.

Tarkastellaan kuvan 3.6 jäykistysristikolla varustettua sauvaa. Jos sauva AB pitenee profiilin deplanaation vuoksi määrän

$$\Delta_{AB} = \Delta \cos \alpha, \quad (3.34)$$

missä Δ on profiilin reunojen siirtymäero väännön aiheuttamassa deplanaatiossa, niin sauvaan AB kehittyy sauvavoima

$$\begin{aligned} S_{AB} &= EA_s \frac{\Delta_{AB}}{l_{AB}} \\ &= EA_s \frac{\Delta \cos \alpha}{a / \sin \alpha} \\ &= \frac{EA_s \sin \alpha \cos \alpha}{a} \Delta, \end{aligned} \quad (3.35)$$

missä A_s on ristikon sauvan poikkileikkauksen pinta-ala. Reunan pituusyksikköä kohti laskettu leikkausvoima on

$$q(z) = \frac{S_{AB} \cos \alpha}{a \cot \alpha} = \frac{EA_s \sin^2 \alpha \cos \alpha}{a^2} \Delta. \quad (3.36)$$

Joustokerroin δ on tässä tapauksessa

$$\delta = \frac{a^2}{EA_s \sin^2 \alpha \cos \alpha}, \quad (3.37)$$

ja ekvivalentin levyn aiheuttama vääntöjäykkyyden lisä on nyt

$$I_v^0 = \frac{E}{G} \frac{4\Omega^2 A_s}{a^2} \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (3.38)$$

missä $\Omega = ab$.

Edellisten esimerkkien vääntöjäykkyyden I_v^0 kaavoissa on paarteiden taivutusjäykkyys jätetty huomioonottamatta.

3.3 Vääntöjäykkyyden määrittäminen energiamenetelmällä

3.3.1 Vääntöjäykkyyden alaraja

Jäykistetyin profiilin vääntöjäykkyyden alaraja voidaan määrittää komplementaarisen energian minimin periaatteen avulla. Vääntöjäykkyyden määritelmän perusteella

$$\begin{aligned} GI_v &= \frac{M_z(\sigma)}{\theta} \\ &= \frac{M_z^2}{2W(\sigma)}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

missä θ on vääntymä ja

$$W = W(\sigma) \quad (3.40)$$

on luvallisesta jännitystilasta riippuva jännitysenergia [Parland, 1979, s. 26]. Jos luvalliset jännitystilat ovat ortogonaaliset eli ne toteuttavat yhtälöt

$$W(\sigma_i, \sigma_k) = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ W(\sigma_i), & i = k, \end{cases} \quad (3.41)$$

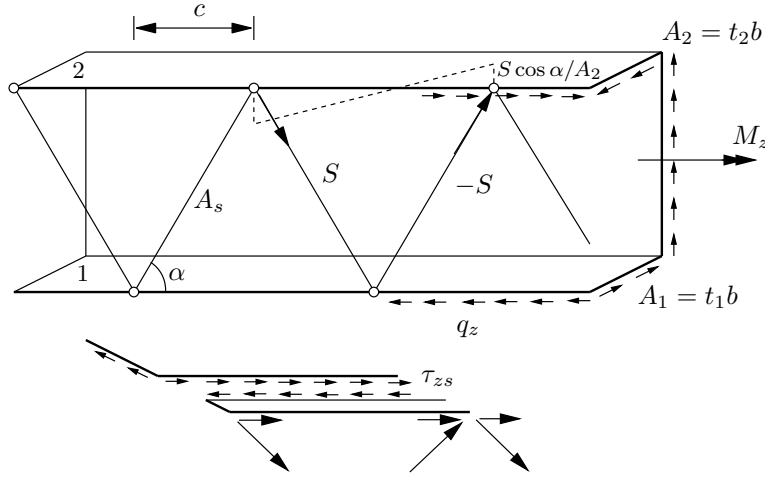
niin vääntöjäykkyydelle saadaan alaraja-arvio

$$\begin{aligned} GI_{v\sigma} &= \sum_{i=1}^n \frac{M_z(\sigma_i)}{\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{M_z^2(\sigma_i)}{\theta M_z(\sigma_i)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{M_z^2(\sigma_i)}{2W(\sigma_i)} \\ &= \sum_{i=1}^n GI_{v\sigma_i}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Esimerkki 3.2 Määritetään ristikolla jäykistetyin sauvan vääntöjäykkyyden alaraja.

Paarteen i jännityksen otaksutaan muuttuvan lineaarisesti pituuskoordinaatin z funktiona. Suurin jännityksen σ_z arvo on

$$\sigma_{z \max} = \frac{S \cos \alpha}{A_i}, \quad (3.43)$$



Kuva 3.7 Ristikolla jäykistetty U-profilii.

missä A_i on paarteen i poikkileikkausala ja S on jäykistysristikon sauvan voima. Paarteen tasapainoehdosta seuraa

$$q(z)c - S \cos \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad q(z) = \frac{S \cos \alpha}{c}. \quad (3.44)$$

Ristikolla jäykistetyin sauvan vääntömomentti on Bredt'in kaavan mukaan

$$\begin{aligned} M_z^q &= 2\Omega q(z) \\ &= \frac{2\Omega S \cos \alpha}{c}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Sauvan komplementaariseksi energiaksi pituusyksikköä kohti saadaan

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{1}{2} \left[\frac{S^2 a}{cEA_s \sin \alpha} + \frac{A_1}{c} \int_0^c \frac{\sigma_z^2}{E} dz + \frac{A_2}{c} \int_0^c \frac{\sigma_z^2}{E} dz + \oint \frac{\tau^2}{G} t(s) ds \right] \\ &= \frac{S^2}{2} \left[\frac{a}{cEA_s \sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{3E} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) + \frac{\cos^2 \alpha}{Gc^2} \oint \frac{ds}{t} \right]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Määritellään ortogonaaliset jännitystilat:

- tila 1 : U-profilin vääntöjännitykset,
- tila 2 : poikkisiteiden sauvavoimista aiheutuvat jännitykset.

Sauvan vääntöjäykkyys on tällöin

$$GI_{v\sigma} = GI_{v\sigma_1} + GI_{v\sigma_2}, \quad (3.47)$$

missä

$$GI_{v\sigma_1} = \frac{1}{3} G(2t^3 b + t^3 a), \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} GI_{v\sigma_2} &= \frac{4\Omega^2 S^2 \cos^2 \alpha}{c^2 S^2 \left[\frac{a}{cEA_s \sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{3E} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) + \frac{\cos^2 \alpha}{Gc^2} \left(\frac{2b}{t} + \frac{a}{t} \right) \right]} \\ &= \frac{4\Omega^2 E}{\frac{ca}{A_s \sin \alpha \cos^2 \alpha} + \frac{c^2}{3} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) + \frac{E}{G} \left(\frac{2b}{t} + \frac{a}{t} \right)}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

3.3.2 Vääntöjäykkyyden yläraja

Vääntöjäykkyyden yläraja määritetään potentiaalienergian minimin periaatteen mukaan. Vääntöjäykkyys määritellään nyt kaavalla, [Parland, 1979],

$$\begin{aligned} GI_{v\varepsilon} &= \frac{\bar{M}_z}{\theta} \\ &= \frac{2W(\varepsilon)}{\theta^2}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

missä M_z on annettu vääntömomentti. Otaksutaan kinemaattisesti luvallisten siirtymätilojen yhdistelmä

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad (3.51)$$

jota vastaa muodonmuutostila ε ja vääntymä θ . Jos muodonmuutostilat ε_i ovat ortogonaalisia, eli ne toteuttavat yhtälöt

$$W(\varepsilon_i, \varepsilon_k) = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ W(\varepsilon_i), & i = k, \end{cases} \quad (3.52)$$

niin vääntöjäykkyydelle saadaan yläraja-arvio

$$\begin{aligned} GI_{v\varepsilon} &= \frac{\bar{M}_z}{\sum_i \theta_i} = \frac{1}{\sum_i \frac{\theta_i^2}{\bar{M}_z \theta_i}} \\ &= \frac{1}{\sum_i \frac{\theta_i^2}{2W(\varepsilon_i)}} \\ &= \frac{1}{\sum_i \frac{1}{GI_v(\varepsilon_i)}}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Esimerkki 3.3 Määritetään ristikolla jäykistetyn U -profiilin vääntöjäykkyyden yläraja.

Otaksutaan vääntökulman muuttuvan lineaarisesti z :n funktiona. Pisteiden 1 ja 2 siirtymät väännössä ovat

$$w_1 = -\theta\omega_1 \quad \text{ja} \quad w_2 = -\theta\omega_2. \quad (3.54)$$

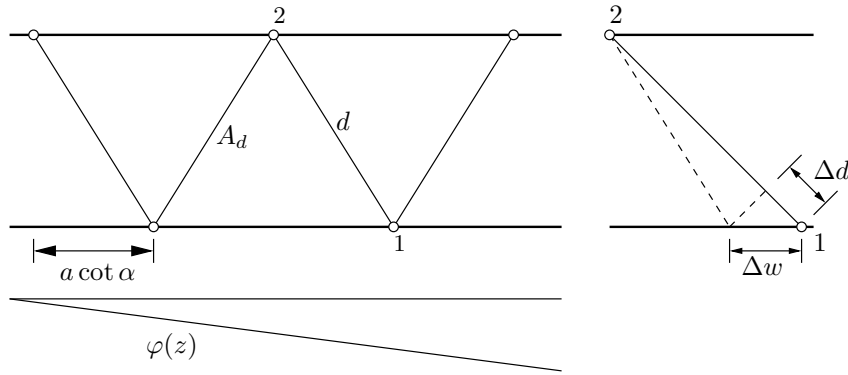
Sauvan 1 – 2 pituudenmuutos on

$$\Delta d = (w_1 - w_2) \cos \alpha = (\omega_2 - \omega_1)\theta \cos \alpha, \quad (3.55)$$

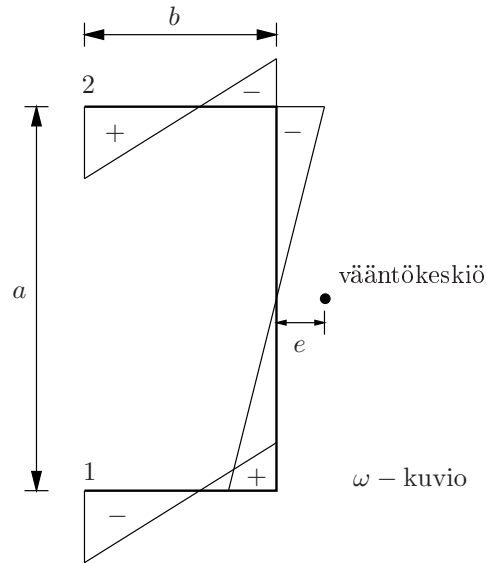
ja sitä vastaava sauvaan varastoitunut muodonmuutosenergia on

$$W_d = \frac{1}{2} E A_s d \left(\frac{\Delta d}{d} \right)^2, \quad (3.56)$$

missä A_s on jälleen sauvan poikkileikkauksen pinta-ala ja d on sauvan pituus.



Kuva 3.8 Ristikon sauvan deformaatio väännössä.



Kuva 3.9 U-profilin sektoriaalinen koordinaatti.

Kuvan 3.9 U-poikkileikkauksen tapauksessa

$$\omega_2 = \frac{(b-e)a}{2}, \quad (3.57)$$

ja

$$\omega_2 - \omega_1 = (b-e)a. \quad (3.58)$$

Yhdistetyn sauvan muodonmuutosenergia pituusyksikköä kohti on

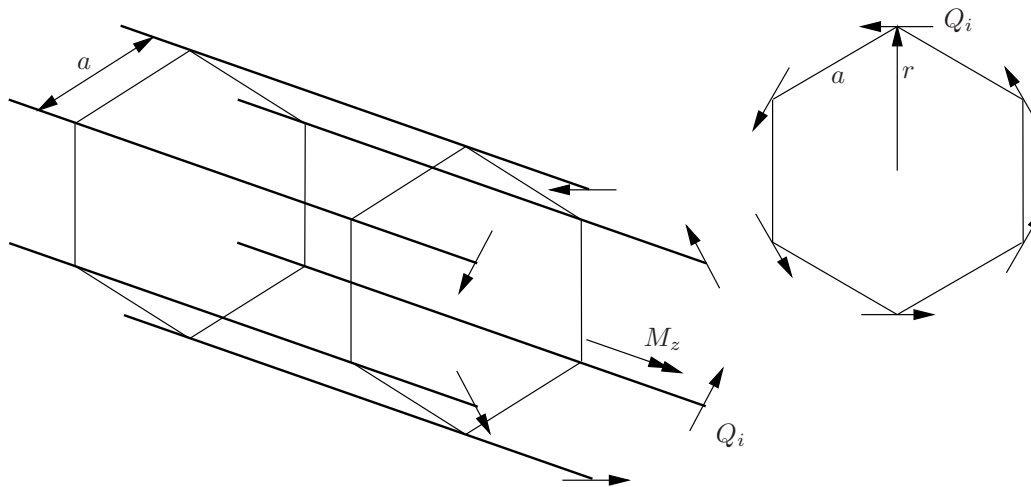
$$W = \frac{1}{2} \int G\gamma_{zs}^2 dA + \frac{1}{2} \frac{EA_s \theta^2 (\omega_2 - \omega_1)^2 \cos^2 \alpha}{(a/\sin \alpha)a \cot \alpha}. \quad (3.59)$$

Sauvan vääntöjäykkyys on

$$GI_{v\varepsilon} = GI_v + EA_s \sin^2 \alpha \cos \alpha (b-e)^2, \quad (3.60)$$

kun

$$GI_{v\varepsilon_i} = \frac{2W(\varepsilon_i)}{\theta^2}. \quad (3.61)$$



Kuva 3.10 Kehäsauvan vääntö.

3.4 Kehäsauvan vääntö

Tarkastellaan jaksollista yhdistettyä rakennetta, joka koostuu paarteista ja niitä sitovista poikkisiteistä. Määritetään tasapainoehdot tutkimalla rakenteen tyypillistä osaa. Poikkisiteessä vaikuttavan leikkausvoiman aiheuttama taivutusmomentti on

$$M_Q = Q_i \frac{l}{2}, \quad (3.62)$$

missä l on siteiden välimatka ja Q_i on siteen leikkausvoima.

Jaetaan momentti M_Q komponentteihin

$$M_{sb} = M_Q \sin \alpha, \quad M_{sa} = M_Q \cos \alpha. \quad (3.63)$$

Tasapainoehdon perusteella määritetään poikkisiteen leikkausvoima

$$Q_{sb} = -\frac{2M_{sb}}{a}. \quad (3.64)$$

Kun poikkisiteen voimasuuret tunnetaan, niin voidaan määrittää siteen pään kiertymä

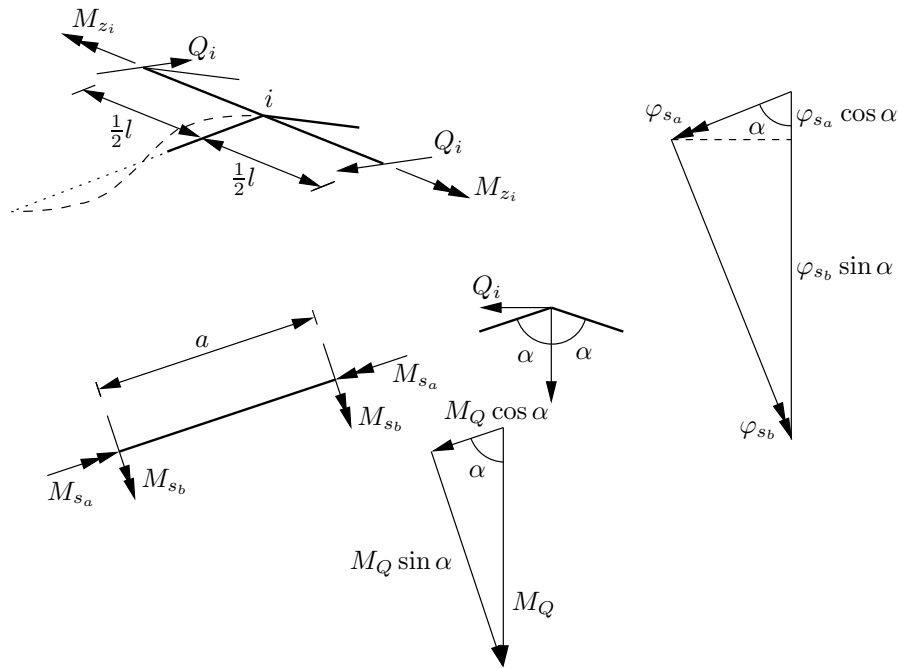
$$\begin{aligned} \varphi_{sb} &= M_{sb} \left(\frac{a}{3EI_s} - \frac{a}{6EI_s} \right) - Q_{sb} \frac{\zeta}{GA_s} \\ &= M_{sb} \frac{2}{a} \left(\frac{a^2}{12EI_s} + \frac{\zeta}{GA_s} \right) \end{aligned} \quad (3.65)$$

ja vääntökulma

$$\varphi_{sa} = M_{sa} \frac{a}{2GI_{vs}}. \quad (3.66)$$

Poikkisiteen muodonmuutoksista aiheutuva siirtymä paarteen leikkausvoiman suunnassa ja kohdalla on

$$\delta_Q^s = \frac{l}{2} \sin \alpha \varphi_{sb} + \frac{l}{2} \cos \alpha \varphi_{sa}. \quad (3.67)$$



Kuva 3.11 Kehäsauvan voimasuureet ja kiertymät.

Paarteen leikkausvoiman aiheuttama paarteen taipuma on

$$\delta_Q^p = Q_i \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI_p} + Q_i \frac{\zeta_p \frac{l}{2}}{GA_p}, \quad (3.68)$$

missä I_p ja A_p ovat paarteen taivutusjäyhyys ja poikkileikkauksen pinta-ala, ζ_p on paarteen poikkileikkauksen siirtymäkerroin. Yhteensä

$$\begin{aligned} \delta_Q &= \delta_Q^p + \delta_Q^s \\ &= Q_i \frac{l}{2} \left\{ \left(\frac{l^2}{12EI_p} + \frac{\zeta_p}{GA_p} \right) + \frac{l}{2} \left[\frac{2}{a} \left(\frac{a^2}{12EI_s} + \frac{\zeta_s}{GA_s} \right) \sin^2 \alpha + \frac{a}{2GI_{vs}} \cos^2 \alpha \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Keskimääräinen vääntymä on

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{2 \delta_Q}{l r} \\ &= \frac{Q_i}{r} \left\{ \left[\frac{l^2}{12EI_p} + \frac{\zeta_p}{GA_p} \right] + \sin^2 \alpha \left[\frac{al}{12EI_s} + \frac{\zeta_s l}{aGA_s} \right] + \cos^2 \alpha \frac{al}{4GI_{vs}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Kehäsauvan vääntömomentti on

$$\begin{aligned} M_z &= nM_{zi} + nrQ_i \\ &= nGI_{vi}\theta + nrQ_i, \end{aligned} \quad (3.71)$$

ja sauvan vääntöjäykkyys on siten

$$GI_v = \frac{M_z}{\theta}$$
$$= nGI_{vi} + \frac{nGr^2}{\frac{Gl^2}{12EI_p} + \frac{\zeta_p}{A_p} + \sin^2 \alpha \left(\frac{Gal}{12EI_s} + \frac{\zeta_s l}{aA_s} \right) + \cos^2 \alpha \frac{al}{4I_{vs}}}. \quad (3.72)$$

Luku 4

Kerrospalkin taivutus

Komposiitti- ja kerrosrakenteet ovat tehokkaita ja paljon käytettyjä nykyaikaisessa rakennetekniikassa. Liittämällä jäykästä materiaalista tehdyt pintakerrokset kevyemmästä materiaalista valmistettuun ydinkerrokseen saadaan aikaiseksi keveä ja tehokas rakenne, esim. sandwich-palkki tai -laatta. Koska sandwich-palkin ydinkerroksen materiaalin liukumoduuli G on pieni, on palkin analysoinnissa otettava huomioon poikittainen leikkausmuodonmuutos eli liukuma.

Komposiittirakenne valmistetaan esim. liittämällä kaksi osaa yhteen kuten kuvan 4.1b eri materiaaleista tehdyt laatta ja palkki. Komposiittivaikutus saadaan aikaiseksi liittimien avulla. Myös aukollinen tukiseinä voidaan analysoida kerrospalkin teorialla. Tällöin liittiminä toimivat sidepalkit.

Liitoksen liukuman ja leikkausvuon $q(x)$ välille voidaan kirjoittaa yhteys

$$q(x) = K\Delta u(x), \quad (4.1)$$

missä K on liitoksen jäykkys ja $\Delta u(x)$ on pintakerrosten vastin pisteiden siirtymäero tai liukuma palkin akselin suunnassa (x :n suunnassa). Tukiseinän tapauksessa

$$\Delta u = \frac{Fd^3}{12EI_s}. \quad (4.2)$$

Tukiseinän keskimääräinen leikkausvuo on

$$q = \frac{F}{l}, \quad (4.3)$$

missä l on siteiden välimatka. Tarkasteltavassa tapauksessa

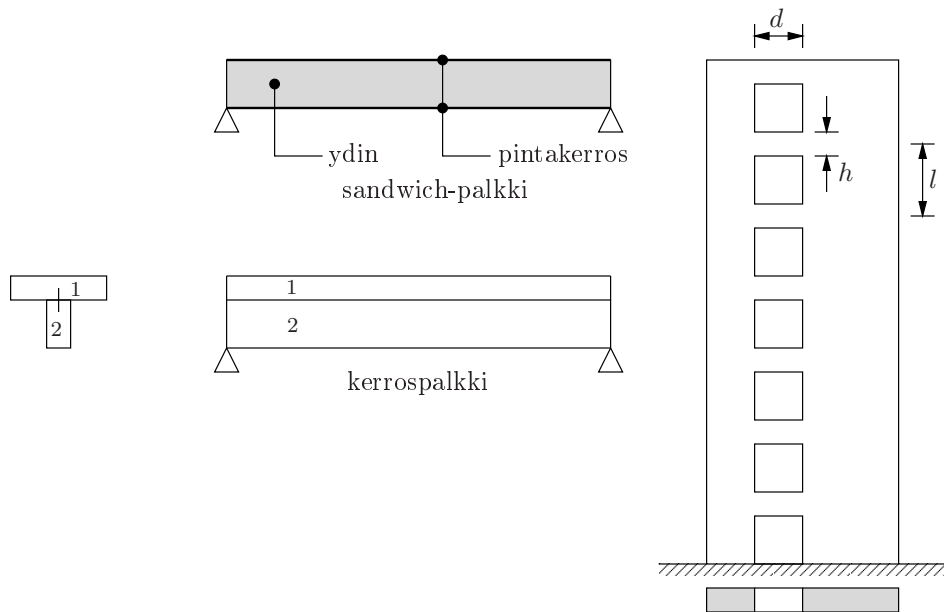
$$q = \frac{12EI_s}{ld^3}\Delta u \quad (4.4)$$

ja

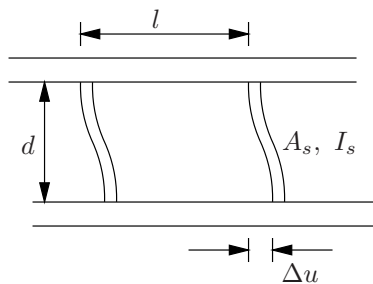
$$K = \frac{12EI_s}{ld^3}, \quad (4.5)$$

missä EI_s on poikkisiteen taivutusjäykkyys. Ottamalla lisäksi huomioon leikkausmuodonmuutos poikkisiteen taipumassa saadaan

$$K = \frac{12EI_s}{ld^3 \left[1 + \zeta_s \frac{E}{G} \left(\frac{h}{d} \right)^2 \right]}, \quad (4.6)$$



Kuva 4.1 a) Sandwich-palkki, b) kerrospalkki (komposiittirakenne), c) aukollinen tukiseinä.



Kuva 4.2 Poikkisitein liitetyt sauvat.

missä $\zeta_s = 1.2$ on poikkisiteen siirtymäkerroin (suorakaidepoikkileikkaukselle), E ja G ovat poikkisiteen kimmokerroin ja liukumoduuli ja h on poikkisiteen (poikkipalkin) korkeus, kuva 4.1c.

4.1 Kerrospalkin tasapainoyhtälöt

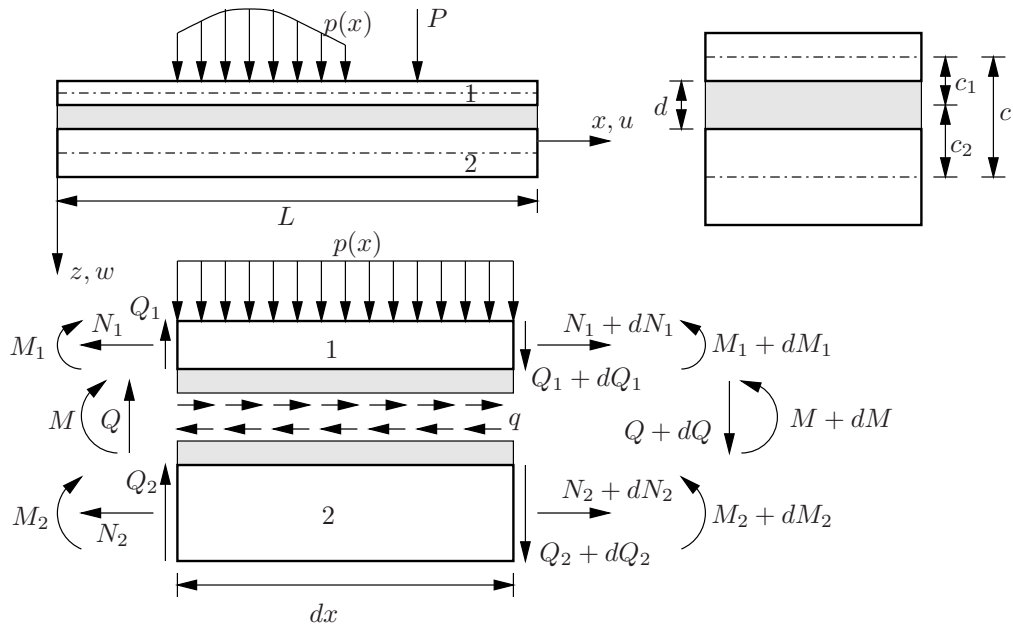
Johdetaan kerrospalkin tasapainoyhtälöt kuvan 4.3 vapaakappalekuvion avulla. Kuvan 4.3 perusteella saadaan tasapainoehdot

$$\frac{dQ(x)}{dx} + p(x) = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x). \quad (4.8)$$

Eliminoimalla leikkausvoima tasapainoehto tulee muotoon

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x). \quad (4.9)$$



Kuva 4.3 Kerrospalkin voimasuureet.

Edellä $M(x)$ on palkin momentti, $Q(x)$ on leikkausvoima ja $p(x)$ on jakautunut kuorma. Jos palkkiin ei vaikuta akselin suuntaista kuormaa, niin x :n suuntainen tasapainoehto on yksinkertaisesti

$$N_1 + N_2 = 0, \quad (4.10)$$

missä N_1 ja N_2 ovat paarteiden 1 ja 2 normaalivoimat.

Edelleen kuvan 4.3 perusteella saadaan tasapainoehdot

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (4.11)$$

ja

$$M = M_1 + M_2 - N_1 c, \quad (4.12)$$

missä c on paarteiden 1 ja 2 painopisteiden etäisyys.

Osien 1 ja 2 vaakasuuntaisista tasapainoehdoista seuraa

$$\frac{dN_1(x)}{dx} = -q(x), \quad (4.13)$$

$$\frac{dN_2(x)}{dx} = q(x), \quad (4.14)$$

missä leikkauvu $q(x)$ on

$$q(x) = K\Delta u(x). \quad (4.15)$$

Momentin tasapainoehdoista paarteiden painopisteiden suhteen seuraavat yhtälöt

$$Q_1(x) = \frac{dM_1(x)}{dx} + q(x)c_1, \quad (4.16)$$

$$Q_2(x) = \frac{dM_2(x)}{dx} + q(x)c_2. \quad (4.17)$$

Paarteiden 1 ja 2 käyristymät otaksutaan seuraavassa yhtäsuuriksi. Tällöin

$$M_1 = -EI_1 \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (4.18)$$

ja

$$M_2 = -EI_2 \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (4.19)$$

missä EI_1 ja EI_2 ovat paarteiden taivutusjäykkyydet.

Taivutusmomentin kaava voidaan nyt kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} M &= M_1 + M_2 - N_1 c \\ &= -EI_0 \frac{d^2 w}{dx^2} - cN_1, \end{aligned} \quad (4.20)$$

missä on määritelty jäykkyyssparametri

$$EI_0 = EI_1 + EI_2. \quad (4.21)$$

Ratkaisemalla momentin kaava käyristymän suhteen tulee

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M + cN_1}{EI_0}. \quad (4.22)$$

Ottamalla tämä huomioon paarremomenttien kaavoissa saadaan

$$M_1(x) = \frac{EI_1}{EI_0} [M(x) + N_1(x)c], \quad (4.23)$$

$$M_2(x) = \frac{EI_2}{EI_0} [M(x) + N_1(x)c]. \quad (4.24)$$

Paarteen 1 tasapainoehdosta tulee derivoimalla

$$\frac{d^2 N_1(x)}{dx^2} + \frac{dq(x)}{dx} = 0, \quad (4.25)$$

missä leikkauvuo $q(x)$ on

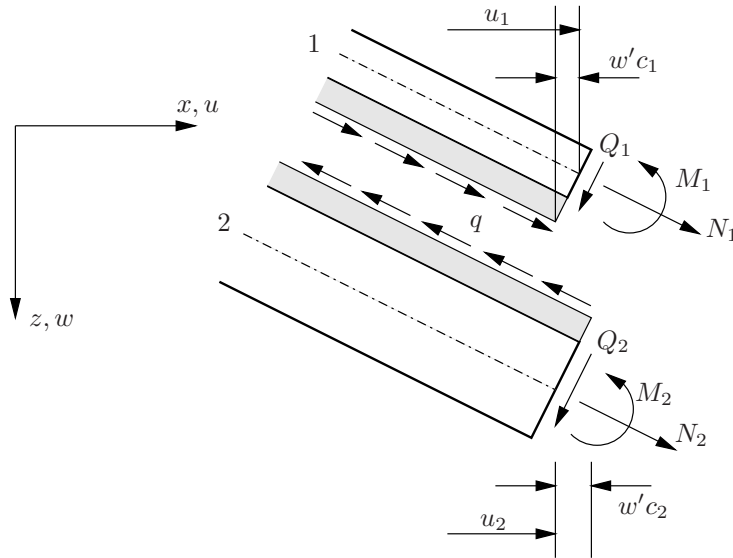
$$q(x) = K \Delta u(x). \quad (4.26)$$

Tarkastelemalla kuvan 4.4 avulla osien välistä yhteensopivuutta saadaan siirrosliukumalle Δu johdettua kaava

$$\Delta u(x) = u_2(x) - u_1(x) + \frac{dw(x)}{dx} c. \quad (4.27)$$

Derivoimalla siirtymä $\Delta u(x)$ x :n suhteen tulee

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta u(x)}{dx} &= \frac{du_2(x)}{dx} - \frac{du_1(x)}{dx} + \frac{d^2 w(x)}{dx^2} c \\ &= \varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x) + \frac{d^2 w(x)}{dx^2} c, \end{aligned} \quad (4.28)$$



Kuva 4.4 Kerrospalkin siirtymät.

missä paarteiden venymät ovat

$$\varepsilon_1(x) = \frac{du_1(x)}{dx} = \frac{N_1(x)}{EA_1}, \quad (4.29)$$

$$\varepsilon_2(x) = \frac{du_2(x)}{dx} = \frac{N_2(x)}{EA_2}. \quad (4.30)$$

Tarkasteltavassa tapauksessa otaksutaan, ettei palkkiin kohdistu akselin suuntaisia kuormia, jolloin $N_1 = -N_2$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta u(x)}{dx} &= -N_1(x) \left(\frac{1}{EA_1} + \frac{1}{EA_2} \right) + \frac{d^2 w(x)}{dx^2} c \\ &= -N_1(x) \frac{EA_0}{EA_p} + \frac{d^2 w(x)}{dx^2} c, \end{aligned} \quad (4.31)$$

jossa on otettu käyttöön merkinnät

$$EA_0 = EA_1 + EA_2, \quad (4.32)$$

$$EA_p = EA_1 \cdot EA_2. \quad (4.33)$$

EA_1 ja EA_2 ovat paarteiden veto- tai puristusjäykkyydet, ja A_1 ja A_2 ovat paarteiden poikkileikkausten pinta-alat.

Sijoittamalla kaava (4.31) paarteen tasapainoehtoon (4.25) ja ottamalla huomioon kaava (4.22) tulee

$$\frac{d^2 N_1(x)}{dx^2} - K \left(\frac{EA_0}{EA_p} N_1 + \frac{M + cN_1}{EI_0} c \right) = 0, \quad (4.34)$$

josta päädytään paarteen 1 normaalivoiman differentiaaliyhtälöön

$$\frac{d^2 N_1(x)}{dx^2} - \alpha^2 N_1(x) = \beta M(x), \quad (4.35)$$

missä on otettu käyttöön merkinnät

$$\alpha^2 = K \left(\frac{1}{EA_1} + \frac{1}{EA_2} + \frac{c^2}{EI_0} \right) \quad (4.36)$$

$$= K \left(\frac{EA_0}{EA_p} + \frac{c^2}{EI_0} \right),$$

$$\beta = \frac{Kc}{EI_0}, \quad (4.37)$$

$$EA_0 = EA_1 + EA_2, \quad EA_p = EA_1 \cdot EA_2. \quad (4.38)$$

Sijoittamalla paarteen normaalivoiman differentiaaliyhtälöön kaavasta (4.22) seuraava yhteys

$$N_1 = -(M + EI_0 d^2 w / dx^2) / c \quad (4.39)$$

saadaan taipuman $w(x)$ differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \alpha^2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \left(\frac{\alpha^2}{EI_0} - \frac{\beta c}{EI_0} \right) M(x) - \frac{1}{EI_0} \frac{d^2 M(x)}{dx^2}, \quad (4.40)$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \alpha^2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \alpha^2 \frac{M(x)}{EI} - \frac{1}{EI_0} \frac{d^2 M(x)}{dx^2}, \quad (4.41)$$

jossa on merkitty

$$EI = EI_0 + \frac{EA_p}{EA_0} c^2. \quad (4.42)$$

Ottamalla huomioon tasapainoehto $d^2 M / dx^2 = -p$ saadaan momentille kaava

$$M(x) = \frac{EI}{\alpha^2} \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - \frac{EI}{\alpha^2 EI_0} p(x). \quad (4.43)$$

4.2 Tasapainoyhtälön ratkaisu

Jos momentti $M(x)$ tunnetaan, niin palkin taipuma voidaan integroida differentiaaliyhtälöstä (4.41). Staattisesti määräämättömän palkin taipuman ratkaisemiseksi johdetaan tasapainoehdon, $M'' = -p$, avulla differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^6 w(x)}{dx^6} - \alpha^2 \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = -\alpha^2 \frac{p(x)}{EI} + \frac{1}{EI_0} \frac{d^2 p(x)}{dx^2}. \quad (4.44)$$

Taipuman kuudennen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$w(x) = w_h(x) + w_p(x), \quad (4.45)$$

jossa oikean puolen ensimmäinen termi on homogeenisen yhtälön ratkaisu

$$w_h(x) = C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x + C_3 x^3 + C_4 x^2 + C_5 x + C_6, \quad (4.46)$$

ja toinen termi on kuorman mukaan ottava yksityisratkaisu

$$w_p(x) = \frac{1}{\alpha^5 EI} \int_0^x \left[\alpha^2 p(s) - \frac{EI}{EI_0} \frac{d^2 p(s)}{ds^2} \right] \left\{ \alpha(x-s) + \frac{1}{6} \alpha^3 (x-s)^3 - \sinh[\alpha(x-s)] \right\} ds \quad (4.47)$$

Homogeenisen osan ratkaisun sisältämät integrointivakiot C_1, \dots, C_6 ratkaistaan reunaehdoista.

4.2.1 Reunaehdot

Tutkitaan seuraavassa tapauksia, joissa kerrospalkin pää voi olla niveellinen, jykkä tai vapaa. Reunaehdot on lausuttava tasapainoyhtälön tuntemattoman taipuman w avulla.

1. Nivelreunan tapauksessa, jos tuet $x = 0$ ja $x = L$ ovat nivelöidyt,

$$w(0) = M_i(0) = N_1(0) = w(L) = M_i(L) = N_1(L) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (4.48)$$

eli

$$w(0) = \frac{d^2 w(0)}{dx^2} = \frac{d^4 w(0)}{dx^4} - \frac{p(0)}{EI_0} = 0 \quad (4.49)$$

ja

$$w(L) = \frac{d^2 w(L)}{dx^2} = \frac{d^4 w(L)}{dx^4} - \frac{p(L)}{EI_0} = 0. \quad (4.50)$$

Edellä $N_1 = -N_2$.

Ehdosta $N_1 = 0$ seuraa $M + EI_0 w'' = 0$, joten ehdon $M = 0$ perusteella $w'' = 0$. Ottamalla kaavassa (4.41) huomioon, että $M'' = -p$ ja $w'' = 0$, $M = 0$, saadaan $w^{(4)} - p/EI_0 = 0$.

2. Jykkää tukea pisteessä $x = a$ vastaavat reunaehdot ovat

$$w(a) = \frac{dw(a)}{dx} = \Delta u(a) = 0, \quad (4.51)$$

joista kolmas voidaan muuntaa muotoon

$$\frac{d^5 w(a)}{dx^5} - \alpha^2 \left(1 - \frac{EI_0}{EI} \right) \frac{d^3 w(a)}{dx^3} = \frac{1}{EI_0} \frac{dp(a)}{dx}. \quad (4.52)$$

Ehdosta $\Delta u = 0$ seuraa $q = 0$ eli $N_1' = 0$ ja edelleen $M' + EI_0 w''' = 0$. Ottamalla huomioon kaavassa (4.41), että $M'' = -p$, saadaan ensin

$$M(x) = \frac{EI}{\alpha^2} \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - \frac{EI}{\alpha^2 EI_0} p(x), \quad (4.53)$$

jonka avulla päädytään lopuksi ehtoon (4.52).

3. Jos vapaa reuna on kohdassa $x = a$, niin reunaehdot ovat

$$M_i(a) = N_1(a) = Q(a) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.54)$$

Taipuman avulla lausuttuna vapaan reunan reunaehdot ovat

$$\frac{d^2w(a)}{dx^2} = 0, \quad (4.55)$$

$$\frac{d^4w(a)}{dx^4} = \frac{p(a)}{EI_0}, \quad (4.56)$$

$$\frac{d^5w(a)}{dx^5} - \alpha^2 \frac{d^3w(a)}{dx^3} = \frac{1}{EI_0} \frac{dp(a)}{dx}. \quad (4.57)$$

4.2.2 Voimasuureet

Kun taipuma on ratkaistu, niin sisäiset voimat määritetään kaavoilla

$$\begin{aligned} M(x) &= M_1(x) + M_2(x) - cN_1(x) \\ &= \frac{EI}{\alpha^2} \frac{d^4w(x)}{dx^4} - EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} - \frac{EI}{\alpha^2 EI_0} p(x), \end{aligned} \quad (4.58)$$

jossa esiintyvät jäykkyysuureet EI ja EI_0 on määritelty aikaisemmin,

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q_1(x) + Q_2(x) \\ &= \frac{dM(x)}{dx}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$N_1(x) = -N_2(x) = -\frac{1}{c} \left[M(x) + EI_0 \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right], \quad (4.60)$$

$$q(x) = K \Delta u(x) = -\frac{dN_1(x)}{dx} = \frac{dN_2(x)}{dx}, \quad (4.61)$$

$$M_i(x) = -EI_i \frac{d^2w(x)}{dx^2}, \quad i = 1, 2, \quad (4.62)$$

$$Q_i(x) = \frac{dM_i(x)}{dx} + c_i q(x), \quad i = 1, 2. \quad (4.63)$$

4.2.3 Erikoistapaus $K = 0$

Jos osien 1 ja 2 välinen kytkentä puuttuu, niin $q(x) = 0$ ja yleisen tapauksen yhtälöt yksinkertaistuvat muotoon

$$N_{10}(x) = N_{20}(x) = 0, \quad (4.64)$$

$$q_0(x) = 0, \quad (4.65)$$

$$M_{10}(x) = \frac{EI_1}{EI_0} M(x), \quad (4.66)$$

$$M_{20}(x) = \frac{EI_2}{EI_0} M(x), \quad (4.67)$$

$$Q_{10}(x) = \frac{EI_1}{EI_0} Q(x), \quad (4.68)$$

$$Q_{20}(x) = \frac{EI_2}{EI_0} Q(x), \quad (4.69)$$

joissa indeksi 0 viittaa siihen, että tässä tapauksessa liitoksen leikkausjäykkyys $K = 0$.

Erikoistapauksessa $K = 0$ ja $\alpha = 0$ paarrevoima on $N_1 = 0$, ja taivutusmomentti on

$$M = -EI_0 w'' \quad \text{tai} \quad w'' = -M/EI_0. \quad (4.70)$$

Paarremomentin kaavaksi tulee tällöin $M_i = -EI_i w'' = EI_i/EI_0 M$, $i = 1, 2$.

4.2.4 Erikoistapaus $K = \infty$.

Tässä tapauksessa liittovaikutus on täydellinen, ja tällöin voimasuureet ovat

$$N_{1\infty}(x) = - \left(1 - \frac{EI_0}{EI}\right) \frac{M(x)}{c}, \quad (4.71)$$

$$N_{2\infty}(x) = \left(1 - \frac{EI_0}{EI}\right) \frac{M(x)}{c}, \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} q_\infty(x) &= \frac{1}{c} \left[Q(x) - \frac{EI_0}{EI} \frac{dM(x)}{dx} \right] \\ &= \left(1 - \frac{EI_0}{EI}\right) \frac{Q(x)}{c}, \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$M_{i\infty}(x) = \frac{EI_i}{EI} M(x), \quad i = 1, 2, \quad (4.74)$$

$$Q_{i\infty}(x) = \left[\frac{EI_i}{EI} + \left(1 - \frac{EI_0}{EI}\right) \frac{c_i}{c} \right] Q(x), \quad i = 1, 2. \quad (4.75)$$

Erikoistapauksessa $K = \infty$ ja $\alpha = \infty$ taivutusmomentti on

$$M = -EI w'' \quad \text{tai} \quad w'' = -M/EI, \quad (4.76)$$

ja paarrevoiman kaavaksi tulee $N_1 = -(M + EI_0 w'')/c = -(1 - EI_0/EI)M/c$.

Paarteiden 1 ja 2 painopisteiden etäisyys on

$$c = c_1 + c_2, \quad (4.77)$$

$$c_1 = \frac{EA_2}{EA_1 + EA_2} c, \quad c_2 = \frac{EA_1}{EA_1 + EA_2} c. \quad (4.78)$$

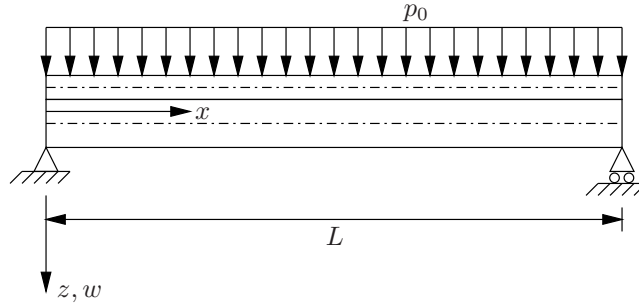
Momentin ja käyrityksen välillä on tässä tapauksessa yhteys

$$M = - \left(EI_0 + c^2 \frac{EA_p}{EA_0} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (4.79)$$

Esimerkki 4.1 Määritetään vapaasti tuetun kerrospalkin taipuma tasaisesta kuormasta p_0 .

Taipuman lauseke (taipuman kuudennen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisu) on nyt

$$w(x) = C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x + C_3 x^3 + C_4 x^2 + C_5 x + C_6 + w_p, \quad (4.80)$$



Kuva 4.5 Vapaasti tuettu kerrospalkki.

missä

$$w_p = \frac{1}{\alpha^5 EI} \int_0^x \alpha^2 p_0 \{ \alpha(x-s) + \frac{1}{6} \alpha^3 (x-s)^3 - \sinh \alpha(x-s) \} ds$$

$$= \frac{p_0}{\alpha^3 EI} \left(\alpha \frac{x^2}{2} + \alpha^3 \frac{x^4}{24} + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \cosh \alpha x \right).$$
(4.81)

Palkin reunaehdot ovat tässä tapauksessa

$$w(0) = \frac{d^2 w(0)}{dx^2} = \frac{d^4 w(0)}{dx^4} - \frac{p_0}{EI_0} = 0,$$
(4.82)

$$w(L) = \frac{d^2 w(L)}{dx^2} = \frac{d^4 w(L)}{dx^4} - \frac{p_0}{EI_0} = 0.$$
(4.83)

Tuen $x = 0$ reunaehtojen perusteella saadaan yhtälöt

$$C_2 + C_6 = 0,$$
(4.84)

$$\alpha^2 C_2 + 2C_4 = 0,$$
(4.85)

$$\alpha^4 C_2 = \frac{p_0}{EI_0},$$
(4.86)

joista ratkaistaan

$$C_2 = \frac{p_0}{\alpha^4 EI_0}, \quad C_4 = -\frac{p_0}{2\alpha^2 EI_0}, \quad C_6 = -\frac{p_0}{\alpha^4 EI_0}.$$
(4.87)

Tuen $x = L$ reunaehtojen perusteella saadaan yhtälöt

$$C_1 \sinh \alpha L + C_2 \cosh \alpha L + C_3 L^3 + C_4 L^2 + C_5 L + C_6$$

$$+ \frac{p_0}{\alpha^4 EI} + \frac{p_0 L^2}{2\alpha^2 EI} + \frac{p_0 L^4}{24EI} - \frac{p_0 \cosh \alpha L}{\alpha^4 EI} = 0,$$
(4.88)

$$C_1 \alpha^2 \sinh \alpha L + C_2 \alpha^2 \cosh \alpha L + C_3 6L + 2C_4$$

$$+ \frac{p_0}{\alpha^2 EI} + \frac{p_0 L^2}{2EI} - \frac{p_0 \cosh \alpha L}{\alpha^2 EI} = 0,$$
(4.89)

$$C_1 \alpha^4 \sinh \alpha L + C_2 \alpha^4 \cosh \alpha L + \frac{p_0}{EI} - \frac{p_0 \cosh \alpha L}{EI} = \frac{p_0}{EI_0}.$$
(4.90)

Kertomalla viimeinen yhtälö tekijällä $-1/\alpha^2$ ja laskemalla yhteen edellisen kanssa tulee

$$C_3 6L + 2C_4 + \frac{p_0 L^2}{2EI} = -\frac{p_0}{\alpha^2 EI_0},$$
(4.91)

josta ratkaistaan (sijoittamalla siihen ensin tunnettu kerroin C_4)

$$C_3 = -\frac{p_0 L}{12EI}. \quad (4.92)$$

Kertomalla vastaavasti viimeistä edellinen (tuen $x = L$ reunaehto) yhtälö tekijällä $-1/\alpha^2$ ja laskemalla se yhteen ensimmäisen yhtälön kanssa saadaan ratkaistua

$$C_5 = \frac{p_0 L^2}{24EI} + \frac{p_0 L}{2\alpha^2} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right), \quad (4.93)$$

ja viimeisestä reunaehtoyhtälöstä ratkaistaan lopuksi integroimisvakio

$$C_1 = p_0 \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \frac{1 - \cosh \alpha L}{\alpha^4 \sinh \alpha L}. \quad (4.94)$$

Sijoittamalla integroimisvakiot taipuman lausekkeeseen saadaan

$$w(x) = \frac{p_0}{24EI} (x^4 - 2x^3 L + xL^3) + \frac{p_0}{\alpha^4} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \left[\frac{1 - \cosh \alpha L}{\sinh \alpha L} \sinh \alpha x + \cosh \alpha x - \frac{1}{2} \alpha^2 x^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 xL - 1 \right], \quad (4.95)$$

joka voidaan (hyperbolisten sinh- ja cosh-funktioiden kaksinkertaisen kulman kaavoilla¹⁾ kirjoittaa myös muotoon

$$w(x) = \frac{p_0}{24EI} (x^4 - 2x^3 L + xL^3) + \frac{p_0}{\alpha^4} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \left[-\tanh \left(\frac{\alpha L}{2} \right) \sinh \alpha x + \cosh \alpha x - \frac{1}{2} \alpha^2 x^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 xL - 1 \right]. \quad (4.96)$$

Taipuman lauseke on samalla saatu muotoon

$$w(x) = w_\infty(x) + \Delta w(x), \quad (4.97)$$

missä $w_\infty(x)$ on taipuma, kun $\Delta u(x) = 0$ ja $\Delta w(x)$ on liitoksen liukuman aiheuttama lisätaipuma.

Palkin suurin taipuma on

$$w_{\max} = w \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{5p_0 L^4}{384EI} + \frac{p_0}{\alpha^4 EI} \left(\frac{EI}{EI_0} - 1 \right) \left[\frac{1}{\cosh \left(\frac{\alpha L}{2} \right)} + \frac{1}{8} \alpha^2 L^2 - 1 \right], \quad (4.98)$$

suurin momentti paarteessa on

$$M_{1,\max} = \frac{EI_1 p_0 L^2}{EI} + \frac{EI_1 p_0}{EI} \left(\frac{EI}{EI_0} - 1 \right) \left[1 - \frac{1}{\cosh \left(\frac{\alpha L}{2} \right)} \right] \quad (4.99)$$

ja

$$M_{2,\max} = \frac{EI_2}{EI_1} M_{1,\max}. \quad (4.100)$$

¹ $\sinh(a \pm b) = \sinh a \cosh b \pm \cosh a \sinh b$
 $\cosh(a \pm b) = \cosh a \cosh b \pm \sinh a \sinh b$

Suurimmat paarrevoimat ovat

$$N_{1,\max} = -\frac{p_0 L^2}{8c} \left(1 - \frac{EI_0}{EI}\right) \left\{ 1 - \frac{8}{\alpha^2 L^2} \left[1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)} \right] \right\}, \quad (4.101)$$

$$N_{2,\max} = -N_{1,\max}. \quad (4.102)$$

Liitoksen leikkausvoima on $q(x) = -dN_1/dx$ ja sen maksimiarvo on

$$q_{\max} = \frac{p_0 L}{2c} \left(1 - \frac{EI_0}{EI}\right) \left[1 - \frac{2}{\alpha L} \tanh\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \right], \quad (4.103)$$

ja paarteiden maksimileikkausvoimat ovat

$$Q_{i,\max} = \frac{p_0 L c_i}{2c} \left\{ 1 + \frac{EI_i c - EI_0 c_i}{EI c_i} \left[1 + \frac{2}{\alpha L} \left(\frac{EI}{EI_0} - 1 \right) \tanh\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \right] \right\}, \quad i = 1, 2. \quad (4.104)$$

Staatteisesti määrätyn palkin momentti $M(x)$ voidaan määrittää tasapainoyhtälöstä ja taipuma $w(x)$ taipuman neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälöstä (4.41) (staatteisesti määrätylle palkille). Kyseinen yhtälö on samanmuotoinen väännetyin sauvan differentiaaliyhtälön kanssa, ja sen ratkaisu on

$$w(x) = C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x + C_3 x + C_4 + w_p(x), \quad (4.105)$$

missä $w_p(x)$ on yksityisratkaisu. Yksityisratkaisu voidaan esittää muodossa, liite A, kaava (A.94),

$$w_p(x) = \frac{1}{\alpha^2 EI_0} \left[\frac{1}{D^2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{D^2}{\alpha^4} + \frac{D^4}{\alpha^6} + \dots \right] \left[\frac{d^2 M(x)}{dx^2} - \alpha^2 \frac{EI_0}{EI} M(x) \right], \quad (4.106)$$

missä on merkitty $D(\bullet) \equiv d(\bullet)/dx$. Vaihtoehtoisesti yksityisratkaisu voidaan johtaa Cauchy'n menetelmällä homogeenisen ratkaisun

$$\bar{w} = C_1 + C_2 x + C_3 \cosh \alpha x + C_4 \sinh \alpha x \quad (4.107)$$

avulla asettamalla ehdot

$$\bar{w}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_3 = 0, \quad (4.108)$$

$$\frac{d\bar{w}(0)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 + \alpha C_4 = 0, \quad (4.109)$$

$$\frac{d^2 \bar{w}(0)}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 C_3 = 0, \quad (4.110)$$

$$\frac{d^3 \bar{w}(0)}{dx^3} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha^3 C_4 = 1, \quad (4.111)$$

joista seuraa

$$C_1 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad C_4 = \frac{1}{\alpha^3}, \quad (4.112)$$

ja

$$\bar{w}(x) = \frac{1}{\alpha^3} (\sinh \alpha x - x). \quad (4.113)$$

Yksitysratkaisuksi tulee

$$\begin{aligned} w_p &= \int_0^x \bar{w}(x-s)f(s) ds \\ &= \frac{1}{EI\alpha^3} \int_0^x \left(\alpha^2 M(s) - \frac{EI}{EI_0} \frac{d^2 M(s)}{ds^2} \right) [\sinh \alpha(x-s) - \alpha(x-s)] ds. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Esimerkki 4.2 Ratkaistaan vapaasti tuetun tasaisen kuorman kuormittaman palkin taipuma neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälöstä.

Tasaisen kuorman $p = p_0$ kuormittaman palkin taivutusmomentti on

$$M(x) = \frac{1}{2} p_0 (L-x)x. \quad (4.115)$$

Taipuman differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cosh \alpha x + C_4 \sinh \alpha x + w_p(x), \quad (4.116)$$

jonka yksityisratkaisuosa on

$$\begin{aligned} w_p(x) &= \frac{1}{\alpha^2 EI_0} \left[\frac{1}{D^2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{D^2}{\alpha^4} + \frac{D^4}{\alpha^6} + \dots \right] \left[-p_0 - \alpha^2 \frac{EI_0}{EI} \frac{1}{2} p_0 (Lx - x^2) \right] \\ &= -\frac{p_0}{\alpha^2 EI_0} \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{\alpha^2} \right) - \frac{p_0}{2EI} \left(L \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) - \frac{p_0}{\alpha^2 2EI} (Lx - x^2) + \frac{p_0}{\alpha^4 EI}. \end{aligned} \quad (4.117)$$

Reunaehdoista $w(0) = 0$, $w''(0) = 0$, $w(L) = 0$, $w''(L) = 0$ seuraa

$$C_1 + C_3 = \frac{p_0}{\alpha^4} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right), \quad (4.118)$$

$$\alpha^2 C_3 - \frac{p_0}{\alpha^2 EI_0} + \frac{p_0}{\alpha^2 EI} = 0, \quad (4.119)$$

$$C_1 + C_2 L + C_3 \cosh \alpha L + C_4 \sinh \alpha L$$

$$- \frac{p_0 L^2}{2\alpha^4 EI_0} - \frac{p_0}{\alpha^4 EI_0} - \frac{p_0 L^4}{24EI} + \frac{p_0}{\alpha^4 EI} = 0, \quad (4.120)$$

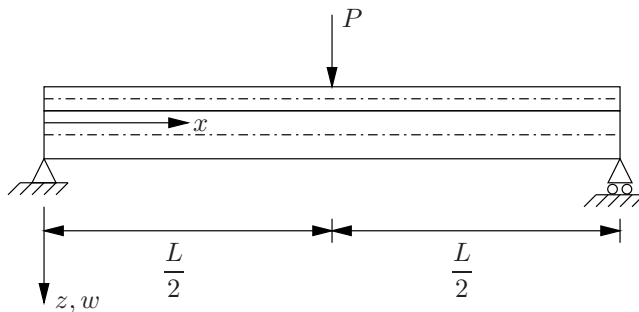
$$C_3 \alpha^2 \cosh \alpha L + C_4 \alpha^2 \sinh \alpha L + \frac{1}{\alpha^2 EI_0} \left(-p_0 + \frac{EI_0}{EI} p_0 \right) = 0, \quad (4.121)$$

joista ratkaistaan

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{p_0 L^3}{24EI} + \frac{p_0 L}{2\alpha^2 EI_0}, \quad (4.122)$$

$$C_3 = \frac{p_0}{\alpha^4} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right), \quad (4.123)$$

$$C_4 = C_3 \left(\frac{1}{\sinh \alpha L} - \frac{1}{\tanh \alpha L} \right) = \frac{p_0}{\alpha^4} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \left(\frac{1}{\sinh \alpha L} - \frac{1}{\tanh \alpha L} \right). \quad (4.124)$$



Kuva 4.6 Vapaasti tuettu kerrospalkki, kuormana pistevoima jänteen keskellä.

Taipuman lausekkeeksi saadaan

$$w(x) = \frac{p_0}{24EI}(L^3x - 2Lx^3 + x^4) + \frac{p_0}{\alpha^4} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \left[\cosh \alpha x + \left(\frac{1}{\sinh \alpha L} - \frac{1}{\tanh \alpha L} \right) \sinh \alpha x - 1 + \frac{\alpha^2}{2}(Lx - x^2) \right]. \quad (4.125)$$

Keskipisteen, $x = L/2$, taipuma on

$$w(L/2) = \frac{5p_0L^4}{384EI} + \frac{p_0}{\alpha^4} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \left[\alpha^2 \frac{L^2}{8} - 1 + \frac{1}{\cosh \left(\frac{\alpha L}{2} \right)} \right]. \quad (4.126)$$

Esimerkki 4.3 Määritetään jänteen keskellä vaikuttavan pistevoiman aiheuttama vapaasti tuetun palkin taipuma.

Staattisesti määrätyn palkin tapauksessa voidaan käyttää ratkaisua

$$w(x) = C_1 + C_2x + C_3 \cosh \alpha x + C_4 \sinh \alpha x + w_p(x). \quad (4.127)$$

Kaavan (4.114) mukainen yksityisratkaisu välillä $[0, L/2]$ on

$$\begin{aligned} w_p &= \frac{1}{EI\alpha^3} \int_0^x \left(\alpha^2 \frac{1}{2} P s \right) [\sinh \alpha(x-s) - \alpha(x-s)] ds \\ &= \frac{P}{2EI\alpha^3} \left(-\alpha x + \sinh \alpha x - \frac{\alpha x^3}{6} \right), \end{aligned} \quad (4.128)$$

missä osittaisintegroinnilla on saatu

$$\int_0^x s \sinh \alpha(x-s) ds = -\frac{x}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \sinh \alpha x. \quad (4.129)$$

Reunaehdoista vasemmassa päässä saadaan

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_3 = 0, \quad (4.130)$$

$$w''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 C_3 = 0, \quad (4.131)$$

eli

$$C_3 = 0, \quad C_1 = 0. \quad (4.132)$$

Palkin jänteen keskellä, symmetrian perusteella $w' \left(\frac{L}{2} \right) = 0$, josta seuraa

$$C_2 + C_3 \alpha \sinh \alpha \frac{L}{2} + C_4 \alpha \cosh \alpha \frac{L}{2} + \frac{P}{2EI\alpha^3} \left[-\alpha + \alpha \cosh \alpha \frac{L}{2} - \alpha^3 \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] = 0. \quad (4.133)$$

Niin'ikään symmetrian perusteella jänteen keskellä

$$\Delta u \left(\frac{L}{2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad q \left(\frac{L}{2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1' \left(\frac{L}{2} \right) = 0, \quad (4.134)$$

eli

$$N_1' \left(\frac{L}{2} \right) = -\frac{1}{c} \left[M' \left(\frac{L}{2} \right) + EI_0 w''' \left(\frac{L}{2} \right) \right] = 0, \quad (4.135)$$

mistä seuraa ehto

$$EI_0 w''' \left(\frac{L}{2} \right) = -Q \left(\frac{L}{2} \right) = -\frac{P}{2}, \quad (4.136)$$

koska palkin leikkausvoima on $Q = M'$ ja tässä tapauksessa $Q \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{P}{2}$. Viimeisimmän reunaehdon perusteella saadaan

$$C_3 \alpha^3 \sinh \alpha \frac{L}{2} + C_4 \alpha^3 \cosh \alpha \frac{L}{2} + \frac{P}{2EI\alpha^3} \left(\alpha^3 \cosh \alpha \frac{L}{2} - \alpha^3 \right) = -\frac{P}{2EI_0}, \quad (4.137)$$

ja vakioille C_2 ja C_4 ratkaistaan

$$C_2 = \frac{P}{2EI_0\alpha^2} + \frac{P}{2EI\alpha^2} \left(\alpha^2 \frac{L^2}{8} \right), \quad (4.138)$$

$$C_4 = -\frac{P}{2EI_0\alpha^3} \frac{1}{\cosh \alpha \frac{L}{2}} - \frac{P}{2EI\alpha^3} + \frac{P}{2EI\alpha^3} \frac{1}{\cosh \alpha \frac{L}{2}}. \quad (4.139)$$

Taipuman lausekkeeksi tulee

$$w = \frac{P}{48EI} (3L^2x - 4x^3) + \frac{P}{2\alpha^3} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \left(\alpha x - \frac{\sinh \alpha x}{\cosh \alpha \frac{L}{2}} \right). \quad (4.140)$$

Esimerkki 4.4 Määritetään kuvan 4.6 jänteen keskellä vaikuttavan pistevoiman aiheuttama vapaasti tuetun palkin taipuma yksityisratkaisun (4.106) avulla.

Staattisesti määrätyn palkin tapauksessa homogeenisen yhtälön ratkaisuun

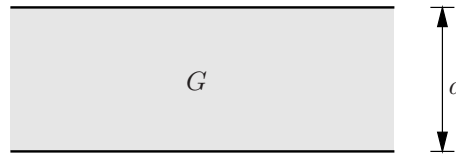
$$w(x) = C_1 + C_2x + C_3 \cosh \alpha x + C_4 \sinh \alpha x \quad (4.141)$$

yhdistetään nyt kaavan (4.106) mukainen yksityisratkaisu välillä $[0, L/2]$

$$\begin{aligned} w_p(x) &= \frac{1}{\alpha^2 EI_0} \left[\frac{1}{D^2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{D^2}{\alpha^4} + \frac{D^4}{\alpha^6} + \dots \right] \left[\frac{d^2 M(x)}{dx^2} - \alpha^2 \frac{EI_0}{EI} M(x) \right] \\ &= -\frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{12} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{2} Px \right). \end{aligned} \quad (4.142)$$

Reunaehdoista vasemmassa päässä saadaan

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_3 = 0, \quad (4.143)$$



Kuva 4.7 Sandwich-palkki.

ja

$$w''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 C_3 = 0, \quad (4.144)$$

joten

$$C_3 = 0, \quad C_1 = 0. \quad (4.145)$$

Symmetriaehdosta $w' \left(\frac{L}{2} \right) = 0$ seuraa

$$C_2 + C_3 \alpha \sinh \alpha \frac{L}{2} + C_4 \alpha \cosh \alpha \frac{L}{2} - \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} P \left(\frac{L}{2} \right)^2 + \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{2} P \right] = 0, \quad (4.146)$$

ja ehdosta

$$EI_0 w''' \left(\frac{L}{2} \right) = -Q \left(\frac{L}{2} \right) = -\frac{P}{2} \quad (4.147)$$

saadaan

$$C_3 \alpha^3 \sinh \alpha \frac{L}{2} + C_4 \alpha^3 \cosh \alpha \frac{L}{2} - \frac{P}{2EI} = -\frac{P}{2EI_0}, \quad (4.148)$$

joten

$$C_4 = -\frac{P}{2} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \frac{1}{\alpha^3 \cosh \alpha \frac{L}{2}} \quad (4.149)$$

ja

$$C_2 = \frac{P}{2} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{4} P \frac{L^2}{4} + \frac{1}{2\alpha^2} P \right). \quad (4.150)$$

Taipuman lausekkeeksi tulee

$$w = \frac{P}{48EI} (3L^2 x - 4x^3) + \frac{P}{2\alpha^3} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \left(\alpha x - \frac{\sinh \alpha x}{\cosh \alpha \frac{L}{2}} \right). \quad (4.151)$$

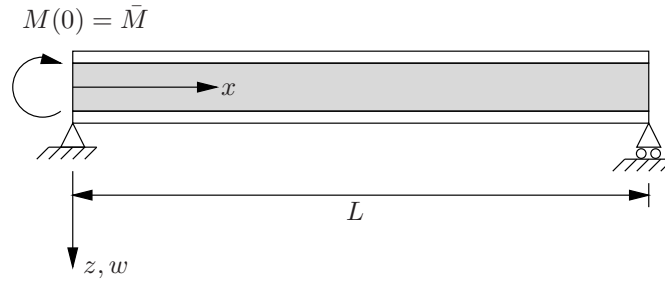
4.2.5 Sandwich-palkki

Sandwich-palkille pätevät differentiaaliyhtälöt (4.35), (4.41) ja (4.44), kun ytimen jäykkyysparametri K määritetään kaavalla

$$K = \frac{bG}{d}, \quad (4.152)$$

missä b on palkin leveys, G on ydinmateriaalin liukumoduuli ja d on ytimen paksuus.

Esimerkki 4.5 Määritetään sandwich-palkin taipuman lauseke, kun palkin vasemmassa päässä vaikuttaa momentti $M(0) = \bar{M}$.



Kuva 4.8 Sandwich-palkin päässä $x = 0$ momentti $M(0) = \bar{M}$.

Sandwich-palkin päässä $x = 0$ vaikuttavan momentin $M(0) = \bar{M}$ aiheuttama taivutusmomenttijakauma on

$$M(x) = \bar{M} \left(1 - \frac{x}{L}\right). \quad (4.153)$$

Taipuman neljännän kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cosh \alpha x + C_4 \sinh \alpha x + w_p(x), \quad (4.154)$$

jossa erikoisratkaisu on nyt

$$\begin{aligned} w_p(x) &= \frac{1}{\alpha^2 EI_0} \left[\frac{1}{D^2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{D^2}{\alpha^4} + \dots \right] \left[-\alpha^2 \frac{EI_0}{EI} \bar{M} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \right] \\ &= -\frac{\bar{M}}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L} \right) - \frac{\bar{M}}{\alpha^2 EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right). \end{aligned} \quad (4.155)$$

Integroimisvakiot C_i ratkaistaan reunaehdoista. Vasemman pään reunaehto riippuu tavasta, jolla momentti \bar{M} annetaan. Kolme muuta tarvittavaa reunaehto ovat kaikissa tapauksissa

$$w(0) = 0, \quad w(L) = 0, \quad w''(L) = 0, \quad (4.156)$$

ja näistä saadaan yhtälöt

$$C_1 + C_3 - \frac{\bar{M}}{\alpha^2 EI} = 0, \quad (4.157)$$

$$C_1 + C_2 L + C_3 \cosh \alpha L + C_4 \sinh \alpha L - \frac{\bar{M}}{EI} \frac{L^2}{3} = 0, \quad (4.158)$$

$$C_3 \alpha^2 \cosh \alpha L + C_4 \alpha^2 \sinh \alpha L = 0. \quad (4.159)$$

a) Vasemman pään pintakerrosten momenttien summa annettu

Otaksutaan, että vasemman pään kokonaismomentin osa, pintakerrosten momenttien summa, $M_1(0) + M_2(0)$ on annettu. Merkitään pintakerrosten momenttien summaksi

$$M_p = M_1 + M_2. \quad (4.160)$$

Tällöin $M_p = EI_0 w''$, missä $EI_0 = EI_1 + EI_2$. Neljänneksi reunaehdoksi saadaan

$$M_p(0) = -EI_0 w''(0) \quad (4.161)$$

tai

$$w''(0) = -\frac{M_p(0)}{EI_0}. \quad (4.162)$$

Reunaehdon (4.162) perusteella saadaan yhtälö

$$C_3\alpha^2 - \frac{\bar{M}}{EI} = -\frac{M_p(0)}{EI_0}, \quad (4.163)$$

josta ratkaistaan

$$C_3 = \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\bar{M}}{EI} - \frac{M_p(0)}{EI_0} \right), \quad (4.164)$$

ja muille vakioille saadaan lausekkeet

$$C_1 = \frac{1}{\alpha^2} \frac{M_p(0)}{EI_0}, \quad (4.165)$$

$$C_2 = \frac{\bar{M} L}{EI} \frac{1}{3} - \frac{M_p(0)}{\alpha^2 L EI_0}, \quad (4.166)$$

$$C_4 = -\frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\bar{M}}{EI} - \frac{M_p(0)}{EI_0} \right) \frac{\cosh \alpha L}{\sinh \alpha L}. \quad (4.167)$$

Taipuman lausekkeeksi tulee

$$w(x) = \frac{\bar{M}}{6EIL} (2xL^2 - 3x^2L + x^3) + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\bar{M}}{EI} - \frac{M_p(0)}{EI_0} \right) \left[\frac{x}{L} - 1 + \frac{\sinh \alpha(L-x)}{\sinh \alpha L} \right]. \quad (4.168)$$

b) Pintakerrosten siirtymäero $\Delta u(0)$ palkin päässä on nolla

Otaksutaan, että vasemmassa päässä $\Delta u(0) = 0$, jolloin myös leikkausvuo $q(0) = 0$. Tällöin tasapainoyhtälön perusteella $N'_1(0) = 0$, josta seuraa

$$M'(0) + EI_0 w'''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\bar{M}}{L} + EI_0 w'''(0) = 0 \quad (4.169)$$

eli

$$w'''(0) = \frac{\bar{M}}{EI_0 L}. \quad (4.170)$$

Reunaehdon (4.170) perusteella saadaan ratkaistua vakio

$$C_4 = \frac{\bar{M}}{\alpha^3 EI_0 L}, \quad (4.171)$$

ja muille vakioille saadaan tässä tapauksessa lausekkeet

$$C_3 = -C_4 \frac{\sinh \alpha L}{\cosh \alpha L} = -\frac{\bar{M}}{\alpha^3 EI_0 L} \frac{\sinh \alpha L}{\cosh \alpha L}, \quad (4.172)$$

$$C_1 = -C_3 + \frac{\bar{M}}{\alpha^2 EI} = \frac{\bar{M}}{\alpha^3 EI_0 L} \frac{\sinh \alpha L}{\cosh \alpha L} + \frac{\bar{M}}{\alpha^2 EI}, \quad (4.173)$$

$$C_2 = \frac{\bar{M} L}{EI} \frac{1}{3} - \frac{C_1}{L} = \frac{\bar{M} L}{EI} \frac{1}{3} - \frac{\bar{M}}{\alpha^3 EI_0 L^2} \frac{\sinh \alpha L}{\cosh \alpha L} - \frac{\bar{M}}{\alpha^2 EIL}. \quad (4.174)$$

Taipuman lausekkeeksi saadaan tässä reunaehtotapauksessa

$$w(x) = \frac{\bar{M}}{6EIL} (2xL^2 - 3x^2L + x^3) + \frac{\bar{M} \tanh \alpha L}{\alpha^3 EI_0 L} \left[1 - \frac{x}{L} - \frac{\sinh \alpha(L-x)}{\sinh \alpha L} \right]. \quad (4.175)$$

4.2.6 Aukollinen tukiseinä

Aukollisen, säännöllisen tukiseinän paarteen normaalivoima voidaan ratkaista aiemmin johdetusta differentiaaliyhtälöstä (4.35)

$$\frac{d^2 N_1(x)}{dx^2} - \alpha^2 N_1(x) = \beta M(x), \quad (4.176)$$

jossa ulokeseinän momentti $M(x)$ on tunnettu. Merkitään, että seinän korkeus on L ja kerroskorkeus on l . Poikki- tai sidepalkin korkeus on h , ja sen taivutusjäyhyys on I_s .

Paarteiden 1 ja 2 poikkipinta-alat ja taivutusjäyhydet ovat A_1, A_2, I_1 ja I_2 . Poikkisiteiden pituudenmuutokset otaksutaan merkityksettömän pieniksi, jolloin paarteet taipuvat samalla tavalla. Poikkisiteet taipuvat antisymmetrisesti keskipisteen suhteen. Poikkipalkkien jäykkyydet tasoitetaan jatkuvan väliaineen jäykkyydeksi jakamalla diskreetti jäyhyys I_s kerroskorkeudella l . Tällöin siteiden diskreetit leikkausvoimat leikkauskohdissa ajatellaan korvatuksi jatkuvalla leikkausvuolla $q(x)$.

Yhteensopivuusehdoksi siteiden leikkauspisteessä eli keskikohdassa saadaan

$$c \frac{dw(x)}{dx} - \frac{ld^3}{12EI_s} q(x) - \frac{1}{E} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) \int_0^x T(\eta) d\eta = 0, \quad (4.177)$$

missä

$$T(\eta) \equiv N_1(\eta) = \int_{\eta}^L q(\lambda) d\lambda \quad (4.178)$$

on paarteen numero yksi normaalivoima leikkauksessa $x = \eta$. Kaavan ensimmäinen termi on parteiden taipumasta aiheutuva siirtymäero leikkaukskohdassa, toinen termi aiheutuu poikkisiteen taipumasta ja kolmas termi paarteiden aksiaalisesta deformaatiosta.

Yhdistetyn rakenteen momentin ja käyritymän välinen riippuvaisuus on kaavan (4.22) eli

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = - \frac{M(x) + N_1(x)c}{EI_0} \quad (4.179)$$

perusteella

$$-E(I_1 + I_2) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = M(x) + cT(x), \quad (4.180)$$

missä $M(x)$ on siis ulkoisen kuorman aiheuttama momentti. Derivoimalla yllä johdettu yhteensopivuusehto (4.177) x :n suhteen tulee

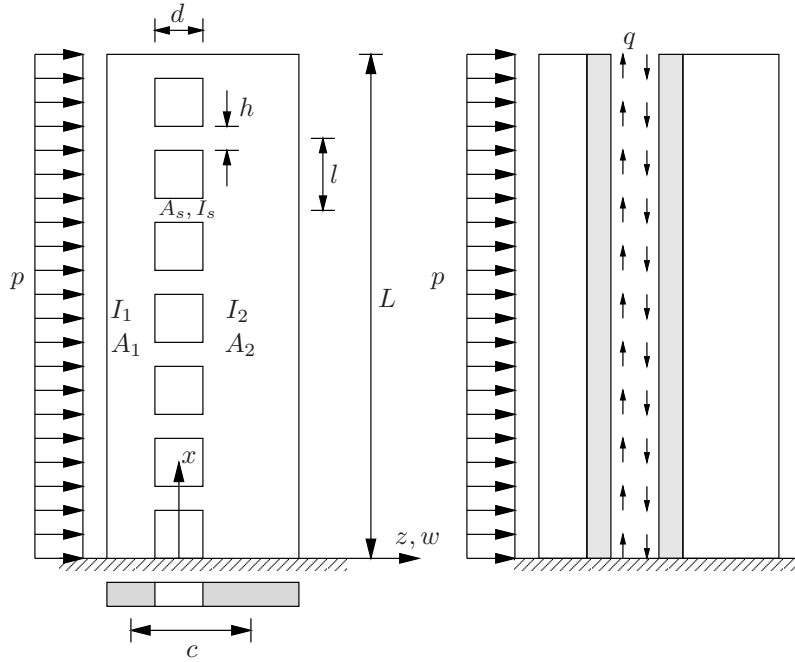
$$c \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - \frac{1}{K} \frac{dq(x)}{dx} - \frac{EA_0}{EA_p} T(x) = 0, \quad (4.181)$$

jossa on merkitty

$$K = \frac{12EI_s}{ld^3}, \quad EA_0 = EA_1 + EA_2, \quad EA_p = EA_1 \cdot EA_2. \quad (4.182)$$

Sijoittamalla taipuman toinen derivaatta kaavasta (4.180) viimeksi johdettuun yhteensopivuusyhtälöön (4.181) ja ottaen huomioon, että

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q(x), \quad (4.183)$$



Kuva 4.9 Aukollinen tukiseinä.

päädytään yhtälöön

$$\frac{c}{EI_0}(-M(x) - cT(x)) + \frac{1}{K} \frac{d^2 T(x)}{dx^2} - \frac{EA_0}{EA_p} T(x) = 0 \quad (4.184)$$

eli

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} - \alpha^2 T(x) = \beta M(x), \quad (4.185)$$

missä on merkitty

$$\alpha^2 = K \left(\frac{c^2}{EI_0} + \frac{EA_0}{EA_p} \right), \quad (4.186)$$

$$\beta = \frac{Kc}{EI_0}. \quad (4.187)$$

Huomataan, että yhtälö (4.185) on sama kuin aiemmin eri tavalla johdettu paarteen normaali voiman differentiaaliyhtälö.

Paarvoiman $N_1(x) = T(x)$ toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$T(x) = C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x + T_p(x). \quad (4.188)$$

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön yksityisratkaisu $T_p(x)$ voidaan esittää liitteen A kaavalla (A.98) muodossa

$$T_p(x) = -\frac{1}{\alpha^2} \left[1 + \frac{D^2}{\alpha^2} + \frac{D^4}{\alpha^4} + \dots \right] \beta M(x), \quad (4.189)$$

jossa on merkitty lyhyesti

$$D(\bullet) \equiv \frac{d(\bullet)}{dx}. \quad (4.190)$$

Vakiot C_1 ja C_2 ratkaistaan reunaehdoista.

Esimerkki 4.6 Määritetään tasaisen kuorman $p = p_0$ aiheuttama paarrevoima aukollisessa ulokeseinässä.

Tasaisen kuorman, $p = p_0 = \text{vakio}$, tapauksessa ulokkeen taivutusmomentti on

$$M(x) = -\frac{1}{2}p_0(L-x)^2, \quad (4.191)$$

ja paarrevoiman $T(x)$ toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisuksi tulee

$$T(x) = C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x + \frac{\beta}{\alpha^2} \left[\frac{1}{2}p_0(L-x)^2 + \frac{p}{\alpha^2} \right]. \quad (4.192)$$

Parrevoiman derivaatta on

$$T'(x) = C_1 \alpha \cosh \alpha x + C_2 \alpha \sinh \alpha x - \frac{\beta}{\alpha^2} [p_0(L-x)]. \quad (4.193)$$

Vakiot C_1 ja C_2 ratkaistaan reunaehdoista. Yhteensopivuusehdon (4.177) perusteella tuella $x = 0$ ehdosta $\frac{dw(0)}{dx} = 0$ seuraa

$$q(0) = 0 \quad \text{eli} \quad \frac{dT(0)}{dx} = 0, \quad (4.194)$$

josta saadaan

$$C_1 = \frac{\beta}{\alpha^3} p_0 L. \quad (4.195)$$

Huipulla $x = L$ on voimassa reunaehto

$$T(L) = 0, \quad (4.196)$$

eli

$$C_1 \sinh \alpha L + C_2 \cosh \alpha L + \frac{\beta}{\alpha^4} p_0 = 0, \quad (4.197)$$

josta sijoittamalla C_1 ratkaistaan

$$C_2 = -\frac{\beta p_0}{\alpha^4 \cosh \alpha L} (1 + \alpha L \sinh \alpha L). \quad (4.198)$$

Reunaehtojen perusteella normaalivoimalle saadaan ratkaisu

$$T(x) = p_0 \frac{\beta}{\alpha^2} \left[\frac{(L-x)^2}{2} + \frac{\cosh \alpha L - \cosh \alpha x - \alpha L \sinh \alpha(L-x)}{\alpha^2 \cosh \alpha L} \right]. \quad (4.199)$$

Paarteiden momentit ovat

$$M_i(x) = \frac{I_i}{I_0} \left[-\frac{1}{2}p(L-x)^2 + cT(x) \right], \quad i = 1, 2. \quad (4.200)$$

Derivoimalla yhtälö (4.180) kaksi kertaa x :n suhteen saadaan

$$-EI_0 \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{d^2 M(x)}{dx^2} + c \frac{d^2 T(x)}{dx^2}. \quad (4.201)$$

Eliminoimalla $T(x)$ ja $\frac{d^2 T(x)}{dx^2}$ kaavojen (4.180) ja (4.185) avulla sekä järjestelemällä termejä päädytään aiemmin johdettuun taipuman differentiaaliyhtälöön

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \alpha^2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \alpha^2 \frac{M(x)}{EI} - \frac{1}{EI_0} \frac{d^2 M(x)}{dx^2}, \quad (4.202)$$

missä edellä määriteltyyn tapaan

$$EI_0 = EI_1 + EI_2, \quad (4.203)$$

$$\alpha^2 = K \left(\frac{1}{EA_1} + \frac{1}{EA_2} + \frac{c^2}{EI_0} \right) \quad (4.204)$$

$$= K \left(\frac{EA_0}{EA_p} + \frac{c^2}{EI_0} \right),$$

$$\beta = \frac{Kc}{EI_0}, \quad (4.205)$$

$$EA_0 = EA_1 + EA_2, \quad EA_p = EA_1 \cdot EA_2, \quad (4.206)$$

$$EI = EI_0 + \frac{EA_p}{EA_0} c^2. \quad (4.207)$$

Taipuman neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cosh \alpha x + C_4 \sinh \alpha x + w_p(x), \quad (4.208)$$

joka yksityisratkaisu voidaan esittää muodossa, liite A, kaava (A.94),

$$w_p(x) = \frac{1}{\alpha^2 EI_0} \left[\frac{1}{D^2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{D^2}{\alpha^4} + \frac{D^4}{\alpha^6} + \dots \right] \left[\frac{d^2 M(x)}{dx^2} - \alpha^2 \frac{EI_0}{EI} M(x) \right]. \quad (4.209)$$

Ulokepalkin tapauksessa reunaehdot ovat

$$w(0) = 0, \quad \frac{dw(0)}{dx} = 0, \quad (4.210)$$

$$\frac{d^2 w(L)}{dx^2} = 0, \quad (4.211)$$

$$\frac{d^3 w(L)}{dx^3} - \alpha^2 \frac{dw(L)}{dx} = \frac{\alpha^2}{EI} \int_0^L M(\xi) d\xi - \frac{1}{EI_0} \frac{dM(L)}{dx}. \quad (4.212)$$

Reunaehtoon (4.212) päädytään sijoittamalla parrevoiman ja sen derivaatan kaavat

$$T = -\frac{1}{c}(M - EI_0 w'') \quad (4.213)$$

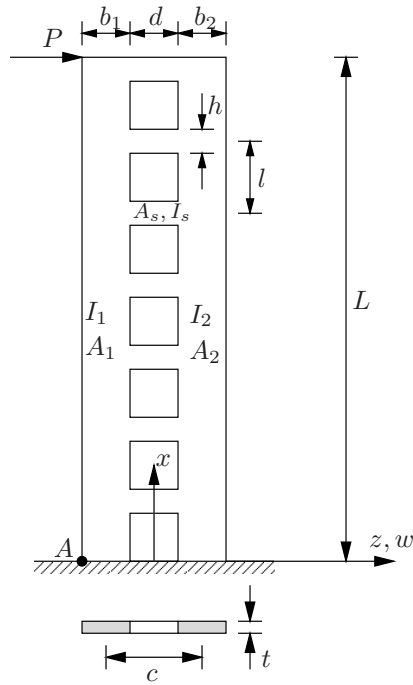
$$q = -T' = \frac{1}{c}(M' - EI_0 w''') \quad (4.214)$$

yhteensopivuusehtoon (4.177), jolloin tulee

$$cw'(L) - \frac{1}{K} \frac{1}{c} [M'(L) + EI_0 w'''(L)] + \frac{EA_0}{EA_p} \frac{1}{c} \int_0^L [M(s) + EI_0 w''(s)] ds. \quad (4.215)$$

Integroimalla viimeinen termi, ottamalla huomioon, että $w'(0) = 0$ ja laventamalla tekijällä Kc/EI_0 tulee

$$w'''(L) - \alpha^2 w'(L) = -\frac{M'(L)}{EI_0} + \frac{K}{EI_0} \frac{EA_0}{EA_p} \int_0^L M(s) ds, \quad (4.216)$$



Kuva 4.10 Pistekuorma aukollisen tukiseinän huipulla.

missä

$$\frac{K}{EI_0} \frac{EA_0}{EA_p} = \frac{\alpha^2}{EI}, \quad (4.217)$$

koska

$$EI = EI_0 + \frac{EA_p}{EA_0} c^2 \Rightarrow \frac{EI}{EI_0} \frac{EA_0}{EA_p} c^2 = \frac{EA_0}{EA_p} + \frac{c^2}{EI_0} = \frac{\alpha^2}{K}. \quad (4.218)$$

Esimerkki 4.7 Lasketaan kuvan 4.10 tukiseinän suurin jännitys.

Otaksutaan seinän korkeus $L = 24$ m, kerroskorkeus $l = 3$ m, paarteiden leveys $b_1 = b_2 = 2$ m, kamanapalkin korkeus ja pituus $h = 1$ m $d = 2$ m ja seinämän paksuus $t = 0.5$ m. Sidepalkin poikkileikkausarvot ovat

$$I_s = \frac{1}{12} \cdot 1^3 \cdot 0.5 \approx 0.04166 \text{ m}^4, \quad A_s = 0.5 \text{ m}^2. \quad (4.219)$$

Isotrooppisen kimmoisen aineen liukumoduuli on $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, missä Poissonin vakiolle otaksutaan arvo $\nu = 0.3$, jolloin $G = E/2.6$. Jäykkyyksikertoimeksi K saadaan

$$K = \frac{1}{l} \frac{1}{\frac{d^3}{12EI_s} + \frac{\zeta d}{GA_s}} \approx \frac{0.0351}{3} E \approx 0.0117E, \quad (4.220)$$

missä on otaksuttu kertoimelle ζ arvo $\zeta = 1.2$ (suorakaidepoikkileikkaus). Paarteiden taivutusjäyhyydet ovat

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12} \cdot 2^3 \cdot 0.5 \approx 0.333, \quad (4.221)$$

ja

$$I_0 = I_1 + I_2 \approx 0.667. \quad (4.222)$$

Kertoimet α ja β ovat

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \frac{K}{EI_0} \left[c^2 + I_0 \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) \right] \\ &= \frac{0.0117}{0.667} \left[4^2 + 0.667 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) \right] \approx 0.304,\end{aligned}\tag{4.223}$$

ja

$$\beta = \frac{Kc}{EI_0} \approx \frac{0.0117}{0.667} \cdot 4 \approx 0.0702.\tag{4.224}$$

Paarteen normaalivoima $N_1 \equiv T$ ratkaistaan yhtälöstä (4.185)

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \alpha^2T(x) = \beta M(x).\tag{4.225}$$

Pistekuorman tapauksessa ulokeseinän momentti on

$$M(x) = -P(L - x),\tag{4.226}$$

ja toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön (4.185) yksityisratkaisu $T_p(x)$ voidaan esittää liitteen A kaavalla (A.98) muodossa

$$\begin{aligned}T_p(x) &= -\frac{1}{\alpha^2} \left[1 + \frac{D^2}{\alpha^2} + \frac{D^4}{\alpha^4} + \dots \right] \beta M(x) \\ &= \frac{\beta}{\alpha^2} P(L - x),\end{aligned}\tag{4.227}$$

missä on merkitty $D \equiv \frac{d}{dx}$.

Paarrevoiman $T(x)$ toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisuksi tulee

$$T(x) = C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x + \frac{\beta}{\alpha^2} P(L - x),\tag{4.228}$$

ja paarrevoiman derivaatta on

$$\frac{dT(x)}{dx} = C_1 \alpha \cosh \alpha x + C_2 \alpha \sinh \alpha x - \frac{\beta}{\alpha^2} P.\tag{4.229}$$

Vakiot C_1 ja C_2 ratkaistaan reunaehdoista. Yhteensopivuusehdon (4.177) perusteella tuella $x = 0$ ehdosta $\frac{dw(0)}{dx} = 0$ seuraa

$$q(0) = 0 \quad \text{eli} \quad \frac{dT(0)}{dx} = 0,\tag{4.230}$$

ja huipulla $x = L$ on voimassa reunaehto

$$T(L) = 0.\tag{4.231}$$

Reunaehtoien perusteella integroimisvakioille saadaan

$$C_1 = \frac{\beta}{\alpha^3} P, \quad C_2 = -\frac{\beta}{\alpha^3} P \frac{\sinh \alpha L}{\cosh \alpha L},\tag{4.232}$$

ja normaalivoimalle tulee ratkaisu

$$T(x) = P \frac{\beta}{\alpha^3} \left[\alpha(L - x) - \frac{\sinh \alpha(L - x)}{\cosh \alpha L} \right].\tag{4.233}$$

Seinän tyvellä

$$T(0) = P \frac{\beta}{\alpha^3} (\alpha L - \tanh \alpha L). \quad (4.234)$$

Leikkausvuon jakauma on $q = -dN_1/dx = -dT/dx$

$$q(x) = P \frac{\beta}{\alpha^2} \left[1 - \frac{\cosh \alpha(L-x)}{\cosh \alpha L} \right]. \quad (4.235)$$

Paarteiden momentit ovat

$$M_i(x) = \frac{I_i}{I_0} [-P(L-x) + cT(x)], \quad i = 1, 2. \quad (4.236)$$

Esimerkin arvoilla

$$\alpha \approx 0.5516, \quad \alpha L \approx 13.24, \quad \tanh \alpha L \approx 1. \quad (4.237)$$

Paarvevoima tyvellä on

$$N_1(0) \equiv T(0) = P \frac{0.0702}{0.552^3} (13.24 - 1) \approx 5.12P, \quad (4.238)$$

ja paarremomentti on vastaavasti

$$M_1(0) = \frac{1}{2} (-24P + 4 \cdot 5.12P) \approx -1.76P. \quad (4.239)$$

Jännitys pisteessä A on

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{N_1}{A_1} + \frac{M_1}{I_1} (-1) \\ &= \frac{5.12P}{1} - \frac{1.76P}{0.333} (-1) \approx 10.4P. \end{aligned} \quad (4.240)$$

Esimerkki 4.8 Määritetään edellisen esimerkin tukiseinän taipuma.

Huipun $x = L$ taipuma voidaan laskea esimerkiksi virtuaalisen voiman periaatteella

$$\tilde{1}w_1(L) = \int_0^L \tilde{M} \frac{M_1}{EI_1} dx, \quad (4.241)$$

missä $\tilde{1}$ on virtuaalinen voima seinän huipulla kysytyn siirtymän $w_1(L)$ suuntaan, w_1 on paarteiden 1 taipuma, M_1 on paarteiden 1 momentti ja EI_1 on paarteiden 1 taivutusjäykkyys. Paarteiden ja samalla palkin käyritymä on $d^2w_1/dx^2 = d^2w/dx^2 = M_1/EI_1$. Sijoittamalla paarremomentin kaava

$$M_1(x) = \frac{EI_1}{EI_0} [M(x) + N_1(x)c], \quad (4.242)$$

virtuaalinen momentti ja taivutusmomentti

$$\tilde{M}(x) = x - L, \quad M(x) = P(x - L) \quad (4.243)$$

sekä paarvevoiman kaava

$$N_1(x) = P \frac{\beta}{\alpha^3} \left[\alpha(L-x) - \frac{\sinh \alpha(L-x)}{\cosh \alpha L} \right] \quad (4.244)$$

virtuaalisen voiman yhtälöön tulee

$$\begin{aligned}
 w_1(L) &= \int_0^L (x-L) \frac{M(x) + N_1(x)c}{EI_0} dx \\
 &= \int_0^L \frac{P(x-L)^2}{EI_0} dx + \int_0^L (x-L) \frac{N_1 c}{EI_0} dx \\
 &= \int_0^L \frac{P(x-L)^2}{EI_0} dx + \int_0^L (x-L) \frac{P\beta c}{\alpha^3 EI_0} \left[\alpha(L-x) - \frac{\sinh \alpha(L-x)}{\cosh \alpha L} \right] dx,
 \end{aligned} \tag{4.245}$$

missä

$$\int_0^L (x-L) \sinh \alpha(L-x) dx = -\frac{L}{\alpha} \cosh \alpha L + \frac{1}{\alpha^2} \sinh \alpha L, \tag{4.246}$$

ja taipumalle saadaan lauseke

$$w_1(L) = \frac{P}{EI_0} \frac{L^3}{3} + \frac{P\beta c}{\alpha^3 EI_0} \left(-\alpha \frac{L^3}{3} + \frac{L}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \tanh \alpha \right). \tag{4.247}$$

Ottamalla huomioon yhteys

$$\frac{\beta c}{\alpha^2} = 1 - \frac{EI_0}{EI} \tag{4.248}$$

taipuman kaava voidaan muuntaa muotoon

$$w_1(L) = \frac{P}{EI} \frac{L^3}{3} + P \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \left(\frac{L}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^3} \tanh \alpha L \right). \tag{4.249}$$

Esimerkki 4.9 Ratkaistaan edellisten esimerkkien tukiseinän taipuma ja voima taipuman differentiaaliyhtälön avulla.

Pistevoiman kuormittaman ulokeseinän taivutusmomentti on

$$M(x) = P(x-L). \tag{4.250}$$

Taipuman neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cosh \alpha x + C_4 \sinh \alpha x + w_p(x), \tag{4.251}$$

jonka yksityisratkaisu voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned}
 w_p(x) &= \frac{1}{\alpha^2 EI_0} \left[\frac{1}{D^2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{D^2}{\alpha^4} + \frac{D^4}{\alpha^6} + \dots \right] \left[\frac{d^2 M(x)}{dx^2} - \alpha^2 \frac{EI_0}{EI} M(x) \right] \\
 &= -\frac{1}{EI} \frac{1}{D^2} P(x-L) - \frac{1}{\alpha^2 EI} P(x-L) \\
 &= -\frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} \right) - \frac{P}{\alpha^2 EI} (x-L).
 \end{aligned} \tag{4.252}$$

Reunaehdoista $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$ ja $w''(L) = 0$ seuraa

$$C_1 + C_3 = -\frac{PL}{\alpha^2 EI}, \tag{4.253}$$

$$C_2 + \alpha C_4 = \frac{P}{\alpha^2 EI}, \tag{4.254}$$

$$C_3 \cosh \alpha L + C_4 \sinh \alpha L = 0, \quad (4.255)$$

ja reunaehdon (4.212) perusteella tulee

$$C_3 \alpha^3 \sinh \alpha L + C_4 \alpha^3 \cosh \alpha L - \frac{P}{EI} - \alpha^2 \left[C_2 + C_3 \alpha \sinh \alpha L + C_4 \alpha \cosh \alpha L - \frac{P}{EI} \left(\frac{L^2}{2} - L^2 \right) - \frac{P}{\alpha^2 EI} \right] = \frac{\alpha^2}{EI} \left(-P \frac{L^2}{2} \right) - \frac{P}{EI_0} \quad (4.256)$$

eli

$$-\alpha^2 C_2 = -\frac{P}{EI_0}, \quad (4.257)$$

josta seuraa

$$C_2 = \frac{P}{\alpha^2 EI_0}, \quad (4.258)$$

ja muiden reunaehtojen avulla saadaan

$$C_4 = -\frac{1}{\alpha} C_2 + \frac{P}{\alpha^3 EI} = \frac{P}{\alpha^3} \left(\frac{1}{EI} - \frac{1}{EI_0} \right), \quad (4.259)$$

$$C_3 = -\tanh \alpha L C_4 = -\tanh \alpha L \frac{P}{\alpha^3} \left(\frac{1}{EI} - \frac{1}{EI_0} \right), \quad (4.260)$$

$$C_1 = -C_3 - \frac{PL}{\alpha^2 EI} = \tanh \alpha L \frac{P}{\alpha^3} \left(\frac{1}{EI} - \frac{1}{EI_0} \right) - \frac{PL}{\alpha^2 EI}. \quad (4.261)$$

Taipuman lausekkeeksi saadaan

$$w(x) = -\frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} \right) + \frac{P}{\alpha^3} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) (\alpha x - \tanh \alpha L + \tanh \alpha L \cosh \alpha x - \sinh \alpha x). \quad (4.262)$$

Huipun taipumaksi tulee

$$w(L) = \frac{P}{EI} \frac{L^3}{3} + P \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \left(\frac{L}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^3} \tanh \alpha L \right). \quad (4.263)$$

Sijoittamalla momentin ja taipuman lausekkeet parrevoiman kaavaan

$$N_1 = -\frac{1}{c} \left[M + EI_0 \frac{d^2 w}{dx^2} \right] \quad (4.264)$$

tulee

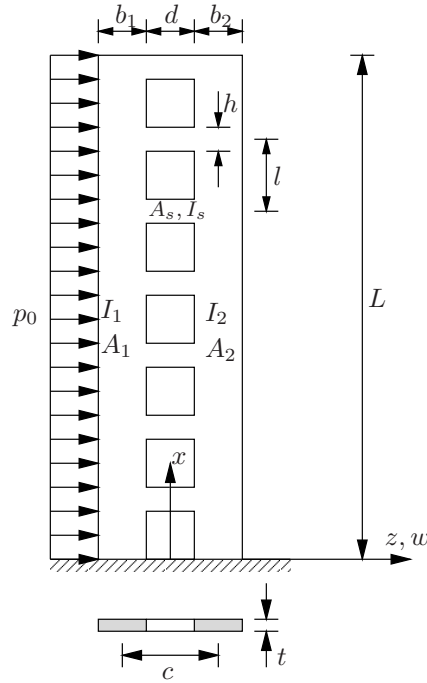
$$N_1 = -\frac{1}{c} \left[P(x-L) + P \frac{EI_0}{\alpha} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) (\tanh \alpha L \cosh \alpha x - \sinh \alpha x) - \frac{EI_0}{EI} P(x-L) \right]. \quad (4.265)$$

Ottamalla jälleen huomioon yhteys

$$1 - \frac{EI_0}{EI} = \frac{\beta c}{\alpha^2} \quad (4.266)$$

saadaan parrevoiman $T = N_1$ kaava muotoon

$$T(x) = P \frac{\beta}{\alpha^3} \left[\alpha(L-x) - \frac{\sinh \alpha(L-x)}{\cosh \alpha L} \right]. \quad (4.267)$$



Kuva 4.11 Tukiseinän tasainen kuorma.

Esimerkki 4.10 Määritetään tukiseinän taipuma tasaisesta kuormasta.

Tasaisen kuorman $p = p_0$ kuormittaman ulokeseinän taivutusmomentti on

$$M(x) = -\frac{1}{2}p_0(L-x)^2. \quad (4.268)$$

Taipuman differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$w(x) = C_1 + C_2x + C_3 \cosh \alpha x + C_4 \sinh \alpha x + w_p(x), \quad (4.269)$$

jonka yksityisratkaisuosa on

$$\begin{aligned} w_p(x) &= \frac{1}{\alpha^2 EI_0} \left[\frac{1}{D^2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{D^2}{\alpha^4} + \frac{D^4}{\alpha^6} + \dots \right] \left[-p_0 + \alpha^2 \frac{EI_0}{EI} \frac{1}{2} p_0 (L-x)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{\alpha^2 EI_0} \left(\frac{1}{2} p_0 x^2 + \frac{p_0}{\alpha^2} \right) + \frac{1}{EI} \frac{1}{24} p_0 (L-x)^4 + \frac{1}{\alpha^2 EI} \frac{1}{2} p_0 (L-x)^2 + \frac{1}{\alpha^4 EI} p_0. \end{aligned} \quad (4.270)$$

Reunaehdoista $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $w''(L) = 0$ seuraa

$$C_1 + C_3 = \frac{p_0}{\alpha^4 EI_0} - \frac{p_0}{EI} \left(\frac{L^4}{24} + \frac{L^2}{2\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} \right), \quad (4.271)$$

$$C_2 + \alpha C_4 = \frac{p_0}{EI} \left(\frac{L^3}{6} + \frac{L}{\alpha^2} \right), \quad (4.272)$$

$$C_3 \cosh \alpha L + C_4 \sinh \alpha L = \frac{1}{\alpha^4} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) p_0, \quad (4.273)$$

ja reunaehdon (4.212) perusteella saadaan

$$\begin{aligned} &C_3 \alpha^3 \sinh \alpha L + C_4 \alpha^3 \cosh \alpha L \\ &- \alpha^2 \left[C_2 + C_3 \alpha \sinh \alpha L + C_4 \alpha \cosh \alpha L - \frac{p_0 L}{\alpha^2 EI_0} \right] = \frac{\alpha^2}{EI} \left(-\frac{p_0 L^3}{6} \right) \end{aligned} \quad (4.274)$$

eli

$$-\alpha^2 C_2 + \frac{p_0 L}{EI_0} = -\frac{\alpha^2 p_0 L^3}{6EI}, \quad (4.275)$$

josta seuraa

$$C_2 = \frac{p_0 L}{\alpha^2 EI_0} + \frac{p_0 L^3}{6EI}. \quad (4.276)$$

Reunaehdoista ratkaistaan

$$C_4 = \frac{p_0 L}{\alpha^3} \left(\frac{1}{EI} - \frac{1}{EI_0} \right), \quad (4.277)$$

$$C_3 = \frac{p_0}{\alpha^4} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \frac{1}{\cosh \alpha L} + \frac{p_0 L}{\alpha^3} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \tanh \alpha L, \quad (4.278)$$

$$C_1 = \frac{p_0}{\alpha^4 EI_0} - \frac{p_0}{EI} \left(\frac{L^4}{24} + \frac{L^2}{2\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} \right) - \frac{p_0}{\alpha^4} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \frac{1}{\cosh \alpha L} - \frac{p_0 L}{\alpha^2} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \tanh \alpha L, \quad (4.279)$$

ja taipuman lausekkeeksi saadaan

$$w(x) = \frac{p_0}{24EI} [(L-x)^4 + 4L^3x - L^4] + \frac{p_0}{\alpha^4} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \left[\alpha^2 \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{1}{\cosh \alpha L} (\cosh \alpha x + \alpha L \sinh \alpha(L-x) - 1 - \alpha L \sinh \alpha L) \right]. \quad (4.280)$$

Huipun $x = L$ taipumaksi saadaan

$$w(L) = \frac{p_0 L^4}{8EI} + \frac{p_0}{\alpha^4} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \left[\alpha^2 \frac{L^2}{2} + \frac{1}{\cosh \alpha L} (\cosh \alpha L - 1 - \alpha L \sinh \alpha L) \right]. \quad (4.281)$$

Parrevoima on tässä kuormitustapauksessa

$$N_1 = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{2} p_0 (L-x)^2 - EI_0 \frac{d^2 w}{dx^2} \right], \quad (4.282)$$

missä

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{p_0}{EI} \frac{1}{2} (L-x)^2 + \frac{p_0}{\alpha^4} \left(\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI} \right) \left[-\alpha^2 + \frac{1}{\cosh \alpha L} (\alpha^2 \cosh \alpha x + \alpha^3 L \sinh \alpha(L-x)) \right]. \quad (4.283)$$

Ottamalla huomioon yhteys

$$1 - \frac{EI_0}{EI} = \frac{\beta c}{\alpha^2} \quad (4.284)$$

ja sijoittamalla taipuman toinen derivaatta parrevoiman kaavaan tulee

$$N_1 = \frac{p_0 \beta}{\alpha^2} \left[\frac{1}{2} (L-x)^2 + \frac{\cosh \alpha L - \cosh \alpha x - \alpha L \sinh \alpha(L-x)}{\alpha^2 \cosh \alpha L} \right]. \quad (4.285)$$

Leikkausvuon jakauma on

$$q(z) = -\frac{dN_1}{dx} \quad (4.286)$$

eli

$$q(x) = \frac{p_0\beta}{\alpha^2} \left[(L-x) + \frac{\sinh \alpha x - \alpha L \cosh \alpha(L-x)}{\alpha \cosh \alpha L} \right]. \quad (4.287)$$

Luku 5

Ympyrälaatta

5.1 Ohuen laatan yhtälöt suorakaidekoordinaatistossa

Kirchhoffin laattateorian mukaan ohuen laatan muodonmuutokset ovat

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z \kappa_x, \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = z \kappa_y, \quad (5.2)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2z \kappa_{xy}. \quad (5.3)$$

Laatan käyritymät ovat $\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ ja $\kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

Laatan otaksutaan olevan tasojännitystilassa, ja yleistetyn Hooken lain mukaan isotrooppisen kimmoisen aineen konstitutiiviset yhtälöt ovat

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad (5.4)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad (5.5)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad (5.6)$$

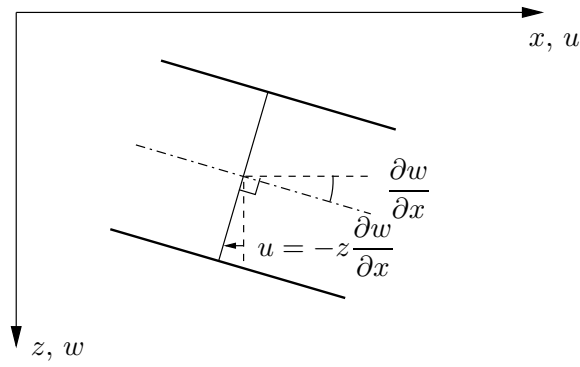
missä liukumoduuli on

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (5.7)$$

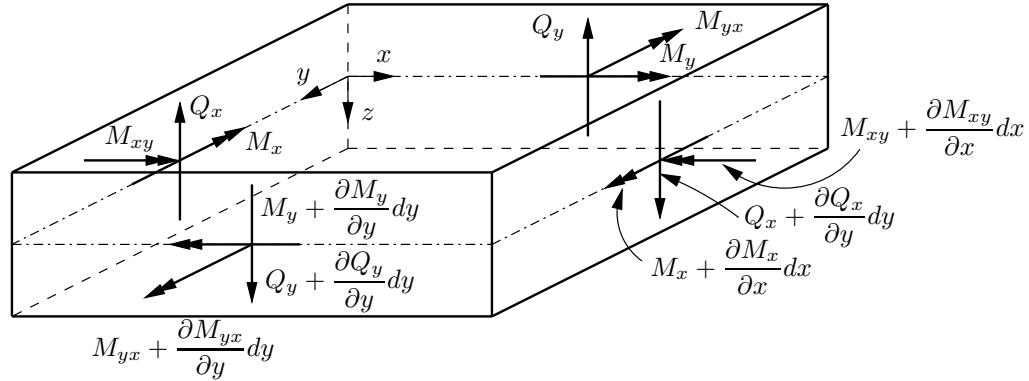
Laatan taivutusmomentit määritellään kaavoilla

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} z \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz, \quad (5.8)$$

missä h on laatan paksuus, ja laatan pintatasot ovat $z = \pm \frac{h}{2}$. Sijoittamalla jännitykset



Kuva 5.1 Laatan kiertymä ja siirtymä.



Kuva 5.2 Laatan tasapainoehdot.

muodonmuutosten avulla lausuttuina ja integroimalla laatan paksuuden yli tulee

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

missä

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (5.10)$$

on laatan taivutusjäykkyys.

Laatan alkioon $dx \times dy$ vaikuttavien akselin z suuntaisten voimien tasapainoehto on kuvan 5.2 perusteella

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p(x, y) = 0. \quad (5.11)$$

Momentin tasapainoehdot y - ja x -akselin suhteen ovat

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0. \quad (5.13)$$

Eliminoimalla leikkausvoimat saadaan pystysuora tasapainoehto (5.11) muotoon

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p(x, y) = 0. \quad (5.14)$$

Lausumalla momentit taipuman derivaattojen avulla kaavoilla (5.9) tulee

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p(x, y). \quad (5.15)$$

5.1.1 Laatan reunaehdot

Vapaasti tuettu reuna

Vapaasti tuetuilla reunoilla $x = 0$ ja $x = a$

$$w(0, y) = M_x(0, y) = w(a, y) = M_x(a, y) = 0, \quad (5.16)$$

missä

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (5.17)$$

Koska reunat $x = 0$ ja $x = a$ eivät taivu, saadaan momentin M_x reunaehdoista

$$\frac{\partial^2 w(0, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(a, y)}{\partial x^2} = 0. \quad (5.18)$$

Vapaasti tuetuilla reunoilla $y = 0$ ja $y = b$

$$w(x, 0) = M_y(x, 0) = w(x, b) = M_y(x, b) = 0, \quad (5.19)$$

missä

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (5.20)$$

Koska reunat $y = 0$ ja $y = b$ eivät taivu, saadaan momentin M_y reunaehdoista

$$\frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w(x, b)}{\partial y^2} = 0. \quad (5.21)$$

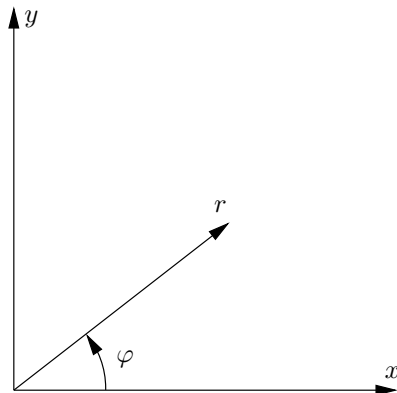
Jäykästi kiinnitetty reuna

Jäykästi kiinnitetyillä reunoilla $x = 0$ ja $x = a$

$$w(0, y) = \frac{\partial w(0, y)}{\partial x} = w(a, y) = \frac{\partial w(a, y)}{\partial x} = 0, \quad (5.22)$$

ja vastaavasti reunoilla $y = 0$ ja $y = b$

$$w(x, 0) = \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = w(x, b) = \frac{\partial w(x, b)}{\partial y} = 0. \quad (5.23)$$



Kuva 5.3 Sylinterikoordinaatit.

Vapaa reuna

Vapaalla reunalla taivutusmomentti ja korvikeleikkausvoima ovat nollia tai tasapainossa annetun reunakuorman kanssa. Reunoilla $x = 0$ ja $x = a$

$$M_x(0, y) = V_x(0, y) = M_x(a, y) = V_x(a, y) = 0, \quad (5.24)$$

missä

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\ &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Reunoilla $y = 0$ ja $y = b$

$$M_y(x, 0) = V_y(x, 0) = M_y(x, b) = V_y(x, b) = 0, \quad (5.26)$$

missä

$$\begin{aligned} V_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \\ &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \end{aligned} \quad (5.27)$$

5.2 Laatan differentiaaliyhtälö sylinterikoordinaatistossa

Sylinterikoordinaattien (r, φ, z) ja suorakulmaisten koordinaattien (x, y, z) väliset muunnoskaavat ovat

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (5.28)$$

ja niiden käänteiset kaavat ovat

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \varphi = \arctan \left(\frac{y}{x} \right). \quad (5.29)$$

Koordinaattien muunnoskaavojen perusteella saadaan

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi, \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r}. \quad (5.31)$$

Derivoimalla taipumafunktio $w(r, \varphi)$ ketjusäännön mukaisesti tulee

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial w}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sin \varphi}{r} \right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Soveltamalla operaattoria

$$\frac{\partial(\bullet)}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial(\bullet)}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \varphi} \quad (5.33)$$

derivaatan $\partial w / \partial x$ kaavaan saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - 2 \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} + 2 \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Samalla tavalla muodostetaan lauseke taipumafunktion toiselle y -derivaatalle

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 2 \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - 2 \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \\ &\quad + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (5.35)$$

ja sekaderivaatalle

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\cos 2\varphi}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\cos 2\varphi^2}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \\ &\quad - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Yllä olevien kaavojen perusteella Laplacen operaattori

$$\nabla^2(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial y^2} \quad (5.37)$$

kohdistettuna taipumafunktioon $w(x, y)$ antaa kaavan

$$\nabla^2 w(x, y) = \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial \varphi^2}. \quad (5.38)$$

Laatan taipuman differentiaaliyhtälö

$$\nabla^2[\nabla^2 w(x, y)] = \frac{p(x, y)}{D} \quad (5.39)$$

muuntuu sylinterikoordinaatistossa muotoon

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left[\frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] = \frac{p(r, \varphi)}{D}, \quad (5.40)$$

missä $p(r, \varphi)$ on jakautunut, laatan tasoa vastaan kohtisuora kuorma,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (5.41)$$

on laatan taivutusjäykkyys ja h on laatan paksuus.

Taipuman differentiaaliyhtälön ratkaisu

$$w(r, \varphi) = w_h(r, \varphi) + w_p(r, \varphi) \quad (5.42)$$

koostuu homogeenisen osan ratkaisusta ja yksityisratkaisusta.

Asettamalla taipumafunktion toisen derivaatan kaavoissa $\varphi = 0$, saadaan

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r^2}, \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial \varphi^2}, \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Laatan käyritymien lausekkeet ovat siten

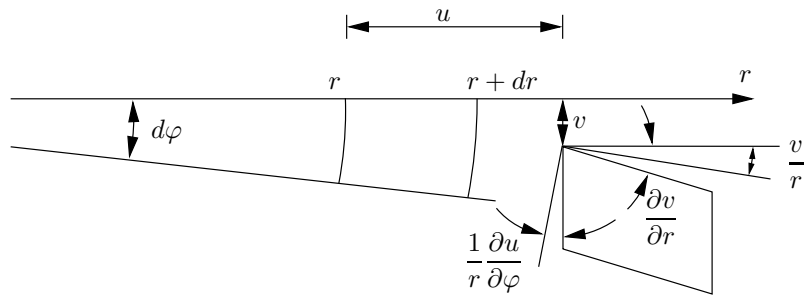
$$\kappa_r = -\frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r^2}, \quad (5.46)$$

$$\kappa_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial \varphi^2}, \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{r\varphi} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} \\ &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Käyritymien avulla lausutaan laatan muodonmuutokset

$$\varepsilon_r(r, \varphi, z) = z \kappa_r(r, \varphi), \quad (5.49)$$



Kuva 5.4 Muodonmuutokset sylinterikoordinaatistossa.

$$\varepsilon_\varphi(r, \varphi, z) = z\kappa_\varphi(r, \varphi), \quad (5.50)$$

$$\gamma_{r\varphi}(r, \varphi, z) = 2z\kappa_{r\varphi}(r, \varphi). \quad (5.51)$$

Käyritymien lausekkeet voidaan johtaa myös tarkastelemalla ensin muodonmuutoksia sylinterikoordinaatistossa, jossa siirtymäkomponentit ovat

$$u = u(r, \varphi, z), \quad v = v(r, \varphi, z). \quad (5.52)$$

Kuvan 5.4 perusteella saadaan muodonmuutoskomponentit

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (5.53)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad (5.54)$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, \quad (5.55)$$

missä viimeinen termi poistaa jäykänkappaleen liikkeen liukumasta.

Ohuen laatan teorian otaksumien perusteella tarkasteltavan pisteen siirtymä laatan tason suunnassa on verrannollinen pisteen etäisyyteen keskipinnalta ja kiertymään eli

$$u(r, \varphi, z) = -z \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r}, \quad v(r, \varphi, z) = -z \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial \varphi}, \quad (5.56)$$

ja laatan taipumafunktio ei riipu koordinaatista z eli

$$w(r, \varphi, z) = w(r, \varphi). \quad (5.57)$$

Sijoittamalla siirtymien kaavat muodonmuutoskomponenttien kaavoihin saadaan

$$\varepsilon_r(r, \varphi, z) = z\kappa_r(r, \varphi), \quad (5.58)$$

$$\varepsilon_\varphi(r, \varphi, z) = z\kappa_\varphi(r, \varphi), \quad (5.59)$$

$$\gamma_{r\varphi}(r, \varphi, z) = 2z\kappa_{r\varphi}(r, \varphi), \quad (5.60)$$

missä κ_r ja κ_φ ovat laatan käyritymät, ja $\kappa_{r\varphi}$ on laatan vääntymä. Taipuman avulla lausuttuina käyritymiksi ja vääntymäksi saadaan

$$\kappa_r = -\frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r^2} \quad (5.61)$$

$$\kappa_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial \varphi^2}, \quad (5.62)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{r\varphi} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} \\ &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right], \end{aligned} \quad (5.63)$$

kuten edellä toisella tavalla johtamalla.

5.3 Taivutusmomentit

Taivutusmomentit määritetään kaavoilla

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_r dz, \quad M_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_\varphi dz, \quad M_{r\varphi} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{r\varphi} dz, \quad (5.64)$$

missä $M_{r\varphi} = M_{\varphi r}$, koska $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r}$.

Laatta on tasojäntitystilassa, ja tällöin ovat voimassa konstitutiiviset yhtälöt (yleistetty Hooken laki)

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\varphi), \quad (5.65)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_r), \quad (5.66)$$

$$\tau_{r\varphi} = G \gamma_{r\varphi}, \quad (5.67)$$

missä G on liukumoduuli

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (5.68)$$

Sijoittamalla momentin M_r kaavaan yleistetty Hooken laki ja muodonmuutosten kaavat tulee

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \frac{E}{1 - \nu^2} (\kappa_r + \nu \kappa_\varphi) dz = D (\kappa_r + \nu \kappa_\varphi), \quad (5.69)$$

missä D on laatan taivutusjäykkyys

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (5.70)$$

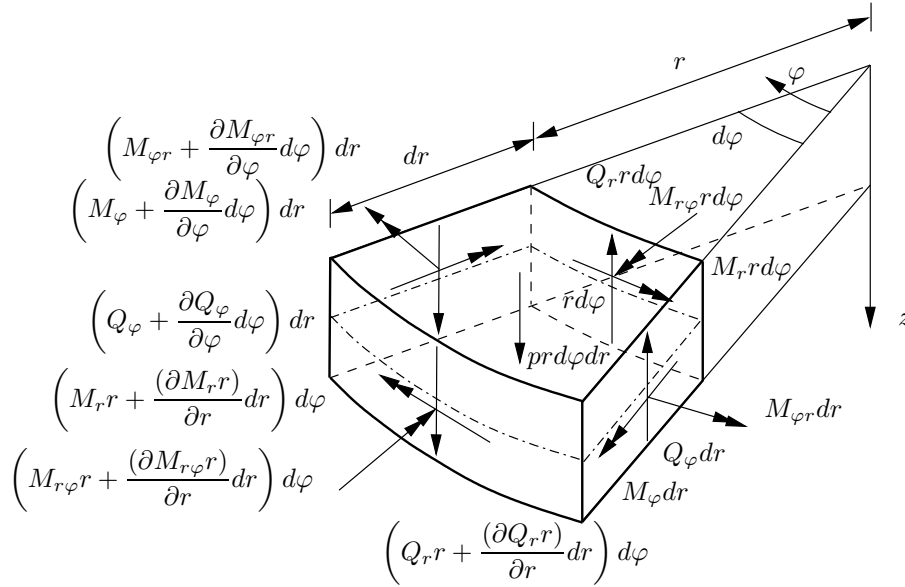
Samalla tavalla johdetaan

$$M_\varphi = D (\kappa_\varphi + \nu \kappa_r), \quad (5.71)$$

$$M_{r\varphi} = D (1 - \nu) \kappa_{r\varphi}. \quad (5.72)$$

Lausumalla käyritymät ja vääntymä taipumafunktion avulla päädytään laatan momenttien ja käyritymien välisiin kaavoihin

$$M_r = -D \left\{ \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r^2} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] \right\}, \quad (5.73)$$



Kuva 5.5 Laatan alkion tasapaino.

$$M_\varphi = -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r^2} \right], \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned} M_{r\varphi} &= -D(1-\nu) \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} \right] \\ &= -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned} \quad (5.75)$$

5.4 Tasapainoyhtälöt

Kuvan 5.5 perusteella johdetaan laatan tasoa vastaan kohtisuorien voimien tasapainoehto

$$\frac{\partial(Q_r r)}{\partial r} + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + p(r, \varphi)r = 0. \quad (5.76)$$

Koordinaattia r vastaan kohtisuorassa suunnassa vaikuttavien momenttien tasapainoyhtälöksi tulee

$$\frac{\partial(M_r r)}{\partial r} + \frac{\partial M_{\varphi r}}{\partial \varphi} - M_\varphi - Q_r r = 0, \quad (5.77)$$

ja r :n ympäri kiertävien momenttien tasapainoehto on

$$\frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial(M_{r\varphi} r)}{\partial r} + M_{\varphi r} - Q_\varphi r = 0. \quad (5.78)$$

Sijoittamalla leikkausvoimat

$$Q_r r = \frac{\partial(M_r r)}{\partial r} + \frac{\partial M_{\varphi r}}{\partial \varphi} - M_\varphi, \quad (5.79)$$

$$Q_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial(M_{r\varphi} r)}{\partial r} + \frac{1}{r} M_{\varphi r} \quad (5.80)$$

kahdesta jälkimmäisestä tasapainoyhtälöstä ratkaistuina akselin z suuntaisten voimien tasapainoehtoon tulee

$$\frac{\partial^2(M_r r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2(r M_{r\varphi})}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\partial M_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} + p(r, \varphi) r = 0. \quad (5.81)$$

Leikkausvoimat voidaan kirjoittaa edelleen muotoon

$$Q_r = \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} M_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} M_\varphi, \quad (5.82)$$

$$Q_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2}{r} M_{r\varphi}. \quad (5.83)$$

Lausumalla momentit käyritymien avulla ja nämä edelleen taipumafunktion derivaattojen avulla päädytään leikkausvoimien kaavoihin

$$\begin{aligned} Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] \\ &= -D \frac{\partial \Delta w(r, \varphi)}{\partial r}, \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] \\ &= -D \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta w(r, \varphi)}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (5.85)$$

joissa

$$\Delta(\bullet) = \nabla^2(\bullet) \quad (5.86)$$

on Laplacen operaattori.

Korvikeleikkausvoimaksi reunalla $r =$ vakio saadaan

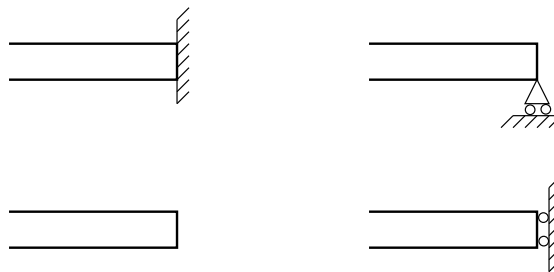
$$\begin{aligned} V_r &= Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} \\ &= -D \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [\nabla^2 w(r, \varphi)] + \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

ja reunalla $\varphi =$ vakio

$$\begin{aligned} V_\varphi &= Q_\varphi + \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial r} \\ &= -D \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\nabla^2 w(r, \varphi)] + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Kimmoisen laatan jännityskomponentit ovat

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{h^3} z, \quad \sigma_\varphi = \frac{12M_\varphi}{h^3} z, \quad \tau_{r\varphi} = \frac{12M_{r\varphi}}{h^3} z. \quad (5.89)$$



Kuva 5.6 Reunaehdot, a) jäykkä kiinnitys, b) vapaasti tuettu reuna, c) vapaa reuna, d) liukuva reuna.

5.5 Reunaehdot reunalla $r = \text{vakio}$

1. Jäykkästi kiinnitetyllä reunalla $r = a$

$$w(a, \varphi) = 0, \quad \frac{\partial w(a, \varphi)}{\partial r} = 0. \quad (5.90)$$

2. Vapaasti tuetulla reunalla

$$w(a, \varphi) = 0, \quad M_r(a, \varphi) = 0 \quad (5.91)$$

eli

$$\frac{\partial^2 w(a, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w(a, \varphi)}{\partial r} = 0. \quad (5.92)$$

3. Vapaalla reunalla

$$M_r(a, \varphi) = 0, \quad V_r(a, \varphi) = 0. \quad (5.93)$$

4. Liukuvalla reunalla (liukutuella)

$$\frac{\partial w(a, \varphi)}{\partial r} = 0, \quad V_r(a, \varphi) = 0. \quad (5.94)$$

5.6 Pyörähdyssymmetrinen taivutus

Ympyrälaatan taipuma on pelkästään koordinaatin r funktio, jos kuormitus ja reunaehdot eivät riipu koordinaatista φ . Tällöin laatan taipumafunktion differentiaaliyhtälö supistuu muotoon

$$\nabla^4 w = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left[\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right] = \frac{p(r)}{D}. \quad (5.95)$$

Jännitysresultantit ovat

$$M_r(r) = -D \left[\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right], \quad (5.96)$$

$$M_\varphi(r) = -D \left[\frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} + \nu \frac{d^2 w(r)}{dr^2} \right], \quad (5.97)$$

$$\begin{aligned}
Q_r(r) &= -D \frac{d}{dr} \left[\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right] \\
&= -D \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dw(r)}{dr} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.98}$$

Taivutusmomentteja vastaavat jännityskomponentit ovat

$$\sigma_r(r, z) = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left[\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right], \tag{5.99}$$

$$\sigma_\varphi(r, z) = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left[\frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} + \nu \frac{d^2 w(r)}{dr^2} \right]. \tag{5.100}$$

Ottamalla huomioon identiteetti

$$\begin{aligned}
\nabla^2 w(r) &= \frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} \\
&= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dw(r)}{dr} \right]
\end{aligned} \tag{5.101}$$

saadaan taipuman differentiaaliyhtälö muotoon

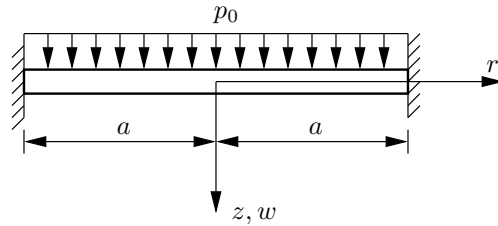
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dw(r)}{dr} \right] \right\} \right) = \frac{p(r)}{D}. \tag{5.102}$$

Laatan taipuma ratkaistaan integroimalla taipumafunktion differentiaaliyhtälö koordinaatin r suhteen neljä kertaa peräkkäin eli

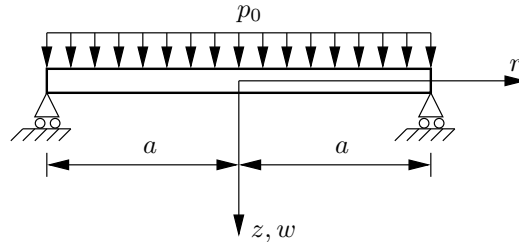
$$w(r) = \int_0^r \frac{1}{r} \int_0^r r \int_0^r \frac{1}{r} \int_0^r \frac{rp(r)}{D} dr dr dr dr. \tag{5.103}$$

Tasaisen kuorman, $p(r) = p_0$, tapauksessa tulee

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dw(r)}{dr} \right] \right\} \right) &= \frac{p_0}{D} r, \\
\left(r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dw(r)}{dr} \right] \right\} \right) &= \frac{p_0}{D} \frac{1}{2} r^2 + C_1, \\
\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dw(r)}{dr} \right] \right\} &= \frac{p_0}{D} \frac{1}{2} r + \frac{1}{r} C_1, \\
\left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dw(r)}{dr} \right] \right\} &= \frac{p_0}{D} \frac{1}{4} r^2 + C_1 \ln r + C_2, \\
\frac{d}{dr} \left[r \frac{dw(r)}{dr} \right] &= \frac{p_0}{D} \frac{1}{4} r^3 + C_1 r \ln r + C_2 r, \\
\left[r \frac{dw(r)}{dr} \right] &= \frac{p_0}{D} \frac{1}{16} r^4 + C_1 \left(\frac{1}{2} r^2 \ln r - \frac{1}{4} r^2 \right) + C_2 \frac{r^2}{2} + C_3, \\
\frac{dw(r)}{dr} &= \frac{p_0}{D} \frac{1}{16} r^3 + C_1 \left(\frac{1}{2} r \ln r - \frac{1}{4} r \right) + C_2 \frac{r}{2} + \frac{1}{r} C_3,
\end{aligned} \tag{5.104}$$



Kuva 5.7 Jäykästi tuettu ympyrälaatta.



Kuva 5.8 Vapaasti tuettu ympyrälaatta.

ja vielä kerran integroimalla saadaan ympyrälaatan taipuman lauseke

$$w(r) = \frac{p_0}{D} \frac{1}{64} r^4 + C_1 \left(\frac{1}{4} r^2 \ln r - \frac{1}{8} r^2 - \frac{1}{8} r^2 \right) + C_2 \frac{r^2}{4} + C_3 \ln r + C_4, \quad (5.105)$$

koska

$$\int_0^r r \ln r dr = \frac{1}{2} r^2 \ln r - \frac{1}{4} r^2 \quad (5.106)$$

ja

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} r^2 \ln r - \frac{1}{4} r^2 \right) &= r \ln r + \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} r \\ &= r \ln r. \end{aligned} \quad (5.107)$$

Taipuman lauseke on tasaisen kuorman tapauksessa

$$\begin{aligned} w(r) &= w_h(r) + w_p(r) \\ &= C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 + \frac{p_0 r^4}{64D}, \end{aligned} \quad (5.108)$$

missä C_i :t ovat integroimisvakioita (eri kuin kaavassa (5.105)).

Esimerkki 5.1 Määritetään tasaisesti kuormitetun ja jäykästi tuetun ympyrälaatan taipuma.

Laatan reunaehdot ovat

$$w(a) = 0, \quad \frac{dw(a)}{dr} = 0. \quad (5.109)$$

Jotta taipumafunktio ja sen toinen derivaatta r :n suhteen olisivat äärelliset, on oltava

$$C_1 = C_2 = 0. \quad (5.110)$$

Reunaehtojen perusteella saadaan yhtälöt

$$C_3 a^2 + C_4 = -\frac{p_0 a^4}{64D}, \quad (5.111)$$

$$2C_3 a = -\frac{p_0 a^3}{16D},$$

joista seuraa

$$C_3 = -\frac{p_0 a^2}{32D}, \quad C_4 = \frac{p_0 a^4}{64D}. \quad (5.112)$$

Taipuman lauseke on

$$w(r) = \frac{p_0}{64D} (a^2 - r^2)^2. \quad (5.113)$$

Taipuman suurin arvo laatan keskellä on

$$w_{\max} = w(a) = \frac{p_0 a^4}{64D}. \quad (5.114)$$

Taivutusmomenttien lausekkeiksi saadaan

$$M_r(r) = \frac{p_0}{16} [(1 + \nu)a^2 - (3 + \nu)r^2], \quad (5.115)$$

$$M_\varphi(r) = \frac{p_0}{16} [(1 + \nu)a^2 - (1 + 3\nu)r^2].$$

Momenttien suurimmat arvot saavutetaan reunalla tai keskellä. Reunalla $r = a$

$$M_r(a) = -\frac{p_0 a^2}{8}, \quad M_\varphi(a) = -\nu \frac{p_0 a^2}{8}. \quad (5.116)$$

Keskipisteessä $r = 0$

$$M_r(0) = M_\varphi(0) = (1 + \nu) \frac{p_0 a^2}{16}. \quad (5.117)$$

Esimerkki 5.2 Määritetään vapaasti tuetun ympyrälaatan taipuma tasaisesta kuormasta $p = p_0$.

Reunaehdot ovat nyt

$$w(a) = 0, \quad M_r(a) = 0. \quad (5.118)$$

Taipuman lausekkeessa

$$C_1 = C_2 = 0 \quad (5.119)$$

samasta syystä kuin edellisessä esimerkissä. Reunaehtojen perusteella saadaan integroimisvakioiden ratkaisemista varten kaksi lineaarista yhtälöä

$$C_3 a^2 + C_4 + \frac{p_0 a^4}{64D} = 0, \quad (5.120)$$

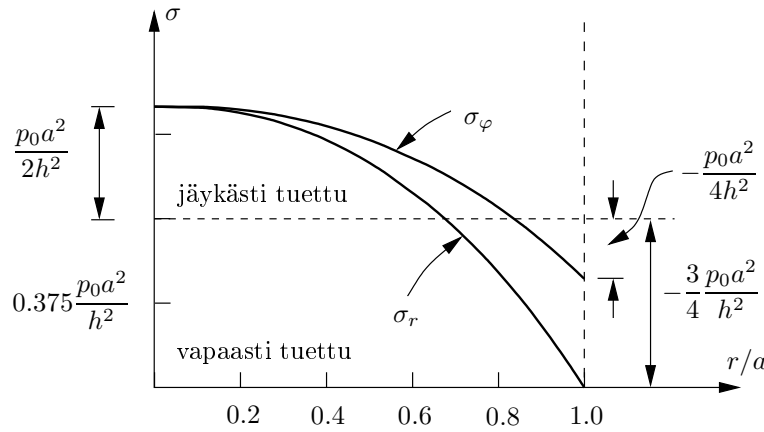
$$C_3 = -\frac{p_0 a^2}{32D} \frac{3 + \nu}{1 + \nu},$$

joista seuraa

$$C_4 = \frac{p_0 a^4}{64D} \frac{5 + \nu}{1 + \nu}. \quad (5.121)$$

Laatan taipuman lauseke on siten

$$w(r) = \frac{p_0 a^4}{64D} \left(\frac{r^4}{a^4} - 2 \frac{3 + \nu}{1 + \nu} \frac{r^2}{a^2} + \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \right). \quad (5.122)$$



Kuva 5.9 Jäykästi kiinnitetyn ja vapaasti tuetun ympyrälaatan taivutusjännitysten jakaumat.

Suurin taipuma saavutetaan laatan keskellä, ja se on

$$w_{\max} = \frac{p_0 a^4}{64D} \frac{5 + \nu}{1 + \nu}. \quad (5.123)$$

Taivutusmomenttien lausekkeet ovat

$$M_r(r) = \frac{p_0}{16} (3 + \nu)(a^2 - r^2), \quad (5.124)$$

$$M_\varphi(r) = \frac{p_0}{16} [(3 + \nu)a^2 - (1 + 3\nu)r^2].$$

Jännityskomponenttien arvot Poissonin luvun arvolla $\nu = 1/3$ ja koordinaatin z arvolla $z = h/2$

$$\sigma_r(r, \frac{h}{2}) = \frac{6}{h^2} M_r(r), \quad \sigma_\varphi(r, \frac{h}{2}) = \frac{6}{h^2} M_\varphi(r), \quad (5.125)$$

on piirretty oheiseen kuvaan 5.9 yhdessä jäykästi tuetun laatan tulosten kanssa.

Esimerkki 5.3 Määritetään jäykästi kiinnitetyn ja vapaasti tuetun ympyrälaatan taipuma laatan keskipisteessä olevasta pistekuormasta.

Kummassakin tuentatapauksessa taipumafunktio on

$$w(r) = C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4. \quad (5.126)$$

Vakio C_1 on asetettu nolaksi, jotta $w(0)$ olisi äärellinen.

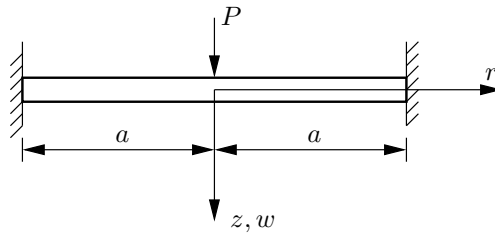
Jäykästi kiinnitetyn ympyrälaatan reunaehtojen

$$w(a) = 0, \quad \frac{dw(a)}{dr} = 0 \quad (5.127)$$

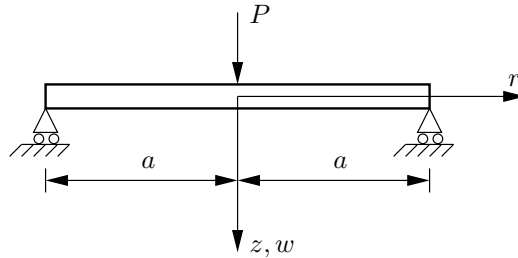
perusteella seuraa

$$C_2 a^2 \ln a + C_3 a^2 + C_4 = 0, \quad (5.128)$$

$$C_2 a^2 (2 \ln a + 1) + 2a C_3 = 0.$$



Kuva 5.10 Pistekuorma jäykästi kiinnitetyn ympyrälaatan keskipisteessä.



Kuva 5.11 Vapaasti tuettu ympyrälaatta, pistekuorma keskellä.

Kolmas tarvittava yhtälö saadaan r -säteisen kiekon tasapainoehdosta

$$2\pi r Q_r(r) + P = 0, \quad (5.129)$$

josta seuraa yhtälö

$$4D \frac{1}{r} C_2 = \frac{P}{2\pi r}. \quad (5.130)$$

Integroimisvakioiksi tulee

$$C_2 = \frac{P}{8\pi D}, \quad C_3 = -\frac{P}{16\pi D}(2\ln a + 1), \quad C_4 = \frac{Pa^2}{16\pi D}, \quad (5.131)$$

ja jäykästi kiinnitetyn ympyrälaatan taipuman lausekkeeksi saadaan

$$w(r) = \frac{P}{16\pi D} \left(2r^2 \ln \frac{r}{a} + a^2 - r^2 \right). \quad (5.132)$$

Laatan suurin taipuma on

$$w_{\max} = w(0) = \frac{Pa^2}{16\pi D}. \quad (5.133)$$

Vapaasti tuetun ympyrälaatan reunaehdot ovat

$$w(a) = 0, \quad M_r(a) = 0, \quad (5.134)$$

ja lisäksi tarvitaan tasapainoehtoa

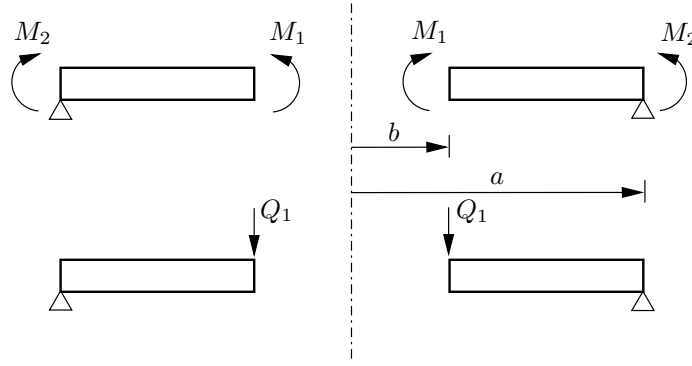
$$Q_r(r) = -\frac{P}{2\pi r}. \quad (5.135)$$

Kolmen ehdon perusteella saadaan ratkaistuksi kolme integroimisvakiota, ja vapaasti tuetun ympyrälaatan taipuman lausekkeeksi tulee laskelmien jälkeen

$$w(r) = \frac{P}{16\pi D} \left[2r^2 \ln \frac{r}{a} + \frac{3+\nu}{1+\nu} (a^2 - r^2) \right]. \quad (5.136)$$

Suurin taipuma saavutetaan laatan keskellä, ja se on

$$w_{\max} = w(0) = \frac{Pa^2}{16\pi D} \frac{3+\nu}{1+\nu}. \quad (5.137)$$



Kuva 5.12 Reunamomenttien kuormittama rengaslaatta.

Esimerkki 5.4 Määritetään reunamomenttien kuormittaman rengaslaatan taipuma. Tarkastellaan ensin kuvan 5.12a reunamomenttien kuormittamaa rengaslaattaa. Integroimalla tasapainoehdosta

$$Q_r(r) = 0 \quad (5.138)$$

saatava yhtälö

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dw(r)}{dr} \right] \right\} = 0 \quad (5.139)$$

seuraa taipumalle lauseke

$$w(r) = \frac{1}{4} C_1 r^2 + C_2 \ln r + C_3. \quad (5.140)$$

Vakiot C_1 , C_2 ja C_3 ratkaistaan reunaehdoista

$$w(a) = 0, \quad M_r(a) = M_2, \quad M_r(b) = M_1. \quad (5.141)$$

Taipuman ja momenttien lausekkeiksi saadaan

$$w(r) = \frac{1}{2} \frac{r^2 - a^2}{a^2 - b^2} \frac{M_1 b^2 - M_2 a^2}{(1 + \nu)D} + \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \frac{M_1 - M_2}{(1 - \nu)D} \ln \frac{r}{a}, \quad (5.142)$$

$$M_r(r) = -\frac{M_1 b^2 - M_2 a^2}{a^2 - b^2} + \frac{a^2 b^2 (M_1 - M_2)}{r^2 (a^2 - b^2)}, \quad (5.143)$$

$$M_\varphi(r) = -\frac{M_1 b^2 - M_2 a^2}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 b^2 (M_1 - M_2)}{r^2 (a^2 - b^2)}. \quad (5.144)$$

Kuvan 5.12b tapauksessa rengaslaatan sisäreunalla on viivakuorma Q_1 . Tasapainoehdosta

$$2\pi b Q_1 + 2\pi r Q_r(r) = 0 \quad (5.145)$$

seuraa

$$Q(r) = -Q_1 \frac{b}{r} \quad (5.146)$$

eli

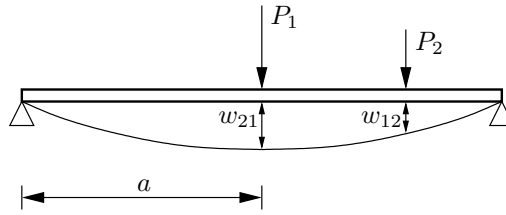
$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dw(r)}{dr} \right] \right\} = \frac{Q_1 b}{Dr}. \quad (5.147)$$

Laatan taipumafunktioksi tulee integroimalla

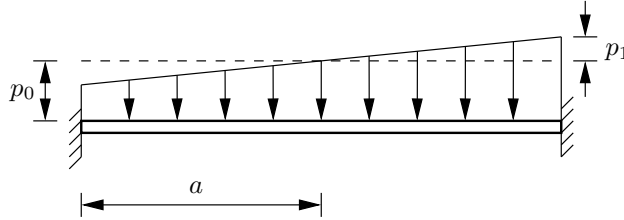
$$w(r) = \frac{Q_1 b r^2}{4D} (\ln r - 1) + C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3. \quad (5.148)$$

Integroimisvakiot C_1 , C_2 ja C_3 määritetään ehdoista

$$w(a) = 0, \quad M_r(a) = 0, \quad M_r(b) = 0. \quad (5.149)$$



Kuva 5.13 Bettin säännön soveltaminen ympyrälaatalle.



Kuva 5.14 Epäsymmetrinen jakautunut kuorma ympyrälaatalle.

5.7 Epäsymmetrinen kuormitus

Bettin säännön mukaan pätee kuvan 5.13 tapauksessa kaava

$$P_1 w_{21} = P_2 w_{12}. \quad (5.150)$$

Asettamalla

$$P_1 = 1, \quad w_{21} = w(0), \quad w_{12} = \bar{w}(r) \quad (5.151)$$

voidaan laskea laatan keskipisteen taipuma ei-pyörähdyssymmetriselle kuormitukselle kaavalla

$$w(0) = \int_0^{2\pi} \int_0^a p(r, \varphi) \bar{w}(r) r \, dr \, d\varphi. \quad (5.152)$$

Esimerkki 5.5 Määritetään jäykästi tuetun ympyrälaatan taipuma epäsymmetrisestä jakautuneesta kuormasta.

Jäykästi tuetulla ympyrälaatalle on kuorma

$$p(r, \varphi) = p_0 + p_1 \frac{r}{a} \cos \varphi. \quad (5.153)$$

Keskipisteessä vaikuttavan ykkösen suuruisen pistekuorman aiheuttama taipuma on

$$\bar{w}(r) = \frac{1}{16\pi D} (2r^2 \ln \frac{r}{a} + a^2 - r^2), \quad (5.154)$$

joten keskipisteen taipuma on

$$\begin{aligned} w(0) &= \frac{1}{16\pi D} \int_0^{2\pi} \int_0^a (p_0 + p_1 \frac{r}{a} \cos \varphi) (2r^2 \ln \frac{r}{a} + a^2 - r^2) r \, dr \, d\varphi \\ &= \frac{p_0 a^4}{64D}. \end{aligned} \quad (5.155)$$

Luku 6

Energiamenetelmä

Laatan differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista analyttisesti vain yksinkertaisissa erikoistapauksissa. Monissa tärkeissä käytännön suunnittelutehtävissä joudutaan turvautumaan likimääräisratkaisuihin numeerisilla menetelmillä.

Kaikkein yleispätevimmit kiinteän aineen mekaniikan ratkaisumenetelmät perustuvat virtuaalisen työn periaatteeseen. Lineaarisen kimmoteorian tehtävissä potentiaalienergian minimin periaate on ekvivalentti virtuaalisen työn yhtälön tai periaatteen kanssa.

Nykyisin elementtimenetelmä on ylivoimaisesti suosituin virtuaalisen työn periaatteen perustuvista menetelmistä. Klassillinen energiamenetelmä on elementtimenetelmän erikoistapaus. Siinä siirtymille otaksutaan koko ratkaisualueessa pätevät approksimaatio- tai kantafunktiot, kun taas elementtimenetelmän tehokkuus perustuu siihen, että ratkaisualue jaetaan pieniin osiin, elementteihin, joiden alueella ratkaistavaa funktiota, esim. laatan taipumafunktiota approksimoidaan tavallisesti alhaisasteisella polynomilla.

Elementtimenetelmä on yleiskäyttöinen, mm. reunaehdot ja kuormitukset on helppo generoida laskentamallille, mutta menetelmän käyttö vaatii useimmiten laajan tietokoneohjelman.

Seuraavassa perehdytään energiamenetelmään johdatuksena nykyajan tärkeään insinööritieteiden numeeriseen analysointimenetelmään – elementtimenetelmään.

6.1 Virtuaalisen työn periaate

Ohuen laatan teoriassa laatan siirtymät ovat

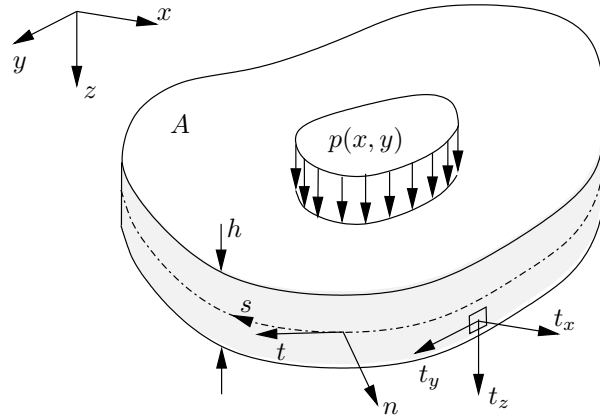
$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w = w(x, y). \quad (6.1)$$

Siirtymätilan perusteella saadaan muodonmuutokset

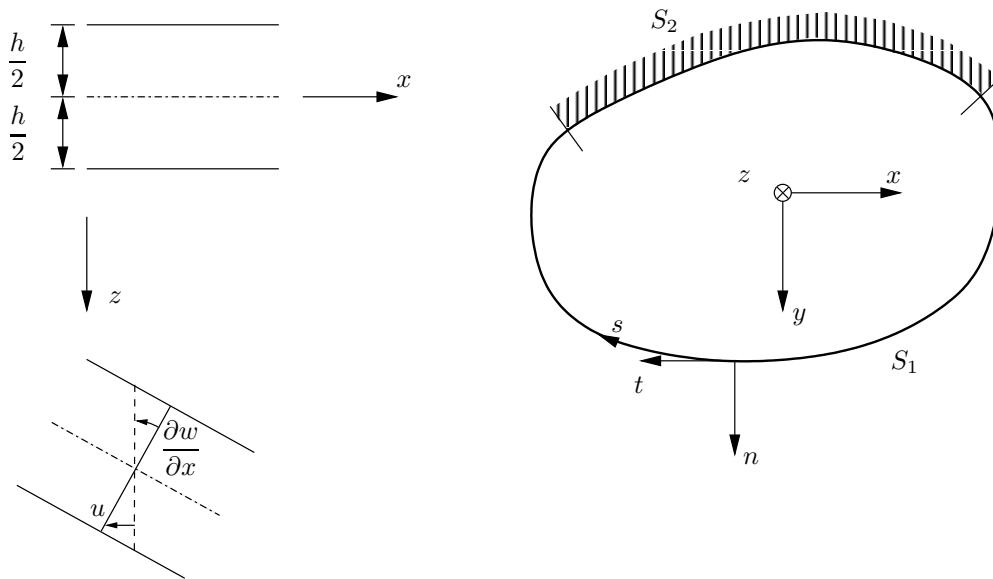
$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (6.2)$$

Muut muodonmuutokset ovat nollia eli

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \quad (6.3)$$



Kuva 6.1 Laatta.



Kuva 6.2 Laatan siirtymät ja laatan reuna.

Laatan tapauksessa jännityskomponentteja σ_x , σ_y ja τ_{xy} vastaava sisäinen energia (muodonmuutosenergia) tilavuusyksikössä on

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= \tilde{U}_{\sigma_x} + \tilde{U}_{\sigma_y} + \tilde{U}_{\tau_{xy}} \\ &= \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y \varepsilon_y + \frac{1}{2}\tau_{xy} \gamma_{xy},\end{aligned}\tag{6.4}$$

ja sitä vastaava sisäinen virtuaalinen työ on

$$\begin{aligned}\delta \tilde{W}^s &= \delta \tilde{W}_{\sigma_x}^s + \delta \tilde{W}_{\sigma_y}^s + \delta \tilde{W}_{\tau_{xy}}^s \\ &= \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}.\end{aligned}\tag{6.5}$$

Sijoittamalla laatan virtuaaliset muodonmuutokset

$$\delta\varepsilon_x = -z\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -z\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}, \quad (6.6)$$

$$\delta\varepsilon_y = -z\delta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -z\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}, \quad (6.7)$$

$$\delta\gamma_{xy} = -2z\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = -2z\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\partial y} \quad (6.8)$$

tai käyritysten avulla lausutut muodonmuutokset

$$\delta\varepsilon_x = z\delta\kappa_x, \quad \delta\varepsilon_y = z\delta\kappa_y, \quad \delta\gamma_{xy} = 2z\delta\kappa_{xy} \quad (6.9)$$

sisäisen virtuaalisen työn lausekkeeseen tulee

$$\begin{aligned} \delta\tilde{W}^s &= -z\sigma_x\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - z\sigma_y\delta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2z\tau_{xy}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \\ &= z\sigma_x\delta\kappa_x + z\sigma_y\delta\kappa_y + 2z\tau_{xy}\delta\kappa_{xy}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Integroimalla laatan tilavuuden yli saadaan

$$\begin{aligned} \delta W^s &= \int_V [\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy}] dV \\ &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \delta\tilde{W}^s dz dA \\ &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left[-z\sigma_x\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - z\sigma_y\delta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2z\tau_{xy}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \right] dz dA \\ &= \int_A \left[-M_x\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_y\delta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2M_{xy}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \right] dA \\ &= \int_A [M_x\delta\kappa_x + M_y\delta\kappa_y + 2M_{xy}\delta\kappa_{xy}] dA. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Jännitysresultantit määritellään kaavoilla

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz, \quad (6.12)$$

ja niitä vastaavat käyritykset ovat puolestaan

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}. \quad (6.13)$$

Laatan ulkoinen virtuaalinen työ on

$$\delta W^u = - \int_A p(x, y)\delta w(x, y) dA - \int_{S_1} \int_{-h/2}^{h/2} (t_x\delta u + t_y\delta v + t_z\delta w) dz ds, \quad (6.14)$$

missä $p(x, y)$ on kohtisuoraan laatan tasoa vastaan vaikuttavan jakautuneen kuorman intensiteetti, t_x , t_y ja t_z ovat laatan reunan osalla $S_1 \times h$ annetut (jakautuneet) kuormat. Reunanviivan osalla $S_2 = S - S_1$ tunnetaan siirtymät.

Määritellään jännitysresultantit

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{xn} \\ \bar{M}_{yn} \\ \bar{Q}_n \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} z t_x \\ z t_y \\ t_z \end{bmatrix} dz. \quad (6.15)$$

Laatan reunaviivalla ovat voimassa geometriset kaavat

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= n_x \frac{\partial}{\partial n} - n_y \frac{\partial}{\partial s}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= n_y \frac{\partial}{\partial n} + n_x \frac{\partial}{\partial s} \end{aligned} \quad (6.16)$$

ja niiden käänteiset kaavat

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} &= n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial s} &= -n_y \frac{\partial}{\partial x} + n_x \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

missä

$$n_x = \cos \varphi, \quad n_y = \sin \varphi \quad (6.18)$$

ovat reunan normaalivektorin komponentit.

Jännityskomponenttien muunnoskaavoista

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y, \\ t_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y, \end{aligned} \quad (6.19)$$

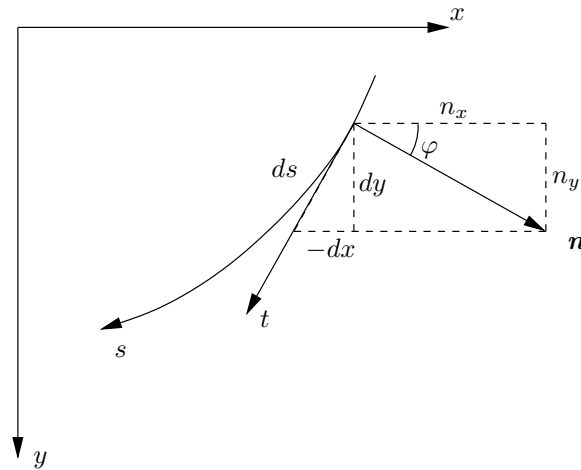
seuraa

$$\begin{aligned} M_{xn} &= M_x n_x + M_{xy} n_y, \\ M_{yn} &= M_{xy} n_x + M_y n_y. \end{aligned} \quad (6.20)$$

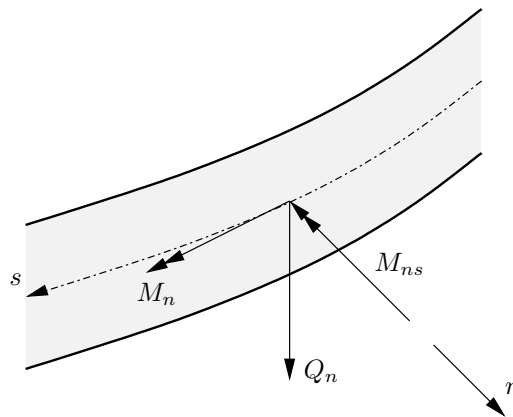
Muuntamalla edelleen saadaan

$$\begin{aligned} M_n &= M_{xn} n_x + M_{yn} n_y \\ &= M_x n_x^2 + 2M_{xy} n_x n_y + M_y n_y^2, \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} M_{ns} &= -M_{xn} n_y + M_{yn} n_x \\ &= -(M_x - M_y) n_x n_y + M_{xy} (n_x^2 - n_y^2). \end{aligned} \quad (6.22)$$



Kuva 6.3 Reunan normaali.



Kuva 6.4 Reunavoimat.

Laatan reunalla tunnettujen momenttien muunnoskaavat ovat vastaavasti

$$\bar{M}_n = \bar{M}_{xn}n_x + \bar{M}_{yn}n_y, \quad (6.23)$$

$$\bar{M}_{ns} = -\bar{M}_{xn}n_y + \bar{M}_{yn}n_x. \quad (6.24)$$

Leikkausvoimat muuntuvat kaavalla

$$Q_n = Q_xn_x + Q_y n_y. \quad (6.25)$$

Sisäisen virtuaalisen työn lauseke saadaan kahden funktion tulon derivointikaavan no-

jalla muotoon

$$\begin{aligned}
\delta W^s &= - \int_A \left[M_x \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dA \\
&= - \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(M_x \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(M_{xy} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(M_{xy} \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(M_y \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dA \\
&\quad + \int_A \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right] dA.
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Ottamalla huomioon leikkausvoimien kaavat

$$\begin{aligned}
Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \\
Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x},
\end{aligned} \tag{6.27}$$

ja soveltamalla Gaussin lausetta

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dA &= \oint_S f(x, y) n_x ds, \\
\int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dA &= \oint_S f(x, y) n_y ds,
\end{aligned} \tag{6.28}$$

missä S on alueen A reunakäyrä, tulee sisäisen virtuaalisen työn lauseke muotoon

$$\begin{aligned}
\delta W^s &= - \int_A \left[M_x \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dA \\
&= - \int_S \left[(M_x n_x + M_{xy} n_y) \delta \frac{\partial w}{\partial x} + (M_{xy} n_x + M_y n_y) \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right] ds \\
&\quad + \int_A \left[Q_x \delta \frac{\partial w}{\partial x} + Q_y \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right] dA.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Soveltamalla derivaattojen muunnoskaavoja ja integroimalla leikkausvoimat sisältävät

termit osittain saadaan sisäisen työn lauseke edelleen muotoon

$$\begin{aligned}
\delta W^s &= - \int_A \left[M_x \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dA \\
&= - \int_S \left[M_{xn} \left(n_x \delta \frac{\partial w}{\partial n} - n_y \delta \frac{\partial w}{\partial s} \right) + M_{yn} \left(n_y \delta \frac{\partial w}{\partial n} + n_x \delta \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] ds \\
&\quad + \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (Q_x \delta w) + \frac{\partial}{\partial y} (Q_y \delta w) \right] dA - \int_A \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \delta w dA \\
&= \int_S \left[(M_{xn} n_x + M_{yn} n_y) \delta \frac{\partial w}{\partial n} + (-M_{xn} n_y + M_{yn} n_x) \delta \frac{\partial w}{\partial s} \right] ds \\
&\quad + \int_S (Q_x n_x + Q_y n_y) \delta w ds \\
&\quad - \int_A \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \delta w dA \\
&= - \int_S \left[M_n \delta \frac{\partial w}{\partial n} + M_{ns} \delta \frac{\partial w}{\partial s} - Q_n \delta w \right] ds - \int_A \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \delta w dA.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Ulkoisen virtuaalisen työn lausekkeeksi saadaan muunnoskaavojen avulla

$$\begin{aligned}
\delta W^u &= \int_A p(x, y) \delta w(x, y) dA + \int_{S_1} (t_x \delta u + t_y \delta v + t_z \delta w) ds dz \\
&= \int_A p \delta w dA + \int_{S_1} \left(-\bar{M}_n \delta \frac{\partial w}{\partial n} - \bar{M}_{ns} \delta \frac{\partial w}{\partial s} + \bar{Q}_n \delta w \right) ds.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Virtuaalisen työn yhtälöksi tulee edellä olevien kaavojen perusteella

$$\delta W = \delta W^s - \delta W^u = 0 \tag{6.32}$$

eli

$$\begin{aligned}
\delta W &= - \int_A \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p \right) \delta w dA + \int_{S_1 + S_2} \left[-M_n \delta \frac{\partial w}{\partial n} - M_{ns} \delta \frac{\partial w}{\partial s} + Q_n \delta w \right] ds \\
&\quad + \int_{S_1} [\bar{M}_n \delta \frac{\partial w}{\partial n} + \bar{M}_{ns} \delta \frac{\partial w}{\partial s} - \bar{Q}_n \delta w] ds = 0.
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Ryhmittelemällä termejä uudelleen seuraa

$$\begin{aligned}
\delta W &= - \int_A \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p \right) \delta w dA \\
&\quad + \int_{S_1} \left[-(M_n - \bar{M}_n) \delta \frac{\partial w}{\partial n} - (M_{ns} - \bar{M}_{ns}) \delta \frac{\partial w}{\partial s} + (Q_n - \bar{Q}_n) \delta w \right] ds \\
&\quad + \int_{S_2} \left[-M_n \delta \frac{\partial w}{\partial n} - M_{ns} \delta \frac{\partial w}{\partial s} + Q_n \delta w \right] ds.
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Integroimalla vielä kerran vääntömomentin sisältävät termit osittain reunan osalla S_1 saadaan

$$\begin{aligned} \delta W = & - \int_A \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p \right) \delta w \, dA + \left. [-(M_{ns} - \bar{M}_{ns})] \delta w \right|_{S_1} \\ & + \int_{S_1} \left\{ -(M_n - \bar{M}_n) \delta \frac{\partial w}{\partial n} + \left[\left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) - \left(\bar{Q}_n + \frac{\partial \bar{M}_{ns}}{\partial s} \right) \right] \delta w \right\} ds \quad (6.35) \\ & + \int_{S_2} \left[-M_n \delta \frac{\partial w}{\partial n} - M_{ns} \delta \frac{\partial w}{\partial s} + Q_n \delta w \right] ds. \end{aligned}$$

Suorittamalla samanlainen osittaisintegrointi reunan osalla S_2 ja ottamalla huomioon geometriset reunaehdot

$$w = \bar{w}, \quad \delta w = 0 \quad \text{reunan osalla } S_2, \quad (6.36)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}, \quad \delta \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{reunan osalla } S_2 \quad (6.37)$$

saadaan virtuaalisen työn yhtälö muotoon

$$\begin{aligned} \delta W = & - \int_A \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p \right) \delta w \, dA \\ & + \int_{S_1} \left\{ \left[\left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) - \left(\bar{Q}_n + \frac{\partial \bar{M}_{ns}}{\partial s} \right) \right] \delta w - (M_n - \bar{M}_n) \delta \frac{\partial w}{\partial n} \right\} ds = 0. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Koska δw on mielivaltainen virtuaalinen taipumafunktio, sen kertojana olevan lausekkeen täytyy hävitä eli laatan tasapainoyhtälön täytyy toteutua, jotta virtuaalisen työn yhtälö olisi voimassa. Samalla tavalla päätellään, että reunan osalla S_1 täytyy toteutua reunaehtojen

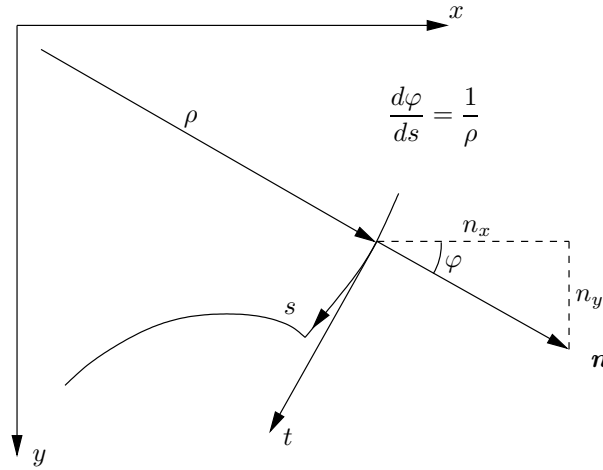
$$V_n = \bar{V}_n \quad \text{ja} \quad M_n = \bar{M}_n. \quad (6.39)$$

Jos laatan reunakäyrän tangentin ja x -akselin välinen kulma φ tai vääntömomentti \bar{M}_{ns} on epäjatkuva reunan osalla S_1 , niin kaavassa tehty osittaisintegrointi ei ole voimassa. Jos esim. vääntömomentti on epäjatkuva, niin saadaan

$$\begin{aligned} \int_{S_1} (-\bar{Q}_n \delta w + \bar{M}_{ns} \delta w_{,s}) \, ds = & \left. \bar{M}_{ns} \delta w - [\bar{M}_{ns}(\bar{s} + 0) - \bar{M}_{ns}(\bar{s} - 0)] \delta w(\bar{s}) \right|_{S_1} \\ & - \int_{S_1} (\bar{Q}_n + \bar{M}_{ns,s}) \delta w \, ds. \end{aligned} \quad (6.40)$$

6.2 Potentiaalienergian minimin periaate

Kimmoisen laatan tapauksessa voidaan käyttää virtuaalisen työn periaatteesta johdettavaa mutta sovellutusalueeltaan rajoitetumpaa potentiaalienergian minimin periaatetta likirat-



Kuva 6.5 Reunan kaarevuussäde.

kaisumenetelmien kehittämiseen. Laatan muodonmuutosenergia on

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dA dz \\
 &= \frac{1}{2} \int_A (M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + 2M_{xy} \kappa_{xy}) dA.
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

Lausumalla momentit käyritymien ja vääntymän avulla,

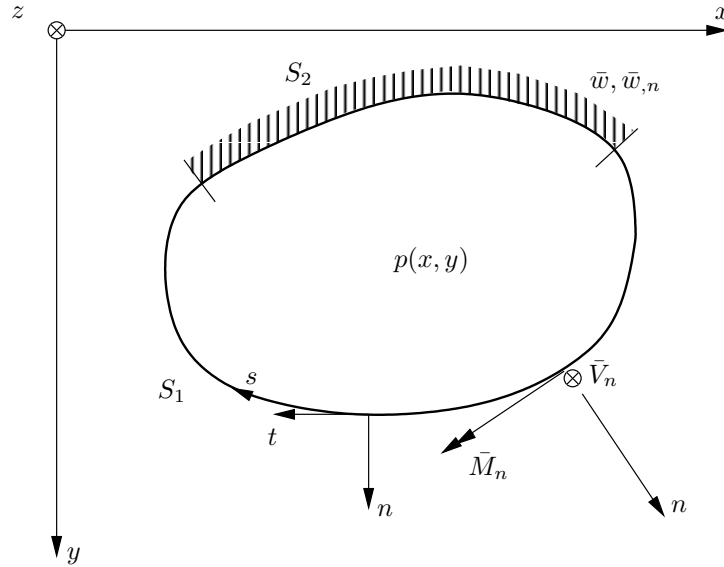
$$\begin{aligned}
 M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\
 M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\
 M_{xy} &= -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

saadaan

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} D \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA \\
 &= \frac{1}{2} D \int_A \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dA.
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

Voidaan osoittaa, että muodonmuutosenergian lausekkeen osa

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \int_A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \\
 &= \int_S \left[\frac{\partial w}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n} \right) + \frac{\partial w}{\partial s} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] ds,
 \end{aligned} \tag{6.44}$$



Kuva 6.6 Laatan reunakuormat.

missä ρ on reunaviivan kaarevuussäde.

Jäykästi kiinnitettyllä laatalle $I = 0$. Vapaasti tuetulla laatalle, jonka reuna koostuu suorista osista, niinkään $I = 0$. Näissä tapauksissa muodonmuutosenergia on

$$U = \frac{1}{2}D \int_A (\Delta w)^2 dA. \quad (6.45)$$

Ulkoisten kuormien potentiaali on

$$V = - \int_A p(x, y)w(x, y) dx dy - \int_{S_1} \left(-\bar{M}_n \frac{\partial w}{\partial n} + \bar{V}_n w \right) ds, \quad (6.46)$$

missä

$$\bar{V}_n = \bar{Q}_n + \frac{\partial \bar{M}_{ns}}{\partial s}. \quad (6.47)$$

Kokonaispotentiaalienergia on

$$\Pi = U + V. \quad (6.48)$$

Potentiaalienergian minimin periaatteen mukaan todellinen taipuma antaa potentiaalienergialle minimiarvon tasapainotilassa hyväksyttävien taipumafunktioiden joukossa. Hyväksyttävä taipumafunktio on kahdesti jatkuvasti derivoituva ja toteuttaa kinemaattiset (geometriset) reunaehdot reunalla S_2

$$w = \bar{w}, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \quad \text{reunalla } S_2. \quad (6.49)$$

Otaksutaan, että w on todellinen taipuma ja $w_1 = w + \delta w$ on jokin muu hyväksyttävä taipuma. Sijoittamalla w_1 potentiaalienergian kaavaan saadaan kehitelmä

$$\Pi(w_1) = \Pi(w) + \delta \Pi + \delta^2 \Pi, \quad (6.50)$$

missä

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & D \int_A [\Delta w \Delta \delta w - (1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right] dA \\ & - \int_A p \delta w dx dy - \int_{S_1} \left(-\bar{M}_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + \bar{V} \delta w \right) ds, \end{aligned} \quad (6.51)$$

ja

$$\delta^2\Pi = \frac{1}{2} D \int_A \left\{ (\Delta \delta w)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dA. \quad (6.52)$$

Samanlaisilla osittaisintegroinneilla kuin edellä virtuaalisen työn yhtälön yhteydessä voidaan potentiaalienergian ensimmäinen variaatio muuntaa muotoon

$$\delta\Pi = \int_A (D \Delta \Delta w - p) \delta w dA - \int_{S_1} \left[(\bar{V}_n - V_n) \delta w - (\bar{M}_n - M_n) \frac{\partial \delta w}{\partial n} \right] ds. \quad (6.53)$$

Koska tasapainotilassa laatan tasapainoehto ja voimien reunaehdot toteutuvat, täytyy olla voimassa yhtälö

$$\delta\Pi = 0. \quad (6.54)$$

Potentiaalienergian toinen variaatio voidaan muuntaa muotoon

$$\begin{aligned} \delta^2\Pi = & \frac{1}{2} D \int_A \left[\frac{1 + \nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1 - \nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA, \end{aligned} \quad (6.55)$$

mistä nähdään, että kaikille taipuman variaatioille pätee

$$\delta^2\Pi \geq 0. \quad (6.56)$$

Koska potentiaalienergian ensimmäinen variaatio on tasapainotilassa nolla ja toinen variaatio on ei-negatiivinen, on voimassa kaava

$$\Pi(w_1) \geq \Pi(w), \quad (6.57)$$

joka todistaa oikeaksi potentiaalienergian minimin periaatteen.

6.3 Ritzin menetelmä

Potentiaalienergian minimin periaatetta voidaan soveltaa likiratkaisumenetelmän kehittämiseen valitsemalla taipumalle kinemaattiset reunaehdot toteuttava kehitemä

$$w_N = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x, y), \quad (6.58)$$

missä kantafunktiot φ_n toteuttavat kinemaattiset reunaehdot ja a_n ovat toistaiseksi tuntemattomia kertoimia.

Elementtimenetelmässä tarkasteltava alue, tässä tapauksessa laatta, jaetaan osa-alueisiin eli elementteihin, ja kussakin elementissä kantafunktiot ovat tavallisesti polynomeja. Ohuen laatan teoriassa kantafunktion normaaliderivaatan ($n:n$ suhteen) on oltava jatkuva elementin reunan yli. Tämä on ollutkin laattaelementtien kehittämisen pääasiallinen vaikeus.

Ritzin menetelmä on elementtimenetelmän erikoistapaus, jossa koko alueella ovat voimassa samat kantafunktiot. Tällöin ei välttämättä riitä käyttää pelkästään alhaisasteisia polynomeja kantafunktioina. Ritzin menetelmässä kantafunktiot on ilmeisesti pyrittävä valitsemaan niin, että ensimmäisellä tai ensimmäisillä funktioilla pystytään hyvin kuvaamaan laatan taipumapintaa. Jos kantafunktiot muodostavat matemaattisessa mielessä täydellisen järjestelmän, niin likiratkaisu suppenee kohti tarkkaa ratkaisua, kun termien määrä lähestyy ääretöntä.

Sijoittamalla taipuman kehittelmä potentiaalienergian kaavaan tulee

$$\Pi_N = \Pi_N(a_1, a_2, \dots, a_N). \quad (6.59)$$

Minimin välttämättömät ehdot ovat

$$\frac{\partial \Pi_N}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (6.60)$$

Potentiaalienergian lausekkeeksi saadaan

$$\Pi_N = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N R_{mn} a_m a_n - \sum_{m=1}^N P_m a_m, \quad (6.61)$$

missä

$$R_{mn} = D \int_A \left\{ \Delta \varphi_m \Delta \varphi_n - (1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x \partial y} \right] \right\} dx dy, \quad (6.62)$$

ja

$$P_m = \int_A p \varphi_m dx dy - \int_{S_1} \left(-\bar{M}_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} + \bar{V} \varphi_m \right) ds. \quad (6.63)$$

Koska potentiaalienergia on kertoimien a_n suhteen neliöllinen lauseke, saadaan ehdoista

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (6.64)$$

lineaarinen yhtälöryhmä

$$\sum_{n=1}^N R_{kn} a_n - P_k, \quad k = 1, \dots, N \quad (6.65)$$

kertoimien a_n ratkaisemiseksi.

6.4 Komplementaarisen energian minimin periaate

Laatan muodonmuutosenergia voidaan lausua momenttien avulla eliminoimalla käyritymät ja vääntymä muodossa

$$\bar{U} = \frac{1}{2D(1-\nu^2)} \int_A [(M_x + M_y)^2 - 2(1+\nu)(M_x M_y - M_{xy}^2)] dA. \quad (6.66)$$

Laatan ulkoinen komplementaarinen energia määritellään kaavalla

$$\bar{V} = \int_{S_2} (\bar{w} V_n - \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} M_n) ds, \quad (6.67)$$

missä viiva taipuman ja kaltevuuskulman päällä tarkoittaa reunalla S_2 annettua (tunnettua) arvoa.

Komplementaarinen kokonaisenergia on

$$\bar{\Pi} = \bar{U} + \bar{V}. \quad (6.68)$$

Todelliset momentit antavat komplementaariselle energialle minimiarvon hyväksyttävien (staattisesti luvallisten) momenttien joukossa, jonka jäsenet toteuttavat laatan tasapainoehdon

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p(x, y) = 0 \quad (6.69)$$

ja mekaaniset reunaehdot reunalla S_1 eli

$$M_n = \bar{M}_n, \quad V_n = \bar{V}_n, \quad (6.70)$$

missä

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}. \quad (6.71)$$

Otaksutaan, että todellinen momenttitila (voimatila) on

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x & M_y & M_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

ja siitä varioimalla saatu tila

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M} + \delta \mathbf{M} \quad (6.73)$$

on hyväksyttävä momenttitila. Sijoittamalla \mathbf{M}_1 komplementaarisen energian lausekkeeseen saadaan kehitelmä

$$\bar{\Pi}(\mathbf{M}_1) = \bar{\Pi}(\mathbf{M}) + \delta \bar{\Pi} + \delta^2 \bar{\Pi}, \quad (6.74)$$

missä

$$\begin{aligned} \delta \bar{\Pi} = & \frac{1}{D(1-\nu^2)} \int_A [M_x \delta M_x + M_y \delta M_y - \nu M_x \delta M_y - \nu M_y \delta M_x \\ & + 2(1+\nu) M_{xy} \delta M_{xy}] dA - \int_{S_2} (\bar{w} \delta V_n - \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \delta M_n) ds. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Osittaisintegroimalla kuten edellä potentiaalienergian ensimmäisen variaation yhteydessä saadaan komplementaarisen energian ensimmäinen variaatio muunnettua muotoon

$$\begin{aligned}
\delta\bar{\Pi} = & \int_A \left(-\frac{\partial^2 \delta M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \delta M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \delta M_y}{\partial y^2} \right) w \, dA \\
& + \int_S \left\{ -(\delta M_x n_x^2 + \delta M_y n_y^2 + 2\delta M_{xy} n_x n_y) \frac{\partial w}{\partial n} \right. \\
& \left. - [(\delta M_y - \delta M_x) n_x n_y + \delta M_{xy} (n_x^2 - n_y^2)] \frac{\partial w}{\partial s} \right. \\
& \left. + \left[\left(\frac{\partial \delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta M_y}{\partial y} \right) n_y \right] w \right\} ds \\
& - \int_{S_2} (\bar{w} \delta V_n - \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \delta M_n) \, ds
\end{aligned} \tag{6.76}$$

eli

$$\begin{aligned}
\delta\bar{\Pi} = & \int_A \left(-\frac{\partial^2 \delta M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \delta M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \delta M_y}{\partial y^2} \right) w \, dA \\
& + \int_S \left\{ -M_n \frac{\partial w}{\partial n} - M_{ns} \frac{\partial w}{\partial s} + (\delta Q_x n_x + \delta Q_y n_y) w \right\} ds \\
& - \int_{S_2} \left(\bar{w} \delta V_n - \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \delta M_n \right) \, ds,
\end{aligned} \tag{6.77}$$

missä on käytetty hyväksi yhteyksiä

$$\delta M_n = \delta M_x n_x^2 + \delta M_y n_y^2 + 2\delta M_{xy} n_x n_y, \tag{6.78}$$

$$\delta M_{ns} = (\delta M_y - \delta M_x) n_x n_y + \delta M_{xy} (n_x^2 - n_y^2), \tag{6.79}$$

$$\delta Q_n = \left(\frac{\partial \delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta M_y}{\partial y} \right) n_y. \tag{6.80}$$

Edellä on merkitty, että reunan normaalivektorin komponentit ovat

$$n_x = \cos \varphi, \quad n_y = \sin \varphi. \tag{6.81}$$

Momenttikenttä \mathbf{M}_1 on staattisesti luvallinen, joten momenttien variaatiot toteuttavat homogeenisen tasapainoehdon, ja normaalimomentin ja korvikeleikkausvoiman variaatiot toteuttavat homogeeniset reunaehdot

$$\delta M_n = 0, \quad \delta V_n = \delta Q_n + \frac{\partial \delta M_{ns}}{\partial s} = 0 \quad \text{reunalla } S_2, \tag{6.82}$$

ja lisäksi ovat voimassa kinemaattiset reunaehdot

$$w = \bar{w}, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \quad \text{reunalla } S_2. \tag{6.83}$$

Tällöin on oltava

$$\delta\bar{\Pi} = 0. \quad (6.84)$$

Toinen variaatio saadaan muunnettua muotoon

$$\begin{aligned} \delta^2\bar{\Pi} = \frac{1}{2D(1-\nu^2)} \int_A \left[\frac{1-\nu}{2}(\delta M_x + \delta M_y)^2 + \frac{1+\nu}{2}(\delta M_x - \delta M_y)^2 \right. \\ \left. + 2(1+\nu)(\delta M_{xy})^2 \right] dA. \end{aligned} \quad (6.85)$$

Toisen variaation lausekkeesta päätellään, että

$$\delta^2\bar{\Pi} \geq 0. \quad (6.86)$$

Edellä esitetyn perusteella päätellään myös, että

$$\bar{\Pi}(\mathbf{M}_1) \geq \bar{\Pi}(\mathbf{M}) \quad (6.87)$$

ja että momenttitila \mathbf{M} antaa komplementaariselle energialle minimiarvon.

Likiratkaisumenetelmässä valitaan momenteille laatan tasapainoehdon ja voimien reunaehdot toteuttavat kehittelmät

$$(M_x)_K = \sum_{k=1}^K a_k N_x(x, y), \quad (6.88)$$

$$(M_y)_L = \sum_{l=1}^L b_l N_y(x, y), \quad (6.89)$$

$$(M_{xy})_M = \sum_{m=1}^M c_m N_{xy}(x, y). \quad (6.90)$$

Sijoittamalla momenttien kehittelmät komplementaarisen energian lausekkeeseen saadaan kertoimista a_k , b_l ja c_m riippuva neliöllinen algebrallinen lauseke. Minimien välttämättömät ehdot ovat

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, \dots, K, \\ \frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial b_l} = 0, \quad l = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (6.91)$$

$$\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial c_m} = 0, \quad m = 1, \dots, M,$$

joista muodostuu $K+L+M$ lineaarista yhtälöä tuntemattomien kertoimien ratkaisemiseen.

Esimerkki 6.1 Ratkaistaan Ritzin menetelmällä vapaasti tuettu neliölaatta, jonka keskellä on pistekuorma F .

Otaksutaan taipumalle reunaehdot toteuttava lauseke

$$w(x, y) = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (6.92)$$

Merkitään

$$\alpha = \frac{\pi}{a}, \quad \beta = \frac{\pi}{b}, \quad (6.93)$$

ja otaksutaan, että $a = b$. Tässä tapauksessa saadaan

$$\begin{aligned} \Delta w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ &= -A\alpha^2 \sin \alpha x \sin \alpha y - A\alpha^2 \sin \alpha y \sin \alpha x \\ &= -2A\alpha^2 \sin \alpha x \sin \alpha y. \end{aligned} \quad (6.94)$$

Laatan muodonmuutosenergia on

$$U = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^a (\Delta w)^2 dx dy = \frac{1}{2} D A^2 \frac{\pi^4}{a^2}, \quad (6.95)$$

ja ulkoisen kuorman potentiaali on

$$V = -F w \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) = -F A. \quad (6.96)$$

Kokonaispotentiaalienergia on

$$\Pi = U + V \quad \text{ja} \quad \Pi = \Pi(A). \quad (6.97)$$

Minimin välttämätön ehto on, että

$$\frac{\partial \Pi(A)}{\partial A} = 0, \quad (6.98)$$

mistä seuraa

$$\frac{1}{2} D \cdot 2A \frac{\pi^4}{a^2} - F = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{a^2 F}{\pi^4 D}. \quad (6.99)$$

Taipuman amplitudin kaavassa oleva numeerinen kerroin on

$$\frac{1}{\pi^4} \approx 0.01026, \quad (6.100)$$

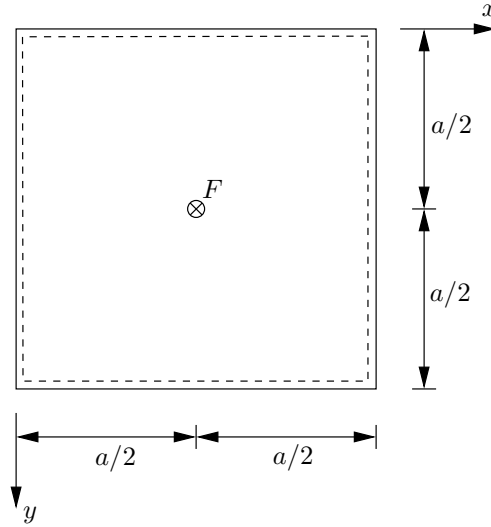
kun vastaava tarkka arvo on 0.0116.

Esimerkki 6.2 Tutkitaan reunapalkilla tuettua laattaa energiamenetelmillä.

Vapaasti tuettu laatta on yhdeltä sivulta tuettu reunapalkilla. Laatan taivutusjäykkyys on D , ja palkin taivutusjäykkyys on $EI = 3Dl$, missä l on laatan sivumitta y -akselin suunnassa. Otaksutaan, että laatan materiaalin Poissonin luku on nolla.

Potentiaalienergian minimin periaatteeseen perustuvassa ratkaisussa valitaan taipumafunktioksi

$$w(x, y) = Ay \sin \frac{\pi}{a} x + B \sin \frac{\pi}{l} y \sin \frac{\pi}{a} x. \quad (6.101)$$



Kuva 6.7 Vapaasti tuettu neliölaatta, pistekuorma keskellä.

Laatan muodonmuutosenergia on, kun $\nu = 0$,

$$U^L = \frac{1}{2}D \int_0^a \int_0^l \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (6.102)$$

Sijoittamalla otaksuttu taipuman lauseke muodonmuutosenergian kaavaan saadaan

$$\begin{aligned} U^L &= \frac{1}{2}D \int_0^a \int_0^l \left[\frac{\pi^4}{a^4} \left(Ay + B \sin \frac{\pi}{l} y \right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} x + \frac{\pi^4}{l^4} B^2 \sin^2 \frac{\pi}{l} y \sin^2 \frac{\pi}{a} x \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\pi^2}{a^2} \left(A + B \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi}{l} y \right)^2 \cos^2 \frac{\pi}{a} x \right] dx dy \\ &= \frac{1}{2}D \left[\frac{\pi^2 l}{a} \left(\frac{\pi^2 l^2}{6a^2} + 1 \right) A^2 + \frac{\pi^3 l^2}{a^3} AB + \frac{\pi^4}{2} \left(\frac{l}{2a^3} + \frac{a}{2l^3} + \frac{1}{al} \right) B^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.103)$$

Palkin muodonmuutosenergia on

$$U^P = \frac{1}{2} \int_0^a 3Dl \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (6.104)$$

Sijoittamalla palkin muodonmuutosenergian kaavaan palkin otaksuttu taipuman lauseke

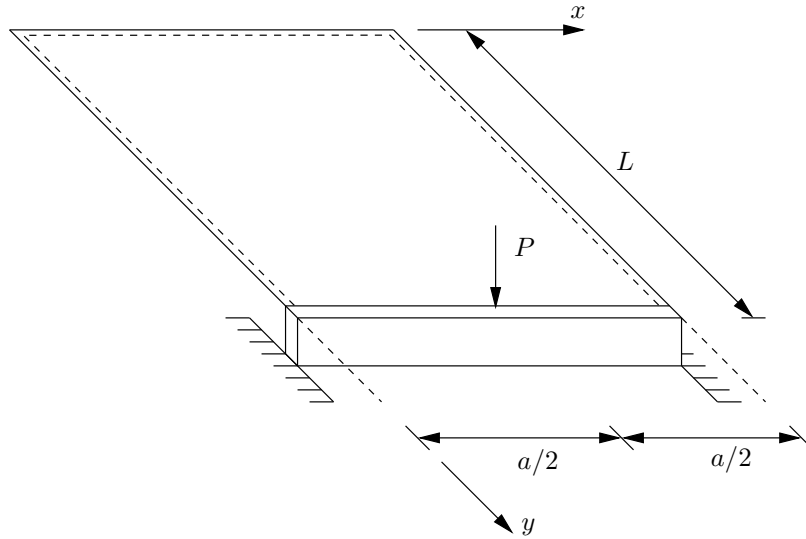
$$w(x) = Al \sin \frac{\pi}{a} x \quad (6.105)$$

tulee

$$U^P = \frac{3}{2}D \frac{\pi^4 l^3}{2a^3} A^2. \quad (6.106)$$

Palkin potentiaalienergia on

$$\Pi^P = U^P + V^P = U^P + Pw \left(\frac{a}{2}, l \right). \quad (6.107)$$



Kuva 6.8 Reunapalkilla tuettu laatta.

Systemin kokonaispotentiaalienergia on

$$\Pi = U^L + U^p + V^p. \quad (6.108)$$

Potentiaalienergian lausekkeen minimin välttämättömät ehdot ovat

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A} = \frac{1}{2}D \left[\frac{\pi^2 l}{a} \left(\frac{\pi^2 l^2}{6a^2} + \frac{3\pi^2 l^2}{2a^2} + \frac{\pi l}{a^2} + 1 \right) 2A + \frac{\pi^4 l^3}{a} B \right] - Pl = 0, \quad (6.109)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial B} = \frac{1}{2}D \left[\frac{\pi^3 l^2}{a^3} A + \frac{\pi^4}{2} \left(\frac{l}{2a^3} + \frac{a}{2l^3} + \frac{1}{al} \right) 2B \right] = 0, \quad (6.110)$$

joista seuraa

$$A = \frac{6a^3}{\pi^2 D \left[(\pi^2 l^2 + 9\pi^2 l^2 + 6a^2) - \frac{6\pi^2 l^4}{(a^2 + l^2)^2} \right]} P. \quad (6.111)$$

Määritellään rakenteen jäykkyys kaavalla

$$S = \frac{P}{w_P} = \frac{\pi^2 D \left[(\pi^2 l^2 + 9\pi^2 l^2 + 6a^2) - \frac{6\pi^2 l^4}{(a^2 + l^2)^2} \right]}{6a^3 l}, \quad (6.112)$$

missä w_P on taipuma pistevoiman P kohdalla.

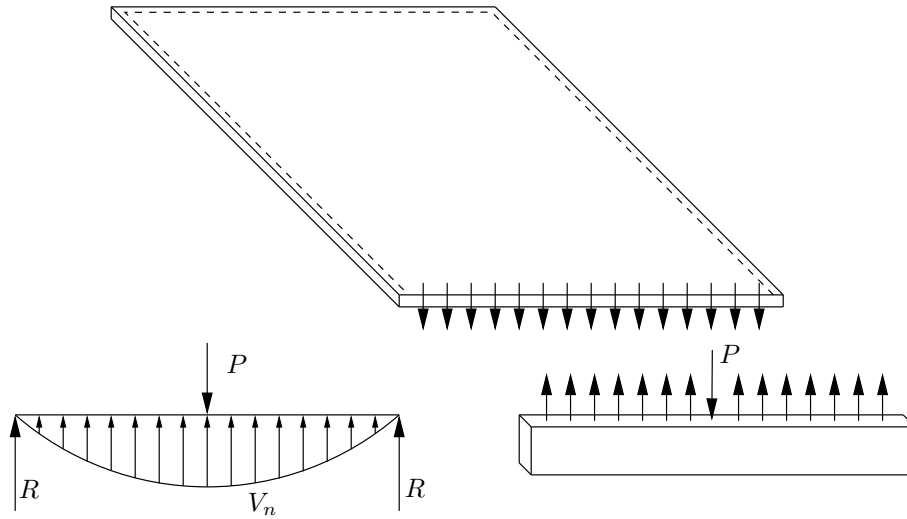
Tapauksessa $l = a = 2$ saadaan määritellylle systemin jäykkyysparametrille arvo

$$S \approx 39D, \quad (6.113)$$

joka on jäykkyyden yläraja.

Komplementaarisen energian minimin periaatteeseen perustuvassa likimenetelmässä valitaan laatan tasapainoehdon ja mekaaniset reunaehdot toteuttava momenttikenttä. Tähän päämäärään pääsemiseksi otetaan käyttöön ensin momentit

$$M_y = 0, \quad M_{xy} = Ay^2 \cos \frac{\pi}{a} x. \quad (6.114)$$



Kuva 6.9 Reunapalkin tukireaktiot.

Laatan tasapainoyhtälöstä

$$\frac{\partial M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_y}{\partial y^2} + p(x, y) = 0 \quad (6.115)$$

seuraa differentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 4\frac{\pi}{a}Ay \sin \frac{\pi}{a}x = 0, \quad (6.116)$$

jonka ratkaisu on

$$M_x = C_1 + C_2x + 4\frac{a}{\pi}Ay \sin \frac{\pi}{a}x. \quad (6.117)$$

Reunaehtojen

$$M_x(0, y) = 0, \quad M_x(a, y) = 0 \quad (6.118)$$

perusteella saadaan

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad (6.119)$$

ja momentin M_x lausekkeeksi tulee

$$M_x = 4\frac{a}{\pi}Ay \sin \frac{\pi}{a}x. \quad (6.120)$$

Korvikeleikkausvoima reunalla $y = l$ on

$$\begin{aligned} V_y(x, l) &= \left[\frac{\partial M_y(x, l)}{\partial y} + 2\frac{\partial M_{xy}(x, l)}{\partial x} \right] \\ &= -2\frac{\pi}{a}Al^2 \sin \frac{\pi}{a}x. \end{aligned} \quad (6.121)$$

Palkin tukireaktio R , (kuva 6.9), saadaan pystysuuntaisesta tasapainoehdosta

$$\begin{aligned} 2R - P + \int_0^a V_y(x, l) dx &= 0 \\ \Rightarrow R &= \frac{P}{2} + 2l^2A. \end{aligned} \quad (6.122)$$

Palkin momenttikuvio on symmetrinen palkin keskipisteen suhteen, joten tarkastellaan momenttikuviota vain puoleen väliin palkkia ja kerrotaan tulokset kahdella.

Laatasta irtileikatun palkin taivutusmomentti on

$$M(x) = \int_0^x V_y(\xi, l)(x - \xi) d\xi + Rx \quad \begin{cases} 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0 < \xi < \frac{a}{2} \end{cases} \quad (6.123)$$

eli

$$M(x) = 2Al^2 \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi}{a} x + \frac{P}{2} x. \quad (6.124)$$

Komplementaarinen kokonaisenergia on

$$\bar{\Pi} = \bar{U}^L + \bar{U}^p + \bar{V} = \bar{\Pi}(A), \quad (6.125)$$

missä

$$\begin{aligned} \bar{U}^p &= 2 \frac{1}{2} \int_0^{a/2} \frac{M^2}{EI} dx = \frac{2}{6Dl} \int_0^{a/2} M^2 dx \\ &= \frac{1}{3Dl} \left(A^2 l^4 \frac{a^3}{\pi^2} + \frac{a^3}{96} P^2 + 2APl^2 \frac{a^3}{\pi^3} \right), \end{aligned} \quad (6.126)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}^L &= \int_0^a \frac{1}{2D} \int_0^l (M_x^2 + M_y^2 + 2M_{xy}^2) dx dy \\ &= \frac{1}{2D} \int_0^a \int_0^l 16 \frac{a^2}{\pi^2} A^2 y^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} x + 2A^2 y^2 \cos^2 \frac{\pi}{a} x dx dy \\ &= \frac{A^2}{2D} \left(\frac{8a^3 l^3}{3\pi^2} + \frac{l^5 a}{5} \right), \end{aligned} \quad (6.127)$$

$$\bar{V} = 0, \quad (\text{annetut siirtymät ovat nollia}). \quad (6.128)$$

Minimoidaan systeemin komplementaarinen energia asettamalla

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial A} = \frac{1}{D} \left(\frac{8a^3 l^3}{3\pi^2} + \frac{al^5}{5} \right) A + \frac{1}{3Dl} \left(2Al^4 \frac{a^3}{\pi^2} + 2l^2 \frac{a^3}{\pi^3} P \right) = 0. \quad (6.129)$$

Tapauksessa $a = l = 2$ tulee yhtälö

$$34.4152A + 0.3440P = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -0.01P, \quad (6.130)$$

joista seuraa

$$\bar{U} = \bar{U}^p + \bar{U}^L = 0.0190 \frac{P^2}{D}. \quad (6.131)$$

Jäykkyysparametrin alaraja-arvoksi saadaan

$$\bar{S} = \frac{P^2}{2\bar{U}} \approx 26D. \quad (6.132)$$

Luku 7

Levyteoriaa

7.1 Tasojännitystila

Tarkastellaan levymäistä kannattajaa, jonka keskitaso on (x, y) -tason suuntainen ja jota kuormitetaan (x, y) -tason suuntaisilla kuormilla. Levyn paksuus on h . Levyssä vallitsee tasojännitystila, ja nolasta eroavat jännityskomponentit ovat σ_x , σ_y ja τ_{xy} mutta

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (7.1)$$

Yleistetyn Hooken lain mukaan, isotrooppisen kimmoisen aineen tapauksessa,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad (7.2)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad (7.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \quad (7.4)$$

missä liukumoduuli on

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (7.5)$$

Ratkaisemalla jännitykset muodonmuutosten avulla saadaan

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad (7.6)$$

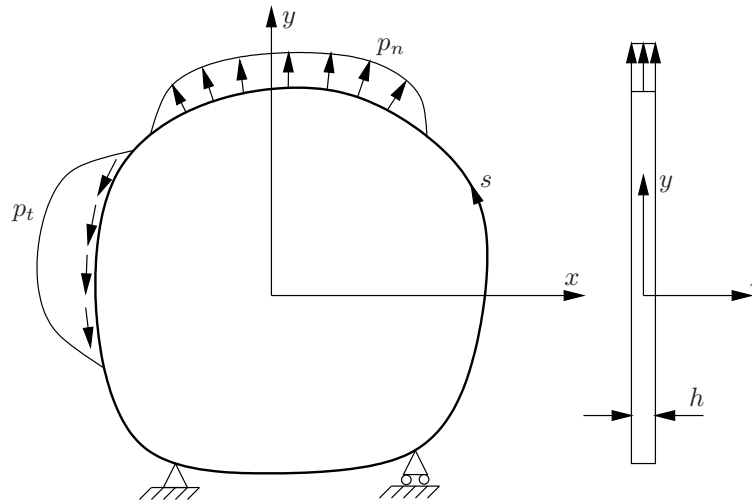
$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \quad (7.7)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \quad (7.8)$$

Tasapainoyhtälöt tasossa ovat kuvan 7.2 perusteella

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0, \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0. \quad (7.10)$$



Kuva 7.1 Levy.

7.2 Siirtymämenetelmä

Eliminoimalla jännityskomponentit tasapainoyhtälöissä Hooken lain ja kinemaattisten yhtälöiden avulla päädytään Lamén yhtälöihin

$$G \left(\Delta u + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial e}{\partial x} \right) + f_x = 0, \quad (7.11)$$

$$G \left(\Delta v + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial e}{\partial y} \right) + f_y = 0, \quad (7.12)$$

missä on merkitty

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (7.13)$$

ja Laplacen operaattori on

$$\Delta(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial y^2}. \quad (7.14)$$

7.3 Voimamenetelmä

Voimamenetelmän perusyhtälö on yhteensopivuusyhtälö. Eliminoimalla yhteensopivuusehdosta

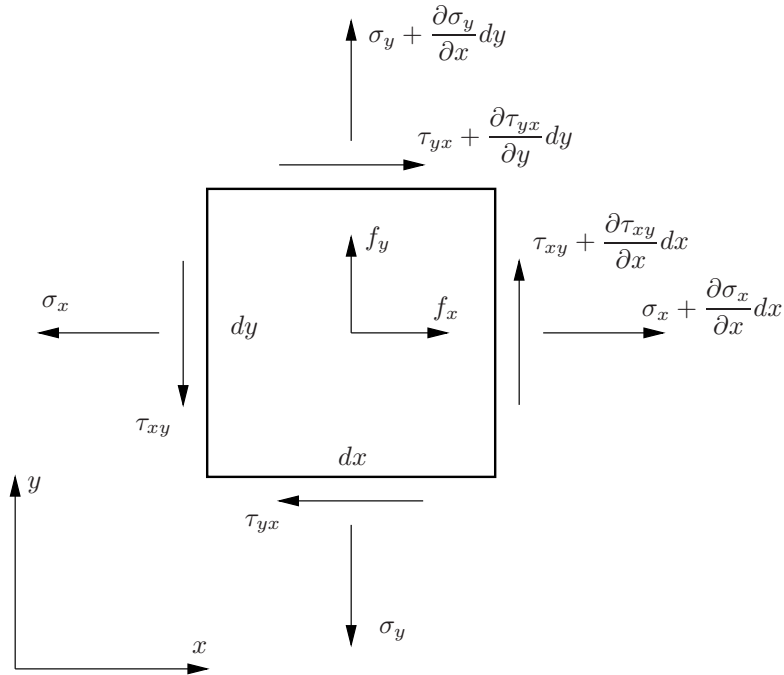
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (7.15)$$

muodonmuutoskomponentit Hooken lain kautta jännityskomponenttien avulla saadaan yhtälö

$$\frac{\partial^2(\sigma_x - \nu\sigma_y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\sigma_y - \nu\sigma_x)}{\partial x^2} = \frac{E}{G} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (7.16)$$

Tasapainoehto

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \quad (7.17)$$



Kuva 7.2 Tasapainoehdot tasossa.

toteutuu identtisesti, jos

$$\sigma_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + V, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (7.18)$$

missä $V(x, y)$ on kaavoilla

$$f_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad f_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (7.19)$$

määritelty ulkoisen kuorman potentiaali.

Toinen tasapainoehto

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \quad (7.20)$$

toteutuu, jos

$$\sigma_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} + V, \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (7.21)$$

Koska

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad (7.22)$$

saadaan yhteys

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (7.23)$$

ja voidaan päätellä, että

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \psi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (7.24)$$

missä $\Phi(x, y)$ on Airyn jännitysfunktio. Leikkausjännitysten yhtäsuuruuden perusteella

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}. \quad (7.25)$$

Jännityskomponenteille saadaan Airyn jännitysfunktion avulla esitykset

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + V, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + V, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (7.26)$$

Sijoittamalla jännitysfunktion avulla lausutut jännityskomponentit jännitysten avulla lausuttuun yhteensopivuusehtoon tulee yhtälö

$$\Delta \Delta \Phi + (1 - \nu) \Delta V = 0, \quad (7.27)$$

missä

$$\Delta(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial y^2} \quad (7.28)$$

on jälleen Laplacen operaattori.

Tapauksessa $f_x = f_y = \text{vakio}$, eli $\Delta V = 0$, saadaan yhteensopivuusehto yksinkertaisempaan muotoon

$$\Delta \Delta \Phi = 0. \quad (7.29)$$

Yhtälö on komponenttimuodossa

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(x, y) = 0 \quad (7.30)$$

eli

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0. \quad (7.31)$$

Differentiaaliyhtälö (7.31) on tyypiltään biharmoninen, ja sen ratkaisuja ovat biharmoniset funktiot.

7.4 Tasomuodonmuutostila

Tasomuodonmuutostilassa (x, y) -tasossa

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0 \quad (7.32)$$

ja

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\ &= \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 + 2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y). \end{aligned} \quad (7.33)$$

Tasomuodonmuutostilassa muodonmuutosten ja jännitysten väliset yhteydet tulevat muotoon

$$\varepsilon_x = \frac{(1 - \nu^2)}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_y \right), \quad (7.34)$$

$$\varepsilon_y = \frac{(1 - \nu^2)}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_x \right), \quad (7.35)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad (7.36)$$

ja niiden käänteiset yhtälöt ovat

$$\sigma_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_y\right), \quad (7.37)$$

$$\sigma_y = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_x\right), \quad (7.38)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \quad (7.39)$$

Tasomuodonmuutostilassa Navierin yhtälöt muuntuvat muotoon

$$G\left(\Delta u + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial x}\right) + f_x = 0, \quad (7.40)$$

$$G\left(\Delta v + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial y}\right) + f_y = 0. \quad (7.41)$$

Voimamenetelmän biharmoninen differentiaaliyhtälö on nyt

$$\Delta\Delta\Phi + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta V = 0. \quad (7.42)$$

7.5 Reunaehdot

Kuvan 7.3 perusteella johdetaan tarkasteltavan tasojännitys- tai tasomuodonmuutostilassa olevan alueen reuna-alkiolle akselin x suuntaisille voimille tasapainoyhtälö

$$\sigma_x dy + \tau_{yx}(-dx) - t_x ds = 0, \quad (7.43)$$

ja vastaavasti akselin y suuntaisten voimien tasapainoehto on

$$\sigma_y(-dx) + \tau_{xy} dy - t_y ds = 0. \quad (7.44)$$

Tasossa (x, y) olevan alueen tai kappaleen reunaa pitkin kulkee koordinaatti s . Kuvan 7.3 perusteella saadaan geometriset yhteydet

$$\sin \alpha = -\frac{dx}{ds}, \quad \cos \alpha = \frac{dy}{ds}, \quad (7.45)$$

joiden avulla reuna-alkion tasapainoehdot tulevat muotoon

$$t_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha, \quad (7.46)$$

$$t_y = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha, \quad (7.47)$$

tai

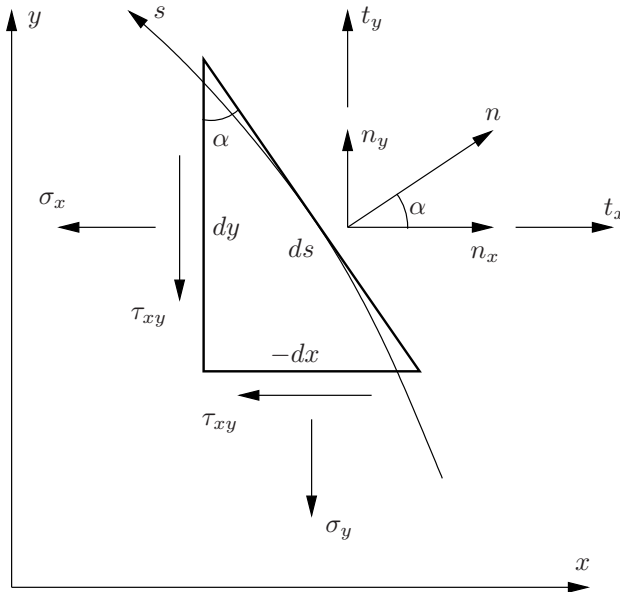
$$t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y, \quad (7.48)$$

$$t_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y, \quad (7.49)$$

missä

$$n_x = \cos \alpha, \quad n_y = \sin \alpha \quad (7.50)$$

ovat reunakäyrän normaalivektorin komponentit.



Kuva 7.3 Reunan tasapainoehdot.

Sijoittamalla reunavoimien t_x ja t_y kaavoihin Airyn jännitysfunktion avulla lausutut jännityskomponentit,

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (7.51)$$

tulee

$$\begin{aligned} t_x(s) &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \left(-\frac{dx}{ds} \right) \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (7.52)$$

$$\begin{aligned} t_y(s) &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left(-\frac{dx}{ds} \right) \\ &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (7.53)$$

Integroimalla jännitysfunktion avulla lausuttu voimasuureiden reunaehto saadaan

$$\int_0^s \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) ds = \int_0^s t_x ds. \quad (7.54)$$

Merkitsemällä

$$Q_x = \int_0^s t_x(s) ds \quad \text{ja} \quad B = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{s=0} \quad (7.55)$$

saadaan integroimalla reunaa pitkin

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_s = Q_x + B. \quad (7.56)$$

Samalla tavalla tulee integroimalla

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_s = -Q_y + A, \quad (7.57)$$

missä on merkitty

$$Q_y = \int_0^s t_y(s) ds \quad \text{ja} \quad A = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{s=0}. \quad (7.58)$$

Derivoimalla jännitysfunktio ketjusäännön mukaan saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{ds} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} \\ &= (-Q_y + A) \frac{dx}{ds} + (Q_x + B) \frac{dy}{ds}, \end{aligned} \quad (7.59)$$

josta seuraa integroimalla

$$\Phi = \int_0^s \left[Q_y \left(-\frac{dx}{ds} \right) + Q_x \frac{dy}{ds} \right] ds + Ax + By + C. \quad (7.60)$$

Jännitysten arvot eivät muutu, jos asetetaan $A = B = C = 0$. Tällöin saadaan

$$\Phi = \int_0^s (Q_y \sin \alpha + Q_x \cos \alpha) ds. \quad (7.61)$$

Jännitysfunktion derivaatta normaalin suuntaan on

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dn} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dn} \\ &= -Q_y \cos \alpha + Q_x \sin \alpha. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Esimerkki 7.1 Tarkastellaan esimerkkinä vedettyä levyä ja sen reunaehtojen määrittämistä.

Lasketaan ensin

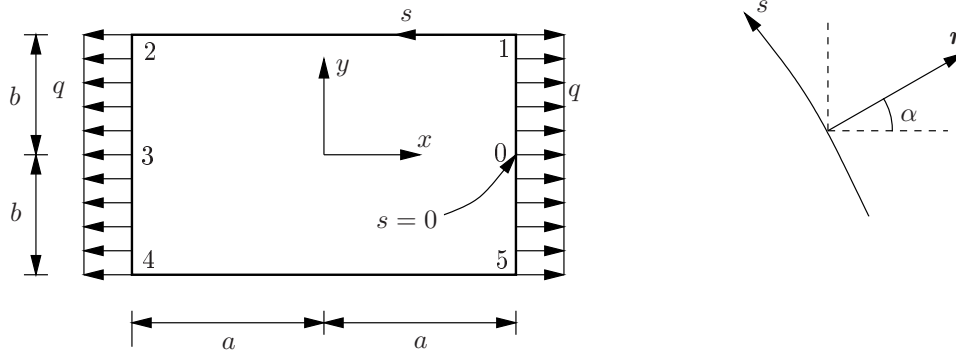
$$Q_x = \int_0^s t_x ds, \quad Q_y = \int_0^s t_y ds. \quad (7.63)$$

Esimerkin tapauksessa $Q_y \equiv 0$, koska $t_y \equiv 0$.

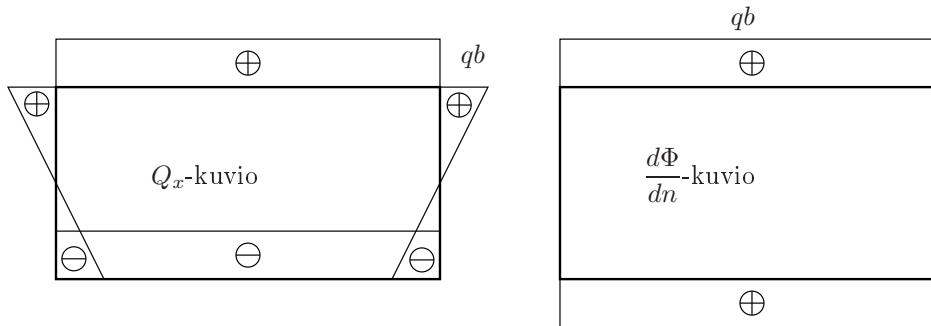
Jännitysfunktion normaaliderivaatta on

$$\frac{d\Phi}{dn} = -Q_y \cos \alpha + Q_x \sin \alpha = Q_x \sin \alpha. \quad (7.64)$$

Levyn reunat ovat suoria ja x - tai y -akselin suuntaisia. Sini- ja kosini-funktion arvot reunan eri osissa on koottu ohaiseen taulukkoon.



Kuva 7.4 Vedetty levy.



Kuva 7.5 Leikkausvoima Q_x ja jännitysfunktion normaaliderivaatta vedetyn levyn reunalla.

7.6 Kehäanalogia

Integroimalla voimien reunaehdot reunaa pitkin saatiin yhtälöt

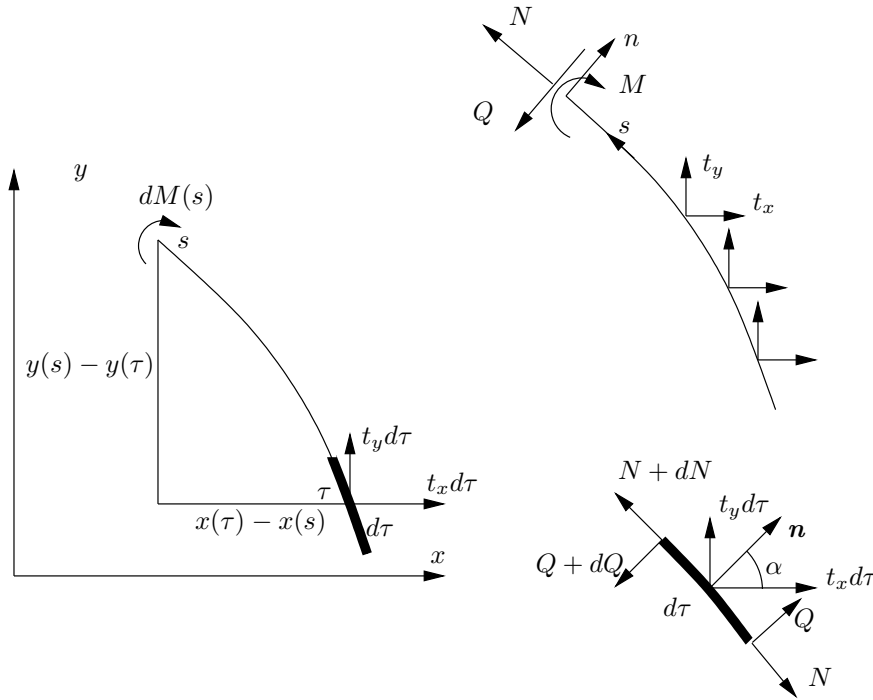
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int t_x(s) ds + B = Q_x + B, \quad (7.65)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = - \int t_y(s) ds + A = -Q_y + A. \quad (7.66)$$

Yhdesti yhtenäisessä alueessa jännitykset eivät muutu, jos funktioon Φ lisätään lineaar-

Taulukko 7.1 Sinin ja kosinin arvot levyn reunalla.

väli	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
5 -1	0	1
1 -2	1	0
2 -4	0	-1
4 -5	-1	0



Kuva 7.7 Kehäänalogian voimasuureet.

josta seuraa integroimalla

$$M(s) = \int_0^s [y(s) - y(\tau)] t_x(\tau) d\tau - \int_0^s [x(s) - x(\tau)] t_y(\tau) d\tau + C. \quad (7.74)$$

Vastaavasti kehäksi ajatellun reunakäyrän alkion $d\tau$ normaalivoiman ja leikkausvoiman tasapainoehdot ovat

$$dN = (t_x d\tau) \sin \alpha - (t_y d\tau) \cos \alpha, \quad (7.75)$$

$$dQ = (t_x d\tau) \cos \alpha + (t_y d\tau) \sin \alpha, \quad (7.76)$$

joista saadaan integroimalla normaali- ja leikkausvoima

$$N = Q_x \sin \alpha - Q_y \cos \alpha, \quad (7.77)$$

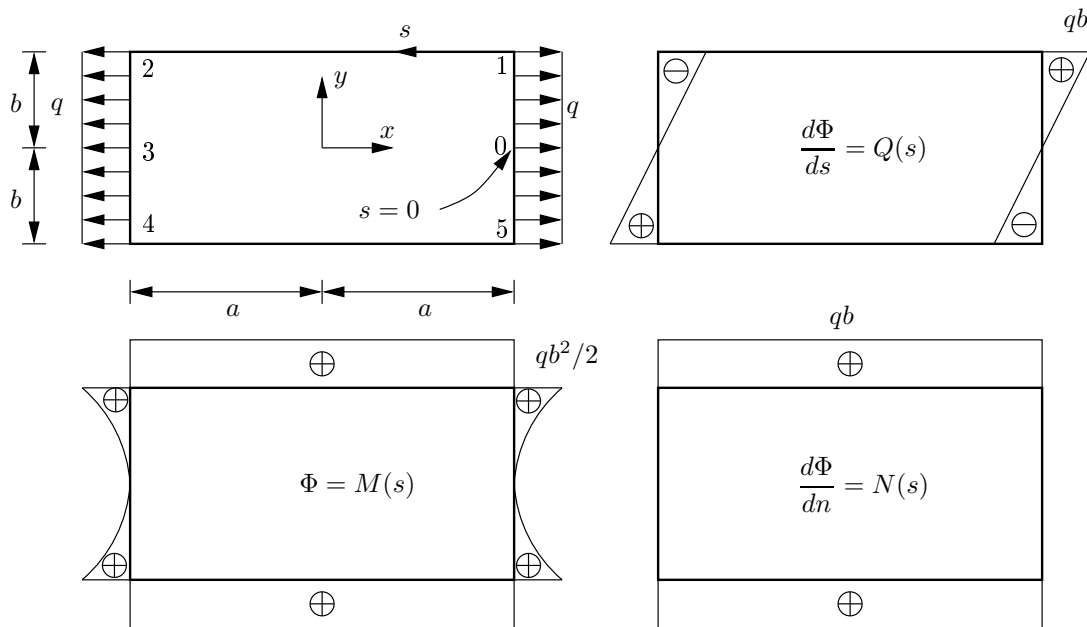
$$Q = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha. \quad (7.78)$$

Toisaalta

$$\frac{d\Phi}{dn} = -Q_y \cos \alpha + Q_x \sin \alpha, \quad (7.79)$$

joten

$$\frac{d\Phi}{dn} = N. \quad (7.80)$$



Kuva 7.8 Vedetyn levyn reunan voimasuureet kehäanalogialla.

Ketjusäännön nojalla

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi}{ds} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} \\
 &= -Q_y \frac{dx}{ds} + Q_x \frac{dy}{ds} \\
 &= Q_y \sin \alpha + Q_x \cos \alpha,
 \end{aligned} \tag{7.81}$$

joten

$$\frac{d\Phi}{ds} = Q. \tag{7.82}$$

Esimerkki 7.2 Jännitysfunktion reuna-arvot kuvan 7.8 vedetyn levyn tapauksessa.

Tarkastellaan kehäanalogian sovellutus esimerkkinä samaa vedettyä levyä kuin edellä. Biharmonisen differentiaaliyhtälön ratkaisussa tarpeelliset reunasuureet saadaan nyt määrittämällä reunakuorman momentti-, leikkausvoima- ja normaalivoimajakaumat. Momenttikuvion määrittämisessä voidaan otaksua nivel (reunakehään) koordinaatin s lähtöpisteeseen (keskellä symmetriasyistä). Leikkausvoiman jakauma määritetään momentin jakaumasta derivoimalla

$$Q = \frac{dM}{ds}. \tag{7.83}$$

Kuvaajat on esitetty kuvissa 7.8 b, c ja d.

7.7 Differenssimenetelmä

Differentiaalioperaattorin $\nabla^4(\bullet)$ differenssiapproksimaatio (–kaavio) on esitetty jo aiemmin laatan ratkaisun yhteydessä. Merkitsemällä

$$\Delta x = \lambda_x, \quad \Delta y = \lambda_y, \quad \alpha = \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_y}\right)^2 \quad (7.84)$$

saadaan differenssimenetelmän mukainen approksimaatio biharmoniselle differentiaalioperaattorille

$$\lambda_x^4 [\nabla^4(\bullet)]_0 \simeq \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & \alpha^2 & & \\ \hline & 2\alpha & -4\alpha(1+\alpha) & 2\alpha & \\ \hline 1 & -4(1+\alpha) & 6+8\alpha+6\alpha^2 & -4(1+\alpha) & 1 \\ \hline & 2\alpha & -4\alpha(1+\alpha) & 2\alpha & \\ \hline & & 1 & & \\ \hline \end{array} (\bullet). \quad (7.85)$$

Jos

$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda, \quad (7.86)$$

niin biharmonisen probleeman differenssimolekyylä pelkistyy muotoon

$$\lambda^4 [\nabla^4(\bullet)]_0 \simeq \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & 1 & & \\ \hline & 2 & 8 & 2 & \\ \hline 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ \hline & 2 & -8 & 2 & \\ \hline & & 1 & & \\ \hline \end{array} (\bullet). \quad (7.87)$$

Jännityskomponenttien differenssiapproksimaatiot ovat

$$\sigma_x \simeq \frac{1}{\lambda_y^2} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline -2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \Phi, \quad (7.88)$$

$$\sigma_y \simeq \frac{1}{\lambda_x^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -2 & 1 \\ \hline \end{array} \Phi, \quad (7.89)$$

$$\tau_{xy} \simeq -\frac{1}{4\lambda_x\lambda_y} \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline \end{array} \Phi. \quad (7.90)$$

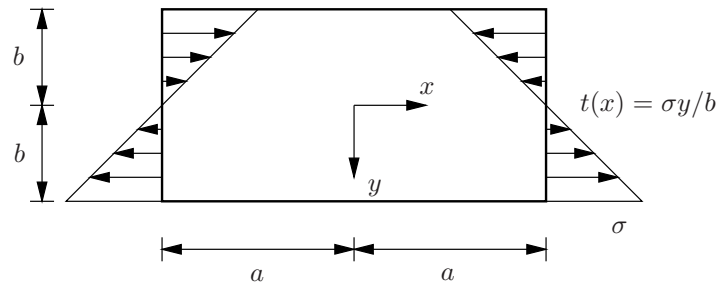
7.8 Ratkaisu polynomien avulla

Yksinkertaisen geometrian ja kuormituksen tapauksessa levyn tai tasomuodonmuutostilassa olevan kappaleen ratkaisu voidaan muodostaa polynomien avulla. Jos $f_x = f_y = 0$, niin biharmonisen tehtävän differentiaaliyhtälö on

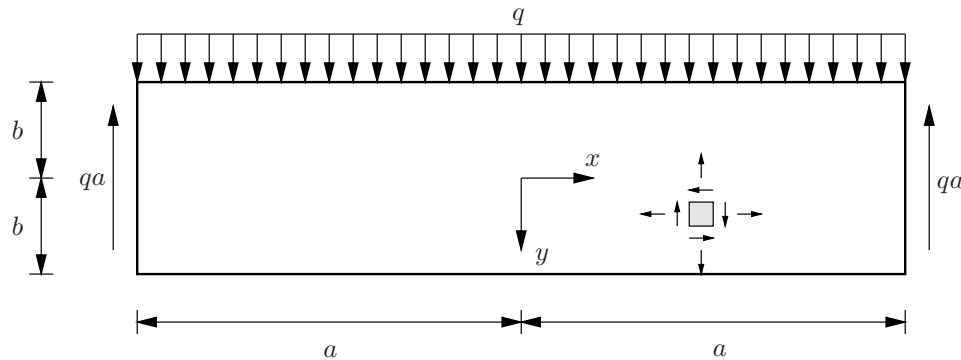
$$\Delta\Delta\Phi = 0 \quad (7.91)$$

eli

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} = 0. \quad (7.92)$$



Kuva 7.9 Suorakaidelevyn puhdas taivutus, kun reunaännitys on σ .



Kuva 7.10 Tasainen kuorma levymäisellä kannattajalla.

Esimerkki 7.3 Vakioännitystilassa olevaa aluetta. Ratkaisu polynomien avulla.

Toisen asteen polynomi

$$\Phi_2 = \frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2 \quad (7.93)$$

toteuttaa biharmonisen yhtälön. Jännityskomponentit ovat

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = c_2, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = a_2, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -b_2, \quad (7.94)$$

eli jännityskomponentit ovat vakioita.

Esimerkki 7.4 Suorakaiteen muotoisen levyn puhdas taivutus kuvassa 7.9.

Jännitysfunktio

$$\Phi_3 = \frac{d_3}{6}y^3 \quad (7.95)$$

vastaa puhdasta taivutustilaa

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = d_3y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (7.96)$$

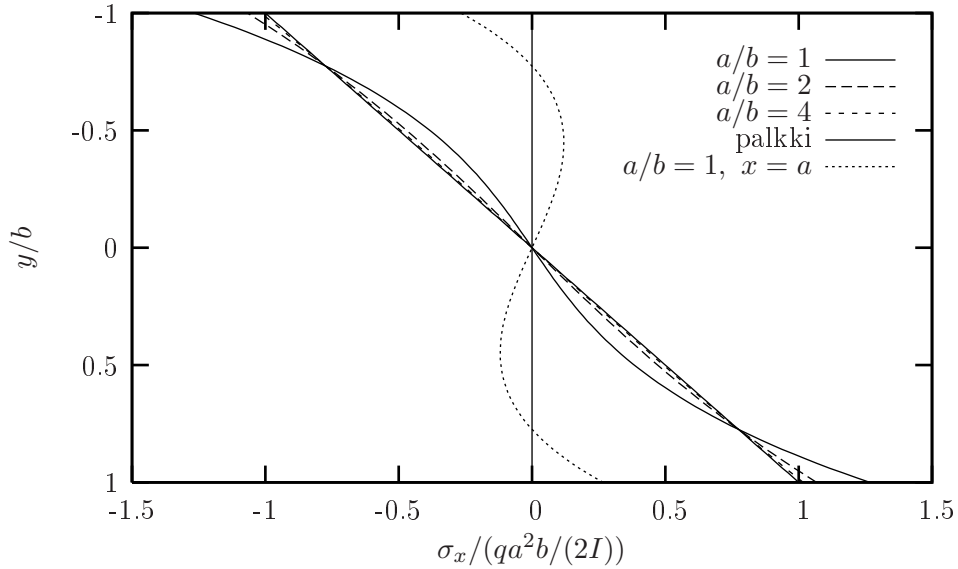
Esimerkki 7.5 Määritetään tasaisesti kuormitetun palkin jännitystilaa.

Otaksutaan, että levyn paksuus on 1. Palkin reunaehdot ovat

$$\tau_{xy}(x, \pm b) = 0, \quad \sigma_y(x, b) = 0, \quad \sigma_y(x, -b) = -q. \quad (7.97)$$

Palkin päissä ovat voimassa tasapainoehdot

$$\int_{-b}^b \tau_{xy}(-a, y) dy = qa, \quad \int_{-b}^b \tau_{xy}(a, y) dy = -qa, \quad (7.98)$$



Kuva 7.11 σ_x -jakauma palkin keskellä sivusuhteilla $a/b = 1, 2$ ja 4 . palkki on palkkiteorian tulos. Sivusuhteen arvolla 1 on piirretty σ_x -jakauma palkin päässä.

$$\int_{-b}^b \sigma_x(\pm a, y) dy = 0, \quad \int_{-b}^b y \sigma_x(\pm a, y) dy = 0. \quad (7.99)$$

Jännitysfunktion konstruoinnissa lähdetään liikkeelle termistä

$$\Phi_{54} = \frac{d_5}{3 \cdot 2} \left(x^2 y^3 - \frac{y^5}{5} \right), \quad (7.100)$$

josta seuraa derivoimalla

$$\sigma_x = d_5 \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right), \quad (7.101)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{3} d_5 y^3, \quad (7.102)$$

$$\tau_{xy} = -d_5 x y^2. \quad (7.103)$$

Koska $\sigma_x = \Phi_{,yy}$, $\sigma_y = \Phi_{,xx}$ ja $\tau_{xy} = -\Phi_{,xy}$, jännityskomponentit toteuttavat homogeneiset tasapainoyhtälöt $\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} = 0$ ja $\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} = 0$.

Reunaehdot eivät vielä tällä jännitysfunktion valinnalla toteudu, vaan

$$\sigma_y(x, b) \neq 0 \quad \text{ja} \quad \tau_{xy}(x, \pm b) \neq 0. \quad (7.104)$$

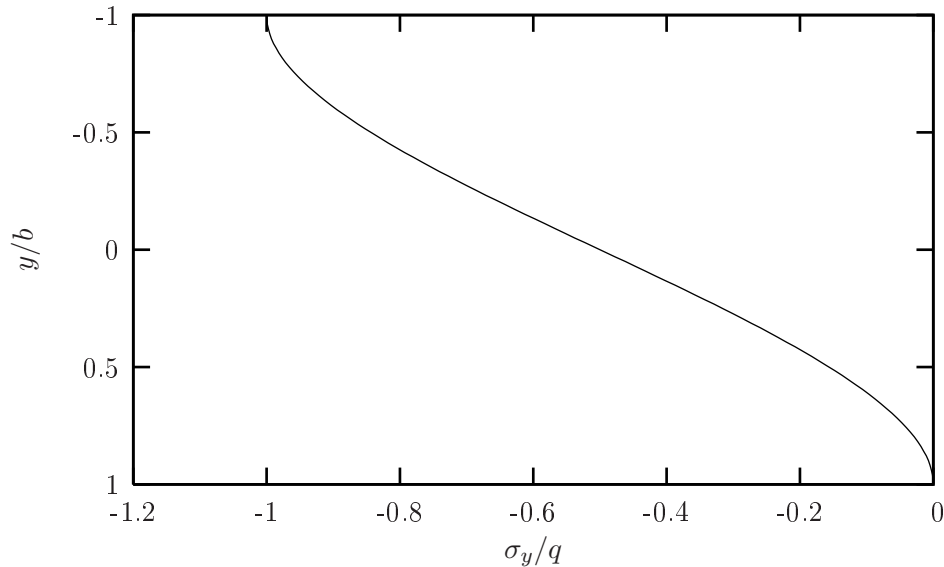
Lisätään jännitysten lausekkeisiin sopivia termejä, jotka myös toteuttavat tasapainoyhtälöt, ja saadaan

$$\sigma_y = \frac{1}{3} d_5 y^3 + b_3 y + a_2, \quad (7.105)$$

$$\tau_{xy} = -d_5 x y^2 - b_3 x. \quad (7.106)$$

Reunojen $y = \pm b$ reunaehtojen

$$\sigma_y(x, -b) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, -b) = -\frac{1}{3} d_5 b^3 - b_3 b + a_2 = -q, \quad (7.107)$$



Kuva 7.12 σ_y -jakauma.

$$\sigma_y(x, b) = \frac{1}{3}d_5b^3 + b_3b + a_2 = 0 \quad (7.108)$$

ja

$$\tau_{xy}(x, b) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(x, -b) = -d_5xb^2 - b_3x = 0 \quad (7.109)$$

perusteella tulee

$$a_2 = -\frac{q}{2}, \quad b_3 = \frac{3q}{4b}, \quad d_5 = -\frac{3q}{4b^3}. \quad (7.110)$$

Merkitsemällä

$$I = \frac{2}{3}b^3 \quad (7.111)$$

saadaan

$$\sigma_x = -\frac{q}{2I}(x^2y - \frac{2}{3}y^3), \quad (7.112)$$

$$\sigma_y = -\frac{q}{2I}\left(\frac{1}{3}y^3 - b^2y + \frac{2}{3}b^3\right), \quad (7.113)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{2I}(b^2 - y^2)x. \quad (7.114)$$

Nämä jännityskomponentit toteuttavat reunaehdot

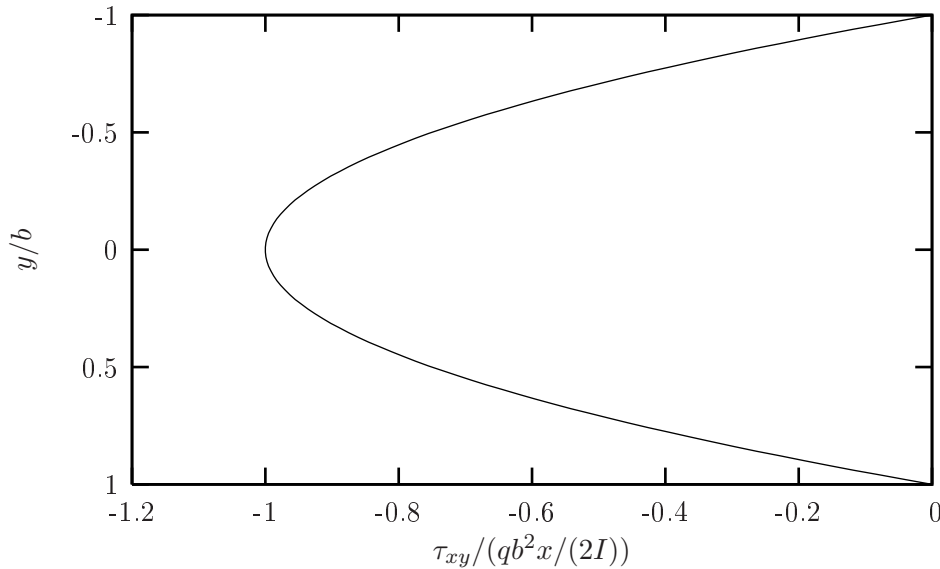
$$\int_{-b}^b \tau_{xy}(\pm a, y) dy = \pm qa, \quad \int_{-b}^b \sigma_x(\pm a, y) dy = 0. \quad (7.115)$$

Ehdon $M(\pm a) = 0$ toteuttamiseksi yllä olevaan ratkaisuun lisätään puhdasta taivutusta vastaava jännitystila

$$\sigma_x = d_3y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (7.116)$$

Vakio d_3 määritetään ehdosta

$$M = \int_{-b}^b y\sigma_x(\pm a, y) dy = 0, \quad (7.117)$$



Kuva 7.13 τ_{xy} -jakauma.

josta saadaan

$$d_3 = \frac{q}{2I} \left(a^2 - \frac{2}{5}b^2 \right) \quad (7.118)$$

ja

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{q}{2I} (a^2 - x^2)y + \frac{q}{2I} \left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}b^2y \right) \\ &= \frac{M(x)}{I} y + \frac{qy}{2b} \left[\left(\frac{y}{b} \right)^2 - \frac{3}{5} \right], \end{aligned} \quad (7.119)$$

missä ensimmäinen termi on palkkiteorian mukainen tulos ja toinen termi on korjaustermi, joka ei riipu koordinaatista x . Keskileikkauksessa reunalla, $x = 0$, $y = b$, korjaustermin ja palkkiteorian reunajännityksen suhde on

$$\frac{2qb^3/(15I)}{qba^2/(2I)} = \frac{4}{15} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \quad (7.120)$$

Palkin päissä $x = \pm a$ saadaan jännitykselle lauseke

$$\sigma_x(\pm a, y) = \frac{q}{2I} \left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}b^2y \right). \quad (7.121)$$

Ratkaisu on tarkka vain, jos palkin päissä normaalijännityksen σ_x jakauma on kaavan (7.121) mukainen.

7.9 Siirtymien määrittäminen

Lausutaan siirtymien derivaatat (muodonmuutokset) jännitysten avulla

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad (7.122)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad (7.123)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}. \quad (7.124)$$

Kaavoista (7.122), (7.123) ja (7.124) saadaan integroimalla

$$\begin{aligned} Eu &= E \int_a^x \varepsilon_x dx + \bar{f}_1(y) \\ &= \int_a^x (\sigma_x - \nu\sigma_y) dx + \bar{f}_1(y) \end{aligned} \quad (7.125)$$

$$= \int_a^x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + f_1(y),$$

$$\begin{aligned} Ev &= E \int_b^y \varepsilon_y dy + \bar{f}_2(x) \\ &= \int_b^y (\sigma_y - \nu\sigma_x) dy + \bar{f}_2(x) \end{aligned} \quad (7.126)$$

$$= \int_b^y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y} + f_2(x).$$

Koska

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (7.127)$$

saadaan

$$\int_a^x \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} dx + \int_b^y \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} dy + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial f_1(y)}{\partial y} - \frac{df_2(x)}{dx} \equiv F_1(y) + F_2(x) \quad (7.128)$$

ja

$$F_2(x) + \frac{df_2(x)}{dx} = -F_1(y) - \frac{df_1(y)}{dy} = \text{vakio} = c. \quad (7.129)$$

Integroimalla seuraa

$$f_2(x) = - \int_a^x F_2(x) dx + cx + d_2, \quad (7.130)$$

$$f_1(y) = - \int_b^y F_1(y) dy - cy + d_1, \quad (7.131)$$

missä olevat vakiot c , d_1 ja d_2 ratkaistaan reunaehdoista.

Esimerkki 7.6 Määritetään tasaisesti kuormitetun palkin siirtymät.

Kuvan 7.10 esimerkin tapauksessa symmetrian ja reunaehtojen perusteella

$$u(0, y) = 0, \quad v(\pm a, 0) = 0. \quad (7.132)$$

Sijoittamalla σ_x ja σ_y kaavoihin

$$Eu = \int (\sigma_x - \nu\sigma_y)dx + f_1(y), \quad (7.133)$$

$$Ev = \int (\sigma_y - \nu\sigma_x)dy + f_2(x) \quad (7.134)$$

saadaan

$$Eu = \frac{q}{2I} \left[\left(a^2x - \frac{x^3}{3} \right) y + x \left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}b^2y \right) + \nu x \left(\frac{1}{3}y^3 - b^2y + \frac{2}{3}b^3 \right) \right] + f_1(y), \quad (7.135)$$

$$Ev = -\frac{q}{2I} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{b^2y^2}{2} + \frac{2}{3}b^3y + \nu \left[(a^2 - x^2)\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5}b^2y^2 \right] \right\} + f_2(x). \quad (7.136)$$

Kaavan

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{xy} \quad (7.137)$$

perusteella tulee

$$E \frac{\partial u}{\partial y} + E \frac{\partial v}{\partial x} = 2(1+\nu) \left[-\frac{q}{2I}(b^2 - y^2)x \right] \quad (7.138)$$

eli

$$\begin{aligned} & \frac{q}{2I} \left[\left(a^2x - \frac{x^3}{3} \right) + x \left(2y^2 - \frac{2}{5}b^2 \right) + \nu x(y^2 - b^2) \right] + \frac{df_1(y)}{dy} \\ & - \frac{q}{2I} \left\{ 0 + \nu \left[-2x\frac{y^2}{2} \right] \right\} + \frac{df_2(x)}{dx} \\ & = -2(1+\nu) \left[\frac{q}{2I}(b^2 - y^2)x \right] \end{aligned} \quad (7.139)$$

ja

$$\begin{aligned} & \frac{q}{2I} \left[a^2x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{5}xb^2 - \nu b^2x \right] + \frac{q}{2I} [2xy^2 + \nu xy^2 + \nu xy^2] + \frac{df_1(y)}{dy} + \frac{df_2(x)}{dx} \\ & + \frac{q}{2I} [(2+2\nu)(-y^2)x] + 2(1+\nu)\frac{q}{2I}b^2x = 0, \end{aligned} \quad (7.140)$$

mistä seuraa edelleen

$$\frac{q}{2I} \left[a^2x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{5}xb^2 + (2+\nu)b^2x \right] + \frac{df_1(y)}{dy} + \frac{df_2(x)}{dx} = 0. \quad (7.141)$$

Merkitsemällä

$$F_2(x) = \frac{q}{2I} \left[a^2x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{5}xb^2 + (2+\nu)b^2x \right] \quad (7.142)$$

ja siirtämällä muuttujasta x riippuvat termit vasemmalle puolelle ja muuttujasta y riippuvat termit oikealle puolelle tulee

$$F_2(x) + \frac{df_2(x)}{dx} = 0 - \frac{df_1(y)}{dy} = c, \quad (7.143)$$

(koska yhtäläisyysmerkin eri puolilla olevien lausekkeiden on oltava sama vakio c).

Integroimalla seuraa

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -\int_0^a F_2(x) dx + cx + d_2 \\ &= -\frac{q}{2I} \left[a^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{2}{5} \frac{x^2}{2} b^2 + (2 + \nu) b^2 \frac{x^2}{2} \right] + cx + d_2 \end{aligned} \quad (7.144)$$

ja

$$f_1(y) = -cy + d_1. \quad (7.145)$$

Reunaehdosta

$$u(0, y) = 0 \quad (7.146)$$

ratkaistaan

$$c = 0, \quad d_1 = 0. \quad (7.147)$$

Sijoittamalla integroimisvakio $f_2(x)$ (y :n suhteen vakio) siirtymän v kaavaan tulee

$$\begin{aligned} Ev &= -\frac{q}{2I} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{b^2 y^2}{2} + \frac{2}{3} b^3 y + \nu \left[(a^2 - x^2) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5} b^2 y^2 \right] \right\} \\ &\quad - \frac{q}{2I} \left[\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} b^2 x^2 + \frac{2 + \nu}{2} b^2 x^2 \right] + d_2. \end{aligned} \quad (7.148)$$

Reunaehdon

$$v(\pm a, 0) = 0 \quad (7.149)$$

perusteella saadaan

$$d_2 = \frac{q}{2I} \left(\frac{5}{12} a^4 + \frac{8 + 5\nu}{10} a^2 b^2 \right). \quad (7.150)$$

Siirtymien lausekkeet ovat

$$u = \frac{q}{2EI} \left[\left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) y + x \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} b^2 y \right) + \nu x \left(\frac{1}{3} y^3 - b^2 y + \frac{2}{3} b^3 \right) \right], \quad (7.151)$$

$$\begin{aligned} v &= -\frac{q}{2EI} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{b^2 y^2}{2} + \frac{2}{3} b^3 y + \nu \left[(a^2 - x^2) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5} b^2 y^2 \right] \right\} \\ &\quad - \frac{q}{2EI} \left[\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} b^2 x^2 + \frac{2 + \nu}{2} b^2 x^2 - \left(\frac{5}{12} a^4 + \frac{8 + 5\nu}{10} a^2 b^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.152)$$

Koska palkin keskiviivalla $y = 0$

$$\varepsilon_x(x, 0) = \frac{\nu q}{2E} \quad \text{ja} \quad u(x, 0) = \frac{\nu q x}{2E}, \quad (7.153)$$

joten levyn keskiviiva ole neutraaliakseli.

Taipuma keskiviivalla $y = 0$ on

$$v = -\frac{q}{2EI} \left[\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} b^2 x^2 + \frac{2 + \nu}{2} b^2 x^2 - \left(\frac{5}{12} a^4 + \frac{8 + 5\nu}{10} a^2 b^2 \right) \right]. \quad (7.154)$$

Keskipisteen taipuma δ on

$$\delta = v(0, 0) = \frac{5}{24} \frac{qa^4}{EI} \left[1 + \frac{12}{5} \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{8 + 5\nu}{10} \right) \right], \quad (7.155)$$

missä jälkimmäinen termi on leikkausvoiman aiheuttama.

Palkin käyristymä keskiviivalla $y = 0$ on

$$\frac{d^2v(x, 0)}{dx^2} = \frac{q}{EI} \left[\frac{a^2 - x^2}{2} + b^2 \left(\frac{8 + 5\nu}{10} \right) \right], \quad (7.156)$$

missä jälkimmäinen termi on korjaustermi palkkiteorian tulokseen

$$M(x) = -EI \frac{d^2v}{dx^2} = q \frac{a^2 - x^2}{2}. \quad (7.157)$$

Luku 8

Levytehtävän ratkaisu Fourier-sarjojen avulla

8.1 Funktion kehittäminen Fourier-sarjaksi

Välillä $(-L, L)$ määritelty funktio $f(x)$ on jaksollinen, jos välin $(-L, L)$ ulkopuolella määritellään

$$f(x + 2L) = f(x). \quad (8.1)$$

Jakson pituus on $2L$. Esimerkiksi funktion $\sin(x)$ jakson pituus on 2π .

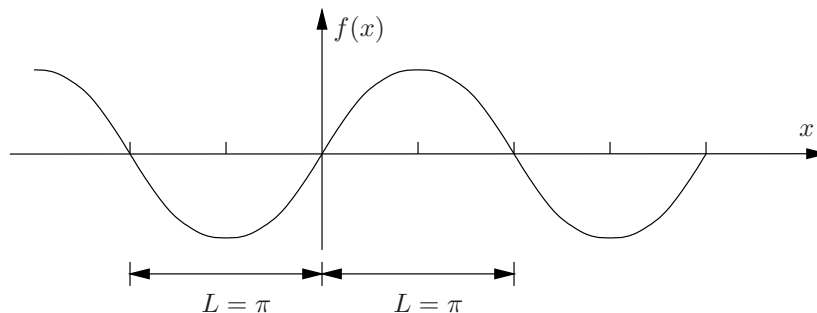
Otaksutaan, että funktio $f(x)$ on paloittain jatkuva välillä $(-L, L)$. Jos funktiolla $f(x)$ on äärellinen määrä ääriarvokohtia, niin se voidaan kehittää välillä $(-L, L)$ Fourier-sarjaksi

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x \right] \quad (8.2)$$

kertoimin

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x \, dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (8.3)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.4)$$



Kuva 8.1 Jaksollinen funktio $\sin(x)$.

Kertoimien a_n kaava johdetaan kertomalla funktion $f(x)$ sarja termillä $\cos(m\pi x/L)$, integroimalla yli välin $(-L, L)$ ja käyttämällä hyväksi trigonometristen funktioiden ortogonaalisuusominaisuuksia

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{L} x dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n, \end{cases} \quad (8.5)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{L} x dx = 0 \quad \forall m, n, \quad (8.6)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{L} x dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n. \end{cases} \quad (8.7)$$

Tällöin kertoimien a_n kaavaksi tulee

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, \dots \quad (8.8)$$

Kertomalla funktion $f(x)$ sarjakehitelmä termillä $\sin(m\pi x/L)$ ja integroimalla välin $(-L, L)$ yli saadaan vastaavasti kertoimet

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.9)$$

Esimerkki 8.1 Kehitetään Fourier-sarjaksi jaksollinen funktio

$$f(x) = 0, \quad \text{kun } -\pi < x < 0, \quad (8.10)$$

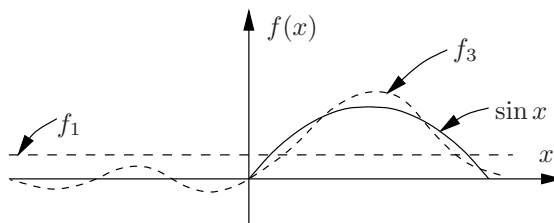
$$f(x) = \sin x, \quad \text{kun } 0 < x < \pi.$$

Jakson pituus on nyt $2L = 2\pi$, ja puolijakso on $L = \pi$. Sijoittamalla $f(x)$ Fourier-sarjan kertoimen a_n kaavaan tulee

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{-\cos n\pi}{1-n} + \frac{-\cos n\pi}{1+n} - \frac{2}{1-n^2} \right) \\ &= \frac{1 + \cos n\pi}{\pi(1-n^2)} \quad (n \neq 1), \end{aligned} \quad (8.11)$$

ja n :n arvolla yksi

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = 0. \quad (8.12)$$



Kuva 8.2 Funktion $f(x) = 0$, kun $-\pi < x < 0$, $f(x) = \sin x$, kun $0 < x < \pi$, yhden ja kolmen termin kehitelmät.

Kertoimille b_n saadaan arvot

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin nx \, dx = 0, \quad \text{kun } n \neq 1, \quad (8.13)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}. \quad (8.14)$$

Vaadittu Fourier-sarja on siis

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2 \cos 2x}{\pi \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \frac{\cos 8x}{63} + \dots \quad (8.15)$$

Yhden termin ja kolme termiä sisältävät kehitelmät

$$f_1 = \frac{1}{\pi} \quad \text{ja} \quad f_3 = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2 \cos 2x}{3\pi} \quad (8.16)$$

on piirretty kuvaan 8.2 pistekatkoviivalla ja katkoviivalla.

8.1.1 Parillisen funktion Fourier-sarja

Funktio $f(x)$ on parillinen, jos

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x. \quad (8.17)$$

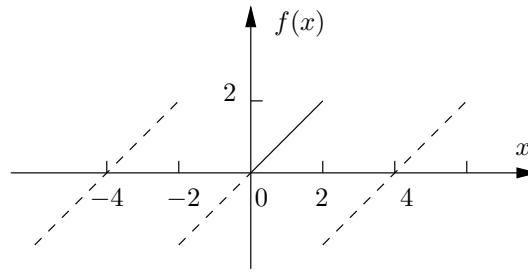
Parillinen funktio on symmetrinen y -akselin suhteen. Esimerkiksi funktiot x^2 ja $\cos(x)$ ovat parillisia.

Fourier-sarjan kertoimet a_n voidaan esittää muodossa

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx + \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx. \quad (8.18)$$

Sijoitetaan ensimmäiseen integraaliin (8.18) $x = -u$ ja $dx = -du$. Kun $x = -L$, on $u = L$ ja x :n arvo 0 vastaa u :n arvo 0. Esimmäinen integraali kaavassa (8.18) muuntuu sijoituksessa muotoon

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx = \frac{1}{L} \int_L^0 f(-u) \cos \frac{-n\pi u}{L} (-du). \quad (8.19)$$



Kuva 8.3 Funktion $f(x) = x$, kun $0 < x < 2$, jatkaminen parittomasti.

Koska

$$f(-u) = f(u) \text{ ja } \cos \frac{-n\pi u}{L} = \cos \frac{n\pi u}{L}, \quad (8.20)$$

saadaan edelleen

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(-u) \cos \frac{-n\pi u}{L} (-du) = \frac{1}{L} \int_0^L f(u) \cos \frac{n\pi u}{L} du. \quad (8.21)$$

Kirjoittamalla integroimismuuttujan u tilalle x saadaan parillisen jaksollisen funktion Fourier-sarjan kertoimet

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.22)$$

Samanlaisella laskulla todetaan, että parillisen funktion tapauksessa

$$b_n = 0. \quad (8.23)$$

8.1.2 Parittoman jaksollisen funktion Fourier-sarja

Pariton funktio toteuttaa ehdon

$$f(-x) = -f(x), \quad (8.24)$$

ja tällöin

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.25)$$

$$a_n = 0.$$

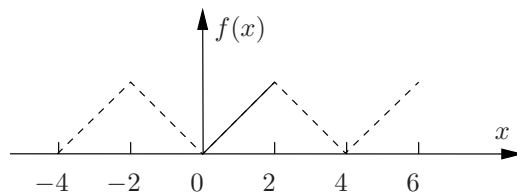
Esimerkki 8.2 Kehitetään funktio $f(x) = x$, $0 < x < 2$ sinisarjaksi ja kosinisarjaksi.

a) Jatketään funktio $f(x) = x$ parittomasti jaksolla $2L = 4$, ja kehitetään se sinisarjaksi. Fourier-sarjan kertoimiksi tulee

$$a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx \quad (8.26)$$

$$= -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi,$$



Kuva 8.4 Funktion $f(x) = x$, kun $0 < x < 2$, jatkaminen parillisesti.

ja itse Fourier-sarja on

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} - \dots \right). \end{aligned} \quad (8.27)$$

b) Kehitetään sitten funktio $f(x) = x$, $0 < x < 2$ kosinisarjaksi. Jatketaan $f(x)$ parillisesti jaksolla $2L = 4$, jolloin se voidaan kehittää kosinisarjaksi.

Koska $f(x)$ on nyt parillinen, niin sen sarjakehitelmän kertoimet ovat

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= -\frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1), \quad n \neq 0, \end{aligned} \quad (8.28)$$

$$a_0 = \int_0^2 x dx = 2,$$

$$b_n = 0.$$

Funktion $f(x)$ Fourier-kosinisarja on

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi x}{2} \\ &= 1 - \frac{8}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (8.29)$$

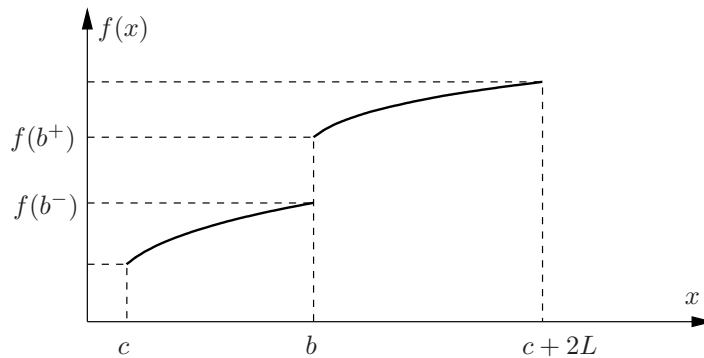
Esimerkin sini- ja kosinisarjat (8.27) ja (8.29) esittävät kuvien 8.3 ja 8.4 funktioita. Mielenkiinnon kohteena on kuitenkin vain väli $(0, 2)$. Parillisesti jatkettun funktion sarja (8.29) suppenee nopeammin.

Kuvan 8.3 pariton funktio on epäjatkuva pisteissä $x = 2$ ja $x = -2$. Epäjatkuvuus-
teissä sinisarja konvergoi kohti nollaa eli funktion $f(x)$ keskiarvoa

$$\bar{f} = \frac{f(2^+) + f(2^-)}{2}. \quad (8.30)$$

Fourier-sarja konvergoi jokaisessa funktion $f(x)$ jatkuvuus-
pisteessä a kohti arvoa $f(a)$ ja epäjatkuvuus-
pisteessä b kohti keskiarvoa

$$\bar{f} = \frac{f(b^+) + f(b^-)}{2}. \quad (8.31)$$



Kuva 8.5 Epäjatkuvan funktion Fourier-sarjan arvo epäjatkuvuus pisteessä.

Jos funktion arvot jakson päätepisteissä eivät ole samat, s.o. $f(c) \neq f(c+2L)$, niin Fourier-sarja konvergoi kohti arvoa

$$\bar{f} = \frac{1}{2}[f(c+2L) + f(c)] \quad (8.32)$$

jakson päätepisteissä.

8.2 Puolitaso, jaksollinen reunakuorma

Puoliäärettömän levyn reunalle $y = 0$ on määritelty kuormitus

$$t_y = \tau_{xy}n_x + \sigma_y n_y. \quad (8.33)$$

Reunan $y = 0$ normaalivektorin komponentit ovat

$$n_x = 0, \quad n_y = -1, \quad (8.34)$$

ja

$$t_y = -\sigma_y. \quad (8.35)$$

Merkitään

$$p(x) = -t_y(x), \quad (8.36)$$

missä

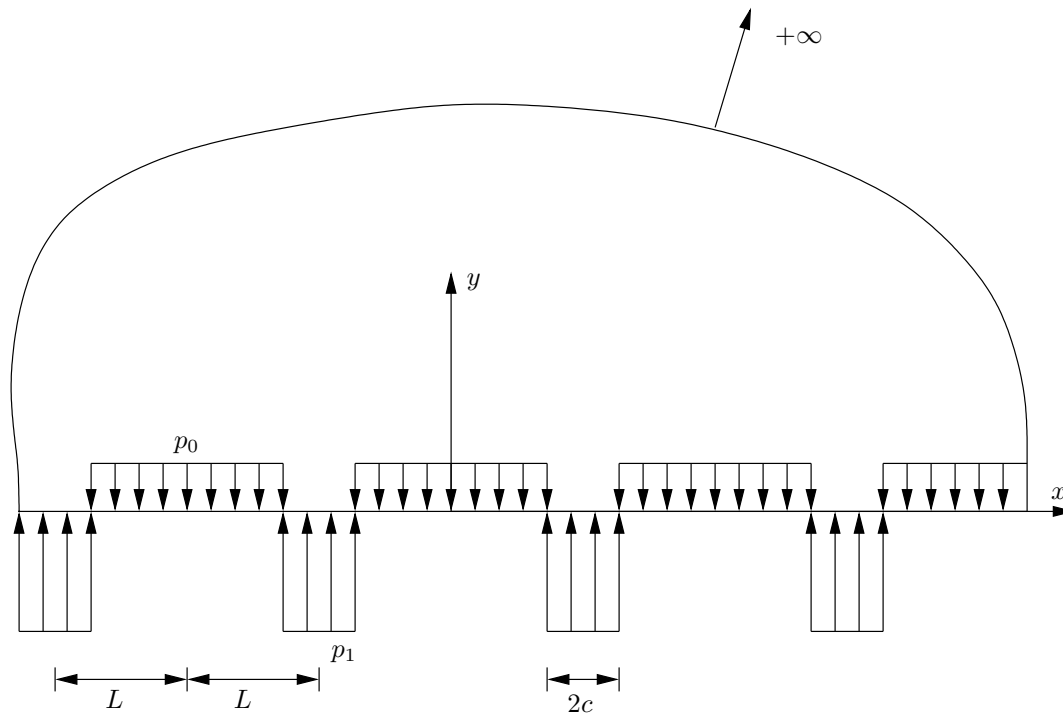
$$p(x) = \begin{cases} p_0, & \text{kun } 0 \leq x < L - c, \\ -p_1 = -p_0 \frac{L-c}{c}, & \text{kun } L - c < x \leq L. \end{cases} \quad (8.37)$$

Levyn reunaehdot ovat

$$\sigma_y(x, 0) = p(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0. \quad (8.38)$$

Kehitetään reunakuorma $p(x)$ Fourier-sarjaksi. Merkitään

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (8.39)$$



Kuva 8.6 Puolitason reunalla jaksollinen palakuorma.

Fourier-sarjan kertoimet ovat

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L p(x) \cos \alpha_n x \, dx \\
 &= \frac{2}{L} \left[\int_0^{L-c} p_0 \cos \alpha_n x \, dx - \int_{L-c}^L p_0 \frac{L-c}{c} \cos \alpha_n x \, dx \right] \\
 &= \frac{2}{L} p_0 \left[\frac{1}{\alpha_n} \sin \alpha_n x \Big|_0^{L-c} - \frac{L-c}{c} \frac{2}{L} p_0 \left[\frac{1}{\alpha_n} \sin \alpha_n x \Big|_{L-c}^L \right] \right] \\
 &= \frac{2p_0}{\alpha_n L} \left\{ \sin \alpha_n (L-c) - \frac{L-c}{c} [\sin \alpha_n L - \sin \alpha_n (L-c)] \right\} \\
 &= \frac{2p_0}{\alpha_n L} \left[\frac{L}{c} \sin \alpha_n (L-c) - \frac{L-c}{c} \sin \alpha_n L \right] \\
 &= \frac{2p_0}{\alpha_n c} \sin \alpha_n (L-c), \quad n = 1, 2, \dots,
 \end{aligned} \tag{8.40}$$

ja kerroin

$$a_0 = 0. \tag{8.41}$$

Reunakuorman Fourier-sarja on siten

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \\ &= \frac{2p_0}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \sin \alpha_n(L-c) \cos \alpha_n x. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Jännitysfunktio $\Phi(x, y)$ esitetään myös Fourier-sarjana

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \cos \alpha_n x. \quad (8.43)$$

Tällöin jännityskomponentti

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \alpha_n^2 \cos \alpha_n x. \quad (8.44)$$

Sijoittamalla jännitysfunktio $\Phi(x, y)$ differentiaaliyhtälöön

$$\Delta \Delta \Phi = 0 \quad (8.45)$$

eli

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (8.46)$$

tulee

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n^4 Y_n(y) - 2\alpha_n^2 \frac{d^2 Y_n(y)}{dy^2} + \frac{d^4 Y_n(y)}{dy^4} \right] \cos \alpha_n x = 0, \quad (8.47)$$

joka toteutuu kaikilla arvoilla x vain, jos

$$\alpha_n^4 Y_n(y) - 2\alpha_n^2 \frac{d^2 Y_n(y)}{dy^2} + \frac{d^4 Y_n(y)}{dy^4} = 0. \quad (8.48)$$

Sijoittamalla tavalliseen differentiaaliyhtälöön (8.48) yrite

$$Y_n(y) = e^{ky} \quad (8.49)$$

saadaan algebrallinen neljännen asteen polynomiyhtälö

$$\alpha_n^4 - 2\alpha_n^2 k^2 + k^4 = 0 \quad (8.50)$$

eli

$$(\alpha_n^2 - k^2)(\alpha_n^2 - k^2) = 0, \quad (8.51)$$

jonka juuret ovat

$$k_{1,2,3,4} = \pm \pm \alpha_n. \quad (8.52)$$

Käsiteltävän differentiaaliyhtälön ratkaisufunktio on siten

$$Y_n(y) = A_n e^{-\alpha_n y} + B_n \alpha_n y e^{-\alpha_n y} + C_n e^{\alpha_n y} + D_n \alpha_n y e^{\alpha_n y}. \quad (8.53)$$

Vaihtoehtoiseen esitysmuotoon päädytään sijoittamalla

$$e^{\alpha_n y} = \cosh \alpha_n y + \sinh \alpha_n y, \quad (8.54)$$

$$e^{-\alpha_n y} = \cosh \alpha_n y - \sinh \alpha_n y, \quad (8.55)$$

jolloin tulee

$$Y_n(y) = (A_n + B_n \alpha_n y) \cosh \alpha_n y + (C_n + D_n \alpha_n y) \sinh \alpha_n y. \quad (8.56)$$

Puoliäärettömän levyn tapauksessa ratkaisuksi valitaan

$$Y_n(y) = (A_n + B_n \alpha_n y) e^{-\alpha_n y} + (C_n + D_n \alpha_n y) e^{\alpha_n y}. \quad (8.57)$$

Vakiot A_n , B_n , C_n ja D_n ratkaistaan reunaehdoista. Kun koordinaatin y arvo lähestyy ääretöntä, niin jännityskomponenttien arvojen täytyy lähestyä nollaa. Tämän perusteella asetetaan

$$C_n = D_n = 0, \quad (8.58)$$

ja tällöin

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n \alpha_n y) e^{-\alpha_n y} \cos \alpha_n x. \quad (8.59)$$

Jännityskomponentit ovat

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} -\alpha_n^2 (A_n + B_n \alpha_n y) e^{-\alpha_n y} \cos \alpha_n x, \quad (8.60)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 (A_n - 2B_n + B_n \alpha_n y) e^{-\alpha_n y} \cos \alpha_n x, \quad (8.61)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 (A_n - B_n + B_n \alpha_n y) e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x. \quad (8.62)$$

Reunan $y = 0$ reunaehdon mukaan

$$\sigma_y(x, 0) = p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \alpha_n x, \quad (8.63)$$

missä

$$a_n = \frac{2p_0}{c\alpha_n} \sin \alpha_n (L - c). \quad (8.64)$$

Ottamalla huomioon kaava

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (8.65)$$

tulee kertoimille a_n lauseke

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2p_0}{\alpha_n c} [\sin \alpha_n L \cos \alpha_n c - \cos \alpha_n L \sin \alpha_n c] \\ &= -\frac{2p_0}{\alpha_n c} [\cos n\pi \sin \alpha_n c] \\ &= -\frac{2p_0}{\alpha_n c} (-1)^n \sin \alpha_n c. \end{aligned} \quad (8.66)$$

Reunaehdosta

$$\sigma_y(x, 0) = p(x) \quad (8.67)$$

seuraa

$$-\alpha_n^2(A_n + B_n\alpha_n \cdot 0)e^{-\alpha_n \cdot 0} \cos \alpha_n x = a_n \cos \alpha_n x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.68)$$

eli

$$A_n = -\frac{a_n}{\alpha_n^2}. \quad (8.69)$$

Toisesta reunaehdosta

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad (8.70)$$

seuraa

$$-\alpha_n^2[A_n - B_n + B_n\alpha_n \cdot 0]e^{-\alpha_n \cdot 0} \sin \alpha_n x = 0 \quad (8.71)$$

ja edelleen

$$A_n - B_n \Rightarrow A_n = B_n. \quad (8.72)$$

Jännitysfunktion ratkaisu on siten

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{a_n}{\alpha_n^2} (1 + \alpha_n y) e^{-\alpha_n y} \cos \alpha_n x. \quad (8.73)$$

Jännityskomponenttien lausekkeet ovat

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 + \alpha_n y) e^{-\alpha_n y} \cos \alpha_n x, \quad (8.74)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 - \alpha_n y) e^{-\alpha_n y} \cos \alpha_n x, \quad (8.75)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_n y e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x, \quad (8.76)$$

missä

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{ja} \quad a_n = -\frac{2p_0}{\alpha_n c} (-1)^n \sin \alpha_n c. \quad (8.77)$$

8.3 Levykaista, jaksollinen reunakuorma

Tarkastellaan levykaistaa, jonka reunalla $y = b$ vaikuttaa jaksollinen kuormitus

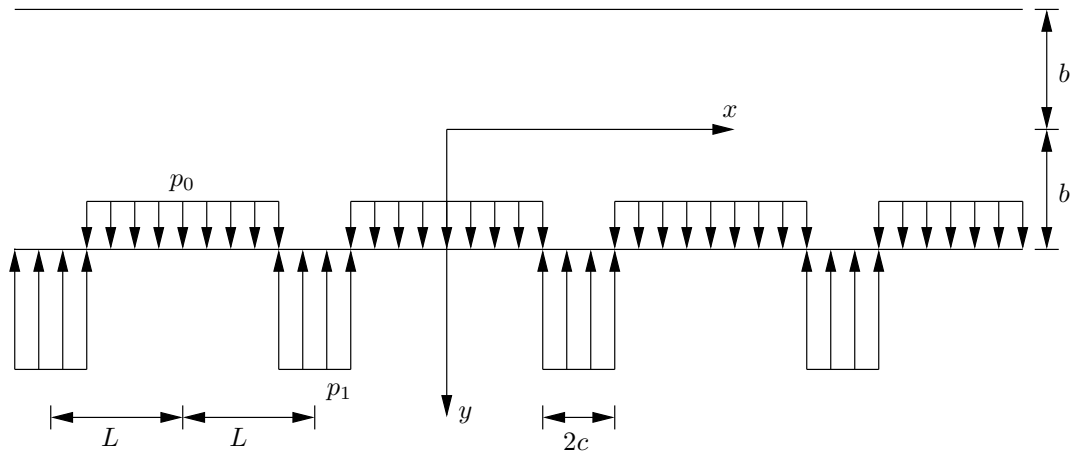
$$t_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y. \quad (8.78)$$

Tarkasteltavan reunan normaalivektorin komponentit ovat nyt

$$n_x = 0, \quad n_y = 1, \quad (8.79)$$

ja

$$t_y = \sigma_y. \quad (8.80)$$



Kuva 8.7 Levykaistan reunalla jaksollinen palakuorma.

Merkitään

$$p(x) = t_y(x), \quad (8.81)$$

missä oleva jaksollinen reunakuorma $p(x)$ määritellään kaavalla

$$p(x) = \begin{cases} p_0, & \text{kun } 0 \leq x < L - c, \\ -p_1 = -p_0 \frac{L - c}{c}, & \text{kun } L - c < x \leq L. \end{cases} \quad (8.82)$$

Kaistan reunaehdot ovat

$$\sigma_y(x, b) = p(x), \quad (8.83)$$

$$\tau_{xy}(x, \pm b) = 0, \quad (8.84)$$

$$\sigma_y(x, -b) = 0. \quad (8.85)$$

Jännitysfunktioksi valitaan symmetrian perusteella

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} [(A_n + B_n \alpha_n y) \cosh \alpha_n y + (C_n + D_n \alpha_n y) \sinh \alpha_n y] \cos \alpha_n x. \quad (8.86)$$

Reunalla $y = b$ on voimassa reunaehto

$$\sigma_y(x, b) = p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \alpha_n x. \quad (8.87)$$

Jännityskomponentit ovat

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, y) &= \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n + B_n \alpha_n y) \cosh \alpha_n y + (C_n + D_n \alpha_n y) \sinh \alpha_n y] \cos \alpha_n x, \end{aligned} \quad (8.88)$$

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n + 2D_n + B_n \alpha_n y) \cosh \alpha_n y + (C_n + 2B_n + D_n \alpha_n y) \sinh \alpha_n y] \cos \alpha_n x,\end{aligned}\tag{8.89}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy}(x, y) &= -\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n + D_n + B_n \alpha_n y) \sinh \alpha_n y + (C_n + B_n + D_n \alpha_n y) \cosh \alpha_n y] \sin \alpha_n x.\end{aligned}\tag{8.90}$$

Reunaehtojen perusteella muodostetaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} \cosh \beta_n & \beta_n \cosh \beta_n & \sinh \beta_n & \beta_n \sinh \beta_n \\ \cosh \beta_n & -\beta_n \cosh \beta_n & -\sinh \beta_n & \beta_n \sinh \beta_n \\ \sinh \beta_n & \cosh \beta_n + \beta_n \sinh \beta_n & \cosh \beta_n & \beta_n \cosh \beta_n + \sinh \beta_n \\ -\sinh \beta_n & \cosh \beta_n + \beta_n \sinh \beta_n & \cosh \beta_n & -\beta_n \cosh \beta_n - \sinh \beta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{8.91}$$

missä on merkitty

$$\beta_n = \alpha_n b.\tag{8.92}$$

Laskemalla reunaehtoyhtälöryhmän (8.91) kaksi ensimmäistä yhtälöä yhteen ja vähentämällä kolmannelta yhtälöstä neljäs saadaan yhtälöpari, josta ratkaistaan

$$A_n = -\frac{\beta_n \cosh \beta_n + \sinh \beta_n}{\sinh 2\beta_n + 2\beta_n} a_n,\tag{8.93}$$

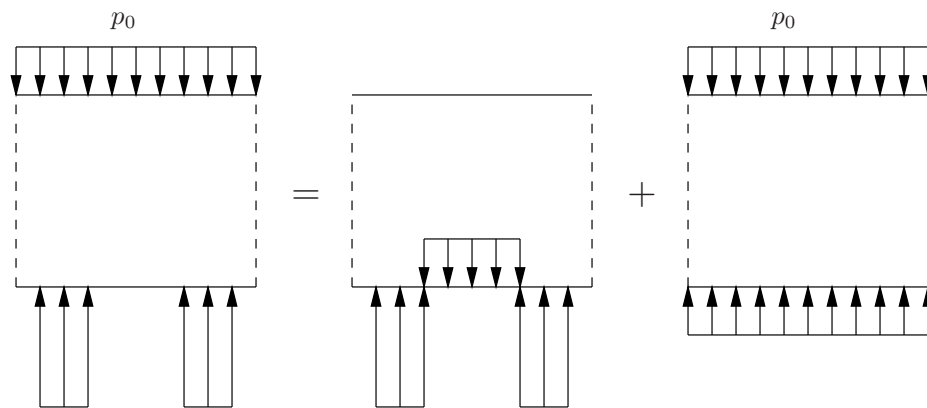
$$D_n = \frac{\sinh \beta_n}{\sinh 2\beta_n + 2\beta_n} a_n.\tag{8.94}$$

Laskemalla yhtälöt kolme ja neljä yhteen sekä vähentämällä ensimmäisestä yhtälöstä toinen saadaan jälleen yhtälöpari, josta ratkaistaan kertoimet

$$B_n = \frac{\cosh \beta_n}{\sinh 2\beta_n - 2\beta_n} a_n,\tag{8.95}$$

$$C_n = -\frac{\cosh \beta_n + \beta_n \sinh \beta_n}{\sinh 2\beta_n - 2\beta_n} a_n.\tag{8.96}$$

Levykaistan muita ratkaisuja voidaan muodostaa superponoimalla kuvan 8.8 esittämällä tavalla.



Kuva 8.8 Levykaistan ratkaisun superponointi.

Luku 9

Levytehtävän ratkaisu Fourier-muunnoksella

9.1 Fourier-muunnos

Parittoman funktion, $f(x) = -f(-x)$, Fourier-sarja on

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{a} \int_0^a f(\xi) \sin \alpha_n \xi d\xi \right\} \sin \alpha_n x. \quad (9.1)$$

Fourier-sarjaesityksestä päädytään Fourier-muunnokseen ajattelemalla diskreetti muuttuja $\alpha_n = n\pi/a$ jatkuvaksi muuttujaksi, jonka inkrementti on $\Delta\alpha = \pi/a$. Tällöin Fourier-sarja voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{a} \left\{ \int_0^a f(\xi) \sin \alpha_n \xi d\xi \right\} \sin \alpha_n x. \quad (9.2)$$

Kun $a \rightarrow \infty$, niin saadaan kaava

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(\xi) \sin \alpha \xi d\xi \right) \sin \alpha x d\alpha. \quad (9.3)$$

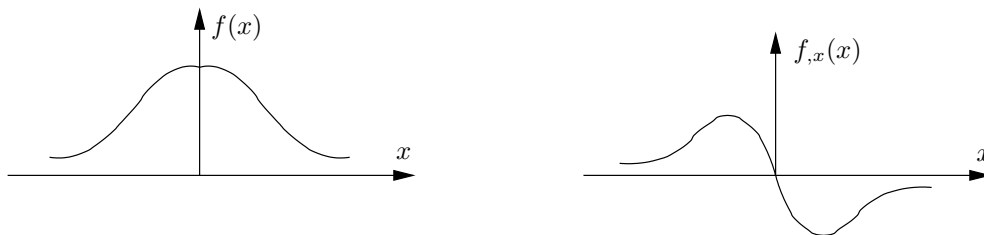
Kaava (9.3) voidaan jakaa osiin

$$\bar{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \alpha \xi d\xi, \quad (9.4)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{f}(\alpha) \sin \alpha x d\alpha, \quad (9.5)$$

jotka ovat Fourier-sinimuunnos ja käänteismuunnos.

Muunnoksen edellytyksenä on, että



Kuva 9.1 Symmetrinen funktio.

1. $f(x)$ on paloittain jatkuva jokaisella äärellisellä välillä,
2. $f(x)$ on absoluuttisesti integroitava eli

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < M < \infty. \quad (9.6)$$

Parillisen funktion $f(-x) = f(x)$ kosinimuunnos on vastaavasti

$$\bar{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \alpha \xi d\xi, \quad (9.7)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{f}(\alpha) \cos \alpha x d\alpha. \quad (9.8)$$

Yleisessä tapauksessa Fourier-muunnos määritellään kaavoilla

$$\bar{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi \quad (9.9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (9.10)$$

Kaksiulotteisessa tapauksessa funktion $f(x, y)$ kosinimuunnos koordinaatin x suhteen on aivan samanlainen kuin edellä yhden muuttujan tapauksessa eli

$$\bar{f}(\alpha, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x, y) \cos \alpha x dx, \quad (9.11)$$

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{f}(\alpha, y) \cos \alpha x d\alpha. \quad (9.12)$$

Otaksutaan funktio $f(x, y)$ symmetriseksi y -akselin suhteen.

Funktion f toisen derivaatan muunnos on

$$\begin{aligned}
 \bar{f}_{,xx}(\alpha, y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_{,xx}(x, y) \cos \alpha x \, dx \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^{\infty} f_{,x} \cos \alpha x - \int_0^{\infty} f_{,x} (-\alpha \sin \alpha x) \, dx \right] \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^{\infty} \alpha f \sin \alpha x - \alpha \int_0^{\infty} f \alpha \cos \alpha x \, dx \right) \\
 &= -\alpha^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f \cos \alpha x \, dx = -\alpha^2 \bar{f}(\alpha, y)
 \end{aligned} \tag{9.13}$$

eli

$$\bar{f}_{,xx}(\alpha, y) = -\alpha^2 \bar{f}(\alpha, y). \tag{9.14}$$

Edellä on sovellettu osittaisintegroitikaavaa

$$\int \frac{du}{dx} v \, dx = \left| uv - \int u \frac{dv}{dx} \, dx. \tag{9.15}$$

Sijoitustermeissä parillisen funktion f parittomat derivaatat ovat nollia y -akselilla, ja äärettömyyteen mentäessä funktio f derivaattoineen lähestyy nollaa. Koska $\sin(0) = 0$, kaikki loputkin sijoitustermit häviävät.

Soveltamalla toisen derivaatan muunnoskaavaa kahteen kertaan tulee

$$\bar{f}_{,xxxx} = (-\alpha^2)(-\alpha^2)\bar{f} = \alpha^4 \bar{f}. \tag{9.16}$$

9.2 Puolitason reunalla symmetrinen kuorma $p(x)$

Jos tilavuusvoimien potentiaali on nolla, niin sekä tasomuodonmuutos- että tasojännitustilassa voimamenetelmän ratkaistava yhtälö on

$$\Delta \Delta \Phi = 0 \tag{9.17}$$

eli

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0. \tag{9.18}$$

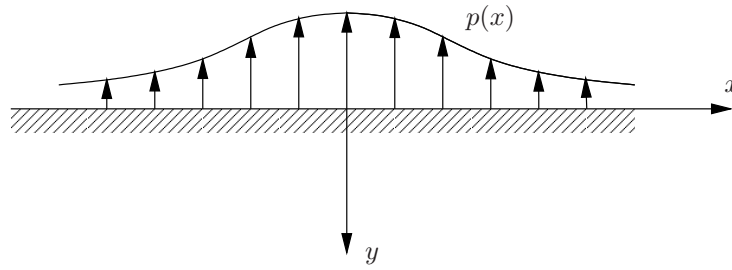
Puolitason reunaehdot ovat

$$\sigma_y(x, 0) = p(x), \tag{9.19}$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0. \tag{9.20}$$

Kuorman symmetrian vuoksi jännitys σ_y on symmetrinen y -akselin suhteen. Koska

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \tag{9.21}$$



Kuva 9.2 Symmetrinen reunakuorma.

on jännitysfunktio $\Phi(x, y)$ myös symmetrinen y -akselin suhteen. Muunnetaan biharmoninen differentiaaliyhtälö e.m. symmetrian vuoksi kosinimuunnoksella. Tällöin saadaan

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (\Delta\Delta\Phi) \cos \alpha x \, dx = 0 \quad (9.22)$$

eli

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) \cos \alpha x \, dx = 0. \quad (9.23)$$

Soveltamalla yllä johdettuja parillisen derivaatan muunnoksen kaavoja tulee

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Delta\Delta\Phi \cos \alpha x \, dx &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left[\alpha^4 \bar{\Phi}(\alpha, y) - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}(\alpha, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 \bar{\Phi}(\alpha, y)}{\partial y^4} \right] \cos \alpha x \, dx \\ &= \alpha^4 \bar{\Phi}(\alpha, y) - 2\alpha^2 \frac{d^2 \bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy^2} + \frac{d^4 \bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy^4} = 0. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Muunnoksen avulla on neljännen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälö saatu palautettua tavalliseksi differentiaaliyhtälöksi, jolle löydetään ratkaisu samalla tavalla kuin Fourier-sarjaratkaisun yhteydessä eli tekemällä yrite

$$Y(y) = e^{ky}. \quad (9.25)$$

Ratkaisufunktioksi eli jännitysfunktion muunnokseksi tulee

$$\bar{\Phi}(\alpha, y) = (A + B\alpha y)e^{-\alpha y} + (C + D\alpha y)e^{\alpha y}. \quad (9.26)$$

Jännitysfunktion muunnoksen derivaatat ovat

$$\frac{d\bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy} = -\alpha(A - B + B\alpha y)e^{-\alpha y} + \alpha(C + D + D\alpha y)e^{\alpha y} \quad (9.27)$$

ja

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy^2} = \alpha^2(A - 2B + B\alpha y)e^{-\alpha y} + \alpha^2(C + 2D + D\alpha y)e^{\alpha y}. \quad (9.28)$$

Jännityskomponentin $\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ muunnos on

$$\bar{\sigma}_x(\alpha, y) = \frac{d^2 \bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy^2} = \alpha^2[(A - 2B + B\alpha y)e^{-\alpha y} + (C + 2D + D\alpha y)e^{\alpha y}]. \quad (9.29)$$

Toisen derivaatan muunnoskaavan (9.14) perusteella jännityskomponentin $\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ muunnos on

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_y(\alpha, y) &= -\alpha^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \Phi(x, y) \cos \alpha x \, dx \\ &= -\alpha^2 \bar{\Phi}(\alpha, y) \\ &= -\alpha^2 [(A + B\alpha y)e^{-\alpha y} + (C + D\alpha y)e^{\alpha y}].\end{aligned}\tag{9.30}$$

Muuntamalla leikkausjännityksen kaava $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$ antisymmetrian vuoksi sini-muunnoksella tulee

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{xy}(\alpha, y) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(x, y) \sin \alpha x \, dx \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^\infty \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \sin \alpha x - \int_0^\infty \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \alpha \cos \alpha x \, dx \right] \\ &= \alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \cos \alpha x \, dx \\ &= \alpha \frac{d\bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy} \\ &= -\alpha^2 (A - B + B\alpha y)e^{-\alpha y} + \alpha^2 (C + D + D\alpha y)e^{\alpha y}.\end{aligned}\tag{9.31}$$

Muuntamalla reunaehto

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{\partial^2 \Phi(x, 0)}{\partial x^2} = p(x)\tag{9.32}$$

tulee edellä johdetun symmetrisen funktion toisen derivaatan muunnoskaavan (9.14) perusteella

$$\bar{\sigma}_y(\alpha, 0) = -\alpha^2 \bar{\Phi}(\alpha, 0) = \bar{p}(\alpha).\tag{9.33}$$

Leikkausjännityksen reunaehdosta

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0\tag{9.34}$$

seuraa

$$\bar{\tau}_{xy}(\alpha, 0) = \alpha \frac{d\bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy} \Big|_{y=0} = 0.\tag{9.35}$$

Kuorman $p(x)$ on toteutettava ehto

$$\int_0^\infty |p(x)| \, dx < \infty.\tag{9.36}$$

Koska jännitystilän tulee hävitä, kun koordinaatti y lähestyy ääretöntä, täytyy jännitysfunktion muunnoksen lausekkeessa olla

$$C = D = 0, \quad (9.37)$$

ja siten

$$\bar{\Phi}(\alpha, y) = (A + B\alpha y)e^{-\alpha y}. \quad (9.38)$$

Vakiot A ja B ratkaistaan reunaehdoista. Ehdosta

$$\bar{\sigma}_y(\alpha, 0) = -\alpha^2 \bar{\Phi}(\alpha, 0) = \bar{p}(\alpha) \quad (9.39)$$

seuraa

$$A = -\frac{\bar{p}(\alpha)}{\alpha^2}, \quad (9.40)$$

ja ehdosta

$$\bar{\tau}_{xy}(\alpha, 0) = \alpha \frac{d\bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy} \Big|_{y=0} = 0 \quad (9.41)$$

saadaan

$$\alpha(-\alpha)(A - B + B\alpha y)e^{-\alpha y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (9.42)$$

eli

$$A - B = 0. \quad (9.43)$$

Integroimisvakiot ovat siten

$$A = B = -\frac{\bar{p}(\alpha)}{\alpha^2}, \quad (9.44)$$

ja jännitysfunktion muunnos on

$$\bar{\Phi}(\alpha, y) = -\frac{\bar{p}(\alpha)}{\alpha^2}(1 + \alpha y)e^{-\alpha y}. \quad (9.45)$$

Käänteismuunnoksella saadaan

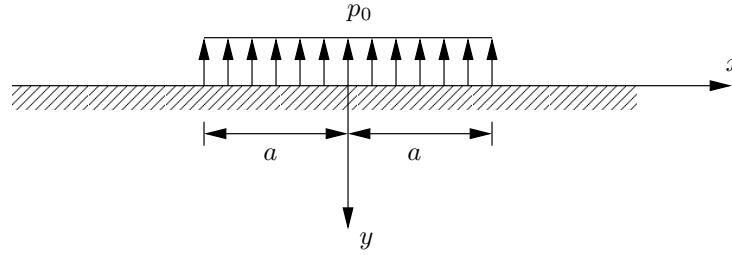
$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{\Phi}(\alpha, y) \cos \alpha x \, d\alpha \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\bar{p}(\alpha)}{\alpha^2} (1 + \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Jännityskomponentit ovat siten

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{p}(\alpha) (1 + \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha, \quad (9.47)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{p}(\alpha) (1 - \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha, \quad (9.48)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{p}(\alpha) \alpha y e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha. \quad (9.49)$$



Kuva 9.3 Leimakuorma.

9.2.1 Erikoistapaus leimakuorma

Reunakuorman muunnos on

$$\begin{aligned}\bar{p}(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} p(x) \cos \alpha x dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} p_0 \Big|_0^a \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} p_0 \frac{\sin \alpha a}{\alpha}.\end{aligned}\tag{9.50}$$

Edellä johdetun symmetrisen reunakuorman ratkaisun perusteella johdetaan symmetrisen palakuorman erikoistapauksen jännityskomponenteiksi

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{p}(\alpha) (1 - \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha \\ &= \frac{2p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} \sin \alpha a (1 - \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha,\end{aligned}\tag{9.51}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} = \frac{2p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} \sin \alpha a (1 + \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha,\tag{9.52}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{2p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha a y e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha.\tag{9.53}$$

9.2.2 Integraalien laskeminen

Palakuorman tapauksen jännityskomponentin σ_x kaava on muunnoksen muodossa

$$\sigma_x = \frac{2p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} \sin \alpha a (1 - \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha \equiv \frac{2p_0}{\pi} [I_1 - I_2],\tag{9.54}$$

missä on merkitty lyhyemmin

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} \sin \alpha a e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha,\tag{9.55}$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \sin \alpha a y e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha. \quad (9.56)$$

Soveltamalla sini-funktion yhteen- ja vähennyslaskukaavaa

$$\sin \alpha a \cos \alpha x = \frac{1}{2} \sin \alpha(x+a) - \frac{1}{2} \sin \alpha(x-a) \quad (9.57)$$

saadaan termi I_1 hajotettua osiin

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} \sin \alpha(x+a) e^{-\alpha y} d\alpha - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} \sin \alpha(x-a) e^{-\alpha y} d\alpha. \quad (9.58)$$

Soveltamalla integraalin laskemiseen liitteen C kaavaa

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha = \arctan \frac{x}{y} \quad (9.59)$$

saadaan tuloksena

$$I_1 = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+a}{y} - \frac{1}{2} \arctan \frac{x-a}{y}. \quad (9.60)$$

Integraalin

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sin \alpha(x+a) y e^{-\alpha y} d\alpha - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sin \alpha(x-a) y e^{-\alpha y} d\alpha \quad (9.61)$$

laskemiseen käytetään kaavaa

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (\Re y > 0), \quad (9.62)$$

ja saadaan tulos

$$I_2 = \frac{1}{2} y \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right]. \quad (9.63)$$

Edellä laskettujen integraalien avulla tulee jännityskomponentin σ_x lausekkeeksi

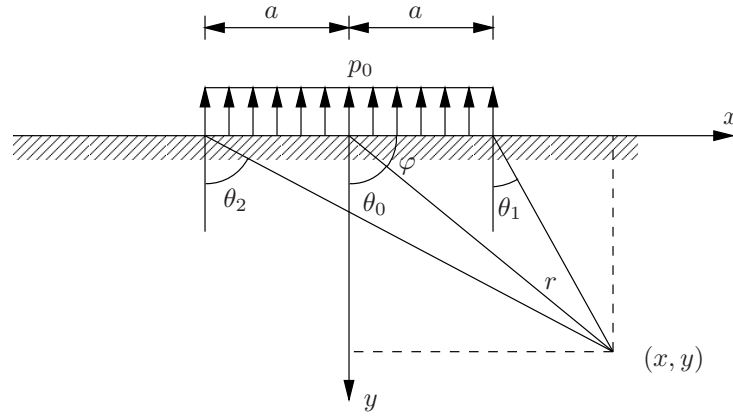
$$\sigma_x = \frac{p_0}{\pi} \left\{ \arctan \frac{x+a}{y} - \arctan \frac{x-a}{y} - y \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right] \right\}. \quad (9.64)$$

Samalla tavalla lasketaan

$$\sigma_y = \frac{p_0}{\pi} \left\{ \arctan \frac{x+a}{y} - \arctan \frac{x-a}{y} + y \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right] \right\}. \quad (9.65)$$

Leikkausjännityksen käänneismuunnoskaava

$$\tau_{xy} = \frac{2p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha a y e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha \quad (9.66)$$



Kuva 9.4 Muuttujat θ , φ ja r .

kirjoitetaan ensin muotoon ¹

$$\tau_{xy} = \frac{2p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2} \cos \alpha(x-a) - \frac{1}{2} \cos \alpha(x+a) \right] y e^{-\alpha y} d\alpha. \quad (9.67)$$

Soveltamalla kaavaa

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (9.68)$$

tulee

$$\tau_{xy} = \frac{p_0}{\pi} \left[\frac{y^2}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y^2}{(x+a)^2 + y^2} \right]. \quad (9.69)$$

Jännityskomponenteille saadaan toinen esitysmuoto ottamalla uudeksi muuttujaksi kulma θ , kuvassa 9.4. Tällöin jännityskomponenttien lausekkeiksi saadaan

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{p_0}{\pi} \left\{ \arctan \frac{x+a}{y} - \arctan \frac{x-a}{y} - y \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right] \right\} \\ &= \frac{p_0}{\pi} [\theta_2 - \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_1] \end{aligned} \quad (9.70)$$

$$= \frac{p_0}{\pi} [\theta_2 - \theta_1 - \frac{1}{2}(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)],$$

$$\sigma_y = \frac{p_0}{\pi} [\theta_2 - \theta_1 + \frac{1}{2}(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)], \quad (9.71)$$

$$\tau_{xy} = \frac{p_0}{\pi} [\cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2] \quad (9.72)$$

$$= -\frac{p_0}{2\pi} [\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1]$$

¹ $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

käyttämällä kaavoja

$$\cos^2 \theta_1 = \cos 2\theta_1 + \sin^2 \theta_1, \quad (9.73)$$

$$\cos^2 \theta_2 = \cos 2\theta_2 + \sin^2 \theta_2, \quad (9.74)$$

$$\sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2 = \cos^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_1. \quad (9.75)$$

Kulman θ avulla lausutun ratkaisun perusteella voidaan päätellä, että

$$\sigma_x(x, 0) = \sigma_y(x, 0) = \begin{cases} p_0, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases} \quad (9.76)$$

Välillä $|x| < a$

$$\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \text{kun } y \rightarrow 0, \quad (9.77)$$

$$\theta_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}, \quad \text{kun } y \rightarrow 0, \quad (9.78)$$

$$\sigma_x \rightarrow \frac{p_0}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = p_0. \quad (9.79)$$

Pisteissä $|x| = a$ jännityksien σ_x ja σ_y arvot ovat epämääräiset, ja

$$\tau_{xy}(\pm a, 0) = \pm \frac{p_0}{\pi}. \quad (9.80)$$

Koska

$$\tau_{xy} = -\frac{p_0}{2\pi} [\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1] \quad (9.81)$$

saadaan raja-arvona

$$\tau_{xy} \rightarrow -\frac{p_0}{2\pi} (-1 - 1) = \frac{p_0}{\pi}, \quad (9.82)$$

kun

$$\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{ja} \quad \theta_1 = 0. \quad (9.83)$$

9.2.3 Pistekuorma F puolitason reunalla

Pistekuorman tapauksen ratkaisu saadaan rajankäynnillä merkitsemällä

$$F = 2p_0a, \quad (9.84)$$

ja antamalla mitan a mennä kohti nollaa, kuvassa 9.5. Tällöin saadaan, kun a on pieni,

$$\theta_2 \approx \theta_0 + \cos \theta_0 \frac{a}{r}, \quad (9.85)$$

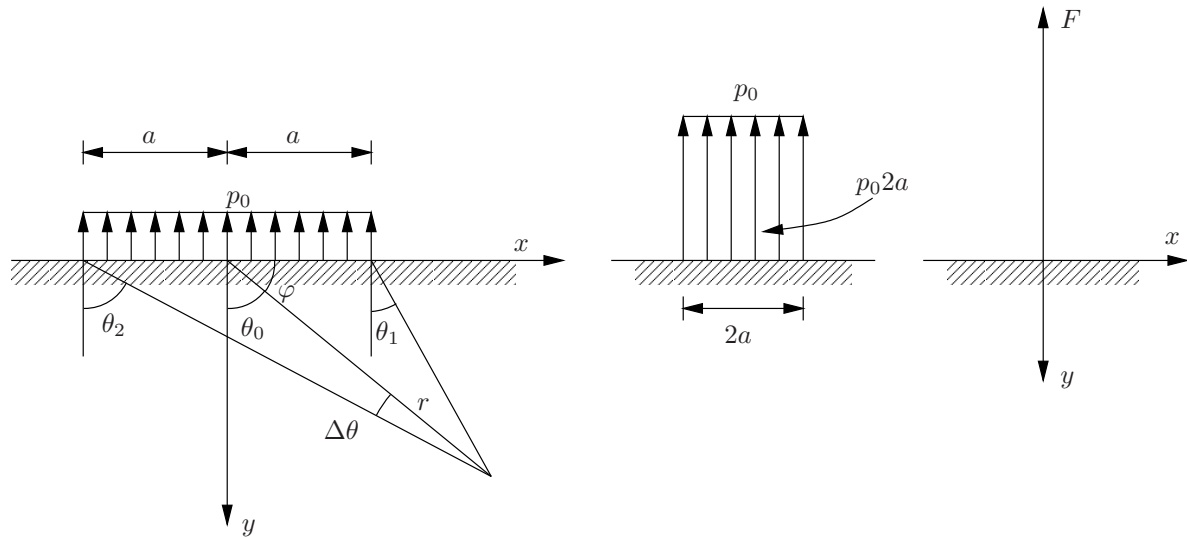
$$\theta_1 \approx \theta_0 - \cos \theta_0 \frac{a}{r}. \quad (9.86)$$

Edellä kulma $\Delta\theta \approx \Delta s/r \approx a \cos(\theta_0 + \Delta\theta)/r$.

Ottamalla huomioon, että

$$\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1 = 2 \cos(\theta_2 + \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1), \quad (9.87)$$

$$\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1 = -2 \sin(\theta_2 + \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1), \quad (9.88)$$



Kuva 9.5 Pistekuorma puolitason reunalla.

saadaan tulokseksi, kun a lähestyy nollaa,

$$\sigma_x = \frac{2F}{\pi} \frac{\cos \theta_0 \sin^2 \theta_0}{r} = \frac{2F}{\pi} \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{r}, \quad (9.89)$$

$$\sigma_y = \frac{2F}{\pi} \frac{\cos^3 \theta_0}{r} = \frac{2F}{\pi} \frac{\sin^3 \varphi}{r}, \quad (9.90)$$

$$\tau_{xy} = \frac{2F}{\pi} \frac{\cos^2 \theta_0 \sin \theta_0}{r} = \frac{2F}{\pi} \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{r}. \quad (9.91)$$

Siirtymällä napakoordinaatistoon tulee kaavojen

$$\sigma_r = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \quad (9.92)$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \quad (9.93)$$

$$\tau_{r\varphi} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \quad (9.94)$$

avulla

$$\sigma_r = \frac{2F}{\pi} \frac{\sin \varphi}{r}, \quad (9.95)$$

$$\sigma_\varphi = 0, \quad (9.96)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0, \quad (9.97)$$

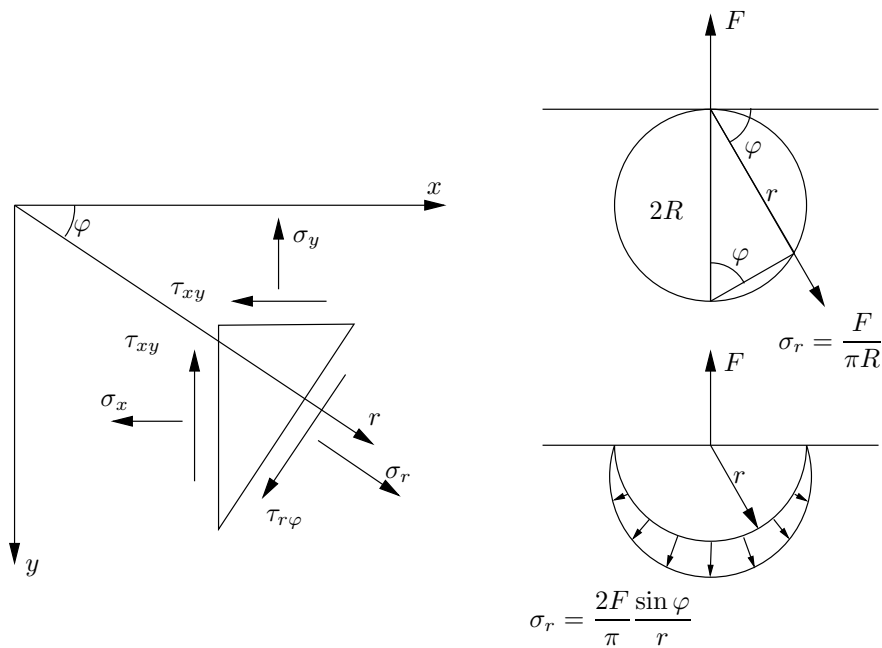
kuvassa 9.6.

Ottamalla huomioon, että

$$2R \sin \varphi = r, \quad (9.98)$$

saadaan

$$\sigma_r = \frac{2F}{\pi} \frac{\sin \varphi}{r} = \frac{2F}{\pi} \frac{1}{2R} = \frac{F}{\pi R}. \quad (9.99)$$



Kuva 9.6 Jännityskomponenttien muunnoksia.

Levyssä vallitsee säteittäinen jännitystila

$$\sigma_r = \frac{F}{\pi R} \quad (9.100)$$

R -säteisellä ympyrällä, kuvassa 9.6.

Sijoittamalla kaavaan (9.54) $p_0 = \frac{F}{2a}$ ja ottamalla huomioon, että suhde $\frac{\sin \alpha a}{\alpha a}$ lähestyy ykköstä, kun αa lähestyy nollaa, tulee

$$\sigma_x = \frac{F}{\pi} \int_0^{\infty} (1 - \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha. \quad (9.101)$$

Taulukon A.2 toisen ja kolmannen kaavan avulla saadaan

$$\sigma_x = \frac{F}{\pi} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - y \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{2F}{\pi} \frac{yx^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (9.102)$$

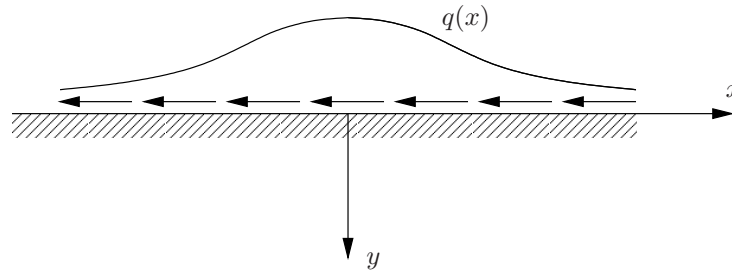
joka voidaan kulman φ avulla kirjoittaa muotoon

$$\sigma_x = \frac{2F}{\pi} \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{r}. \quad (9.103)$$

9.2.4 Puolitason reunalla y -akselin suhteen symmetrinen leikkauskuorma $q(x)$

Tarkastellaan seuraavaksi kuvan 9.7 esittämää kuormitustapausta. Puolitason reunaehdot ovat symmetrisen, x -akselin negatiiviseen suuntaan vaikuttavan leikkauskuorman tapauksessa

$$\sigma_y(x, 0) = 0, \quad (9.104)$$

**Kuva 9.7** Symmetrinen leikkauskuorma.

$$\tau_{xy}(x, 0) = q(x). \quad (9.105)$$

Jännitys σ_y on nyt antisymmetrinen y -akselin suhteen. Koska

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad (9.106)$$

on jännitysfunktio $\Phi(x, y)$ myös antisymmetrinen y -akselin suhteen. Muunnetaan biharmoninen differentiaaliyhtälö e.m. antisymmetrian vuoksi sinimuunnoksella, t.s. Fouriermuunnoksesta jää jäljelle sinimuunnososa. Tällöin

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (\Delta \Delta \Phi) \sin \alpha x \, dx = 0, \quad (9.107)$$

eli

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) \sin \alpha x \, dx = 0. \quad (9.108)$$

Samalla tavalla kuin edellisessä tapauksessa saadaan osittaisintegroinnilla

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial y^4} \right] \sin \alpha x \, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial^3 \Phi(x, y)}{\partial x^3} \sin \alpha x - \alpha \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} \cos \alpha x - \alpha^2 \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \sin \alpha x \right. \\ & \quad \left. + \alpha^3 \Phi(x, y) \cos \alpha x + 2 \frac{\partial^3 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y^2} \sin \alpha x - 2\alpha \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} \cos \alpha x \right] \quad (9.109) \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left[\alpha^4 \Phi(x, y) - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial y^4} \right] \sin \alpha x \, dx \\ &= \alpha^4 \bar{\Phi}(\alpha, y) - 2\alpha^2 \frac{d^2 \bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy^2} + \frac{d^4 \bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy^4} = 0. \end{aligned}$$

Sijoitustermit häviävät ylärajalla, koska jännitysfunktio derivaattoineen menee kohti nollaa, kun x lähestyy ääretöntä, ja alarajalla, koska jännitysfunktio on pariton,

$$\Phi(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ja} \quad \sin x = 0, \quad \text{kun } x = 0. \quad (9.110)$$

Jännitysfunktion differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$\bar{\Phi}(\alpha, y) = (A + B\alpha y)e^{-\alpha y} + (C + D\alpha y)e^{\alpha y}. \quad (9.111)$$

Jännityskomponentin $\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ muunnos

$$\bar{\sigma}_y(\alpha, y) = -\alpha^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \Phi(x, y) \sin \alpha x \, dx = -\alpha^2 \bar{\Phi}(\alpha, y) \quad (9.112)$$

saadaan jälleen osittaisintegroimalla, kun sijoitustermit jälleen häviävät.

Leikkausjännitys on symmetrinen y -akselin suhteen, joten sen Fourier-muunnoksesta jää kosinimuunnososa jäljelle. Leikkausjännitys on tässä tapauksessa

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xy}(\alpha, y) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(x, y) \cos \alpha x \, dx \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^\infty \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \cos \alpha x - \int_0^\infty \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} (-\alpha \sin \alpha x) \, dx \right] \\ &= -\alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \sin \alpha x \, dx \\ &= -\alpha \frac{d\bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy}. \end{aligned} \quad (9.113)$$

Reunan leikkauskuorman $q(x)$ on toteutettava ehto

$$\int_0^\infty |q(x)| \, dx < 0, \quad (9.114)$$

jotta sen Fourier-muunnos

$$\bar{q}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty q(x) \cos \alpha x \, dx \quad (9.115)$$

olisi olemassa.

Muuntamalla reunaehto

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{\partial^2 \Phi(x, 0)}{\partial x^2} = 0 \quad (9.116)$$

saadaan

$$\bar{\sigma}_y(\alpha, 0) = -\alpha^2 \bar{\Phi}(\alpha, 0) = 0. \quad (9.117)$$

Leikkausjännityksen reunaehdosta

$$\tau_{xy}(x, 0) = q(x) \quad (9.118)$$

seuraa

$$-\alpha \frac{d\Phi(\alpha, y)}{dy} \Big|_{y=0} = \bar{q}(\alpha). \quad (9.119)$$

Koska jännitystilän tulee hävitä, kun koordinaatti y lähestyy ääretöntä, täytyy jännitysfunktion muunnoksen lausekkeessa olla

$$C = D = 0, \quad (9.120)$$

ja siten

$$\bar{\Phi}(\alpha, y) = (A + B\alpha y)e^{-\alpha y}. \quad (9.121)$$

Vakiot A ja B ratkaistaan reunaehdoista. Ehdosta

$$\alpha^2 \bar{\Phi}(\alpha, 0) = 0 \quad (9.122)$$

seuraa

$$A = 0, \quad (9.123)$$

ja ehdosta

$$\alpha \frac{d\bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy} \Big|_{y=0} = -\bar{q}(\alpha) \quad (9.124)$$

tulee

$$\alpha(-\alpha)(A - B + B\alpha y)e^{-\alpha y} \Big|_{y=0} = -\bar{q}(\alpha), \quad (9.125)$$

ja edelleen

$$-\alpha^2(A - B) = -\bar{q}(\alpha). \quad (9.126)$$

Integroimisvakiot ovat siten

$$A = 0, \quad B = -\frac{\bar{q}(\alpha)}{\alpha^2}, \quad (9.127)$$

ja jännitysfunktion muunnos on

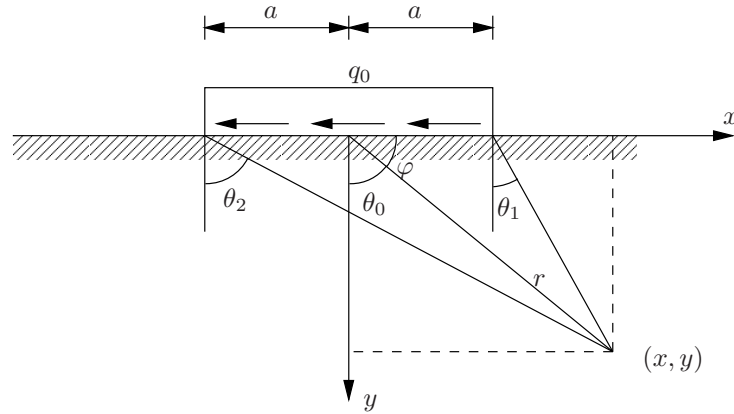
$$\bar{\Phi}(\alpha, y) = -\frac{\bar{q}(\alpha)}{\alpha^2} \alpha y e^{-\alpha y}. \quad (9.128)$$

Käänteismuunnoksella saadaan

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{\Phi}(\alpha, y) \sin \alpha x \, d\alpha \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\bar{q}(\alpha)}{\alpha^2} \alpha y e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha. \end{aligned} \quad (9.129)$$

Jännityskomponentit ovat

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{q}(\alpha) (2 - \alpha y) e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha, \quad (9.130)$$



Kuva 9.8 Tasainen leikkauskuorma.

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{q}(\alpha) \alpha y e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha, \quad (9.131)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{q}(\alpha) (1 - \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha. \quad (9.132)$$

9.2.5 Erikoistapaus $q = q_0$, kun $|x| < a$

Kuvan 9.8 esittämän, paloittain tasaisen, reunakuorman

$$q(x) = \begin{cases} q_0, & \text{kun } |x| \leq a, \\ 0, & \text{kun } |x| > a, \end{cases} \quad (9.133)$$

muunnos on

$$\begin{aligned} \bar{q}(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} q(x) \cos \alpha x \, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} q_0 \left| \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \right|_0^a \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} q_0 \frac{\sin \alpha a}{\alpha}, \end{aligned} \quad (9.134)$$

missä q_0 on vakio.

Edellä johdetun reunalla vaikuttavan symmetrisen leikkauskuorman ratkaisun perusteella saadaan käsiteltävän erikoistapauksen jännityskomponenteiksi

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{q}(\alpha) (2 - \alpha y) e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha \\ &= \frac{2q_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} \sin \alpha a (2 - \alpha y) e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha, \end{aligned} \quad (9.135)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} = \frac{2p_0}{\pi} \int_0^\infty \sin \alpha a y e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha, \quad (9.136)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{2q_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} \sin \alpha a (1 - \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha. \quad (9.137)$$

Jännityskomponenttien lausekkeet saadaan liitteen käänteismuunnoskaavojen avulla. Komponentin τ_{xy} lauseke on samanlainen kuin σ_x :n lauseke (9.64) edellisessä kuormitus-tapauksessa, ja σ_y :n kaava on samanlainen kuin τ_{xy} (9.69) edellä. Komponentin σ_x ensimmäiseen osaan sovelletaan taulukon A.2 neljättä kaavaa ja jälkimmäiseen osaan kaavaa (9.68) eli samaa, jolla lasketaan σ_y tässä tapauksessa. Jännityskomponenteiksi saadaan

$$\sigma_x = \frac{q_0}{\pi} \left\{ \ln \sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} - y^2 \left[\frac{1}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{1}{(x+a)^2 + y^2} \right] \right\}, \quad (9.138)$$

$$\sigma_y = \frac{q_0}{\pi} y^2 \left[\frac{1}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{1}{(x+a)^2 + y^2} \right], \quad (9.139)$$

$$\tau_{xy} = \frac{q_0}{\pi} \left\{ \arctan \frac{x+a}{y} - \arctan \frac{x-a}{y} - y \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right] \right\}. \quad (9.140)$$

Jännityskomponenteille voidaan jälleen johtaa toinen esitysmuoto ottamalla uudeksi muuttujaksi kulma θ . Tällöin tulee

$$\sigma_x = \frac{q_0}{\pi} \left\{ \ln \sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} - y^2 \left[\frac{1}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{1}{(x+a)^2 + y^2} \right] \right\} \quad (9.141)$$

$$= \frac{q_0}{\pi} \left[\ln \left(\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \right) - \frac{1}{2} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \right],$$

$$\sigma_y = \frac{q_0}{\pi} [\cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2] \quad (9.142)$$

$$= -\frac{q_0}{2\pi} [\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1],$$

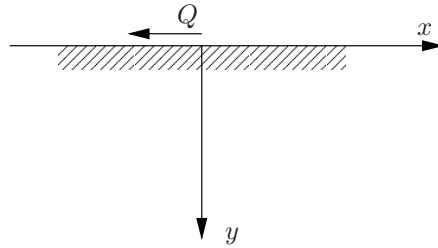
$$\tau_{xy} = \frac{q_0}{\pi} \left\{ \arctan \frac{x+a}{y} - \arctan \frac{x-a}{y} - y \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right] \right\} \quad (9.143)$$

$$= \frac{q_0}{\pi} [\theta_2 - \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_1]$$

$$= \frac{q_0}{\pi} [\theta_2 - \theta_1 - \frac{1}{2} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)].$$

Kulman θ avulla lausutun ratkaisun perusteella päätellään, että

$$\tau_{xy}(x, 0) = \begin{cases} q_0, & \text{kun } |x| < a, \\ 0, & \text{kun } |x| > a, \\ \pm \frac{1}{2} q_0, & \text{kun } x = \pm a, \end{cases} \quad (9.144)$$



Kuva 9.9 Pistemäinen leikkauskuorma.

$$\sigma_y(x, 0) = \sigma_x(x, 0) = 0, \quad \text{kun } |x| \neq a, \quad (9.145)$$

$$\sigma_y(\pm a, 0) = \pm \frac{q_0}{\pi}. \quad (9.146)$$

Jännityskomponentti σ_x on singulaarinen pisteissä $|x| = a$.

9.2.6 Pistekuorma Q puolitason reunalla

Kuvan 9.9 esittämän reunan suuntaisen pistekuorman ratkaisu voidaan jälleen johtaa ranskäynnillä. Merkitään

$$Q = 2q_0a. \quad (9.147)$$

Sijoittamalla kaavaan (9.135) $q_0 = \frac{Q}{2a}$ ja ottamalla huomioon, että suhde $\frac{\sin \alpha a}{\alpha a}$ lähestyy ykköstä, kun αa lähestyy nollaa, tulee

$$\sigma_x = \frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} (2 - \alpha y) e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha. \quad (9.148)$$

Taulukon A.1 kolmannen ja neljännen kaavan avulla saadaan

$$\sigma_x = \frac{Q}{\pi} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - y \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{2Q}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (9.149)$$

joka voidaan kulman φ avulla kirjoittaa muotoon

$$\sigma_x = \frac{2Q}{\pi} \frac{\sin^3 \theta_0}{r} = \frac{2Q}{\pi} \frac{\cos^3 \varphi}{r}. \quad (9.150)$$

Samalla tavalla voidaan johtaa komponentit

$$\sigma_y = \frac{2Q}{\pi} \frac{\cos^2 \theta_0 \sin \theta_0}{r} = \frac{2Q}{\pi} \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{r} \quad (9.151)$$

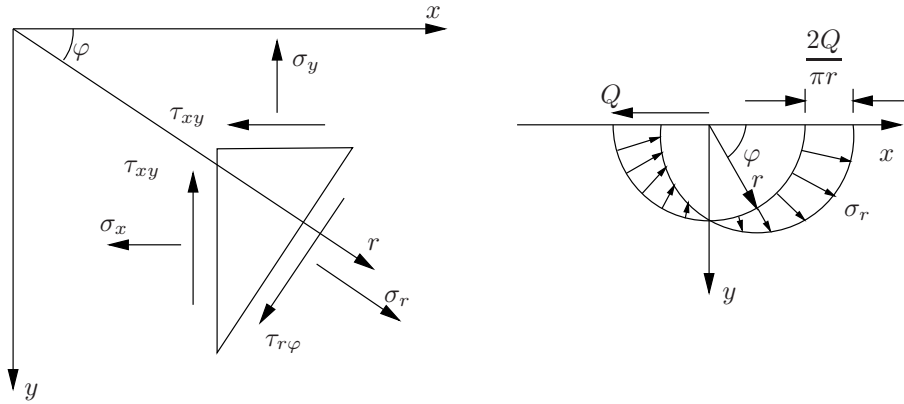
ja

$$\tau_{xy} = \frac{2Q}{\pi} \frac{\cos \theta_0 \sin^2 \theta_0}{r} = \frac{2Q}{\pi} \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{r}. \quad (9.152)$$

Siirtymällä napakoordinaatistoon, kuvassa 9.10, saadaan jälleen kaavojen

$$\sigma_r = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \quad (9.153)$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \quad (9.154)$$



Kuva 9.10 Vaakasuuntaisen pistevoiman Q aiheuttama jännitystila ympyräviivalla $r = \text{vakio}$.

$$\tau_{xy} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \quad (9.155)$$

avulla

$$\sigma_r = \frac{2Q \cos \varphi}{\pi r}, \quad (9.156)$$

$$\sigma_\varphi = 0, \quad (9.157)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0. \quad (9.158)$$

Levyssä vallitsee säteittäinen jännitystila, kuvassa 9.10.

9.2.7 Levykaistan reunalla x -akselin suhteen symmetrinen kuorma $p(x)$, $q(x)$

Levykaistan reunaehdot ovat kuvan 9.11 symmetrisen kuormituksen tapauksessa

$$\sigma_y(x, \pm b) = p(x), \quad (9.159)$$

$$\tau_{xy}(x, \pm b) = \pm q(x). \quad (9.160)$$

Vaakakuormituksen tulee toteuttaa tasapainoehto

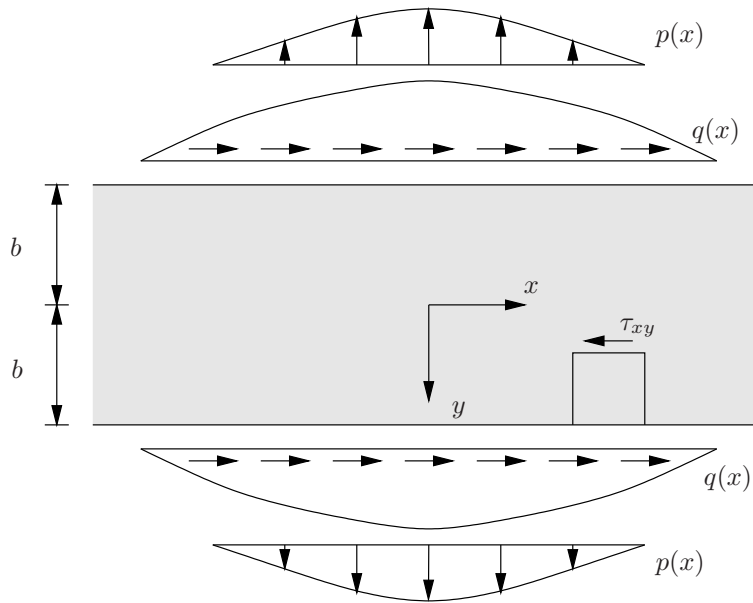
$$\int_{-\infty}^{\infty} q(x) dx = 0. \quad (9.161)$$

Biharmonisen differentiaaliyhtälön Fourier-muunnos on

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta \Delta \Phi) e^{i\alpha x} dx = 0 \quad (9.162)$$

eli

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) e^{i\alpha x} dx = 0. \quad (9.163)$$



Kuva 9.11 Levykaistan reunoilla symmetriset kuormat $p(x)$ ja $q(x)$.

Samalla tavalla kuin edellisessä tapauksessa saadaan osittaisintegroinnilla

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial y^4} \right] e^{i\alpha x} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\partial^3 \Phi(x, y)}{\partial x^3} - i\alpha \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \right. \\
 & \quad \left. + i\alpha^3 \Phi(x, y) + 2 \frac{\partial^3 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y^2} - 2i\alpha \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} e^{i\alpha x} \right] \quad (9.164) \\
 & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha^4 \Phi(x, y) - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial y^4} \right] e^{i\alpha x} dx \\
 &= \alpha^4 \bar{\Phi}(\alpha, y) - 2\alpha^2 \frac{d\bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy^2} + \frac{d^4 \bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy^4} = 0,
 \end{aligned}$$

missä

$$\bar{\Phi}(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y) e^{i\alpha x} dx. \quad (9.165)$$

Sijotustermit katoavat, koska jännitysfunctio derivaattoineen menee kohti nollaa, kun x lähestyy ääretöntä (plus- tai miinus-ääretöntä).

Jännitysfunctio differentiaaliyhtälön ratkaisu kirjoitetaan levykaistan tapauksessa muotoon

$$\bar{\Phi}(\alpha, y) = (A + B\alpha y) \cosh \alpha y + (C + D\alpha y) \sinh \alpha y. \quad (9.166)$$

Jännitysfunktion muunnoksen derivaatat ovat

$$\frac{d\bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy} = \alpha[(A + D + B\alpha y) \sinh \alpha y + (C + B + D\alpha y) \cosh \alpha y] \quad (9.167)$$

ja

$$\frac{d^2\bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy^2} = \alpha^2[(A + 2D + B\alpha y) \cosh \alpha y + (C + 2B + D\alpha y) \sinh \alpha y]. \quad (9.168)$$

Kuormituksen symmetrian perusteella tulevat käsiteltävässä kuormitustapauksessa mukaan symmetriset termit

$$\bar{\Phi}(\alpha, y) = A \cosh \alpha y + D\alpha y \sinh \alpha y. \quad (9.169)$$

Jännityskomponenttien muunnokset ovat

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x(\alpha, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} e^{i\alpha x} dx \\ &= \frac{d^2\bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy^2} = \alpha^2[(A + 2D) \cosh \alpha y + D\alpha y \sinh \alpha y], \end{aligned} \quad (9.170)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_y(\alpha, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} e^{i\alpha x} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} (i\alpha) e^{i\alpha x} dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} e^{i\alpha x} - i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y) e^{i\alpha x} + (i\alpha)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y) e^{i\alpha x} dx \right] \quad (9.171) \\ &= -\alpha^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y) e^{i\alpha x} dx \\ &= -\alpha^2 \bar{\Phi}(\alpha, y) = -\alpha^2(A \cosh \alpha y + D\alpha y \sinh \alpha y) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xy}(\alpha, y) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} e^{i\alpha x} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} e^{i\alpha x} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} (i\alpha) e^{i\alpha x} dx \right] \quad (9.172) \\ &= (i\alpha) \frac{d\bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy} = i\alpha^2[(A + D) \sinh \alpha y + D\alpha y \cosh \alpha y]. \end{aligned}$$

Normaalijännityksen reunaehdosta

$$\sigma_y(x, b) = \frac{\partial^2 \Phi(x, b)}{\partial x^2} = p(x) \quad (9.173)$$

saadaan muuntamalla

$$\bar{\sigma}_y(\alpha, b) = -\alpha^2 \bar{\Phi}(\alpha, b) = \bar{p}(\alpha), \quad (9.174)$$

missä

$$\bar{p}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{i\alpha x} dx. \quad (9.175)$$

Leikkausjännityksen reunaehdosta

$$\tau_{xy}(x, b) = q(x) \quad (9.176)$$

seuraa

$$\bar{\tau}_{xy}(\alpha, b) = i\alpha \frac{d\bar{\Phi}(\alpha, b)}{dy} = \bar{q}(\alpha), \quad (9.177)$$

missä

$$\bar{q}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{\infty} q(x) e^{i\alpha x} dx. \quad (9.178)$$

Reunaehdoista kootaan yhtälöryhmä

$$\bar{\sigma}_y(\alpha, b) = \bar{p}(\alpha) \quad \Rightarrow \quad A \cosh \beta + D\beta \sinh \beta = -\bar{p}(\alpha)/\alpha^2, \quad (9.179)$$

$$\bar{\tau}_{xy}(\alpha, b) = \bar{q}(\alpha) \quad \Rightarrow \quad i\{(A + D) \sinh \beta + D\beta \cosh \beta\} = \bar{q}(\alpha)/\alpha^2, \quad (9.180)$$

jossa on merkitty

$$\beta = \alpha b. \quad (9.181)$$

Reunaehtoien yhtälöryhmästä ratkaistaan

$$A = -2 \frac{\bar{p}(\beta \cosh \beta + \sinh \beta) - i\bar{q}\beta \sinh \beta}{\sinh 2\beta + 2\beta} \frac{1}{\alpha^2}, \quad (9.182)$$

$$D = -2 \frac{-\bar{p} \sinh \beta + i\bar{q} \cosh \beta}{\sinh 2\beta + 2\beta} \frac{1}{\alpha^2}. \quad (9.183)$$

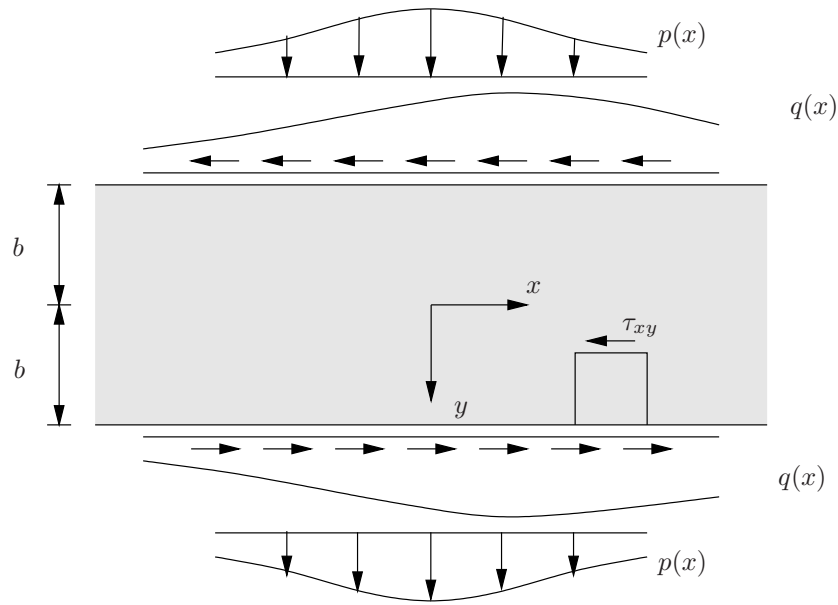
Jännityskomponenttien lausekkeet saadaan käännteismuunnoksella

$$\sigma_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy^2} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (9.184)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 [(A + 2D) \cosh \alpha y + D\alpha y \sinh \alpha y] e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -\alpha^2 \bar{\Phi}(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (9.185)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -\alpha^2 (A \cosh \alpha y + D\alpha y \sinh \alpha y) e^{-i\alpha x} d\alpha$$



Kuva 9.12 Levykaistan reunoilla antisymmetriset kuormat $p(x)$ ja $q(x)$.

ja

$$\begin{aligned}\tau_{xy}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i\alpha \frac{d\bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy} e^{-i\alpha x} d\alpha \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 [(A + D) \sinh \alpha y + D\alpha y \cosh \alpha y] e^{-i\alpha x} d\alpha.\end{aligned}\tag{9.186}$$

Kun α lähestyy nollaa, niin kertoimien A ja D lausekkeiden nimittäjä lähestyy myös nollaa. Jotta vakiot A ja D olisivat rajoitettuja arvolla $\alpha = 0$, täytyy ehdon

$$\bar{q}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(x) dx = 0\tag{9.187}$$

eli vaakasuoran tasapainoehdon toteutua.

9.2.8 Levykaistan reunalla x -akselin suhteen antisymmetrinen kuormitus $p(x)$, $q(x)$

Levykaistan reunaehdot ovat kuvan 9.12 antisymmetrisen kuormituksen tapauksessa

$$\sigma_y(x, \pm b) = \pm p(x),\tag{9.188}$$

$$\tau_{xy}(x, \pm b) = q(x).\tag{9.189}$$

Kuormien $p(x)$ ja $q(x)$ tulee nyt toteuttaa tasapainoehdot

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 0 \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^{\infty} [xp(x) - bq(x)] dx = 0\tag{9.190}$$

eli akselin y suuntainen tasapainoehto ja momentin tasapainoehto.

Kuormituksen antisymmetrian perusteella tulevat nyt mukaan antisymmetriset termit jännitysfunktion lausekkeeseen eli

$$\bar{\Phi}(\alpha, y) = (B\alpha y \cosh \alpha y + C \sinh \alpha y). \quad (9.191)$$

Jännityskomponenttien muunnokset ovat

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x(\alpha, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} e^{i\alpha x} dx \\ &= \frac{d\bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy^2} = \alpha^2[(C + 2B) \sinh \alpha y + B\alpha y \cosh \alpha y], \end{aligned} \quad (9.192)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_y(\alpha, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx \\ &= -\alpha^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y) e^{i\alpha x} dx \\ &= -\alpha^2 \bar{\Phi}(\alpha, y) = -\alpha^2 (B\alpha y \cosh \alpha y + C \sinh \alpha y) \end{aligned} \quad (9.193)$$

ja

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xy}(\alpha, y) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} e^{i\alpha x} dx \\ &= (i\alpha) \frac{d\bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy} = i\alpha^2[(C + B) \cosh \alpha y + B\alpha y \sinh \alpha y]. \end{aligned} \quad (9.194)$$

Normaalijännityksen reunaehdosta reunalla $y = b$

$$\sigma_y(x, b) = \frac{\partial^2 \Phi(x, b)}{\partial x^2} = p(x) \quad (9.195)$$

saadaan muuntamalla

$$\bar{\sigma}_y(\alpha, b) = -\alpha^2 \bar{\Phi}(\alpha, b) = \bar{p}(\alpha). \quad (9.196)$$

missä

$$\bar{p}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{i\alpha x} dx. \quad (9.197)$$

Leikkausjännityksen reunaehdosta

$$\tau_{xy}(x, b) = q(x) \quad (9.198)$$

seuraa

$$\bar{\tau}_{xy}(\alpha, b) = i\alpha \frac{d\bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy} \Big|_{y=b} = \bar{q}(\alpha), \quad (9.199)$$

missä

$$\bar{q}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(x) e^{i\alpha x} dx. \quad (9.200)$$

Reunaehdoista saadaan nyt yhtälöt

$$\bar{\sigma}_y(\alpha, b) = \bar{p}(\alpha) \Rightarrow B\beta \cosh \beta + C \sinh \beta = -\bar{p}(\alpha)/\alpha^2, \quad (9.201)$$

$$\bar{\tau}_{xy}(\alpha, b) = \bar{q}(\alpha) \Rightarrow B(\cosh \beta + \beta \sinh \beta) + C \cosh \beta = -i\bar{q}(\alpha)/\alpha^2, \quad (9.202)$$

missä on merkitty

$$\beta = \alpha b. \quad (9.203)$$

Reunaehtoyhtälöistä ratkaistaan

$$B = -2 \frac{-\bar{p} \cosh \beta + i\bar{q} \sinh \beta}{\sinh 2\beta - 2\beta} \frac{1}{\alpha^2}, \quad (9.204)$$

$$C = -2 \frac{\bar{p}(\cosh \beta + \beta \sinh \beta) - i\bar{q}\beta \cosh \beta}{\sinh 2\beta - 2\beta} \frac{1}{\alpha^2}. \quad (9.205)$$

Jännityskomponenttien lausekkeet saadaan käänteismuunnoksella

$$\sigma_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy^2} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (9.206)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 [(C + 2B) \sinh \alpha y + B\alpha y \cosh \alpha y] e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -\alpha^2 \bar{\Phi}(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (9.207)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -\alpha^2 (B\alpha y \cosh \alpha y + C \sinh \alpha y) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

ja

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i\alpha \frac{d\bar{\Phi}(\alpha, y)}{dy} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (9.208)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 [(C + B) \cosh \alpha y + B\alpha y \sinh \alpha y] e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Kun α lähestyy nollaa, niin kertoimien B ja C lausekkeiden nimittäjä lähestyy nollaa. Jotta vakiot B ja C olisivat rajoitettuja arvolla $\alpha = 0$, täytyy tässä tapauksessa ehtojen

$$\bar{p}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 0, \quad (9.209)$$

$$\frac{d\bar{p}(0)}{d\alpha} - i b \bar{q}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [xp(x) - bq(x)] dx = 0 \quad (9.210)$$

eli tasapainoehtojen toteutua.

Symmetrisesti ja antisymmetrisesti kuormitetun levykaistan ratkaisujen avulla voidaan muodostaa muille kuormitustapauksille ratkaisuja superponoimalla.

Luku 10

Levyn ratkaisu sylinterikoordinaatissa

10.1 Jännitysfunktio

Sylinterikoordinaattien (r, φ, z) ja suorakulmaisten koordinaattien (x, y, z) väliset muunnoskaavat ovat, kuva 10.1,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (10.1)$$

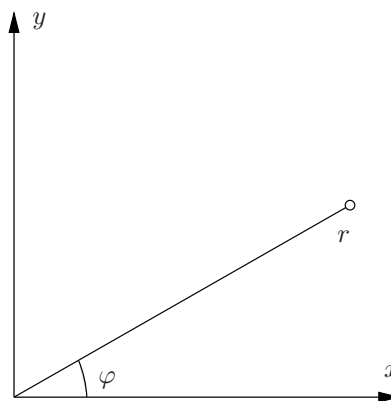
Kaavojen (10.1) käänteiset relaatiot ovat

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (10.2)$$

Koordinaattien muunnoskaavojen perusteella johdetaan kaavat

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi, \quad (10.3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r}. \quad (10.4)$$



Kuva 10.1 Suorakulmaiset koordinaatit ja sylinterikoordinaatit.

Derivoimalla jännitysfunktio $\Phi(r, \varphi)$ ketjusäännön mukaisesti tulee

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sin \varphi}{r} \right).\end{aligned}\tag{10.5}$$

Soveltamalla operaattoria

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}\tag{10.6}$$

uudelleen derivaatan $\partial \Phi / \partial x$ kaavaan tulee

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - 2 \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} + 2 \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}\tag{10.7}$$

Samalla tavalla muodostetaan lauseke jännitysfunktion toiselle y -derivaatalle

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + 2 \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} - 2 \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \\ &\quad + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}\end{aligned}\tag{10.8}$$

ja sekaderivaatalle

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} &= \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\cos 2\varphi}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\cos 2\varphi}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \\ &\quad - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}\tag{10.9}$$

Laplacen operaattori suorakulmaisessa koordinaatistossa

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\tag{10.10}$$

muunnettuna sylinterikoordinaatistoon ja kohdistettuna jännitysfunktioon $\Phi(x, y)$ tuottaa kaavan

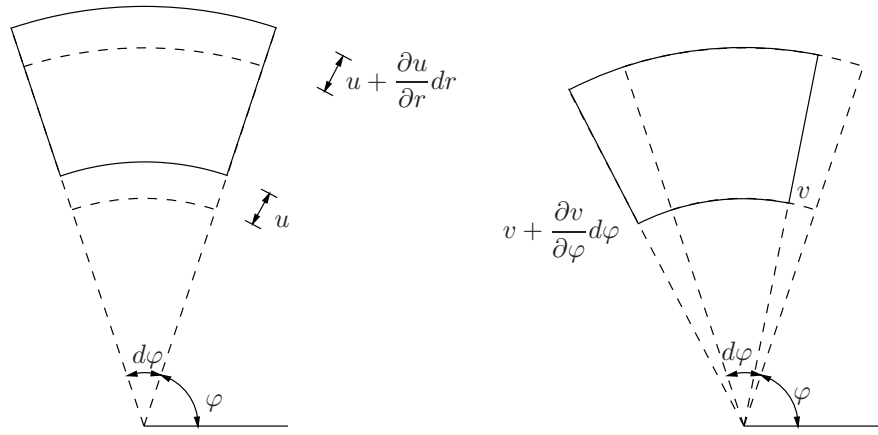
$$\nabla^2 \Phi(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi^2}.\tag{10.11}$$

Yhteensopivuusyhtälö eli jännitysfunktion differentiaaliyhtälö, kun tilavuusvoimat ovat nolliä tai vakioita,

$$\nabla^2 [\nabla^2 \Phi(x, y)] = 0\tag{10.12}$$

muuntuu sylinterikoordinaatistossa muotoon

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left[\frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] = 0.\tag{10.13}$$



Kuva 10.2 Muodonmuutokset sylinterikoordinaatistossa.

Asettamalla jännitysfunktion toisen derivaatan kaavoissa kulmalle φ arvo nolla saadaan

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial r^2}, \quad (10.14)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi^2}, \quad (10.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Levyn jännitysten lausekkeet ovat siten napakoordinaatistossa

$$\sigma_r(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} + V(r, \varphi), \quad (10.17)$$

$$\sigma_\varphi(r, \varphi) = \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial r^2} + V(r, \varphi), \quad (10.18)$$

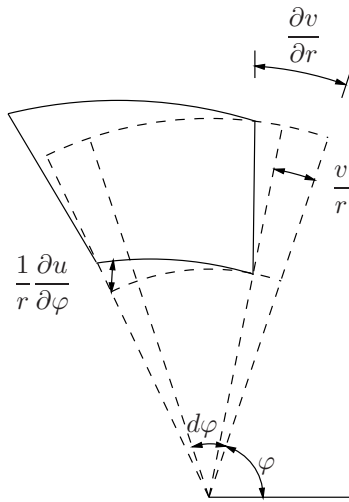
$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi}(r, \varphi) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} \\ &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right], \end{aligned} \quad (10.19)$$

missä V on tilavuusvoimien potentiaali.

10.2 Muodonmuutokset

Napakoordinaatiston siirtymäkomponentit ovat

$$u = u(r, \varphi), \quad v = v(r, \varphi). \quad (10.20)$$



Kuva 10.3 Liukuma sylinterikoordinaatistossa.

Kuvan 10.2 perusteella johdetaan säteen r suuntainen muodonmuutoskomponentti, joka aiheutuu säteen suuntaisesta siirtymästä u ,

$$\varepsilon_r = \frac{u + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) dr - u}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (10.21)$$

Muodonmuutos sädettä vastaan kohtisuorassa suunnassa voidaan jakaa kahteen osaan. Ensimmäinen osa aiheutuu säteen suuntaisesta siirtymästä u , ja se on

$$\varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{(r+u)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{u}{r}. \quad (10.22)$$

Tangentiaalisen siirtymän v osuus on

$$\varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{v + \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) d\varphi - v}{rd\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \quad (10.23)$$

Yhteensä

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \quad (10.24)$$

Samalla tavalla kuin edellä johdetaan kuvan 10.3 avulla leikkausmuodonmuutokselle kaava

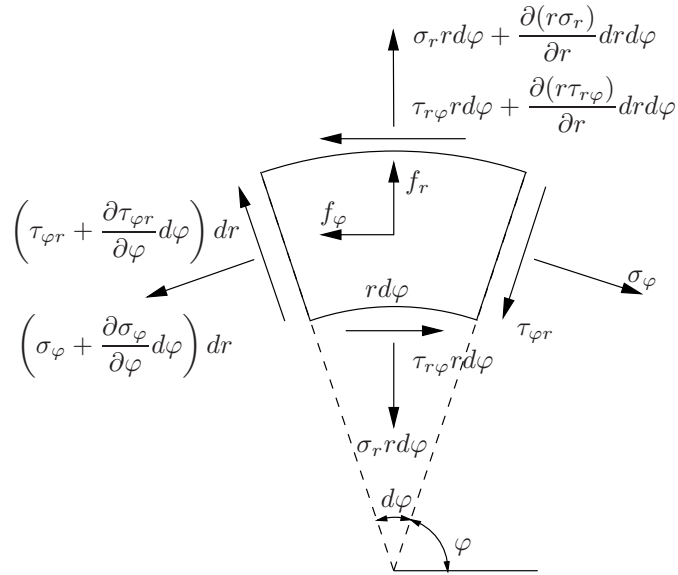
$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, \quad (10.25)$$

missä viimeinen termi poistaa jäykänkappaleen liikkeen liukumasta.

Tasojännitystilassa ovat voimassa konstitutiiviset yhtälöt (yleistetty Hooken laki)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\varphi), \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_r), \end{aligned} \quad (10.26)$$

$$\tau_{r\varphi} = G \gamma_{r\varphi},$$



Kuva 10.4 Tasapainoehdot sylinterikoordinaatistossa, f_r ja $f_φ$ ovat yksikköpinta-alaa kohti.

missä G on liukumoduuli

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (10.27)$$

10.3 Tasapainoyhtälöt

Kuvan 10.4 perusteella johdetaan säteen suuntainen tasapainoehto

$$\begin{aligned} & \left[\sigma_r r + \frac{\partial(\sigma_r r)}{\partial r} \right] d\varphi - \sigma_r r d\varphi \\ & + \left(\tau_{\varphi r} + \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \varphi} d\varphi \right) dr - \tau_{\varphi r} dr \\ & - \sigma_\varphi dr \sin \frac{d\varphi}{2} - \left(\sigma_\varphi + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} \right) dr \sin \frac{d\varphi}{2} \\ & + f_r dr \left[\frac{rd\varphi + (r + dr)d\varphi}{2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (10.28)$$

josta seuraa

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + f_r = 0, \quad (10.29)$$

missä f_r on säteen suuntainen tilavuusvoiman komponentti. Säteen suuntaa vastaan kohtisuorassa suunnassa johdetaan samalla tavalla tasapainoyhtälö

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2\tau_{\varphi r}}{r} + f_\varphi = 0, \quad (10.30)$$

missä f_φ on tilavuusvoima.

10.4 Pyörähdyssymmetrinen jännitystila

Jos jännitysfunktio ei riipu koordinaatista φ , niin jännitysfunktion differentiaaliyhtälö supistuu muotoon

$$\nabla^4 \Phi = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left[\frac{d^2 \Phi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} \right] = 0 \quad (10.31)$$

eli

$$\frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} - \frac{1^2}{r} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1^3}{r} \frac{d\Phi}{dr} = 0. \quad (10.32)$$

Jännityskomponentit ovat nyt

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}, \quad (10.33)$$

$$\sigma_\varphi(r) = \frac{d^2 \Phi(r)}{dr^2}. \quad (10.34)$$

Ottamalla huomioon identiteetti

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi(r) &= \frac{d^2 \Phi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\Phi(r)}{dr} \right] \end{aligned} \quad (10.35)$$

saadaan jännitysfunktion differentiaaliyhtälö muotoon

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\Phi(r)}{dr} \right] \right\} \right) = 0. \quad (10.36)$$

Airyin jännitysfunktio ratkaistaan integroimalla jännitysfunktion neljännen kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö koordinaatin r suhteen neljä kertaa peräkkäin eli

$$\Phi(r) = \int_0^r \frac{1}{r} \int_0^r r \int_0^r \frac{1}{r} \int_0^r (0) dr dr dr dr \quad (10.37)$$

Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\Phi(r)}{dr} \right] \right\} \right) &= 0, \\ \left(r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\Phi(r)}{dr} \right] \right\} \right) &= C_1, \\ \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\Phi(r)}{dr} \right] \right\} &= \frac{1}{r} C_1, \\ \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\Phi(r)}{dr} \right] \right\} &= C_1 \ln r + C_2, \\ \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\Phi(r)}{dr} \right] &= C_1 r \ln r + C_2 r, \\ \left[r \frac{d\Phi(r)}{dr} \right] &= C_1 \left(\frac{1}{2} r^2 \ln r - \frac{1}{4} r^2 \right) + C_2 \frac{r^2}{2} + C_3, \\ \frac{d\Phi(r)}{dr} &= C_1 \left(\frac{1}{2} r \ln r - \frac{1}{4} r \right) + C_2 \frac{r}{2} + \frac{1}{r} C_3, \\ \Phi(r) &= C_1 \left(\frac{1}{4} r^2 \ln r - \frac{1}{8} r^2 - \frac{1}{8} r^2 \right) + C_2 \frac{r^2}{4} + C_3 \ln r + C_4, \end{aligned} \tag{10.38}$$

missä C_i :t ovat integroimisvakiot. Edellä on käytetty hyväksi integrointikaavaa

$$\int_0^r r \ln r dr = \frac{1}{2} r^2 \ln r - \frac{1}{4} r^2 \tag{10.39}$$

ja yhteyttä

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} r^2 \ln r - \frac{1}{4} r^2 \right) &= r \ln r + \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} r \\ &= r \ln r. \end{aligned} \tag{10.40}$$

Jännitysfunktion lauseke voidaan vielä kirjoittaa muotoon

$$\Phi(r) = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D, \tag{10.41}$$

missä

$$A = C_3, \quad B = \frac{C_1}{4}, \quad C = \frac{C_2 - C_1}{4}, \quad D = C_4. \tag{10.42}$$

Jännitysfunktiosta määritetään jännityskomponentit

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C, \tag{10.43}$$

$$\sigma_\varphi(r) = \frac{d^2\Phi(r)}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C. \tag{10.44}$$

Hooken lain mukaan

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\varphi), \quad (10.45)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_r). \quad (10.46)$$

Säteen suuntaisen muodonmuutoksen kaavasta seuraa

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} \left[\frac{1+\nu}{r^2} A + 2(1-\nu)B \ln r + (1-3\nu)B + 2(1-\nu)C \right], \quad (10.47)$$

josta saadaan integroimalla

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{E} \left[-\frac{1+\nu}{r} A + 2(1-\nu)Br \ln r - (1+\nu)Br + 2(1-\nu)Cr \right] + f(\varphi), \quad (10.48)$$

missä f on mielivaltainen koordinaatista r riippumaton funktio.

Kaaren suuntaisen muodonmuutoskomponentin kaavasta seuraa

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{r}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_r) - u = \frac{4Br}{E} - f(\varphi), \quad (10.49)$$

josta saadaan integroimalla

$$v = \frac{4Br\varphi}{E} - \int_0^\varphi f(\varphi) d\varphi + g(r), \quad (10.50)$$

missä $g(r)$ on mielivaltainen koordinaatin r funktio.

Koska leikkausjännitys on tarkasteltavassa tapauksessa nolla, saadaan leikkausmuodonmuutoksen ja leikkausjännityksen välisestä kaavasta sekä liukuman kaavasta yhtälö

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{\tau_{r\varphi}}{G} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0, \quad (10.51)$$

josta seuraa sijoittamalla siihen edeltä siirtymien u ja v lausekkeet

$$\frac{1}{r} \frac{df(\varphi)}{d\varphi} + \frac{dg(r)}{dr} + \frac{1}{r} \int_0^\varphi f(\varphi) d\varphi - \frac{g(r)}{r} = 0 \quad (10.52)$$

eli

$$\frac{df(\varphi)}{d\varphi} + \int_0^\varphi f(\varphi) d\varphi = g(r) - r \frac{dg(r)}{dr}. \quad (10.53)$$

Koska yhtälön (10.53) vasen puoli riippuu vain koordinaatista φ ja oikea puoli on pelkästään koordinaatin r funktio, täytyy yhtäläisyysmerkin kummallakin puolella olla vakio, H . Saadaan kaksi yhtälöä:

$$\frac{df(\varphi)}{d\varphi} + \int_0^\varphi f(\varphi) d\varphi = H, \quad (10.54)$$

$$g(r) - r \frac{dg(r)}{dr} = H. \quad (10.55)$$

Edellisestä kaavasta (10.54) seuraa derivoimalla differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} + f(\varphi) = 0, \quad (10.56)$$

jonka ratkaisu on

$$f(\varphi) = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi. \quad (10.57)$$

Sijoittamalla tämä takaisin lähtökaavaan (10.54) havaitaan, että

$$-C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + C_1 \sin \varphi - C_2 \cos \varphi + C_2 = H \quad (10.58)$$

eli

$$C_2 = H \quad (10.59)$$

ja siten

$$f(\varphi) = C_1 \cos \varphi + H \sin \varphi. \quad (10.60)$$

Derivoimalla jälkimmäinen yhtälö (10.55) koordinaatin r suhteen tulee

$$\frac{dg(r)}{dr} - r \frac{d^2 g(r)}{dr^2} - \frac{dg(r)}{dr} = 0 \quad (10.61)$$

eli

$$\frac{d^2 g(r)}{dr^2} = 0, \quad (10.62)$$

jonka ratkaisu on

$$g(r) = C_3 r + C_4, \quad (10.63)$$

missä (lähtökaavan (10.55) perusteella)

$$C_4 = H. \quad (10.64)$$

Sijoittamalla funktioiden $f(\varphi)$ ja $g(r)$ lausekkeet siirtymien u ja v kaavoihin saadaan

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{E} \left[-\frac{1+\nu}{r} A + 2(1-\nu) Br \ln r - (1+\nu) Br + 2(1-\nu) Cr \right] \quad (10.65)$$

$$+ C_1 \cos \varphi + H \sin \varphi,$$

$$v = \frac{4Br\varphi}{E} - C_1 \sin \varphi + H \cos \varphi + C_3 r. \quad (10.66)$$

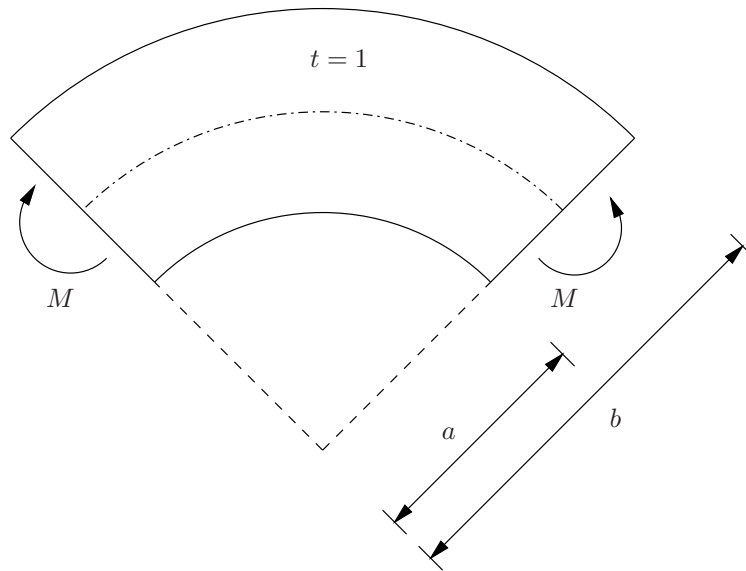
Esimerkki 10.1 Tutkitaan kuvan 10.5 ympyränmuotoisen kaaren taivutusta.

Tarkastellaan kuvan 10.5 momentin kuormittamaa kaarta. Kaaren reunaehdot ovat

$$\sigma_r(a, \varphi) = 0, \quad (10.67)$$

$$\sigma_r(b, \varphi) = 0, \quad (10.68)$$

$$\int_a^b r \sigma_\varphi dr = -M. \quad (10.69)$$



Kuva 10.5 Ympyräkaaren taivutus.

Sijoittamalla jännityskomponenttien kaavat reunaehtoihin tulee

$$\sigma_r(a, \varphi) = \frac{A}{a^2} + B(1 + 2 \ln a) + 2C = 0, \quad (10.70)$$

$$\sigma_r(b, \varphi) = \frac{A}{b^2} + B(1 + 2 \ln b) + 2C = 0. \quad (10.71)$$

Momentin reunaehdosta seuraa

$$\begin{aligned} \int_a^b r \sigma_\varphi dr &= \int_a^b r \frac{d^2 \Phi}{dr^2} dr \\ &= \left[r \frac{d\Phi}{dr} - \int_a^b \frac{d\Phi}{dr} dr \right] \\ &= \left[r \frac{d\Phi}{dr} - \right]_a^b \Phi = - \left[\right]_a^b \Phi = -M, \end{aligned} \quad (10.72)$$

koska

$$\left[r \frac{d\Phi}{dr} \right]_a^b = 0 \quad (10.73)$$

reunaehtojen (10.70) ja (10.71) perusteella.

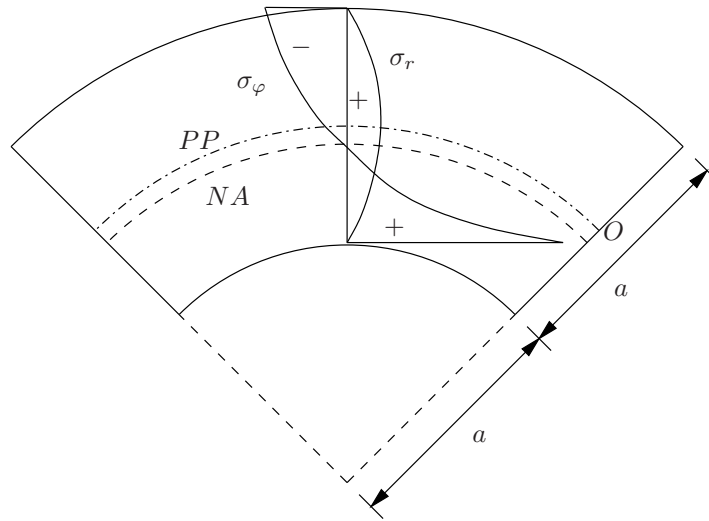
Sijoittamalla momentin reunaehtoon jännitysfunktion lauseke tulee

$$\Phi(b) - \Phi(a) = A \ln \frac{b}{a} + B(b^2 \ln b - a^2 \ln a) + C(b^2 - a^2) = M. \quad (10.74)$$

Reunaehtojen perusteella saatiin kolme lineaarista yhtälöä, joista ratkaistaan vakiot A , B ja C :

$$A = -\frac{4M}{K} a^2 b^2 \ln \frac{a}{b}, \quad (10.75)$$

$$B = -\frac{2M}{K} (b^2 - a^2), \quad (10.76)$$



Kuva 10.6 Ympyräkaaren taivutusjännitys.

$$C = \frac{M}{K} [b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a)], \quad (10.77)$$

joissa

$$K = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2. \quad (10.78)$$

Jännityskomponenttien lausekkeet ovat

$$\sigma_r = -\frac{4M}{K} \left[\frac{a^2b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right], \quad (10.79)$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{4M}{K} \left[-\frac{a^2b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right], \quad (10.80)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0. \quad (10.81)$$

Jännityskomponenttien kaavoista havaitaan, että kaaren taivutusjännitys σ_φ ei jakaannu lineaarisesti koordinaatin r funktiona eikä neutraaliakseli yhdy painopisteakseliin. Lisäksi jännityskomponentti σ_r on nolasta eriävä poikkileikkauksessa.

Määritetään seuraavaksi kaarevan sauvan siirtymät. Reunaehdot ovat

$$u = v = \frac{dv}{dr} = 0 \quad (10.82)$$

reunan keskellä pisteessä O , $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0 = 0$. Siirtymien kaavoista saadaan reunaehtojen avulla

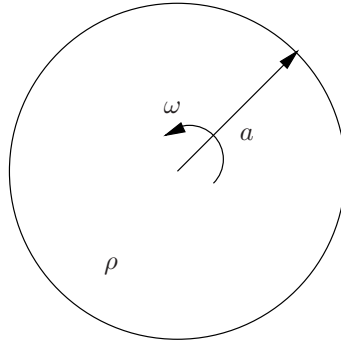
$$H = C_3 = 0 \quad (10.83)$$

ja

$$C_1 = \frac{1}{E} \left[\frac{1+\nu}{r_0} A - 2(1-\nu)Br_0 \ln r_0 + (1+\nu)Br_0 - 2(1-\nu)Cr_0 \right], \quad (10.84)$$

missä on merkitty

$$r_0 = \frac{a+b}{2}. \quad (10.85)$$



Kuva 10.7 Tasaisella kulmanopeudella pyörivä ympyrälevy.

Koordinaatin φ suuntainen siirtymä on siten

$$v = \frac{4r\varphi}{E}B - C_1 \sin \varphi, \quad (10.86)$$

mistä nähdään, että leikkauksessa $\varphi = \text{vakio}$ v on r :n lineaarinen funktio ja Bernoullin–Navierin hypoteesi on voimassa puhtaassa taivutuksessa.

10.5 Siirtymämenetelmä pyörähdyssymmetrisessä muodonmuutostilassa

Sijoittamalla yleistetty Hooken laki

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right), \quad (10.87)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) \quad (10.88)$$

tasapainoyhtälöön

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + f_r = 0 \quad (10.89)$$

saadaan

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + \frac{1-\nu^2}{E} f_r = 0 \quad (10.90)$$

eli

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \right] + \frac{1-\nu^2}{E} f_r = 0, \quad (10.91)$$

missä f_r on tilavuusvoiman komponentti.

Esimerkki 10.2 Määritetään kulmanopeudella ω pyörivän ympyrälevyn siirtymät ja jännitykset.

Kuvan 10.7 pyörivän levyn, kiekon, tilavuusvoima on keskipakoisvoima

$$f_r = \rho\omega^2 r. \quad (10.92)$$

Pyörähdyssymmetrisen tapauksen siirtymämenetelmän differentiaaliyhtälöstä (tasapainoehdosta)

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \right] = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho\omega^2 r \quad (10.93)$$

saadaan integroimalla

$$\frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + C_1 \quad (10.94)$$

ja edelleen

$$\frac{d(ru)}{dr} = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 \frac{r^3}{2} + C_1 r. \quad (10.95)$$

Vielä kerran integroimalla tulee

$$ru = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 \frac{r^4}{8} + C_1 \frac{r^2}{2} + C_2, \quad (10.96)$$

joten radiaalisen siirtymän lauseke on

$$u = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 \frac{r^3}{8} + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad (10.97)$$

Siirtymän avulla lasketaan jännityskomponentit

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) \\ &= -\frac{\rho \omega^2}{8} (3+\nu) r^2 + C_1 \frac{E}{2(1-\nu)} - C_2 \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{r^2}, \end{aligned} \quad (10.98)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) \\ &= -\frac{\rho \omega^2}{8} (1+3\nu) r^2 + C_1 \frac{E}{2(1-\nu)} + C_2 \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \quad (10.99)$$

Säteen suuntaisen siirtymän reunaehdosta saadaan

$$u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, \quad (10.100)$$

ja ehdosta

$$\sigma_r(a) = -\frac{\rho \omega^2}{8} (3+\nu) a^2 + C_1 \frac{E}{2(1-\nu)} - C_2 \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{a^2} = 0 \quad (10.101)$$

seuraa, (koska $C_2 = 0$)

$$C_1 = \frac{\rho \omega^2}{4E} (1-\nu)(3+\nu) a^2. \quad (10.102)$$

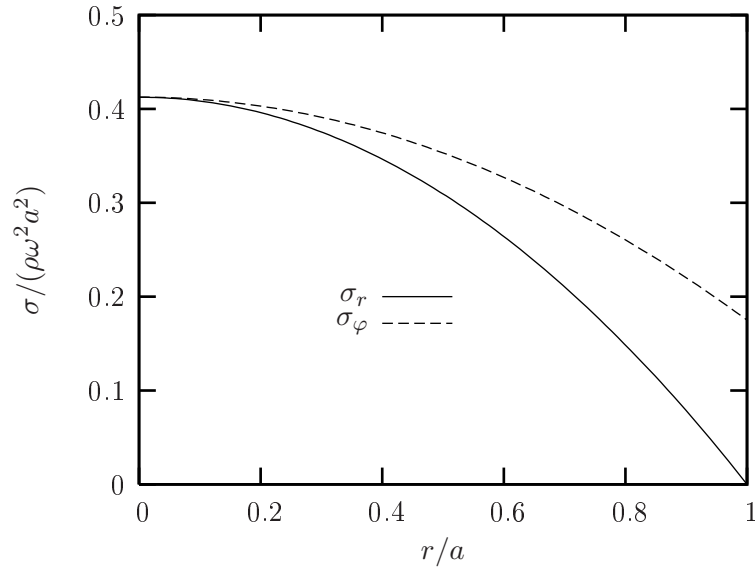
Tehtävän ratkaisu on

$$u = \frac{1-\nu}{8E} \rho \omega^2 [(3+\nu) a^2 r - (1+\nu) r^3], \quad (10.103)$$

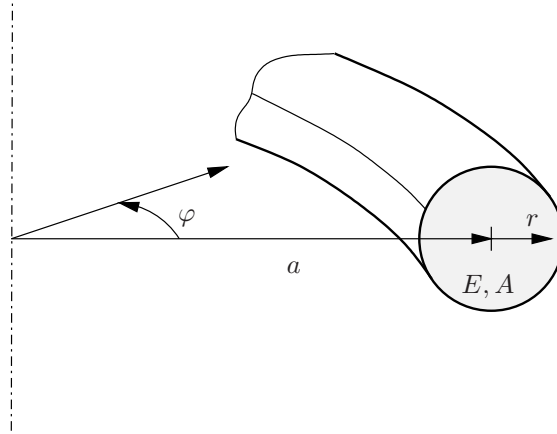
$$\sigma_r(r) = \frac{\rho \omega^2}{8} (3+\nu) (a^2 - r^2), \quad (10.104)$$

$$\sigma_\varphi(r) = \frac{\rho \omega^2}{8} [(3+\nu) a^2 - (1+3\nu) r^2]. \quad (10.105)$$

Jännitysjaakaumat on esitetty kuvassa 10.8.



Kuva 10.8 Ympyrälevyn jännitykset σ_r ja σ_φ , kun $\nu = 0.3$.



Kuva 10.9 Ympyrärengas.

10.6 Ympyrärengas

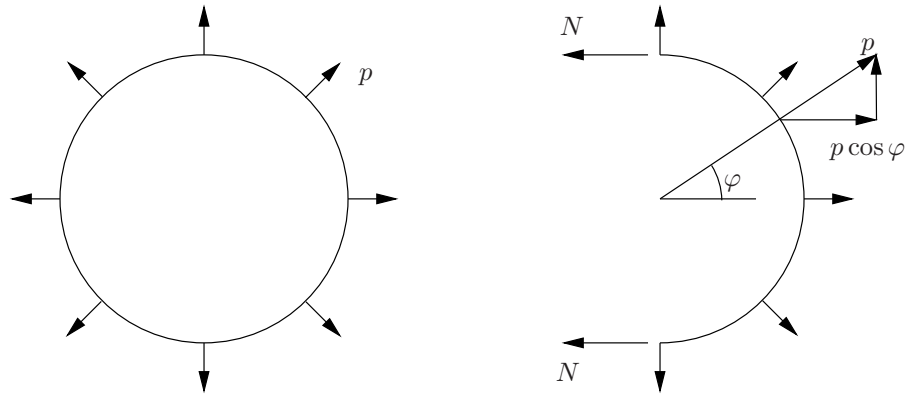
Muodonmuutoskomponentit napakoordinaatistossa ovat kaavojen (10.22), (10.24) ja (10.25) perusteella

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (10.106)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad (10.107)$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (10.108)$$

Tutkitaan pyörähdyssymmetrisen kappaleen erikoistapauksena rengasta, kuvassa 10.9. Otaksutaan renkaan poikkileikkauksen halkaisija pieneksi renkaan säteen rinnalla, jolloin



Kuva 10.10 Säteen suuntainen tasainen kuorma ympyrärengalla.

voidaan asettaa

$$\varepsilon_r = 0. \quad (10.109)$$

Jos renkaan säde on a , niin nolasta poikkeavat muodonmuutoskomponentit ovat

$$\varepsilon_\varphi(a) = \frac{u}{a} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad (10.110)$$

$$\gamma_{r\varphi}(a) = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial a} - \frac{v}{a}. \quad (10.111)$$

Pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa muodonmuutosten kaavat yksinkertaistuvat muotoon

$$\varepsilon_\varphi(a) = \frac{u}{a} \quad (10.112)$$

$$\varepsilon_r = 0, \quad \gamma_{r\varphi} = 0. \quad (10.113)$$

Esimerkki 10.3 Renkaaseen kohdistuu säteen suuntainen tasainen painekuorma. Määritetään renkaan jännitys, muodonmuutos ja siirtymä.

Aukileikatun renkaan tasapainoehto on

$$2N = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p \cos \varphi a d\varphi = 2pa, \quad (10.114)$$

mistä ratkaistaan renkaan normaalivoima

$$N = pa. \quad (10.115)$$

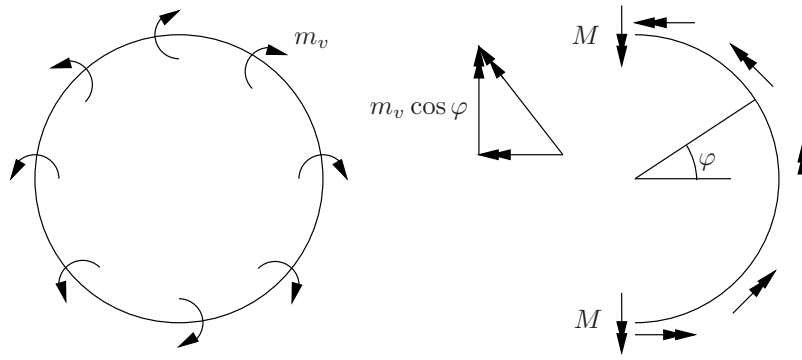
Renkaan jännitys, muodonmuutos ja siirtymä ovat

$$\sigma_\varphi = \frac{N}{A} = \frac{pa}{A}, \quad (10.116)$$

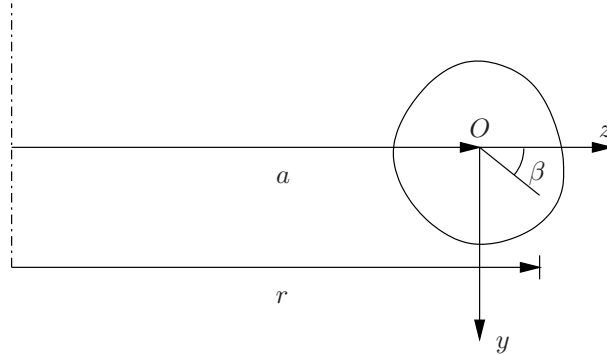
$$\varepsilon_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{E} = \frac{pa}{EA}, \quad (10.117)$$

$$u = a\varepsilon_\varphi = \frac{pa^2}{EA}, \quad (10.118)$$

missä A on renkaan poikkileikkauksen pinta-ala.



Kuva 10.11 Tasainen vääntömomenttikuorma ympyrärenkaalla.



Kuva 10.12 Ympyrärenkaan poikkileikkauksen kiertymä.

Esimerkki 10.4 Tutkitaan ohuen ympyrärenkaan vääntöä.

Tasaisella vääntömomentilla kuormitetun ympyrärenkaan tasapainoehto on

$$2M = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} m_v \cos \varphi a d\varphi = 2m_v a, \quad (10.119)$$

josta ratkaistaan renkaan taivutusmomentti

$$M = m_v a. \quad (10.120)$$

Renkaan poikkileikkaus, kuvassa 10.12, kiertyy kulman β verran vääntökeskiön O ympäri. Tällöin radiaalinen siirtymä on

$$u = -\beta y, \quad (10.121)$$

jonka avulla saadaan muodonmuutos

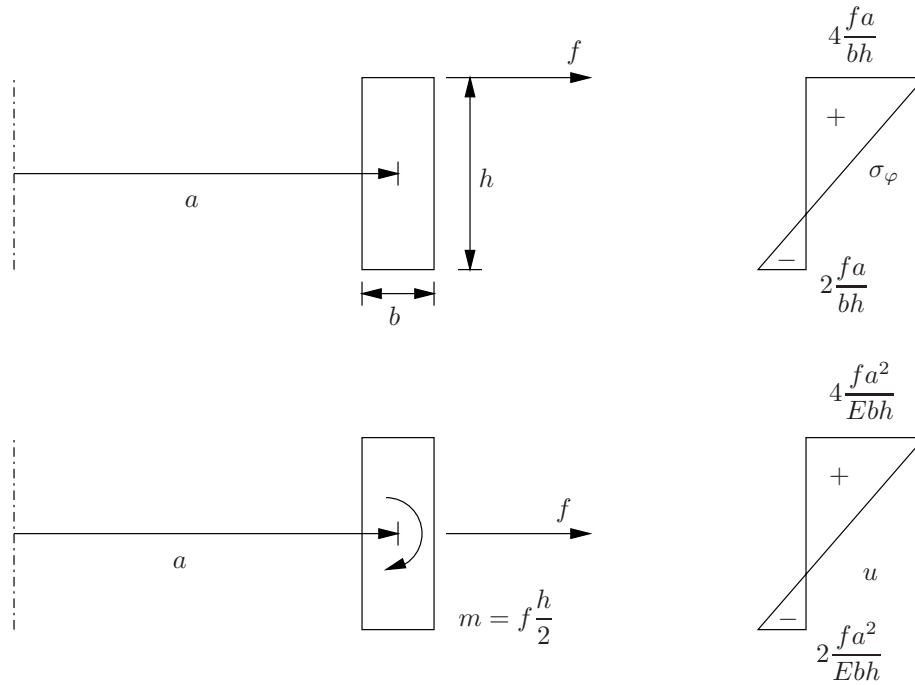
$$\varepsilon_\varphi = -\frac{\beta y}{r} \approx -\frac{\beta y}{a}, \quad (10.122)$$

ja väännön aiheuttama renkaan jännitys on

$$\sigma_\varphi = -\frac{E\beta y}{a}. \quad (10.123)$$

Renkaan normaalivoima on nyt nolla, koska

$$N_\varphi = \int_A \sigma_\varphi dA = -\frac{E\beta}{a} \int_A y dA = 0. \quad (10.124)$$



Kuva 10.13 Yläreunasta tasaisella kuormalla kuormitettu ympyrärengas, jonka poikkileikkaus on suorakaide.

Renkaan taivutusmomentti on

$$M = - \int_A y \sigma_\varphi dA = \frac{E\beta}{a} \int_A y^2 dA = \frac{E\beta}{a} I_z. \quad (10.125)$$

Koska

$$M = m_v a, \quad (10.126)$$

saadaan kiertymälle kaava

$$\beta = \frac{m_v a^2}{EI_z}, \quad (10.127)$$

ja tasaisen vääntömomenttikuorman aiheuttama renkaan venymä, jännitys ja siirtymä ovat

$$\varepsilon_\varphi = -\frac{m_v a}{EI_z} y, \quad (10.128)$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{m_v a}{I_z} y, \quad (10.129)$$

$$u = a \varepsilon_\varphi = -\beta y = -\frac{m_v a^2}{EI_z} y. \quad (10.130)$$

Esimerkki 10.5 Ympyrärenkaan poikkileikkaus on suorakaide. Renkaan yläreunaan kohdistuu säteen suuntainen tasainen viivakuorma f . Määritetään renkaan jännitys σ_φ ja siirtymä u .

Kuvan 10.13 suorakaidepoikkileikkauksen tapauksessa

$$I_z = \frac{bh^3}{12}. \quad (10.131)$$

Tällöin jännitys ja siirtymä ovat

$$\sigma_\varphi = \frac{fa}{bh} - \frac{f\left(\frac{h}{2}\right)a}{\frac{bh^3}{12}}y = \frac{fa}{bh} \left(1 - \frac{6}{h}y\right), \quad (10.132)$$

$$u = \frac{fa^2}{Ebh} - \frac{f\left(\frac{h}{2}\right)a^2}{\frac{Ebh^3}{12}}y = \frac{fa^2}{Ebh} \left(1 - \frac{6}{h}y\right). \quad (10.133)$$

Luku 11

Levytehtävän ratkaisu elementtimenetelmällä

Levytehtävälle voidaan johtaa likiratkaisumenetelmiä virtuaalisen työn periaatteen avulla. Kimmoisen kappaleen tapauksessa voidaan käyttää myös potentiaalienergian minimin periaatetta. Elementtimenetelmässä tarkasteltava kappale, esim. levykannattaja jaetaan osiin eli elementteihin. Elementin alueella siirtymätilaa approksimoidaan polynomeilla, joiden täytyy olla jatkuvia elementistä toiseen. Yksinkertaisin elementti on siten kolmioelementti, jonka alueella siirtymiä u ja v interpoloidaan lineaarisilla polynomeilla.

Tasojännitystilassa lineaariset kimmoiset konstitutiiviset yhtälöt eli yleistetty Hooken laki voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

tai lyhyemmin

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (11.2)$$

missä

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

ovat jännityskomponentit ja muodonmuutoskomponentit sisältävät vektorit ja

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

on tasojännitystilän isotrooppisen aineen kimmomatriisi (materiaalin kimmoisen jäykkyysmatriisi).

Muodonmuutosten ja siirtymien väliset kinemaattiset yhtälöt tasotapauksessa ovat

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

eli

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{u}, \quad (11.6)$$

missä on merkitty lyhyemmin

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (11.7)$$

on derivaattaoperaattorimatriisi ja

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} \quad (11.8)$$

on mielivaltaisen pisteen (x, y) siirtymävektori.

Jaetaan tarkasteltava levy, esim. kuvassa 11.1, elementteihin, jotka liittyvät toisiinsa solmupisteissä. Merkitään, että elementin solmupisteiden lukumäärä on n . Yhden elementin alueella siirtymävektoria \mathbf{u} interpoloidaan muotofunktioiden $N_i(x, y)$, $i = 1, \dots, n$ ja solmupistesiertymien (u_i, v_i) , $i = 1, \dots, n$, avulla interpolaatiokaavoilla

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y)u_i, \quad (11.9)$$

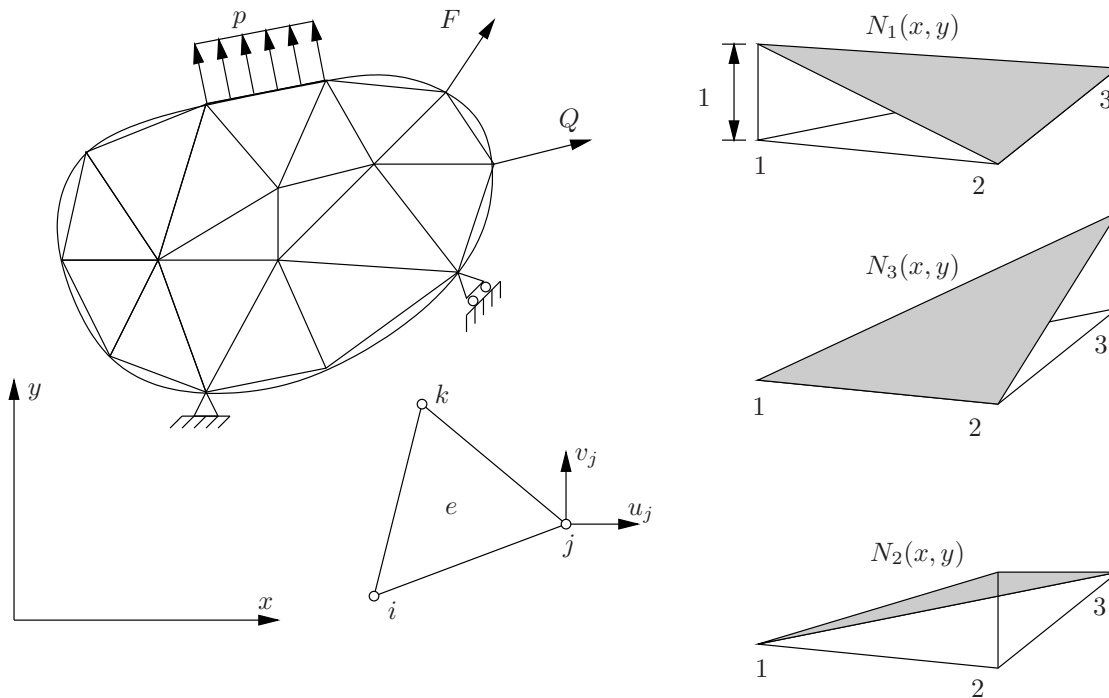
$$v(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y)v_i, \quad (11.10)$$

tai yhdistetyllä kaavalla

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) &= \sum_{i=1}^n N_i(x, y)\mathbf{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^n N_i(x, y)\mathbf{I}\mathbf{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i(x, y)\mathbf{q}_i, \end{aligned} \quad (11.11)$$

missä

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.12)$$



Kuva 11.1 Levyn diskretointi kolmioelementeillä.

ja

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad (11.13)$$

on solmupisteen i siirtymävektori.

Siirtymien interpolaatiokaavat voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & \cdots & N_n(x, y) & 0 \\ 0 & N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & \cdots & 0 & N_n(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix}, \quad (11.14)$$

eli

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}. \quad (11.15)$$

Muodonmuutosten interpolaatiot elementin alueella saadaan derivoimalla siirtymien interpolaatioista

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \quad (11.16)$$

tai lyhyemmin merkittynä

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \mathbf{q}_i, \quad (11.17)$$

missä

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11.18)$$

tai vielä lyhyemmin

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}, \quad (11.19)$$

missä

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{B}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \end{bmatrix}. \quad (11.20)$$

Levyn muodonmuutosenergian tiheys mielivaltaisessa pisteessä (x, y) on ¹

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q}, \quad (11.21)$$

jossa on sijoitettu $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}$ ja $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T$.

Elementin e muodonmuutosenergia on tilavuuden yli integroitu muodonmuutosenergian tiheys

$$U^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{q}, \quad (11.22)$$

missä V_e on elementin e tilavuus. Levyelementin tapauksessa

$$V_e = A_e h, \quad (11.23)$$

missä A_e on levyelementin pinta-ala ja h on levyn paksuus.

Kappaleen kokonaispotentiaalienergia on

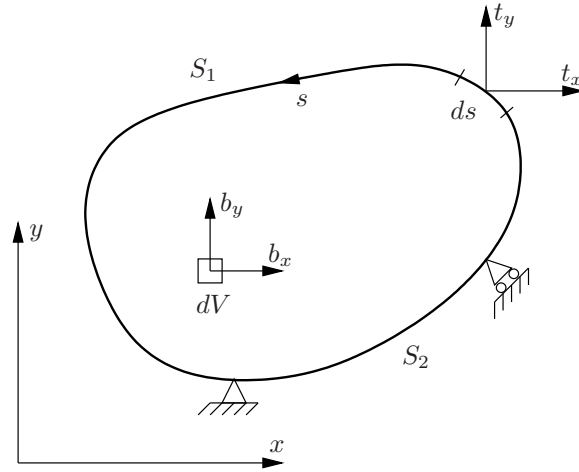
$$\Pi = U + V, \quad (11.24)$$

missä V on ulkoisen kuorman potentiaali

$$V = - \int_V \begin{bmatrix} b_x & b_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} dV - \int_{S_1} \begin{bmatrix} \bar{t}_x & \bar{t}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} dS, \quad (11.25)$$

missä b_x ja b_y ovat tilavuusvoimat ja \bar{t}_x ja \bar{t}_y ovat reunan osalla S_1 tunnetut reunakuormat, kuvassa 11.2.

¹Yläindeksi T merkitsee vektorin tai matriisin transponointia.



Kuva 11.2 Levyn kuormitukset.

Merkitään

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{bmatrix}, \quad (11.26)$$

jolloin voidaan kirjoittaa absoluuttisella merkintätavalla

$$V = - \int_V \mathbf{b}^T \mathbf{u} dV - \int_{S_1} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{u} dS. \quad (11.27)$$

Sijoittamalla siirtymien interpolaatiokaava (11.15) ulkoisen voiman potentiaalin V kaavaan (11.27) tulee

$$V = -\mathbf{q}^T \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV - \mathbf{q}^T \int_{S_1} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS = -\mathbf{q}^T \mathbf{f}, \quad (11.28)$$

missä

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_{S_1} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS \quad (11.29)$$

on kuormavektori.

Rakenteen potentiaalienergia lasketaan summaamalla elementtien osuudet yhteen eli

$$\Pi = \sum_{e=1}^E \Pi^e, \quad (11.30)$$

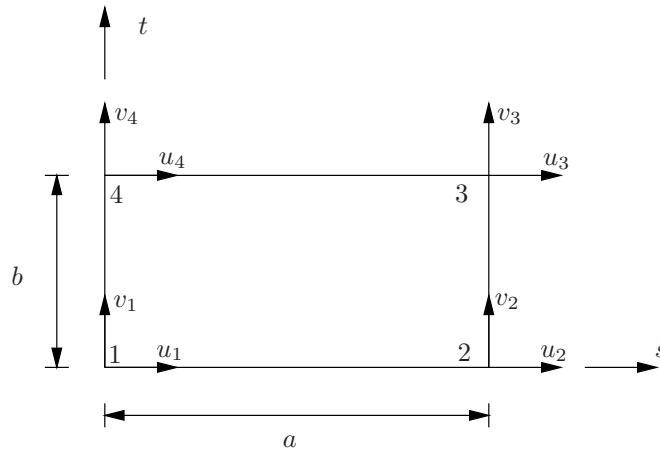
missä E on elementtien lukumäärä.

Virtuaalisen työn periaatteen mukaan tasapainoasemassa potentiaalienergian ensimmäinen variaatio on nolla:

$$\delta\Pi = \delta U + \delta V = 0, \quad (11.31)$$

missä

$$\delta U = \delta \mathbf{q}^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{q} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad (11.32)$$



Kuva 11.3 Suorakaide-elementti.

$$\delta V = -\delta \mathbf{q}^T \mathbf{f} \quad (11.33)$$

ja

$$\mathbf{K} = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (11.34)$$

on jäykkyysmatriisi.

Rakenteen jäykkyysmatriisi kootaan elementtien jäykkyysmatriiseista. Edellä olevat kaavat on kirjoitettu ajattelemalla siirtymien interpolaatio kirjoitetuksi koko analysoitavan kappaleen alueelle.

Ehdosta

$$\delta \Pi = \delta \mathbf{q}^T \left(\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV - \mathbf{f} \right) = 0 \quad (11.35)$$

seuraa

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (11.36)$$

josta ratkaistaan (reunaehtojen sijoittamisen jälkeen) solmupistesiertymien vektori

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}. \quad (11.37)$$

Solmuisiirtymien avulla lasketaan muodonmuutokset

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{q}. \quad (11.38)$$

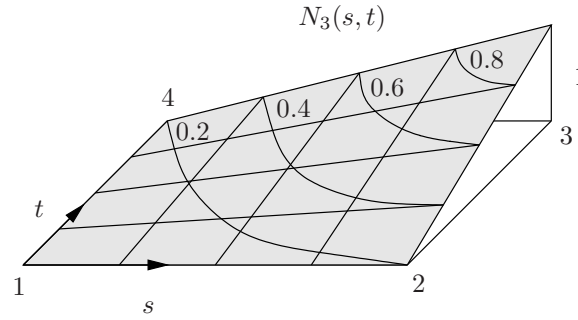
Jännitykset lasketaan kaavalla

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q}. \quad (11.39)$$

Esimerkki 11.1 Määritetään suorakaide-elementin jäykkyysmatriisi.

Tarkastellaan kuvan 11.3 suorakaiteen muotoista elementtiä (x, y) -koordinaatistossa. Elementin sivumitat ovat a ja b x :n ja y :n suunnissa. Määrittelemällä laaduttomat koordinaatit

$$s = \frac{x}{a}, \quad t = \frac{y}{b} \quad (11.40)$$



Kuva 11.4 Suorakaide-elementin muotofunktio N_3 .

elementin bilineaariset interpolaatiofunktiot voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}
 N_1(s, t) &= (1-s)(1-t), \\
 N_2(s, t) &= s(1-t), \\
 N_3(s, t) &= st, \\
 N_4(s, t) &= (1-s)t.
 \end{aligned}
 \tag{11.41}$$

Muotofunktio N_3 on piirretty kuvaan 11.4.

Muotofunktioiden derivaatat lasketaan ketjusäännöllä

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}, \quad i = 1, 2, 3, 4,
 \tag{11.42}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y}, \quad i = 1, 2, 3, 4.
 \tag{11.43}$$

Suorakaidegeometriassa

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{1}{a}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial t} \frac{1}{b}.
 \tag{11.44}$$

Muotofunktioiden derivaatat koordinaattien s ja t suhteen ovat

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_1}{\partial s} &= -(1-t), & \frac{\partial N_1}{\partial t} &= -(1-s), \\
 \frac{\partial N_2}{\partial s} &= (1-t), & \frac{\partial N_2}{\partial t} &= -s, \\
 \frac{\partial N_3}{\partial s} &= t, & \frac{\partial N_3}{\partial t} &= s, \\
 \frac{\partial N_4}{\partial s} &= -t, & \frac{\partial N_4}{\partial t} &= (1-s).
 \end{aligned}
 \tag{11.45}$$

Elementin jäykkyydsmatriisi on

$$\mathbf{K} = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} ab \, ds \, dt,
 \tag{11.46}$$

missä

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1-t}{a} & 0 & \frac{1-t}{a} & 0 & \frac{t}{a} & 0 & -\frac{t}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1-s}{b} & 0 & -\frac{s}{b} & 0 & \frac{s}{b} & 0 & \frac{1-s}{b} \\ -\frac{1-s}{b} & -\frac{1-t}{a} & -\frac{s}{b} & \frac{1-t}{a} & \frac{s}{b} & \frac{t}{a} & \frac{1-s}{b} & -\frac{t}{a} \end{bmatrix}, \quad (11.47)$$

$$\mathbf{D} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (11.48)$$

$$D = \frac{Eh}{1-\nu^2}. \quad (11.49)$$

Lasketaan esimerkiksi jäykkyyismatriisin termi K_{11}

$$\begin{aligned} K_{11} &= D \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} -\frac{1-t}{a} & 0 & -\frac{1-s}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1-t}{a} \\ -\nu \frac{1-t}{a} \\ -\frac{1-\nu}{2} \frac{1-s}{b} \end{bmatrix} ab \, ds \, dt \\ &= D \int_0^1 \int_0^1 \left[(1-t)^2 \frac{b}{a} + \frac{1-\nu}{2} (1-s)^2 \frac{a}{b} \right] ds \, dt \\ &= D \left(\frac{1}{3} \frac{b}{a} + \frac{1}{3} \frac{1-\nu}{2} \frac{a}{b} \right). \end{aligned} \quad (11.50)$$

Merkitsemällä

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad \rho = \frac{1-\nu}{2} \quad (11.51)$$

voidaan jäykkyyismatriisin alkio K_{11} kirjoittaa muotoon

$$K_{11} = D \frac{\beta + \rho\alpha}{3}. \quad (11.52)$$

Nelisolmuksen levyelementin jäykkyyismatriisiksi saadaan

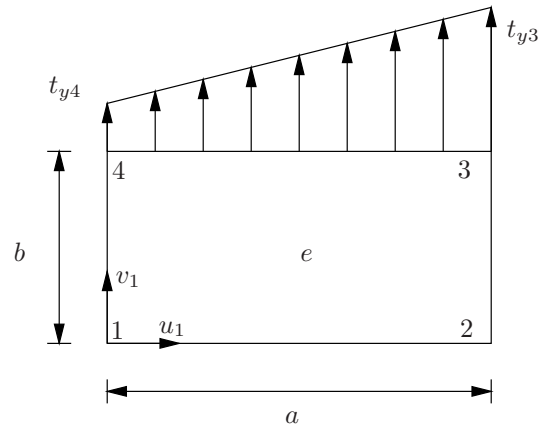
$$\mathbf{K} = D \begin{bmatrix} \frac{\beta+\rho\alpha}{3} & \frac{1+\nu}{8} & -\frac{2\beta-\rho\alpha}{6} & -\frac{1-3\nu}{8} & -\frac{\beta+\rho\alpha}{6} & -\frac{1+\nu}{8} & \frac{\beta-2\rho\alpha}{6} & \frac{1-3\nu}{8} \\ \frac{1+\nu}{8} & \frac{\alpha+\rho\beta}{3} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{\alpha-2\rho\beta}{6} & -\frac{1+\nu}{8} & -\frac{\alpha+\rho\beta}{6} & -\frac{1-3\nu}{8} & -\frac{2\alpha-\rho\beta}{6} \\ -\frac{2\beta-\rho\alpha}{6} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{\beta+\rho\alpha}{3} & -\frac{1+\nu}{8} & \frac{\beta-2\rho\alpha}{6} & -\frac{1-3\nu}{8} & -\frac{\beta+\rho\alpha}{6} & \frac{1+\nu}{8} \\ -\frac{1-3\nu}{8} & \frac{\alpha-2\rho\beta}{6} & -\frac{1+\nu}{8} & \frac{\alpha+\rho\beta}{3} & \frac{1-3\nu}{8} & -\frac{2\alpha-\rho\beta}{6} & \frac{1+\nu}{8} & -\frac{\alpha+\rho\beta}{6} \\ -\frac{\beta+\rho\alpha}{6} & -\frac{1+\nu}{8} & \frac{\beta-2\rho\alpha}{6} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{\beta+\rho\alpha}{3} & \frac{1+\nu}{8} & -\frac{2\beta-\rho\alpha}{6} & -\frac{1-3\nu}{8} \\ -\frac{1+\nu}{8} & -\frac{\alpha+\rho\beta}{6} & -\frac{1-3\nu}{8} & -\frac{2\alpha-\rho\beta}{6} & \frac{1+\nu}{8} & \frac{\alpha+\rho\beta}{3} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{\alpha-2\rho\beta}{6} \\ \frac{\beta-2\rho\alpha}{6} & -\frac{1-3\nu}{8} & -\frac{\beta+\rho\alpha}{6} & \frac{1+\nu}{8} & -\frac{2\beta-\rho\alpha}{6} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{\beta+\rho\alpha}{3} & -\frac{1+\nu}{8} \\ \frac{1-3\nu}{8} & -\frac{2\alpha-\rho\beta}{6} & \frac{1+\nu}{8} & -\frac{\alpha+\rho\beta}{6} & -\frac{1-3\nu}{8} & \frac{\alpha-2\rho\beta}{6} & -\frac{1+\nu}{8} & \frac{\alpha+\rho\beta}{3} \end{bmatrix}. \quad (11.53)$$

Sijoittamalla siirtymien esitykset (11.14) Lamén yhtälöihin

$$(\tilde{\nabla}\mathbf{u})^T \mathbf{D} \tilde{\nabla}\mathbf{u} = 0 \quad (11.54)$$

saadaan jäännösjäännityksinä x :n suunnassa

$$\frac{E}{2(1-\nu)ab} (v_1 - v_2 + v_3 - v_4) \quad (11.55)$$



Kuva 11.5 Lineaarisesti jakautunut kuorma suorakaide-elementin reunalla.

ja vastaavasti y -akselin suunnassa

$$\frac{E}{2(1-\nu)ab}(u_1 - u_2 + u_3 - u_4). \quad (11.56)$$

Jäännösjännitykset ovat nollia tasaisessa vedossa, kun

$$u_1 = u_4, \quad u_2 = u_3, \quad v_1 = v_2 \quad \text{ja} \quad v_3 = v_4, \quad (11.57)$$

ja tasapainoehdot toteutuvat tällöin. Epätasapaino on verrannollinen leikkausjännitykseen.

Esimerkki 11.2 Määritetään lineaarista reunakuormaa vastaava kuormavektori.

Suorakulmaisen nelisolmuisen levyelementin reunalla vaikuttaa lineaarisesti jakautunut reunakuorma t_y , kuvassa 11.5,

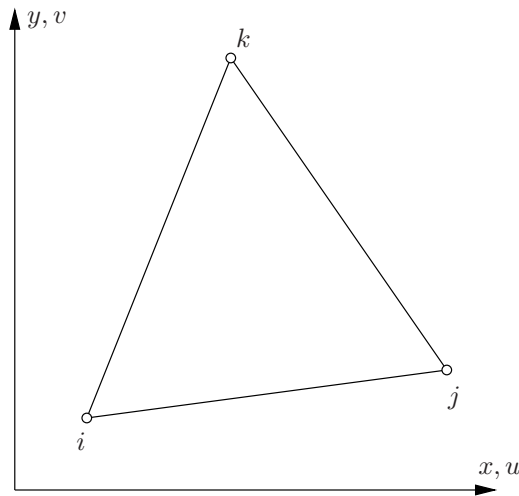
$$t_y(s) = (1-s)t_{y4} + st_{y3}. \quad (11.58)$$

Elementin reuna 4–3 on nyt osa levyn reunaa S_1 , jolla reunakuorma tunnetaan. Koska tilavuusvoimia ei ole ja reunakuorman komponentti t_x on nolla, kuormavektori on tässä tapauksessa

$$\mathbf{f} = \int_{S_1} \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{t}_y \end{bmatrix} dS. \quad (11.59)$$

Vapausasteisiin v liittyvä osa \mathbf{f}_v kuormavektorista saadaan sijoittamalla reunakuorman lineaarinen interpolaatio ja muotofunktiot N_i kehitettynä elementin reunalla 4–3. Kun elementin paksuus $h = 1$ tulee

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_v &= a \int_0^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \bar{t}_y ds \\ &= a \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \\ 1-s \end{bmatrix} [(1-s)\bar{t}_{y4} + s\bar{t}_{y3}] ds. \end{aligned} \quad (11.60)$$



Kuva 11.6 Kolmioelementti.

Laskemalla integraalit saadaan

$$\begin{bmatrix} f_{v1} \\ f_{v2} \\ f_{v3} \\ f_{v4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{6}a\bar{t}_{y4} + \frac{1}{3}a\bar{t}_{y3} \\ \frac{1}{3}a\bar{t}_{y4} + \frac{1}{6}a\bar{t}_{y3} \end{bmatrix}. \quad (11.61)$$

Edellä

$$\int_0^1 (1-s)^2 ds = \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}, \quad \int_0^1 (1-s)s ds = \frac{1}{6}. \quad (11.62)$$

Esimerkki 11.3 Määritetään kolmioelementin jäykkyydsmatriisi.

Kuvan 11.6 kolmisolmuisen elementin alueella interpoloidaan siirtymiä u ja v lineaarisilla polynomeilla

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad (11.63)$$

$$v(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y,$$

missä α_i , $i = 1, 2, 3$, ovat vakioita. Merkitään, että kolmioelementin solmujen numerot ovat i , j ja k . Kehittämällä siirtymän u interpolaatiokaava elementin solmuissa tulee

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i,$$

$$u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j, \quad (11.64)$$

$$u_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k.$$

Ratkaisemalla yhtälöryhmä (11.64) kertoimien α_i , $i = 1, 2, 3$, suhteen ja sijoittamalla nämä interpolaatioyhtälöihin (11.63) saadaan siirtymien interpolaatiokaavat

$$u(x, y) = N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 + N_3(x, y)u_3, \quad (11.65)$$

$$v(x, y) = N_1(x, y)v_1 + N_2(x, y)v_2 + N_3(x, y)v_3.$$

Kaavoissa (11.65) muotofunktiot ovat

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{2A}(a_1 + b_1x + c_1y), \\ N_2(x, y) &= \frac{1}{2A}(a_2 + b_2x + c_2y), \\ N_3(x, y) &= \frac{1}{2A}(a_3 + b_3x + c_3y), \end{aligned} \quad (11.66)$$

joissa olevat kertoimet ovat

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2, & b_1 &= y_2 - y_3, & c_1 &= x_3 - x_2, \\ a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= x_1 - x_3, \\ a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1, & b_3 &= y_1 - y_2, & c_3 &= x_2 - x_1, \end{aligned} \quad (11.67)$$

$2A$ on elementin kaksinkertainen pinta-ala

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = (a_i + a_j + a_k) \equiv (a_1 + a_2 + a_3). \quad (11.68)$$

Muodonmuutosten interpolaatiokaavoihin

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \quad (11.69)$$

sijoitetaan kolmioelementin tapauksessa

$$\begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (11.70)$$

siirtymien interpolaatiokaavojen (11.65) perusteella. \mathbf{B} -matriisin solmuun i liittyvä osa, (3×2) -matriisi on tässä tapauksessa

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}. \quad (11.71)$$

Elementin jäykkyyismatriisiin

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (11.72)$$

laskussa tarvittava tilavuuden yli integrointi on nyt triviaali toimenpide, koska muodonmuutokset ja \mathbf{B} -matriisin alkioit ovat vakioita elementin alueella. Tilavuusintegraali lasketaan siis kertomalla vakiomatriisien tulo elementin tilavuudella $h^e A^e$.

Jäykkyyismatriisi voidaan osittaa solmupisteiden mukaisesti yhdeksään osaan

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix}. \quad (11.73)$$

Tyypillinen jäykkyyismatriisin osa, (2×2) -matriisi on

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j A h \quad (11.74)$$

ja

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} b_i b_j + \frac{1-\nu}{2} c_i c_j & \nu b_i c_j + \frac{1-\nu}{2} c_i b_j \\ \nu c_i b_j + \frac{1-\nu}{2} b_i c_j & c_i c_j + \frac{1-\nu}{2} b_i b_j \end{bmatrix} \frac{1}{4A}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (11.75)$$

Esimerkki 11.4 Määritetään kolmisolmuisen vakio muodonmuutoselementin kuormavektori tasanjakautuneesta tilavuusvoimasta.

Merkitään, että tilavuusvoimavektorin komponentit ovat

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}. \quad (11.76)$$

Solmuun i liittyvä tilavuusvoimavektori on

$$\mathbf{f}_i = \int_V \begin{bmatrix} N_i(x, y) & 0 \\ 0 & N_i(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x(x, y) \\ b_y(x, y) \end{bmatrix} dV, \quad (11.77)$$

missä $b_x(x, y)$ ja $b_y(x, y)$ ovat nyt oletuksen mukaisesti vakioita.

Koordinaattien x ja y integraalit ovat yleisessä suorakulmaisessa (x, y) -koordinaatistossa

$$\int_A x dA = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad \int_A y dA = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \quad (11.78)$$

jotka ovat samalla kolmion painopisteen koordinaatit. Sijoittamalla origo kolmion painopisteeseen integraalit (11.78) menevät nolliksi, ja

$$\int_A N_1(x, y) dA = \frac{a_1}{2A} A = \frac{1}{3} A, \quad (11.79)$$

koska painopistekoordinaatistossa $a_1 = \frac{2A}{3} = a_2 = a_3$. Samalla tavalla lasketaan

$$\int_A N_2(x, y) dA = \int_A N_3(x, y) dA = \frac{1}{3} A. \quad (11.80)$$

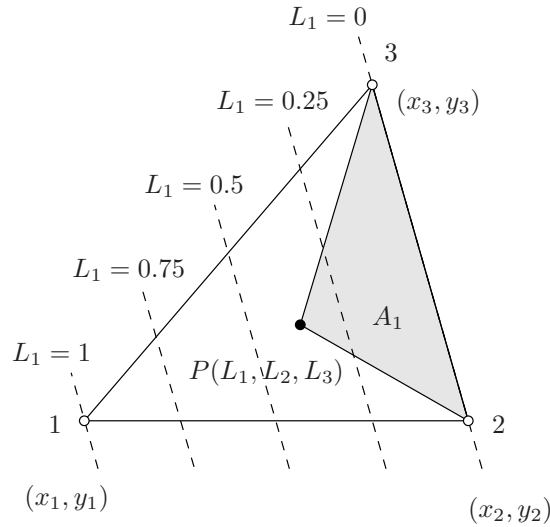
Vaihtoehtoisesti muotofunktion N_i integraali kolmioalueen yli voidaan laskea pyramidin tilavuuden kaavan $V = \frac{1}{3} Ah$ avulla.

Muotofunktioiden N_i integraalien avulla saadaan vakiotilavuusvoimien tapauksessa solmun i kuormavektoriksi

$$\begin{bmatrix} (f_x)_i \\ (f_y)_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} Ah b_x \\ \frac{1}{3} Ah b_y \end{bmatrix}. \quad (11.81)$$

Pintaintegraalin laskemiseksi kolmionmuotoisessa alueessa on kätevää ottaa käyttöön alakoordinaatit, kuvassa 11.7,

$$L_i = \frac{A_i}{A}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (11.82)$$



Kuva 11.7 Alakoordinaatit.

eli

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_2}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A}, \quad (11.83)$$

missä A on kolmioelementin pinta-ala. Esimerkiksi solmupisteen 1 koordinaatit ovat $(1, 0, 0)$.

Siirtymien lineaariset interpolaatiot ovat

$$u(L_1, L_2, L_3) = L_1 u_1 + L_2 u_2 + L_3 u_3, \quad (11.84)$$

$$v(L_1, L_2, L_3) = L_1 v_1 + L_2 v_2 + L_3 v_3,$$

ja näiden kaavojen avulla päätellään, että alakoordinaattien L_i , $i = 1, 2, 3$ avulla lausutut lineaariset muotofunktiot $N_i(L_1, L_2, L_3)$, $i = 1, 2, 3$ ovat

$$N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3. \quad (11.85)$$

Solmuun $i = 1, 2, 3$ liittyvä tilavuusvoimavektori on

$$\mathbf{f}_i = \int_A \begin{bmatrix} L_i & 0 \\ 0 & L_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x(L_1, L_2, L_3) \\ b_y(L_1, L_2, L_3) \end{bmatrix} dAh, \quad (11.86)$$

Alakoordinaateille pätee integrointikaava

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A. \quad (11.87)$$

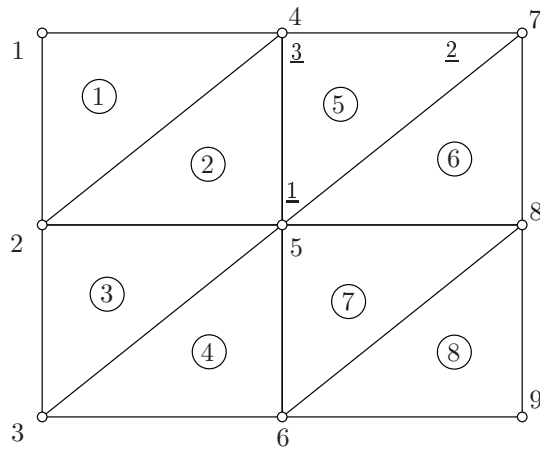
Integraalikaavan perusteella esimerkiksi

$$\int_A L_1 dA = \frac{1}{(1+0+0+2)!} 2A = \frac{1}{6} 2A = \frac{1}{3} A. \quad (11.88)$$

Tasaisen tilavuusvoimakuorman tapauksessa tulee

$$\begin{bmatrix} (f_x)_i \\ (f_y)_i \end{bmatrix} = \frac{1}{3} Ah \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}, \quad (11.89)$$

kuten edellä toisella tavalla.



Kuva 11.8 Suorakaidelevyn diskretointi kolmioelementeillä.

Esimerkki 11.5 Muodostetaan kuvan 11.8 kolmisolmuisista elementeistä koostuvan elementtimallin tasapainoyhtälöiden ryhmä.

Kuvan 11.8 solmupistenumerointia vastaten kootaan yhtälöryhmä (2×2) -matriiseista \mathbf{K}_{ij} muotoon

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{14} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} & \mathbf{K}_{25} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{35} & \mathbf{K}_{36} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{K}_{42} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{44} & \mathbf{K}_{45} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{47} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{52} & \mathbf{K}_{53} & \mathbf{K}_{54} & \mathbf{K}_{55} & \mathbf{K}_{56} & \mathbf{K}_{57} & \mathbf{K}_{58} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{63} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{65} & \mathbf{K}_{66} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{68} & \mathbf{K}_{69} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{74} & \mathbf{K}_{75} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{77} & \mathbf{K}_{78} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{85} & \mathbf{K}_{86} & \mathbf{K}_{87} & \mathbf{K}_{88} & \mathbf{K}_{89} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{96} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{98} & \mathbf{K}_{99} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{q}_5 \\ \mathbf{q}_6 \\ \mathbf{q}_7 \\ \mathbf{q}_8 \\ \mathbf{q}_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \\ \mathbf{f}_5 \\ \mathbf{f}_6 \\ \mathbf{f}_7 \\ \mathbf{f}_8 \\ \mathbf{f}_9 \end{bmatrix}. \quad (11.90)$$

Elementin numero 5 jäykkyysmatriisin osat, (2×2) -matriisit summataan globaaliin jäykkyysmatriisin blokkiriveille ja -sarakkeille 4, 5, 7. Elementin 5 summauksen jälkeen saadaan tilanne

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{33}^5 & \mathbf{K}_{31}^5 & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{32}^5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{13}^5 & \mathbf{K}_{11}^5 & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{12}^5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{23}^5 & \mathbf{K}_{21}^5 & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}^5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{q}_5 \\ \mathbf{q}_6 \\ \mathbf{q}_7 \\ \mathbf{q}_8 \\ \mathbf{q}_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \\ \mathbf{f}_5 \\ \mathbf{f}_6 \\ \mathbf{f}_7 \\ \mathbf{f}_8 \\ \mathbf{f}_9 \end{bmatrix}. \quad (11.91)$$

Luku 12

Kuoriteoriaa

12.1 Pintojen geometriaa

Pinnan määrittelee kolmiulotteisessa avaruudessa vektorin \mathbf{r} päätepisteiden ura. Pinnan yhtälö voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta) \quad (12.1)$$

missä α ja β ovat käyräviivaiset koordinaatit, kuvassa 12.1. Pinnan yhtälö on parametri-muodossa

$$x = f_1(\alpha, \beta), \quad y = f_2(\alpha, \beta), \quad z = f_3(\alpha, \beta). \quad (12.2)$$

Eliminoimalla α ja β saadaan yhtälö

$$F(x, y, z) = 0 \quad (12.3)$$

tai koordinaatin z suhteen ratkaistuna

$$z = f(x, y). \quad (12.4)$$

Pisteiden C ja D paikkavektorit kuvassa 12.1 ovat \mathbf{r} ja $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, ja pisteiden käyräviivaiset koordinaatit ovat vastaavasti (α, β) ja $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$. Vektorin \mathbf{r} differentiaali on

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} d\beta. \quad (12.5)$$

Kaarialkion CD pituus on

$$ds = |d\mathbf{r}|, \quad (12.6)$$

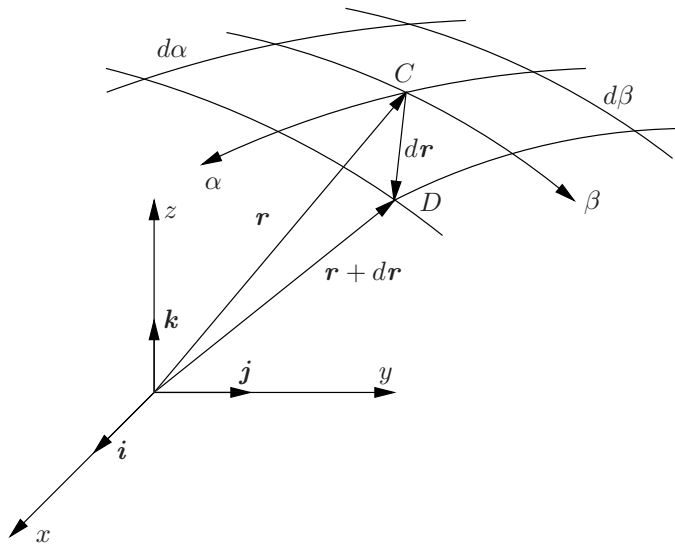
ja kaarialkion neliö on

$$ds^2 = |d\mathbf{r}|^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = E d\alpha^2 + 2F d\alpha d\beta + G d\beta^2, \quad (12.7)$$

missä

$$E = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \alpha}, \quad (12.8)$$

$$F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta}, \quad (12.9)$$



Kuva 12.1 Kaareva pinta.

$$G = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \beta} \frac{\partial z}{\partial \beta}. \quad (12.10)$$

Viiva-alkion neliön lauseke määrittelee pinnan ensimmäisen neliömuodon.

Koordinaattiviivojen ja samalla pinnan tangenttivektorit tarkastelupisteessä ovat

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}, \quad \mathbf{g}_\beta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}, \quad (12.11)$$

ja

$$F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = \sqrt{EG} \cos \chi, \quad (12.12)$$

missä χ on tangenttivektoreiden välinen kulma. Viiva-alkion pituus α -viivaa pitkin on

$$ds_\alpha = \sqrt{E} d\alpha, \quad (12.13)$$

ja vastaavasti β -viivaa pitkin

$$ds_\beta = \sqrt{G} d\beta. \quad (12.14)$$

Jos koordinaatit α ja β ovat ortogonaaliset eli kulma $\chi = \pi/2$, niin

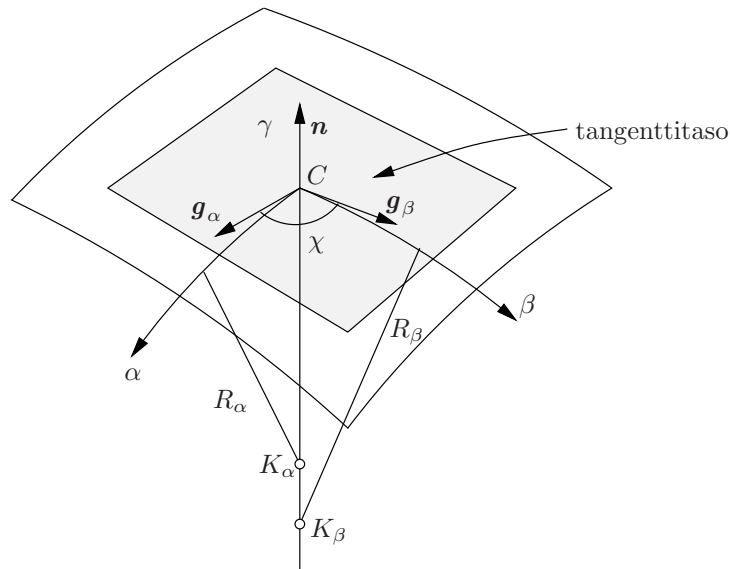
$$ds^2 = ds_\alpha^2 + ds_\beta^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2, \quad (12.15)$$

missä

$$A = \sqrt{E} \quad \text{ja} \quad B = \sqrt{G}. \quad (12.16)$$

Pisteen C kautta kulkeva pinnan normaalivektori on

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{g}_\alpha \times \mathbf{g}_\beta}{|\mathbf{g}_\alpha \times \mathbf{g}_\beta|} \\ &= \frac{1}{H} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \right), \end{aligned} \quad (12.17)$$



Kuva 12.2 Tangenttitaso.

missä

$$H = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \right| \sin \chi = \sqrt{EG} \sin \chi \quad (12.18)$$

ja

$$\sin \chi = \sqrt{1 - \cos^2 \chi} = \sqrt{1 - \frac{F^2}{EG}}. \quad (12.19)$$

Siten

$$H = \sqrt{EG - F^2}. \quad (12.20)$$

Pinnan kahden mielivaltaisen pisteen kautta kulkevat pinnan normaalit eivät yleensä leikkaa toisiaan. Pinnan jokaisen pisteen kautta kulkee sensijaan kaksi niin sanottua kaarevuusviivaa, joiden kautta kulkevat pinnan normaalit leikkaavat toisensa (laatan tapauksessa äärettömyydessä).

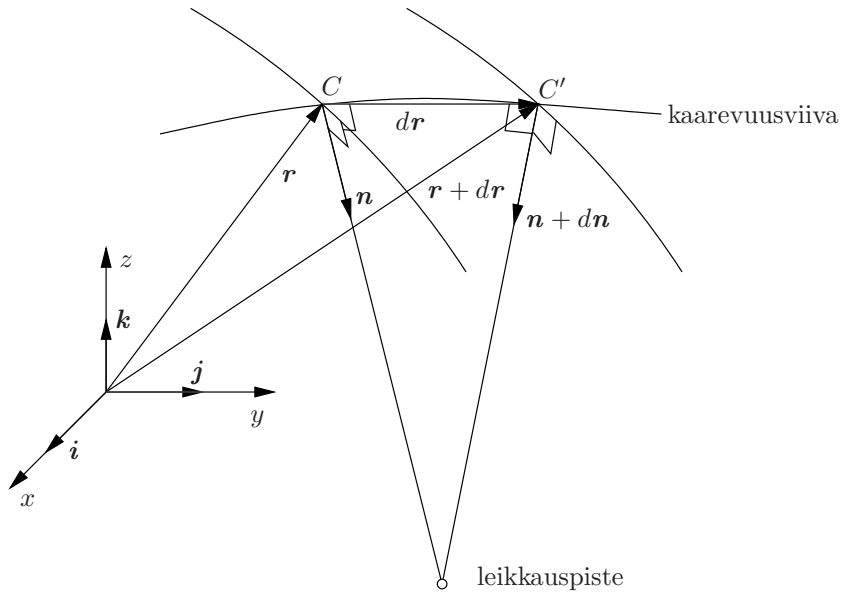
Olkoot \mathbf{r} ja $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ sekä \mathbf{n} ja $\mathbf{n} + d\mathbf{n}$ pinnan kahden pisteen C ja C' paikkavektorit ja normaalivektorit. Ehto pisteiden C ja C' kautta kulkevien normaalivektoreiden suuntaisten suorien leikkaamiselle on, että vektorit \mathbf{n} , $d\mathbf{n}$ ja $d\mathbf{r}$ ovat samassa tasossa eli

$$\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n} \times d\mathbf{r} = 0, \quad (12.21)$$

mistä seuraa

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right) d\alpha^2 + \left[\left(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \right) + \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right) \right] d\alpha d\beta \\ & + \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \right) d\beta^2 = 0. \end{aligned} \quad (12.22)$$

Yhtälön perusteella voidaan määrittää kaksi suuntaa kahdelle kaarevuusviivalle.



Kuva 12.3 Kaarevuusviivan normaalit.

Koska α - ja β -viivojen tangenttivektorit ovat kohtisuorassa normaalivektoria vastaan, saadaan ehdot

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = 0. \quad (12.23)$$

Derivoimalla nämä ehdot koordinaattien α ja β suhteen tulee

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha^2} = -L, \quad (12.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha \partial \beta} = -M, \quad (12.25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \beta^2} = -N. \quad (12.26)$$

Pinnan suuret L , M ja N ovat vektoreiden $\mathbf{r}_{,\alpha\alpha}$, $\mathbf{r}_{,\alpha\beta}$ ja $\mathbf{r}_{,\beta\beta}$ projektiot pinnan normaalivektorin \mathbf{n} suunnalle, ja ne ovat samalla pinnan toisen neliömuodon

$$II = -d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{n} = Ld\alpha^2 + 2Md\alpha d\beta + Nd\beta^2 \quad (12.27)$$

kertoimet.

Kertoimien L , M ja N määrittelykaavojen ja normaalivektorin kaavan perusteella

$$L = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{H} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{H} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad (12.28)$$

$$M = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{H} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{H} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} & \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad (12.29)$$

$$N = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \beta^2} = \frac{1}{H} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \beta^2} = \frac{1}{H} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (12.30)$$

Koska \mathbf{n} on vakiovektori ($|\mathbf{n}| = 1$), ovat normaalivektorin derivaatat koordinaattien α ja β suhteen tangenttitason suuntaisia vektoreita eli

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} = a \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} + b \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \quad (12.31)$$

ja

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta} = c \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} + d \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}, \quad (12.32)$$

joissa a, b, c ja d ovat vakioita. Kertomalla ensimmäinen yhtälö vektoreilla $\mathbf{r}_{,\alpha}$ ja $\mathbf{r}_{,\beta}$ tulee

$$-L = aE + bF, \quad (12.33)$$

$$-M = aF + bG, \quad (12.34)$$

joista ratkaistaan

$$a = \frac{FM - GL}{H^2}, \quad b = \frac{FL - EM}{H^2}. \quad (12.35)$$

Normaalivektorin \mathbf{n} derivaatta koordinaatin α suhteen on siten

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} = \frac{FM - GL}{H^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} + \frac{FL - EM}{H^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}. \quad (12.36)$$

Samalla tavalla johdetaan normaalivektorin \mathbf{n} derivaatta koordinaatin β suhteen

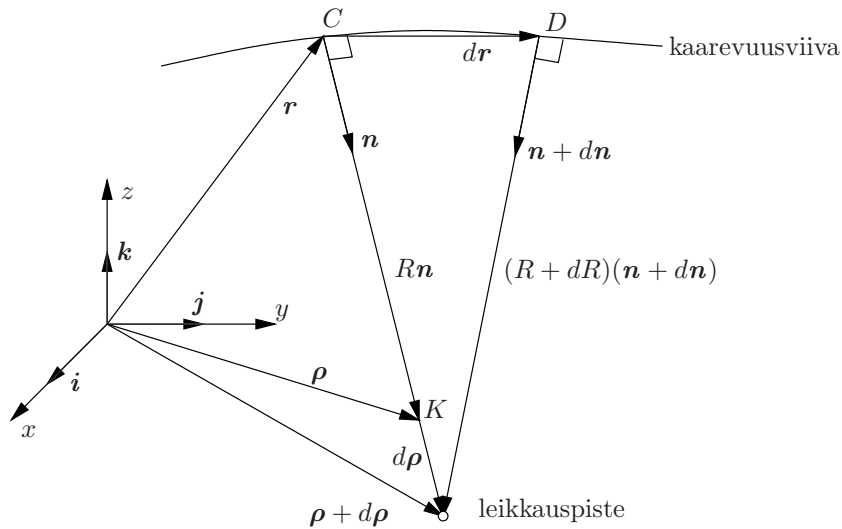
$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta} = \frac{FN - GM}{H^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} + \frac{FM - EN}{H^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}. \quad (12.37)$$

Normaalivektorin kaavan (12.17) ja yllä olevien normaalivektorin derivaattojen kaavojen (12.31), (12.32) perusteella saadaan

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = \frac{EM - FL}{H}, \quad (12.38)$$

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = \frac{EN - FM}{H}, \quad (12.39)$$

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = \frac{FM - GL}{H}, \quad (12.40)$$



Kuva 12.4 Kaarevuuskeskipiste.

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = \frac{FN - GM}{H}. \quad (12.41)$$

Sijoittamalla nämä kaavat yhtälöön (12.22) tulee

$$(EM - FL) \left(\frac{d\alpha}{d\beta} \right)^2 + (EN - GL) \frac{d\alpha}{d\beta} + (FN - GM) = 0. \quad (12.42)$$

Kaavan perusteella, määrittämällä kaksi kaarevuusviivojen suunnat määrittävää juurta, todetaan, että kaarevuusviivat ovat ortogonaalisia ($F = 0$).

Olkoot pisteet C ja D kaarevuusviivalla. Pisteiden C ja D kautta kulkevat pinnan normaalien suuntaiset suorat leikkaavat toisensa kaarevuuskeskipisteessä K . Jana CK on pinnan pääkaarevuussäde pisteessä C , ja sitä vastaa vektori

$$\mathbf{R} = R\mathbf{n}. \quad (12.43)$$

Pinnan pääkaarevuus on

$$k = \frac{1}{R}. \quad (12.44)$$

Pinnan jokaisessa pisteessä voidaan muodostaa kaarevuusviivojen suunnassa kaksi pinnan pääkaarevuutta. Kaarevuusviivan kaarevuus ei ole välttämättä sama kuin pinnan kaarevuus. Kaarevuusviivalla on oma maksimi- ja minimikaarevuus.

Merkitään, että kaarevuuskeskipisteen K paikkavektori on

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + R\mathbf{n}. \quad (12.45)$$

Tällöin

$$d\boldsymbol{\rho} = d(\mathbf{r} + R\mathbf{n}) = (d\mathbf{r} + Rd\mathbf{n}) + \mathbf{n}dR. \quad (12.46)$$

Vektori $d\mathbf{r} + Rd\mathbf{n}$ on tangenttitason suuntainen, ja $d\mathbf{r}$ on kaarevuusviivan suuntainen, joten $d\boldsymbol{\rho}$ on samansuuntainen kuin \mathbf{n} ja siten

$$d\mathbf{r} + Rd\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (12.47)$$

eli

$$k d\mathbf{r} + d\mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (12.48)$$

Sijoittamalla tähän

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} d\beta, \quad (12.49)$$

$$d\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta} d\beta \quad (12.50)$$

saadaan

$$\left(k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} \right) d\alpha + \left(k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta} \right) d\beta = \mathbf{0}. \quad (12.51)$$

Kertomalla tämä yhtälö skalaarisesti vektoreilla $\mathbf{r}_{,\alpha}$ ja $\mathbf{r}_{,\beta}$ saadaan kaksi yhtälöä

$$(kE - L)d\alpha + (kF - M)d\beta = 0, \quad (12.52)$$

$$(kF - M)d\alpha + (kG - N)d\beta = 0. \quad (12.53)$$

Yhtälöryhmällä on ei-triviaali ratkaisu, jos sen kerroinmatriisin determinantti on nolla eli

$$(kE - L)(kG - N) - (kF - M)^2 = 0, \quad (12.54)$$

jonka juuret k_1 ja k_2 ovat pääkaarevuudet.

Jos α - ja β -viivat ovat kaarevuusviivat, niin $F = M = 0$ ja

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{L}{E} = \frac{L}{A^2}, \quad (12.55)$$

$$k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G} = \frac{N}{B^2}. \quad (12.56)$$

Tässä tapauksessa ovat voimassa Gaussin-Godazzin kaavat

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(k_2 B) = k_1 \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \quad (12.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(k_1 A) = k_2 \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad (12.58)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = -k_1 k_2 AB. \quad (12.59)$$

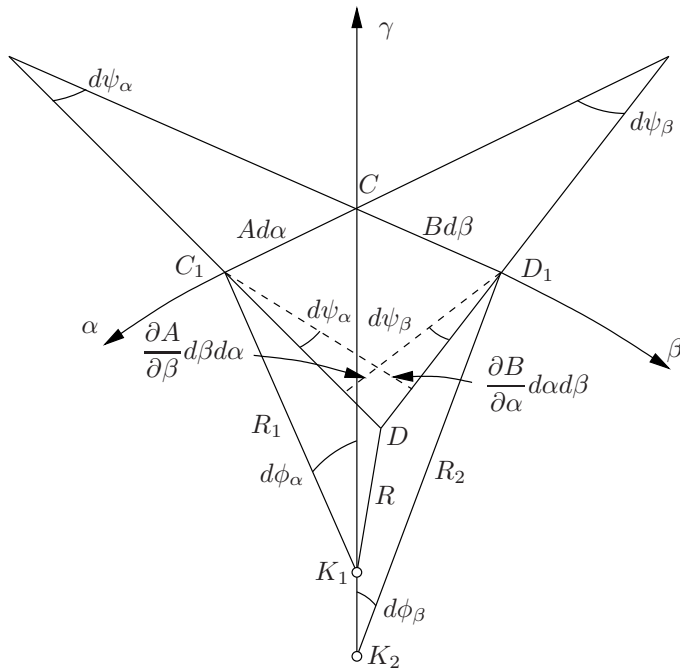
Suure

$$k_G = k_1 k_2 = \frac{1}{R_1 R_2} \quad (12.60)$$

on pinnan Gaussin kaarevuus. Jos $k_G = 0$, niin pinnan geometria yhtyy Euklidiseen geometriaan. Näin on, jos $R_1 = \infty$ tai $R_2 = \infty$. Suure

$$k_m = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (12.61)$$

on pinnan keskikaarevuus. Pintoja, joiden keskikaarevuus on nolla, nimitetään minimipinoiksi.



Kuva 12.5 Kuoren alkio $(Ad\alpha, Bd\beta)$.

12.2 Kuoren kalvotila

Kuoren kalvotilan ratkaisussa jätetään taivutusmomentit ja vääntömomentti sekä pintaa vastaan kohtisuorat leikkausvoimat huomioonottamatta. Tarkastellaan kuorta, jonka paksuus h on vakio. Koordinaattiviivoiksi α ja β valitaan ortogonaaliset kaarevuusviivat. Kuvan 12.5 kuorialkion sivujen pituudet ovat

$$CC_1 = Ad\alpha, \quad (12.62)$$

$$DD_1 = \left(A + \frac{\partial A}{\partial \beta} d\beta \right) d\alpha, \quad (12.63)$$

$$CD_1 = Bd\beta, \quad (12.64)$$

$$DC_1 = \left(B + \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha \right) d\beta. \quad (12.65)$$

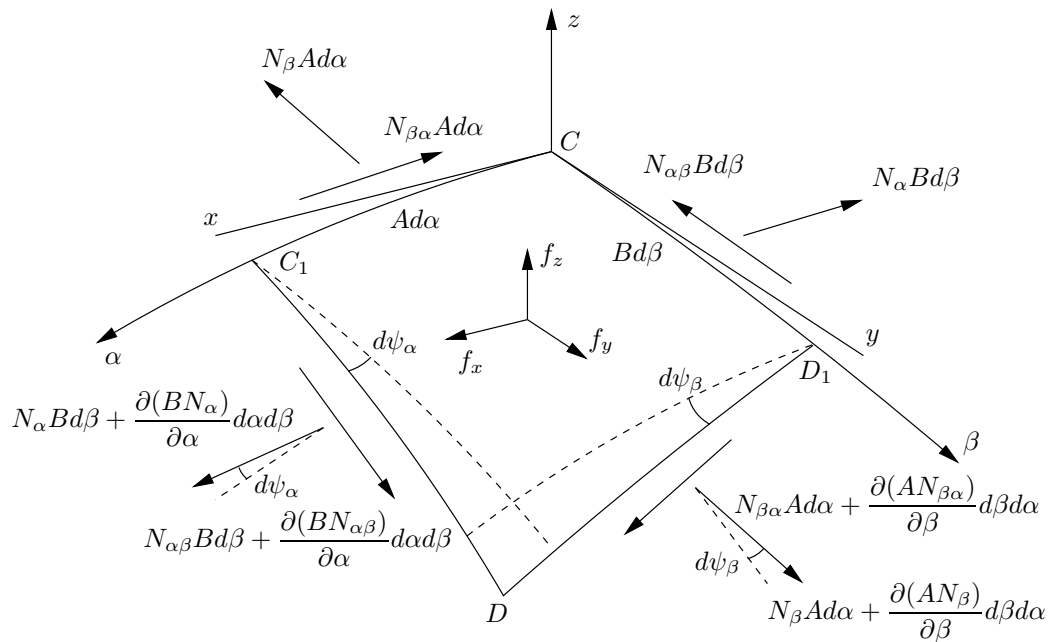
Pisteen C kautta kulkevissa päänormaalitasoissa mitattavat kulmat $d\phi_\alpha$ ja $d\phi_\beta$ ovat

$$d\phi_\alpha = \frac{Ad\alpha}{R_\alpha}, \quad (12.66)$$

$$d\phi_\beta = \frac{Bd\beta}{R_\beta}. \quad (12.67)$$

Pisteen C kautta kulkevan pinnan tangenttitason kulmat $d\psi_\alpha$ ja $d\psi_\beta$ ovat

$$d\psi_\alpha = \frac{DD_1 - CC_1}{CD_1} = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} d\alpha, \quad (12.68)$$



Kuva 12.6 Kalvovoimien tasapainoehdot, f_x , f_y ja f_z ovat yksikköpinta-alaa kohti.

$$d\psi_\beta = \frac{DC_1 - D_1C}{CC_1} = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\beta. \quad (12.69)$$

Kuorialkion CD_1DC_1 tasapainon tarkastelua varten perustetaan kuvan 12.6 pisteeseen C suorakulmainen (x, y, z) -koordinaatisto siten, että z -akseli osoittaa normaalivektorin \mathbf{n} suuntaan ja x on α -viivan tangentin ja y on vastaavasti β -viivan tangentin suuntainen.

Tasapainoyhtälöt ovat nyt mielivaltaiselle kuorialkiolle

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0, \quad (12.70)$$

ja

$$\sum M_z = 0. \quad (12.71)$$

Kuvan 12.6 avulla tasapainoyhtälöistä seuraa

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BN_\alpha) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}N_\beta + \frac{\partial}{\partial \beta}(AN_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A}{\partial \beta}N_{\alpha\beta} + ABf_\alpha = 0, \quad (12.72)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(AN_\beta) - \frac{\partial A}{\partial \beta}N_\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha}(BN_{\alpha\beta}) + \frac{\partial B}{\partial \alpha}N_{\beta\alpha} + ABf_\beta = 0, \quad (12.73)$$

$$\frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} - f_n = 0, \quad (12.74)$$

$$N_{\alpha\beta} - N_{\beta\alpha} = 0. \quad (12.75)$$

Kuorialkion momentin tasapainoehdosta normaalin (akselin z) ympäri saadaan

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}, \quad (12.76)$$

ja muut tasapainoyhtälöt hieman yksinkertaistuvat muotoon

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BN_\alpha) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}N_\beta + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \beta}(A^2N_{\alpha\beta}) + ABf_\alpha = 0, \quad (12.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(AN_\beta) - \frac{\partial A}{\partial \beta}N_\alpha + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \alpha}(B^2N_{\alpha\beta}) + ABf_\beta = 0, \quad (12.78)$$

$$\frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} - f_n = 0. \quad (12.79)$$

Tehtävä on staattisesti määrätty, jos pintavoimat ja reunalla vaikuttavat voimat on annettu.

12.3 Pyörähdyskuoren kalvotila

Pyörähdyskuoren meridiaanin yhtälö on

$$r = r(z). \quad (12.80)$$

Pyörähdyssymmetrisen kuoren pinnan mielivaltaisen pisteen koordinaatit voidaan antaa muodossa

$$x = r(z) \cos \beta, \quad y = r(z) \sin \beta, \quad (12.81)$$

ja pisteen C paikkavektori suorakulmaisessa (x, y, z) -koordinaatistossa on

$$\mathbf{r} = r(z) \cos \beta \mathbf{i} + r(z) \sin \beta \mathbf{j} + z \mathbf{k}. \quad (12.82)$$

Valitsemalla käyrät $z = \text{vakio}$ ja meridiaanit $\beta = \text{vakio}$ koordinaattiviivoiksi saadaan

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \frac{\partial r(z)}{\partial z} \sin \beta \mathbf{i} + \frac{\partial r(z)}{\partial z} \cos \beta \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad (12.83)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = -r(z) \sin \beta \mathbf{i} + r(z) \cos \beta \mathbf{j}. \quad (12.84)$$

Pinnan 1. neliömuodon kertoimet ovat nyt

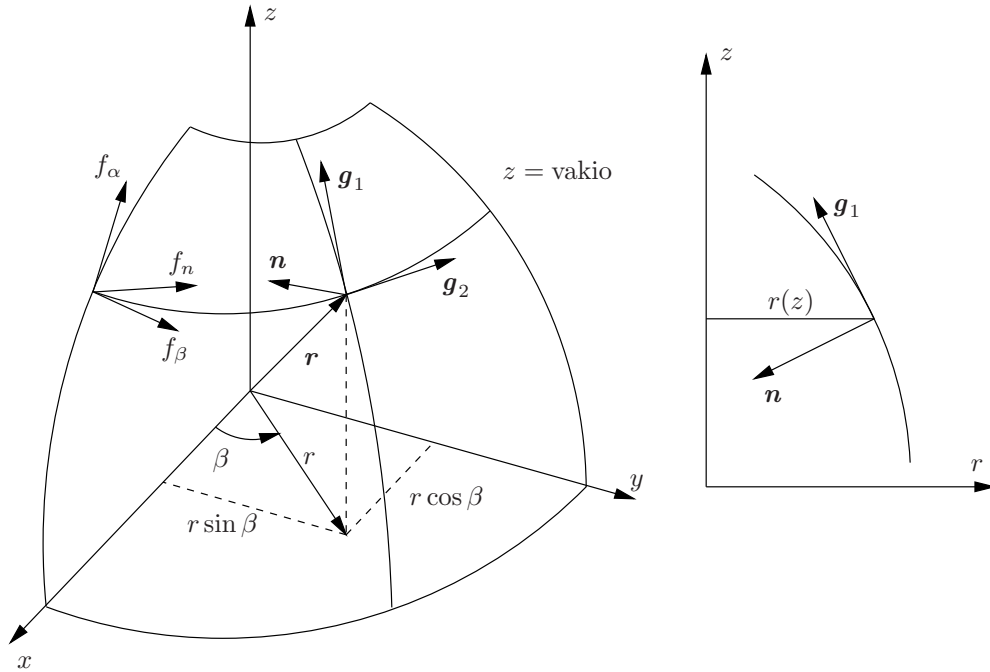
$$A^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 \cos^2 \beta + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 \sin^2 \beta + 1 = 1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2, \quad (12.85)$$

$$B^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = r^2 \sin^2 \beta + r^2 \cos^2 \beta = r^2. \quad (12.86)$$

Siten

$$A = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2}, \quad B = r, \quad H = AB = r\sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2}, \quad (12.87)$$

$$F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = 0. \quad (12.88)$$



Kuva 12.7 Pyörähdyskuori.

Kuoren normaalivektori on

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{1}{H} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \right| \\ &= \frac{1}{H} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial r}{\partial z} \cos \beta & \frac{\partial r}{\partial z} \sin \beta & 1 \\ -r \sin \beta & r \cos \beta & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{r}{H} (\cos \beta \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{j} - \frac{\partial r}{\partial z} \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (12.89)$$

Derivoimalla paikkavektori koordinaattien z ja β suhteen tulee

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 r(z)}{\partial z^2} \cos \beta \mathbf{i} + \frac{\partial^2 r(z)}{\partial z^2} \sin \beta \mathbf{j}, \quad (12.90)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \beta^2} = -r(z) \cos \beta \mathbf{i} - r(z) \sin \beta \mathbf{j}. \quad (12.91)$$

Pinnan toisen neliömuodon kertoimet L , N , ja M ovat pyörähdyspinnan tapauksessa

$$L = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial z^2} = -\frac{r}{H} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \cos^2 \beta + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \sin^2 \beta \right) = -\frac{1}{H} r \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \quad (12.92)$$

$$N = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \beta^2} = \frac{1}{H} (r^2 \cos^2 \beta + r^2 \sin^2 \beta) = \frac{r^2}{H}, \quad (12.93)$$

$$M = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial z \partial \beta} = 0. \quad (12.94)$$

Koska nyt $F = M = 0$, yhtenevät koordinaattiviivat $z = \text{vakio}$ ja $\beta = \text{vakio}$ kaarevuusviivoihin, ja kaarevuudet ovat

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{L}{A^2} = -\frac{\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (12.95)$$

$$\frac{1}{R_\beta} = \frac{N}{B^2} = \frac{1}{r \left[1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (12.96)$$

Pyörähdyskuoren tapauksessa yleisen kuoren kalvotilan tasapainoyhtälöt muuntuvat muotoon

$$\frac{\partial}{\partial z}(rN_\alpha) - \frac{\partial r}{\partial z}N_\beta + \sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2} \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + r\sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2} f_\alpha = 0, \quad (12.97)$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2} \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z}(r^2 N_{\alpha\beta}) + r\sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2} f_\beta = 0, \quad (12.98)$$

$$-\frac{r \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}}{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2} N_\alpha + N_\beta - r\sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2} f_n = 0. \quad (12.99)$$

Homogeenisen probleeman

$$f_\alpha = f_\beta = f_n = 0 \quad (12.100)$$

ratkaisu voidaan esittää jännitysfunktion Φ avulla muodossa

$$N_\alpha = \frac{A}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \quad N_\beta = \frac{1}{rA} \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \quad N_{\alpha\beta} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Phi}{r} \right). \quad (12.101)$$

Tällöin ensimmäinen ja kolmas tasapainoyhtälö toteutuvat ilman muuta, ja toisesta tasapainoehdosta seuraa

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \left(\Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \right) = 0, \quad (12.102)$$

jonka ratkaisu on homogeenisen pyörähdyskuoren ratkaisu kalvotilassa.

Pyörähdyskuoren kuormitus on pyörähdysymmetrinen, jos

$$f_\beta = 0. \quad (12.103)$$

Tällöin

$$N_{\alpha\beta} = 0, \quad (12.104)$$

ja saadaan tasapainon differentiaaliyhtälöt

$$\frac{d}{dz}(rN_\alpha) - \frac{dr}{dz}N_\beta + r\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} f_\alpha = 0, \quad (12.105)$$

$$-\frac{r \frac{d^2 r}{dz^2}}{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} N_\alpha + N_\beta - r \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} f_n = 0. \quad (12.106)$$

Ratkaisemalla toisesta yhtälöstä N_β , sijoittamalla se ensimmäiseen yhtälöön ja jakamalla lausekkeella $\sqrt{1 + (dr/dz)^2}$ tulee

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}} \frac{d}{dz} (r N_\alpha) - \frac{r \frac{d^2 r}{dz^2}}{\left(1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} N_\alpha = r \left(\frac{dr}{dz} f_n - f_\alpha \right) \quad (12.107)$$

eli

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{r}{\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}} N_\alpha \right) = r \left(\frac{dr}{dz} f_n - f_\alpha \right), \quad (12.108)$$

josta ratkaistaan

$$N_\alpha = \frac{1}{r} \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} \left[C + \int_{z_0}^z r \left(\frac{dr}{dz} f_n - f_\alpha \right) dz \right], \quad (12.109)$$

ja

$$N_\beta = \frac{r \frac{d^2 r}{dz^2}}{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} N_\alpha + r \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} f_n, \quad (12.110)$$

missä C on vakio.

Pyörähdyskuoren meridiaanin yhtälö voidaan ilmaista myös kaavalla

$$r = r(\alpha) \quad (12.111)$$

missä α on kuvassa 12.8 määritelty kulma. Pääkaarevuussäteet ovat

$$R_1 = R_\alpha, \quad (12.112)$$

$$R_2 = R_\beta = \frac{r}{\sin \alpha}. \quad (12.113)$$

Koska

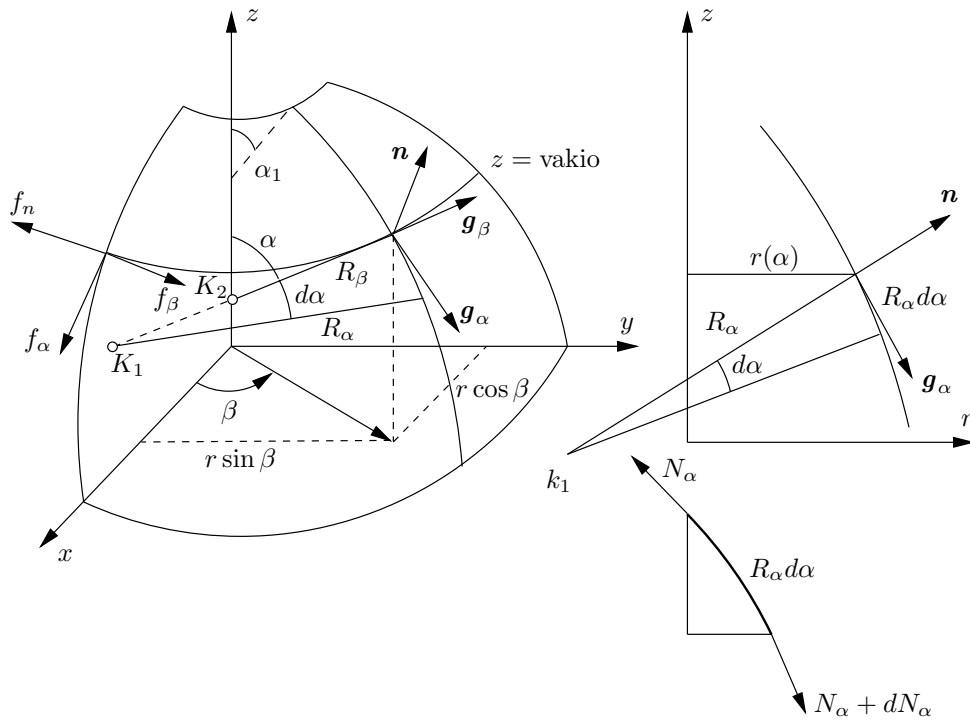
$$ds_\alpha = A d\alpha = R_\alpha d\alpha \quad (12.114)$$

ja

$$ds_\beta = B d\beta = r d\beta, \quad (12.115)$$

niin

$$A = R_\alpha, \quad B = r. \quad (12.116)$$



Kuva 12.8 Pyörähdysskuoren geometria parametrin α avulla.

Ehdosta

$$dr = R_\alpha d\alpha \cos \alpha \quad (12.117)$$

seuraa

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{dB}{d\alpha} = R_\alpha \cos \alpha. \quad (12.118)$$

Tasapainoyhtälöt kirjoitetaan nyt muodossa

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (R_\beta \sin \alpha N_\alpha) - R_\alpha \cos \alpha N_\beta + R_\alpha \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + R_\alpha R_\beta \sin \alpha f_\alpha = 0, \quad (12.119)$$

$$R_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{R_\beta \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} (R_\beta^2 \sin^2 \alpha N_{\alpha\beta}) + R_\alpha R_\beta \sin \alpha f_\beta = 0, \quad (12.120)$$

$$\frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} - f_n = 0. \quad (12.121)$$

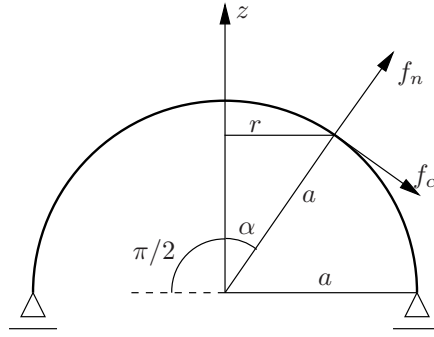
Pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa kuormakomponentti $f_\beta = 0$, ja kalvovoima $N_{\alpha\beta} = 0$. Tällöin tasapainoehdot yksinkertaistuvat muotoon

$$\frac{d}{d\alpha} (R_\beta \sin \alpha N_\alpha) - R_\alpha \cos \alpha N_\beta + R_\alpha R_\beta \sin \alpha f_\alpha = 0, \quad (12.122)$$

$$\frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} - f_n = 0. \quad (12.123)$$

Ratkaisemalla toisesta tasapainoyhtälöstä N_β , sijoittamalla se ensimmäiseen yhtälöön ja kertomalla tekijällä $\sin \alpha$ tulee

$$\sin \alpha \frac{d}{d\alpha} (r N_\alpha) + r \cos \alpha N_\alpha = R_\alpha r \cos \alpha f_n - f_\alpha R_\alpha r \sin \alpha \quad (12.124)$$



Kuva 12.9 Pallokuori.

eli

$$\frac{d}{d\alpha}(\sin \alpha r N_\alpha) = R_\alpha r \cos \alpha f_n - f_\alpha R_\alpha r \sin \alpha, \quad (12.125)$$

josta ratkaistaan

$$N_\alpha = \frac{1}{R_\beta \sin^2 \alpha} \left[C + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} R_\alpha R_\beta \sin \alpha (f_n \cos \alpha - f_\alpha \sin \alpha) d\alpha \right], \quad (12.126)$$

ja

$$N_\beta = R_\beta f_n - \frac{R_\beta}{R_\alpha} N_\alpha, \quad (12.127)$$

missä C on integroimisvakio.

Kalvovoima N_α voidaan määrittää myös tarkastelemalla äärellistä kuoren osaa. Merkitään leikkauksen $z = \text{vakio}$ yläpuolella olevan kuormituksen resultanttia Q_z :lla.

Pystysuora tasapainoehto on

$$Q_z + 2\pi r N_\alpha \sin \alpha = 0, \quad (12.128)$$

josta ratkaistaan

$$N_\alpha = -\frac{Q_z}{2\pi r \sin \alpha}. \quad (12.129)$$

Toinen kalvovoima on

$$N_\beta = R_\beta \left(f_n - \frac{N_\alpha}{R_\alpha} \right) \quad (12.130)$$

toisesta tasapainoyhtälöstä ratkaistuna.

Esimerkki 12.1 *Lasketaan pallokuoren kalvovoimat.*

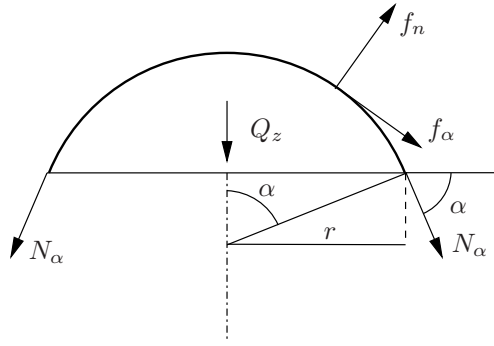
Pallokuoren geometriset parametrit ovat

$$R_\alpha = R_\beta = a, \quad A = a, \quad B = a \sin \alpha, \quad (12.131)$$

$$\cos \alpha = \frac{z}{a}, \quad \sin \alpha = \frac{r}{a}, \quad (12.132)$$

missä a on pallon säde.

Määritetään pallokuoren kalvovoimat, kun kuormituksena on kuoren oma paino ja lumikuorma.



Kuva 12.10 Pallokuoren pystysuora tasapainoehto.

a) *Kuormana oma paino g*

Kuoren normaalin n ja koordinaatin α suuntaiset kuorman komponentit ovat oman painon tapauksessa

$$f_n = -g \cos \alpha, \quad f_\alpha = g \sin \alpha. \quad (12.133)$$

Pystykuorman resultantti on ¹

$$Q_z = 2\pi a(a-z)g = 2\pi a^2 g(1 - \cos \alpha), \quad (12.134)$$

ja kalvovoimiksi saadaan

$$N_\alpha = -\frac{Q_z}{2\pi r \sin \alpha} = -\frac{a(1 - \cos \alpha)g}{\sin^2 \alpha} = -\frac{ag}{1 + \cos \alpha}, \quad (12.135)$$

$$N_\beta = -\left(g \cos \alpha - \frac{g}{1 + \cos \alpha}\right)a = ag \frac{1 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}. \quad (12.136)$$

b) *Lumikuorma p*

Lumikuorman tapauksessa pystykuorman resultantti on (r -säteisellä kiekolla)

$$Q_z = \pi r^2 p. \quad (12.137)$$

Lumikuorman kuoren normaalin n ja koordinaatin α suuntaiset komponentit ovat

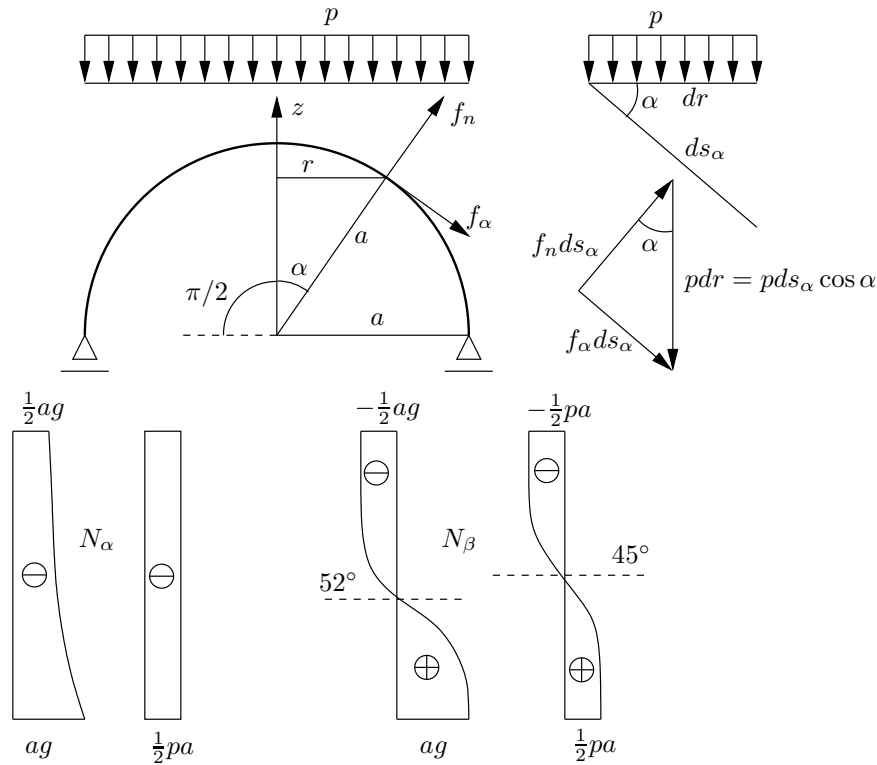
$$f_n = -p \cos^2 \alpha, \quad f_\alpha = p \sin \alpha \cos \alpha. \quad (12.138)$$

Kalvovoimiksi tulee

$$N_\alpha = -\frac{\pi r^2 p}{2\pi r \sin \alpha} = -\frac{pa}{2}, \quad (12.139)$$

$$N_\beta = -pa \cos^2 \alpha + \frac{1}{2}pa = -\frac{1}{2}pa \cos 2\alpha. \quad (12.140)$$

¹Pallokalotin pinta-ala on $S = 2\pi Rh$, missä R on pallon säde ja h on kalotin korkeus.



Kuva 12.11 Pallokuoren kalvovoimat tasaisesta kuormasta ja lumikuormasta.

12.4 Sylinteri- ja kartiokuoret

Sylinteripinnan määrittelee yhtälö

$$\mathbf{r} = \alpha \mathbf{i} + y(\beta) \mathbf{j} + z(\beta) \mathbf{k}. \quad (12.141)$$

Lamén parametrit A ja B ovat nyt

$$A = 1 \quad (12.142)$$

$$B = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}} = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2}, \quad (12.143)$$

ja

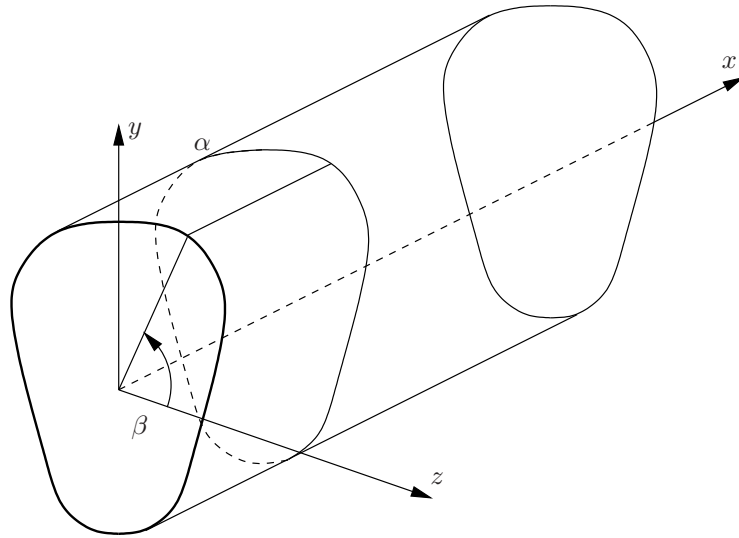
$$H = AB, \quad F = 0. \quad (12.144)$$

Pinnan toisen neliömuodon kertoimet ovat

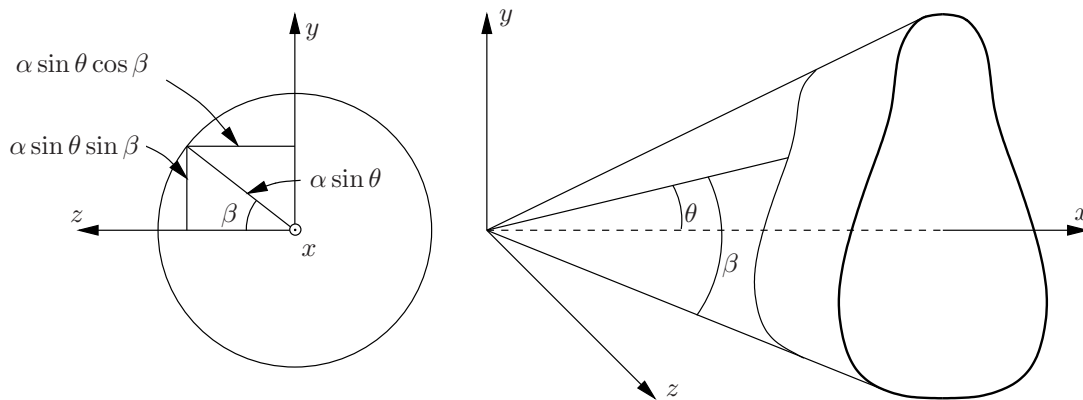
$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \beta^2} = \frac{1}{B} \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} - \frac{\partial z}{\partial \beta} \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} \right), \quad (12.145)$$

ja sylinteripinnan kaarevuudet ovat

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = 0, \quad k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{N}{B^2} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} - \frac{\partial z}{\partial \beta} \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2}}{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (12.146)$$



Kuva 12.12 Sylinterikuori.



Kuva 12.13 Kartiokuori.

Kartiopinta määritellään yhtälöllä

$$\mathbf{r} = \alpha \cos \theta \mathbf{i} + \alpha \sin \theta \sin \beta \mathbf{j} + \alpha \sin \theta \cos \beta \mathbf{k}, \quad (12.147)$$

missä

$$\theta = \theta(\beta) \quad (12.148)$$

ja

$$\alpha^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \frac{y}{z} = \tan \beta. \quad (12.149)$$

Kartiokuoren tapauksessa

$$A = 1, \quad B = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}} = \alpha \sqrt{\sin^2 \theta + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta}\right)^2}, \quad F = 0, \quad H = AB, \quad (12.150)$$

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = -\frac{\alpha^2}{B} \left[\cos \theta \sin^2 \theta + 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta}\right)^2 \cos \theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} \sin \theta \right], \quad (12.151)$$

ja pääkaarevuudet ovat

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = 0, \quad (12.152)$$

$$k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{N}{B^2} = -\frac{\cos \theta \sin^2 \theta + 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta} \right)^2 \cos \theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} \sin \theta}{\alpha \left[\sin^2 \theta + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (12.153)$$

Tasapainoyhtälöiksi tapauksessa $R_1 = \infty$ tulee kaavoista (12.77), (12.78) ja (12.79)

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BN_\alpha) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}N_\beta + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + Bf_\alpha = 0, \quad (12.154)$$

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(B^2 N_{\alpha\beta}) + Bf_\beta = 0, \quad (12.155)$$

$$\frac{N_\beta}{R_\beta} - f_n = 0. \quad (12.156)$$

Tasapainoyhtälöiden ratkaisu on

$$N_\beta = R_\beta f_n, \quad (12.157)$$

$$N_{\alpha\beta} = \frac{1}{B^2} f_1(\beta) - \frac{1}{B^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha} B \left[\frac{\partial(R_\beta f_n)}{\partial \beta} + Bf_\beta \right] d\alpha \quad (12.158)$$

$$\begin{aligned} N_\alpha = & -\frac{1}{B} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{f_1(\beta)}{B^2} \right] d\alpha + \frac{f_2(\beta)}{B} + \frac{1}{B} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} R_\beta f_n - Bf_\alpha \right) d\alpha \\ & + \frac{1}{B} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{1}{B^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha} B \left[\frac{\partial(R_\beta f_n)}{\partial \beta} + Bf_\beta \right] d\alpha \right\} d\alpha, \end{aligned} \quad (12.159)$$

missä f_1 ja f_2 ovat integroimisvakioita (riippuvat kuitenkin koordinaatista β) ja α_1 on vakio.

Esimerkki 12.2 Määritetään nesteellä täytetyn putken kalvovoimat.

Tarkastellaan päistään $x = 0$ ja $x = L$ tuettua putkea, jonka säde on a . Putki on täytetty nesteellä, jonka ominaispaino on γ . Nestekuorman (hydrostaattisen paineen) komponentit ovat

$$f_\alpha = 0, \quad f_\beta = 0, \quad (12.160)$$

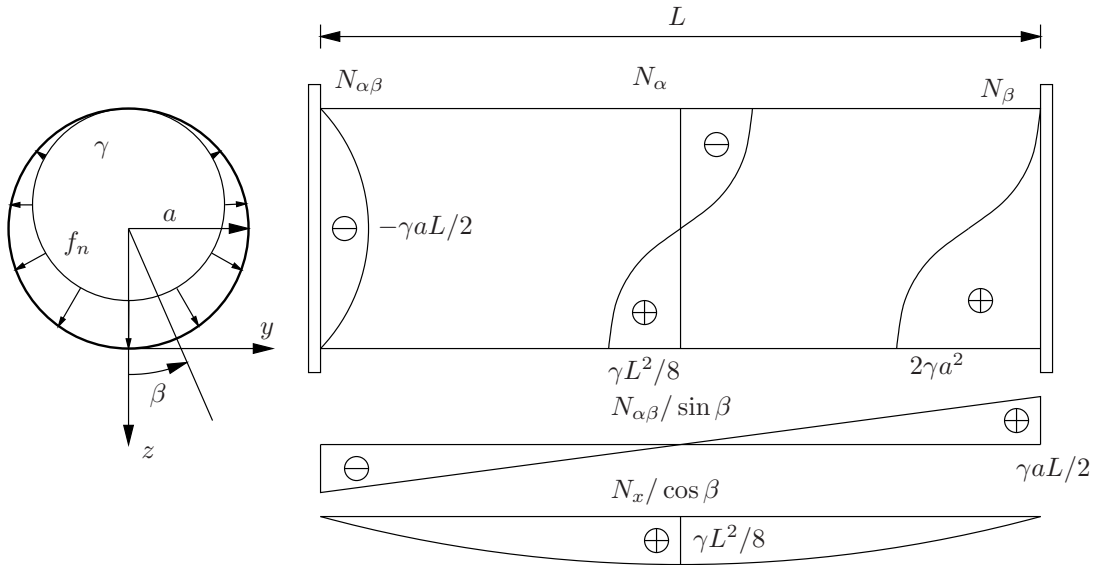
$$f_n = \gamma a(1 + \cos \beta). \quad (12.161)$$

Suorakulmaisten ja käyräviivaisten koordinaattien väliset yhteydet ovat

$$x = \alpha, \quad y = a \sin \beta, \quad z = -a(1 - \cos \beta). \quad (12.162)$$

Lamén parametrit sylinterille ovat

$$A = 1, \quad B = \sqrt{(a \cos \beta)^2 + (-a \sin \beta)^2} = a. \quad (12.163)$$



Kuva 12.14 Nestesäiliö.

Tasapainoyhtälöiden ratkaisu on nyt

$$N_\beta = \gamma a^2(1 + \cos \beta), \quad (12.164)$$

$$N_{\alpha\beta} = \gamma a x \sin \beta + \frac{1}{a} f_1(\beta), \quad (12.165)$$

$$N_x = -\frac{\gamma x^2}{2} \cos \beta - \frac{x}{a^2} \frac{df_1(\beta)}{d\beta} + \frac{1}{a} f_2(\beta). \quad (12.166)$$

Reunaehtojen perusteella saadaan

$$N_x(0, \beta) = N_x(L, \beta) = 0, \quad (12.167)$$

joten

$$f_2(\beta) = 0 \quad \text{jä} \quad -\frac{\gamma L^2}{2} \cos \beta - \frac{L}{a^2} \frac{df_1(\beta)}{d\beta} = 0. \quad (12.168)$$

Jälkimmäisestä yhtälöstä tulee integroimalla

$$f_1(\beta) = -\frac{\gamma L a^2}{2} \sin \beta + C_1. \quad (12.169)$$

Koska ratkaisun on oltava symmetrinen tason $\beta = 0$ suhteen, on vakion C_1 oltava nolla, ja

$$N_\beta = \gamma a^2(1 + \cos \beta), \quad (12.170)$$

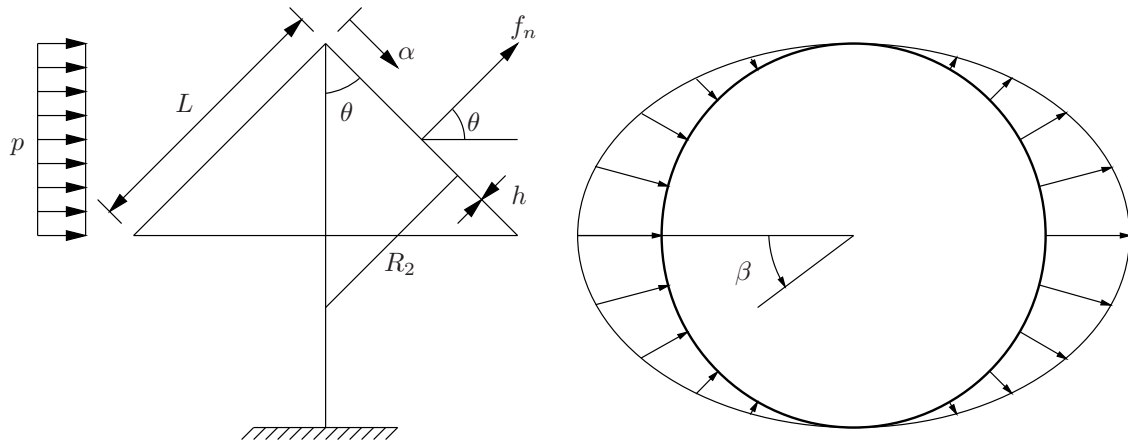
$$N_{\alpha\beta} = -\gamma a \left(\frac{L}{2} - x \right) \sin \beta, \quad (12.171)$$

$$N_x = \frac{\gamma x}{2} (L - x) \cos \beta. \quad (12.172)$$

Esimerkki 12.3 Määritetään kartiokuoren kalvovoimat tuulen paineesta.

Kartiokuorelle

$$R_1 = \infty, \quad R_2 \equiv R = \alpha \tan \theta, \quad (12.173)$$



Kuva 12.15 Tuulikuorma kartiokuorella.

$$A = 1, \quad B = \alpha \sin \theta. \quad (12.174)$$

Tuulikuorman komponentit ovat

$$f_\alpha = f_\beta = 0, \quad f_n = -p \cos \theta \cos \beta. \quad (12.175)$$

Tasapainoyhtälöistä seuraa

$$N_\beta = R f_n = -p \alpha \sin \theta \cos \beta, \quad (12.176)$$

$$N_{\alpha\beta} = \frac{p}{\alpha^2} \int_L^\alpha \alpha \frac{\partial}{\partial \beta} (\alpha \cos \beta) d\alpha = \frac{p}{3} \frac{L^3 - \alpha^3}{\alpha^2} \sin \beta, \quad (12.177)$$

$$\begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{p \sin \theta}{\alpha} \int_L^\alpha \alpha \cos \beta d\alpha - \frac{p \cos \beta}{\alpha \sin \theta} \int_L^\alpha \left[\frac{1}{\alpha^2} \int_L^\alpha \alpha^2 d\alpha \right] d\alpha \\ &= \frac{p}{\sin \theta} \left[\frac{L^3 - \alpha^3}{3\alpha^2} - \frac{L^2 - \alpha^2}{2\alpha} \cos^2 \theta \right] \cos \beta. \end{aligned} \quad (12.178)$$

Kun $\alpha = L$, niin

$$N_\alpha = N_{\alpha\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1(\beta) = f_2(\beta) = 0. \quad (12.179)$$

Kun

$$\alpha \rightarrow 0, \quad N_\alpha, N_{\alpha\beta} \rightarrow \infty. \quad (12.180)$$

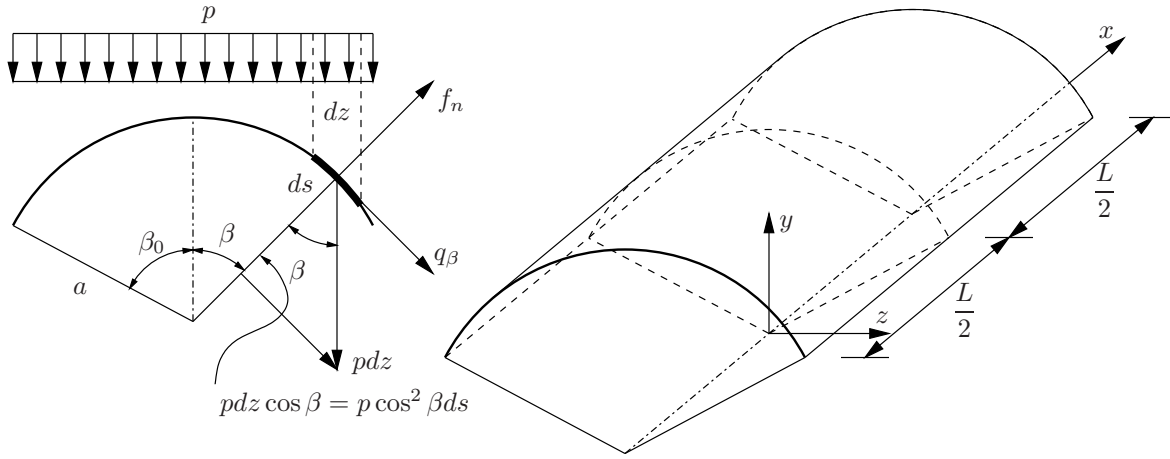
Esimerkki 12.4 Lieriökuorikatolla on lumikuorma p . Määritetään kalvovoimat ja verrataan tuloksia pakkiteorian ratkaisuun.

Lieriökuorikatton lumikuorman komponentit ovat

$$f_x = 0, \quad f_\beta = p \cos \beta \sin \beta, \quad f_n = -p \cos^2 \beta. \quad (12.181)$$

Tarkastellaan kuoren kalvotilan ratkaisua, ja verrataan sitä myöhemmin palkkiteorian antamaan tulokseen. Lieriökuoren kalvotilan tasapainoyhtälöt ovat

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{\beta x}}{\partial \beta} + f_x = 0, \quad (12.182)$$



Kuva 12.16 Lumikuorma lieriökatolla.

$$\frac{\partial N_{x\beta}}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + f_\beta = 0, \quad (12.183)$$

$$\frac{1}{a} N_\beta - f_n = 0, \quad (12.184)$$

$$N_{x\beta} - N_{\beta x} = 0, \quad (12.185)$$

missä a on sylinterin säde. Yhtälöt saadaan yleisistä kalvotilan tasapainoehdoista sijoittamalla niihin sylinterikuoren geometriset parametrit $R_\alpha = \infty$, $R_\beta = a$, $A = 1$, $B = a$, $x = \alpha$.

Integroimalla tasapainoyhtälöt koordinaatin x (tai α) suhteen tulee

$$N_\beta = a f_n, \quad (12.186)$$

$$N_{x\beta} = - \int \left(f_\beta + \frac{1}{a} \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} \right) dx + f_1(\beta), \quad (12.187)$$

$$N_x = - \int \left(f_x + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{x\beta}}{\partial \beta} \right) dx + f_2(\beta). \quad (12.188)$$

Jos N_x ja $N_{x\beta}$ tunnetaan viivalla $x = \text{vakio}$, niin funktiot f_1 ja f_2 voidaan määrittää. Kalvotilan voimia vastaavat siirtymät lieriökuorelle määritetään Hooken lain kautta integroimalla muodonmuutosten ja siirtymien välisistä yhtälöistä. Tällöin saadaan ensin

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_\beta), \quad (12.189)$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{a} = \frac{1}{Eh} (N_\beta - \nu N_x), \quad (12.190)$$

$$\gamma_{x\beta} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} N_{x\beta}, \quad (12.191)$$

missä u on x :n suuntainen siirtymä, v on β :n suuntainen siirtymä, w on kuoren normaalin suuntainen siirtymä ja h on kuoren seinämän paksuus. Jos paksuus h on vakio, niin saadaan integroimalla

$$Ehu = \int (N_x - \nu N_\beta) dx + f_3(\beta), \quad (12.192)$$

$$Ehv = 2(1 + \nu) \int N_{x\beta} dx - \frac{Eh}{a} \int \frac{\partial u}{\partial \beta} dx + f_4(\beta), \quad (12.193)$$

$$Ehw = a(N_\beta - \nu N_x) - Eh \frac{\partial v}{\partial \beta}. \quad (12.194)$$

Lumikuorman tapauksessa tasapainoyhtälöistä seuraa

$$N_\beta = -pa \cos^2 \beta, \quad (12.195)$$

$$\begin{aligned} N_{x\beta} &= - \int p(\cos \beta \sin \beta + 2 \cos \beta \sin \beta) dx + f_1(\beta) \\ &= -3px \cos \beta \sin \beta + f_1(\beta), \end{aligned} \quad (12.196)$$

$$\begin{aligned} N_x &= - \int \frac{3px}{a} (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) dx + f_2(\beta) \\ &= \frac{3px^2}{2a} \cos 2\beta + f_2(\beta). \end{aligned} \quad (12.197)$$

Kuori ajatellaan tuetuksi tasossaan jäykkiin päätylevyihin, joiden normaalien suunnassa siirtymät voivat tapahtua vapaasti. Tällöin saadaan reunaehto

$$N_x \left(\pm \frac{L}{2}, \beta \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_2(\beta) = -\frac{3pL^2}{8a} \cos 2\beta. \quad (12.198)$$

Symmetrian perusteella

$$N_{x\beta}(0, \beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1(\beta) = 0. \quad (12.199)$$

Kalvovoimat ovat siten

$$N_\beta = -pa \cos^2 \beta, \quad (12.200)$$

$$N_{x\beta} = -\frac{3px}{2} \sin 2\beta, \quad (12.201)$$

$$N_x = -\frac{3p}{2a} \cos 2\beta \left[\left(\frac{L}{2} \right)^2 - x^2 \right]. \quad (12.202)$$

Kalvovoima N_β häviää kuoren pituussuuntaisilla reunoilla $\beta = \beta_0$ vain, jos $\beta_0 = \pi/2$. Myös kalvovoima $N_{x\beta}$ häviää kyseisillä reunoilla tässä tapauksessa. Kuoren kalvotila toteutuu, jos kuoren reunoille syntyvät kalvovoimien suuruiset tukireaktiot, esim. reunapalkin tai siteiden avulla. Kalvotilan edellytyksiä ei saada aikaan täsmällisesti. Lieriökattojen analysoinnissa on lähes aina käytettävä taivutusteoriaa, ts. taivutusmomentit on otettava huomioon.

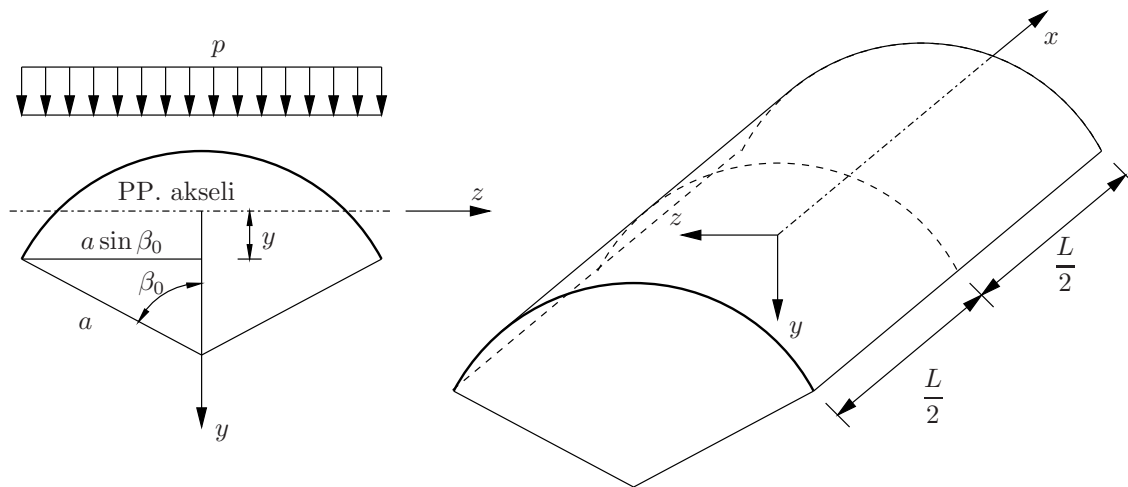
Pitkiä lieriökattoja ($L/a > 5$) voidaan analysoida likimääräisesti palkkeina. Palkkiteorian mukaan

$$N_x = \frac{Mh}{I} y, \quad (12.203)$$

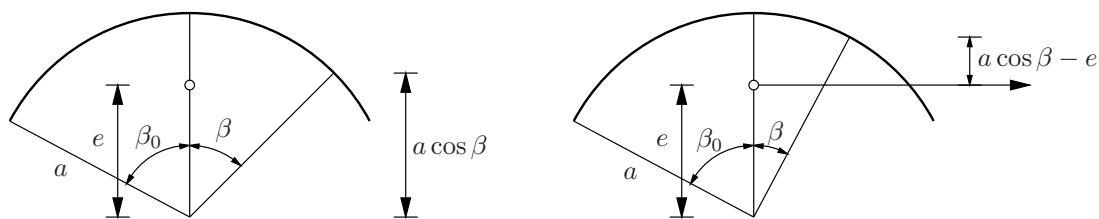
$$N_{x\beta} = \frac{QS}{2I}, \quad (12.204)$$

missä

$$M = pa \sin \beta_0 \left[\left(\frac{L}{2} \right)^2 - x^2 \right], \quad (12.205)$$



Kuva 12.17 Lieriökaton analysointi palkkina.



Kuva 12.18 Lieriöpalkin poikkileikkauksen parametreja.

$$Q = -2pax \sin \beta_0 \quad (12.206)$$

ovat vapaasti tuetun palkin taivutusmomentti ja leikkausvoima,

$$I = ha^3 \left[\beta_0 + \sin \beta_0 \left(\cos \beta_0 - \frac{2 \sin \beta_0}{\beta_0} \right) \right], \quad (12.207)$$

$$S = 2ha^2 \left(\sin \beta - \frac{\beta \sin \beta_0}{\beta_0} \right) \quad (12.208)$$

ovat palkin poikkileikkauksen jäyhyysmomentti ja staattinen momentti ja y on painopisteakselilta laskettu etäisyys.

Painopisteakselin etäisyys e ympyrän keskipisteestä ratkaistaan yhtälöstä

$$e2\beta_0ah = 2 \int_0^{\beta_0} a \cos \beta ah d\beta = 2ha^2 \sin \beta_0, \quad (12.209)$$

josta seuraa

$$e = \frac{a \sin \beta_0}{\beta_0}. \quad (12.210)$$

Staattinen momentti S on

$$S = -2 \int_0^{\beta} (e - a \cos \beta) ah d\beta = 2ha^2 \left(\sin \beta - \frac{\beta \sin \beta_0}{\beta_0} \right). \quad (12.211)$$

Jäyhyysmomentiksi tulee

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \int_0^{\beta_0} (a \cos \beta - e)^2 ah d\beta \\
 &= 2 \int_0^{\beta_0} [ha^3 \frac{1}{2} (1 + \cos 2\beta) - 2ha^2 e \cos \beta + hae^2] d\beta \\
 &= 2ha^3 \left(\frac{\beta_0}{2} + \frac{\sin 2\beta_0}{2} - \frac{2 \sin^2 \beta_0}{\beta_0} + \frac{\sin^2 \beta_0}{\beta_0} \right) \\
 &= ha^3 \left[\beta_0 + \sin \beta_0 \left(\cos \beta_0 - \frac{2 \sin \beta_0}{\beta_0} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{12.212}$$

Kalvovoimiksi saadaan

$$N_x = \frac{Mhy}{I} = \frac{pa \sin \beta_0 h (e - a \cos \beta)}{ha^3 \left[\beta_0 + \sin \beta_0 \left(\cos \beta_0 - \frac{2 \sin \beta_0}{\beta_0} \right) \right]} \left(\frac{L^2}{4} - x^2 \right) \tag{12.213}$$

tai

$$N_x = \frac{p}{a} \frac{\sin \beta_0}{\beta_0 + \sin \beta_0 \left(\cos \beta_0 - \frac{2 \sin \beta_0}{\beta_0} \right)} \left(\frac{\sin \beta_0}{\beta_0} - \cos \beta \right) \left(\frac{L^2}{4} - x^2 \right) \tag{12.214}$$

ja

$$N_{x\beta} = \frac{QS}{2I} = \frac{-2pa \sin \beta_0 2ha^2 \left(\sin \beta - \frac{\beta \sin \beta_0}{\beta_0} \right)}{2ha^3 \left[\beta_0 + \sin \beta_0 \left(\cos \beta_0 - \frac{2 \sin \beta_0}{\beta_0} \right) \right]} x \tag{12.215}$$

eli

$$N_{x\beta} = p \left(\frac{\beta \sin \beta_0}{\beta_0} - \sin \beta \right) \frac{2 \sin \beta_0}{\beta_0 + \sin \beta_0 \left(\cos \beta_0 - \frac{2 \sin \beta_0}{\beta_0} \right)} x. \tag{12.216}$$

Vertaillaan kalvo- ja palkkiteorian tuloksia, kun $\beta_0 = \pi/2$.

Sylinterikuoren kalvoteoria

$$\frac{N_x(0, \beta)}{pL^2} = -\frac{3}{8} \cos 2\beta, \tag{12.217}$$

$$\frac{N_{x\beta} \left(\frac{L}{2}, \beta \right)}{pL} = -\frac{3}{4} \sin 2\beta. \tag{12.218}$$

Palkkiteoria

$$\frac{N_x(0, \beta)}{pL^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi}} \left(\frac{2}{\pi} - \cos \beta \right) \approx 0.8402 \left(\frac{2}{\pi} - \cos \beta \right), \tag{12.219}$$

$$\frac{N_{x\beta} \left(\frac{L}{2}, \beta \right)}{pL} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}} \left(\frac{2}{\pi} \beta - \sin \beta \right) \approx 3.3607 \left(\frac{2}{\pi} \beta - \sin \beta \right). \tag{12.220}$$

Taulukko 12.1 Kalvovoima $\frac{N_x}{pL^2/a}$.

β °	kalvoteoria	palkkiteoria
0	-0.375	-0.305
15	0.325	-0.277
30	-0.188	-0.193
45	0	-0.059
60	0.188	0.115
75	0.325	0.317
90	0.375	0.535

Taulukko 12.2 Kalvovoima $\frac{N_{x\beta}}{pL}$.

β °	kalvo	palkki
0	0	0
15	-0.375	-0.310
30	-0.650	-0.560
45	-0.750	-0.696
60	-0.650	-0.670
75	-0.375	-0.446
90	0	0

12.5 Pyörähdyskuoren siirtymät kalvotilassa

Koordinaattiviivan α suuntaiselle muodonmuutokselle johdetaan kuvan (12.20) perusteella kaava

$$\varepsilon_\alpha = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{R_\alpha \Delta\alpha} + \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{(R_\alpha + w)\Delta\alpha - R_\alpha \Delta\alpha}{R_\alpha \Delta\alpha} \quad (12.221)$$

eli

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{R_\alpha} \frac{du}{d\alpha} + \frac{w}{R_\alpha}, \quad (12.222)$$

missä u on α :n suuntainen siirtymä ja w on kuoren normaalin suuntainen siirtymä. Koordinaattiviivan β suuntainen muodonmuutos on

$$\varepsilon_\beta = \lim_{\Delta\beta \rightarrow 0} \frac{(r + u \cos \alpha + w \sin \alpha)\Delta\beta - r\Delta\beta}{r\Delta\beta} \quad (12.223)$$

eli

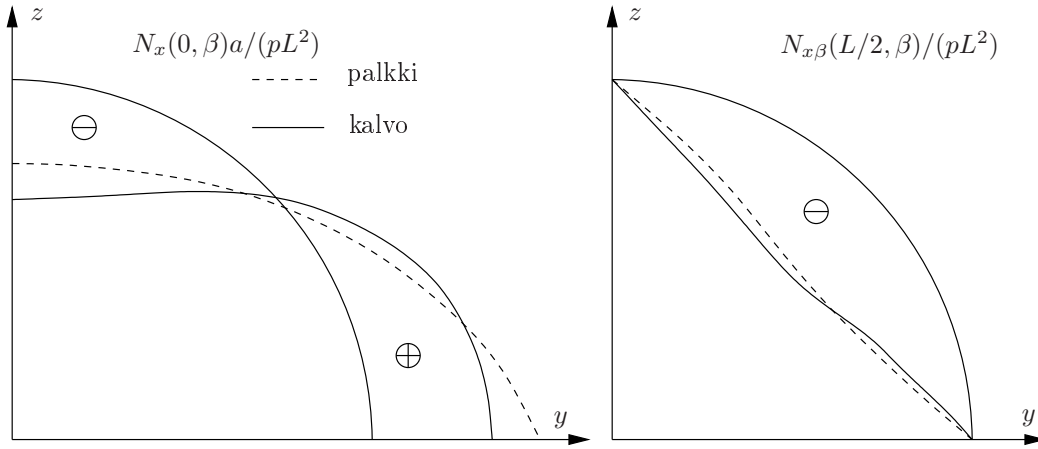
$$\varepsilon_\beta = \frac{u \cos \alpha + w \sin \alpha}{r}. \quad (12.224)$$

Koska

$$r = R_\beta \sin \alpha, \quad (12.225)$$

saadaan jälkimmäinen muodonmuutoskaava muotoon

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{R_\beta} (u \cot \alpha + w). \quad (12.226)$$



Kuva 12.19 Lieriökaton kalvoteorian ja palkkiteorian mukaiset ratkaisut.

Eliminoimalla siirtymä w tulee

$$\frac{du}{d\alpha} - u \cot \alpha = R_\alpha \varepsilon_\alpha - R_\beta \varepsilon_\beta \quad (12.227)$$

eli

$$\sin \alpha \frac{d\left(\frac{u}{\sin \alpha}\right)}{d\alpha} = R_\alpha \varepsilon_\alpha - R_\beta \varepsilon_\beta, \quad (12.228)$$

joka voidaan integroida muotoon

$$u = \sin \alpha \left[\int (R_\alpha \varepsilon_\alpha - R_\beta \varepsilon_\beta) \frac{1}{\sin \alpha} d\alpha + C \right], \quad (12.229)$$

missä oleva vakio C määritetään reunaehdosta. Normaalin suuntainen siirtymä on

$$w = -u \cot \alpha + R_\beta \varepsilon_\beta. \quad (12.230)$$

Kuoren reunan kiertymä on

$$\varphi = \frac{u}{R_\alpha} + \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta w}{R_\alpha \Delta\alpha} \right) \quad (12.231)$$

eli

$$\varphi = \frac{1}{R_\alpha} \left(u - \frac{dw}{d\alpha} \right) = -\cot \alpha (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) - \frac{R_\beta}{R_\alpha} \frac{d\varepsilon_\beta}{d\alpha}. \quad (12.232)$$

Esimerkki 12.5 Määritetään pallokuoren siirtymät omasta painosta.

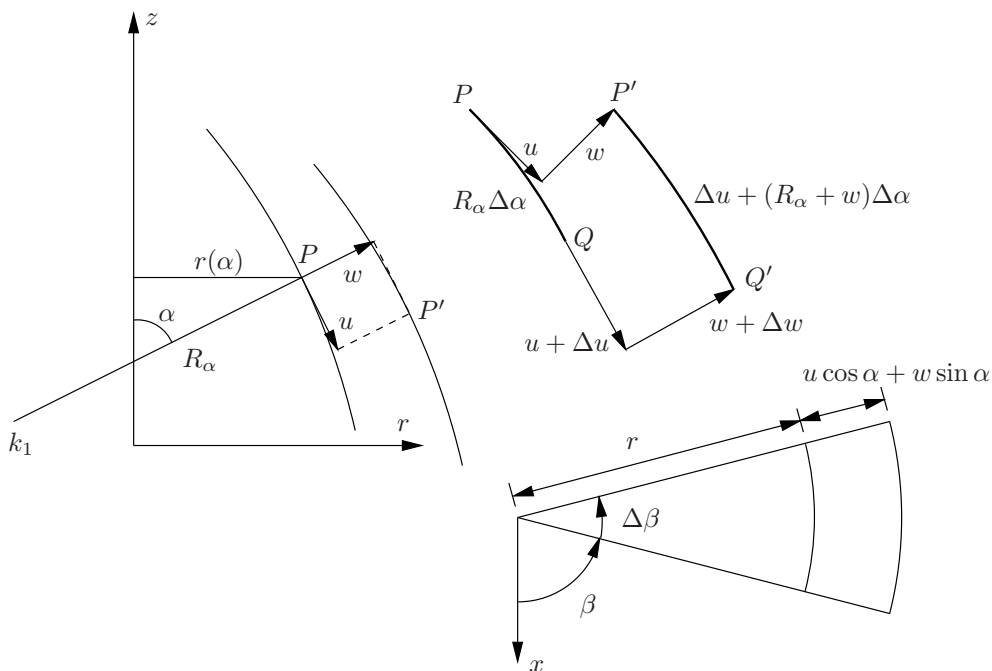
Tehtävän kalvovoimat on ratkaistu aikaisemmin. Yleistetyn Hooken lain avulla saadaan muodonmuutokset

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E} (\sigma_\alpha - \nu \sigma_\beta), \quad (12.233)$$

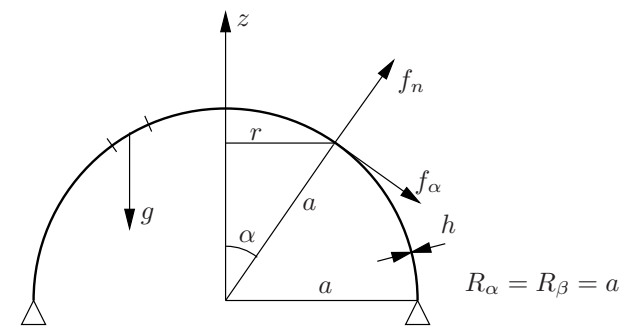
$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_\alpha + \sigma_\beta). \quad (12.234)$$

Sijoittamalla edellä johdettuun siirtymän u differentiaaliyhtälöön (12.227) muodonmuutokset jännitysten avulla lausuttuina tulee

$$\frac{du}{d\alpha} - u \cot \alpha = \frac{1}{E} [\sigma_\alpha (R_\alpha + \nu R_\beta) - \sigma_\beta (R_\beta + \nu R_\alpha)]. \quad (12.235)$$



Kuva 12.20 Pyörähdykskuoren kalvotilan siirtymät.



Kuva 12.21 Oman painon kuormittama pallokuori.

Sijoittamalla tähän aiemmin määritetyt

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{h}, \quad \sigma_\beta = \frac{N_\beta}{h} \quad (12.236)$$

saadaan

$$\frac{du}{d\alpha} - u \cot \alpha = \frac{a^2 g (1 + \nu)}{E} \left(\cos \alpha - \frac{2}{1 + \cos \alpha} \right) \equiv f(\alpha), \quad (12.237)$$

josta integroidaan

$$u = \left[\int \frac{f(\alpha)}{\sin \alpha} d\alpha + C \right] \sin \alpha \quad (12.238)$$

eli

$$u = \frac{a^2 g (1 + \nu)}{Eh} \left[\sin \alpha \ln(1 + \cos \alpha) - \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \right] + C \sin \alpha. \quad (12.239)$$

Reunaehdosta $u(\alpha_0) = 0$ seuraa

$$C = \frac{a^2 g(1 + \nu)}{Eh} \left[\frac{1}{1 + \cos \alpha_0} - \ln(1 + \cos \alpha_0) \right]. \quad (12.240)$$

Kun $\alpha_0 = \pi/2$, niin integroimisvakio on

$$C = \frac{a^2 g(1 + \nu)}{Eh}. \quad (12.241)$$

Luku 13

Yleinen kuoriteoria

Ohuen kuoren $\left(\frac{R_{\min}}{h} > 20\right)$ yhtälöt johti ensimmäisenä H. Aron. A. Love esitti vuonna 1888 kuoren tasapaino- ja liikeyhtälöiden tarkan johdon.

Yleisessä kuoriteoriassa ei jännitysten otaksuta jakautuvan tasaisesti kuoren paksuuden suunnassa kuten kalvoteoriassa. Ortogonaalisessa (α, β) -koordinaatistossa määritellään leikkauksessa $\beta = \text{vakio}$ jännitysresultantit

$$N_{\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\beta} \left(1 + \frac{\zeta}{R_{\alpha}}\right) d\zeta, \quad (13.1)$$

$$N_{\beta\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\beta\alpha} \left(1 + \frac{\zeta}{R_{\alpha}}\right) d\zeta, \quad (13.2)$$

$$M_{\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\beta} \left(1 + \frac{\zeta}{R_{\alpha}}\right) \zeta d\zeta, \quad (13.3)$$

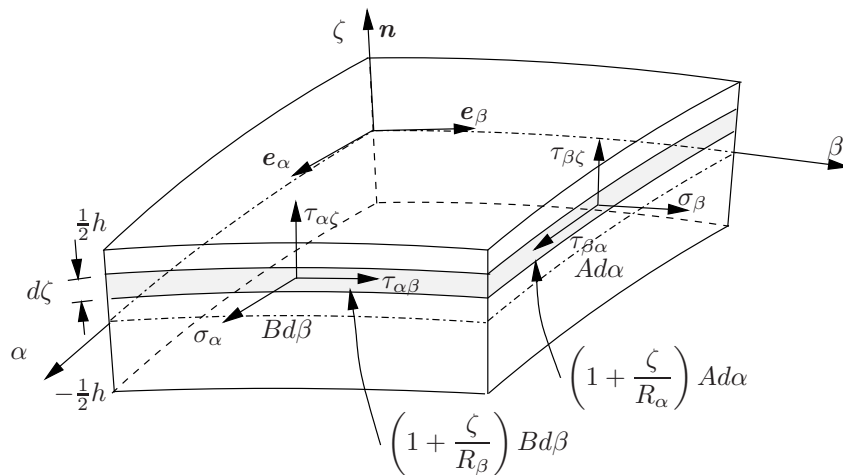
$$M_{\beta\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\beta\alpha} \left(1 + \frac{\zeta}{R_{\alpha}}\right) \zeta d\zeta, \quad (13.4)$$

$$Q_{\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\beta\zeta} \left(1 + \frac{\zeta}{R_{\alpha}}\right) d\zeta. \quad (13.5)$$

Leikkauksessa $\alpha = \text{vakio}$ määritellään vastaavasti resultantit

$$N_{\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha} \left(1 + \frac{\zeta}{R_{\beta}}\right) d\zeta, \quad (13.6)$$

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{\zeta}{R_{\beta}}\right) d\zeta, \quad (13.7)$$



Kuva 13.1 Kuorialkion jännityskomponentit.

$$M_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \left(1 + \frac{\zeta}{R_\beta}\right) \zeta d\zeta, \quad (13.8)$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{\zeta}{R_\beta}\right) \zeta d\zeta, \quad (13.9)$$

$$Q_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\zeta} \left(1 + \frac{\zeta}{R_\beta}\right) d\zeta. \quad (13.10)$$

Yleisessä tapauksessa

$$N_{\alpha\beta} \neq N_{\beta\alpha}, \quad M_{\alpha\beta} \neq M_{\beta\alpha}, \quad (13.11)$$

koska

$$R_\alpha \neq R_\beta. \quad (13.12)$$

Ohuen kuoren tapauksessa voidaan termit $\frac{\zeta}{R_\alpha}$ ja $\frac{\zeta}{R_\beta}$ jättää huomioonottamatta ykkösen rinnalla ja asettaa

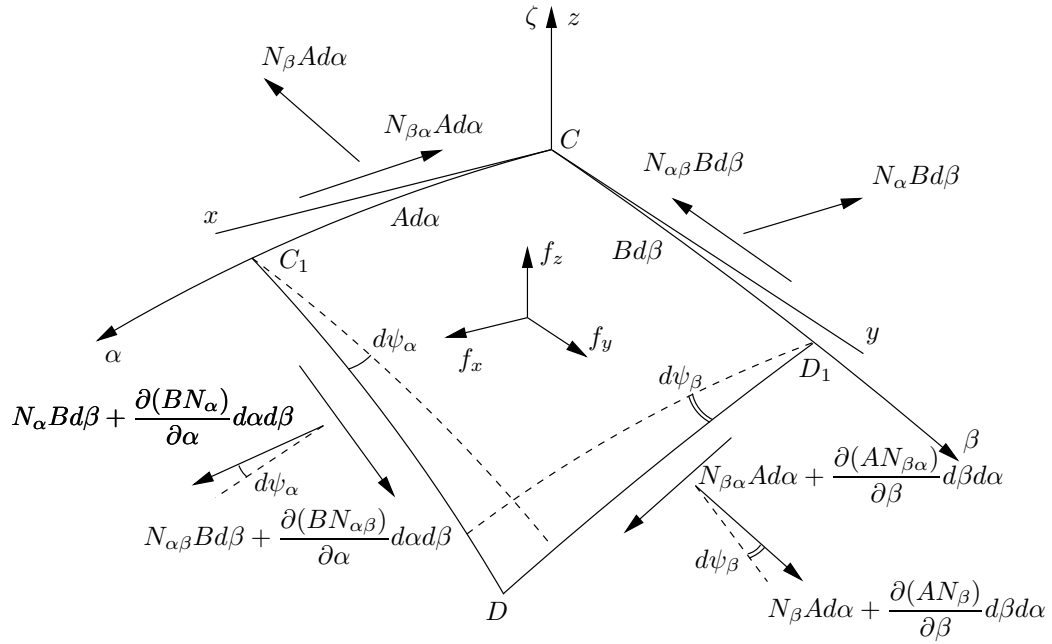
$$N_{\alpha\beta} \approx N_{\beta\alpha}, \quad M_{\alpha\beta} \approx M_{\beta\alpha}. \quad (13.13)$$

13.1 Tasapainoyhtälöt

Johdetaan tasapainoyhtälöt tarkastelemalla differentiaalista kuorialkiota $ABd\alpha d\beta$. Kalvotearian tasapainoyhtälöt täydennetään leikkausvoimien Q_α ja Q_β osuuksilla pisteeseen C perustetun koordinaatiston akseleiden x , y ja z suunnissa. Nämä osuudet ovat kuvan 13.3 perusteella

$$F_x = Q_\alpha \frac{AB}{R_\alpha} d\alpha d\beta, \quad (13.14)$$

$$F_y = Q_\beta \frac{AB}{R_\beta} d\alpha d\beta, \quad (13.15)$$



Kuva 13.2 Jännitysresultantit.

$$F_z = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (BQ_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AQ_\beta) \right] d\alpha d\beta. \quad (13.16)$$

Kalvovoimien täydennetyt tasapainoehdot ovat

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_\alpha) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_\beta + \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{\alpha\beta} + \frac{AB}{R_\alpha} Q_\alpha + AB f_\alpha = 0, \quad (13.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (AN_\beta) - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_{\alpha\beta}) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{\beta\alpha} + \frac{AB}{R_\beta} Q_\beta + AB f_\beta = 0, \quad (13.18)$$

$$-\frac{AB}{R_\alpha} N_\alpha - \frac{AB}{R_\beta} N_\beta + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BQ_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AQ_\beta) + AB f_n = 0. \quad (13.19)$$

Momenteille saadaan kolme tasapainoehtoa

$$\sum M_y = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_z = 0. \quad (13.20)$$

Momenttien tasapainoehdot johdetaan kuvan 13.4 perusteella samaan tapaan kuin kalvovoimien tasapainoehdot aiemmin. Tällöin saadaan

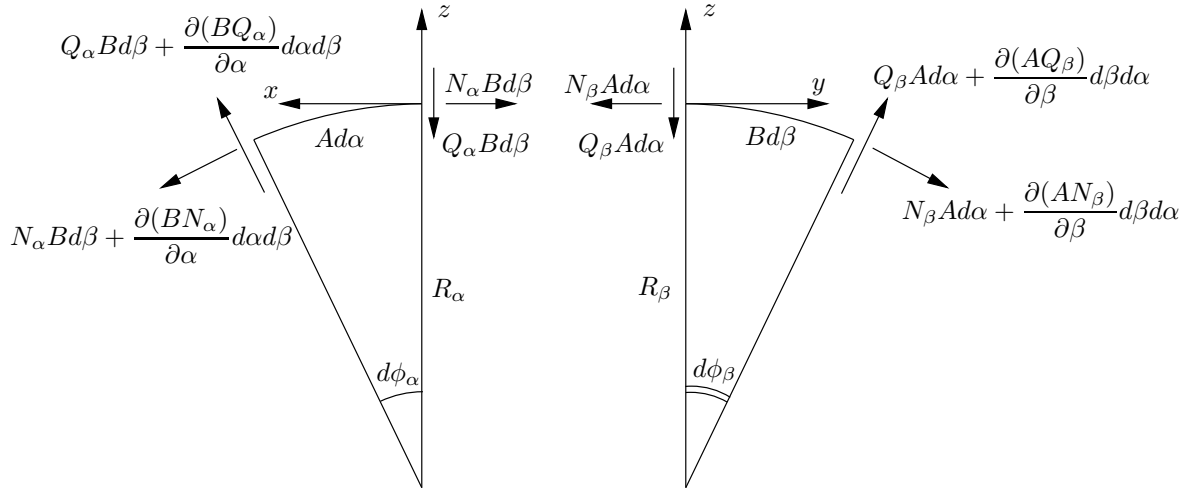
$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BM_\alpha) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta + \frac{\partial}{\partial \beta} (AM_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{\alpha\beta} - ABQ_\alpha = 0, \quad (13.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (AM_\beta) - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BM_{\alpha\beta}) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{\beta\alpha} - ABQ_\beta = 0, \quad (13.22)$$

$$N_{\alpha\beta} - N_{\beta\alpha} + \frac{M_{\alpha\beta}}{R_\alpha} - \frac{M_{\beta\alpha}}{R_\beta} = 0, \quad (13.23)$$

missä viimeinen yhtälö toteutuu identtisesti, koska

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}. \quad (13.24)$$



Kuva 13.3 Leikkausvoimien osuudet tasapainoehtoihin.

Eliminoimalla leikkausvoimat momenttien tasapainoehdoista saadaan kolme tasapainoyhtälöä

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BN_\alpha) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}N_\beta + \frac{\partial}{\partial \beta}(AN_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A}{\partial \beta}N_{\alpha\beta} \quad (13.25)$$

$$+ \frac{1}{R_\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_\alpha) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}M_\beta + \frac{\partial}{\partial \beta}(AM_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A}{\partial \beta}M_{\alpha\beta} \right] + ABf_\alpha = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(AN_\beta) - \frac{\partial A}{\partial \beta}N_\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha}(BN_{\alpha\beta}) + \frac{\partial B}{\partial \alpha}N_{\beta\alpha} \quad (13.26)$$

$$+ \frac{1}{R_\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \beta}(AM_\beta) - \frac{\partial A}{\partial \beta}M_\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_{\alpha\beta}) + \frac{\partial B}{\partial \alpha}M_{\beta\alpha} \right] + ABf_\beta = 0,$$

$$- \frac{N_\alpha}{R_\alpha} - \frac{N_\beta}{R_\beta}$$

$$+ \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_\alpha) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}M_\beta + \frac{\partial}{\partial \beta}(AM_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A}{\partial \beta}M_{\alpha\beta} \right] \right\} \quad (13.27)$$

$$+ \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{1}{B} \left[\frac{\partial}{\partial \beta}(AM_\beta) - \frac{\partial A}{\partial \beta}M_\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_{\alpha\beta}) + \frac{\partial B}{\partial \alpha}M_{\beta\alpha} \right] \right\} + f_n = 0.$$

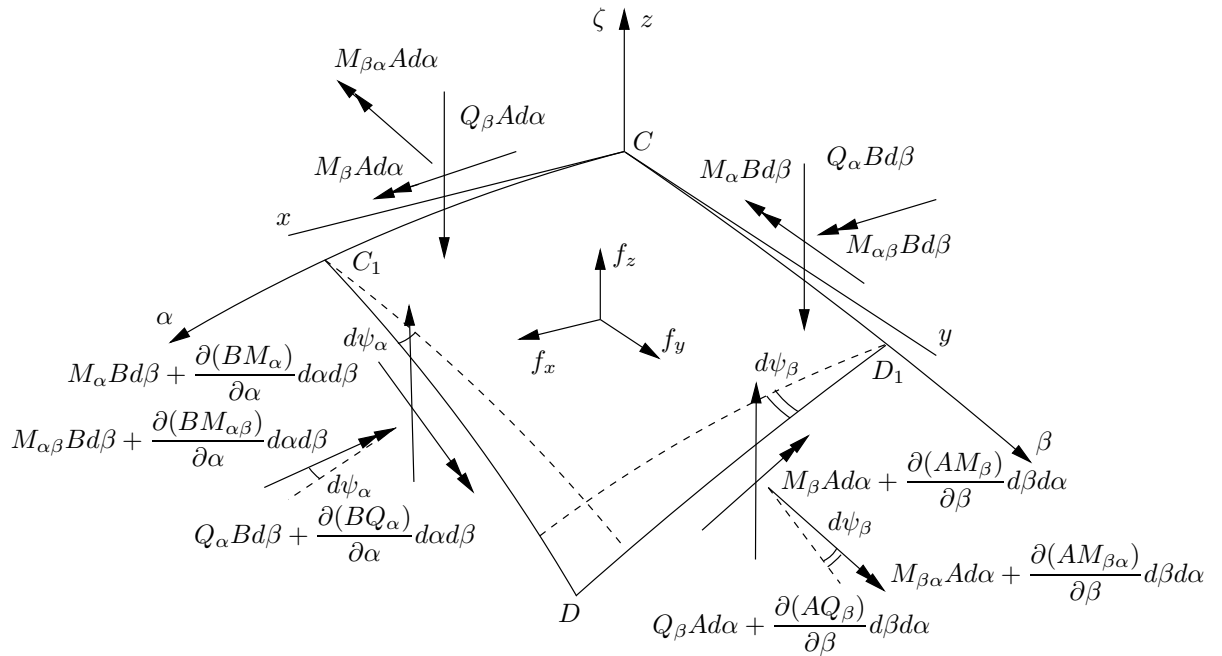
Siinä tapauksessa, että voidaan asettaa

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}, \quad M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}, \quad (13.28)$$

saadaan tasapainoehdot muotoon

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BN_\alpha) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}N_\beta + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}(A^2N_{\alpha\beta}) \quad (13.29)$$

$$+ \frac{1}{R_\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_\alpha) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}(A^2M_{\alpha\beta}) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}M_\beta \right] + ABf_\alpha = 0,$$



Kuva 13.4 Kuorialkion taivutusmomentit, vääntömomentit ja leikkausvoimat.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \beta}(AN_\beta) - \frac{\partial A}{\partial \beta}N_\alpha + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(B^2N_{\alpha\beta}) \\ & + \frac{1}{R_\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \beta}(AM_\beta) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(B^2M_{\alpha\beta}) - \frac{\partial A}{\partial \beta}M_\alpha \right] + ABf_\beta = 0, \end{aligned} \quad (13.30)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{N_\alpha}{R_\alpha} - \frac{N_\beta}{R_\beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_\alpha) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}(A^2M_{\alpha\beta}) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}M_\beta \right] \right\} \\ & + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{1}{B} \left[\frac{\partial}{\partial \beta}(AM_\beta) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(B^2M_{\alpha\beta}) - \frac{\partial A}{\partial \beta}M_\alpha \right] \right\} + f_n = 0. \end{aligned} \quad (13.31)$$

Yleinen kuoritehtävä on staattisesti määräämätön, ja sen ratkaisemiseksi on tutkittava kuoren muodonmuutoksia.

13.2 Kuoren muodonmuutokset

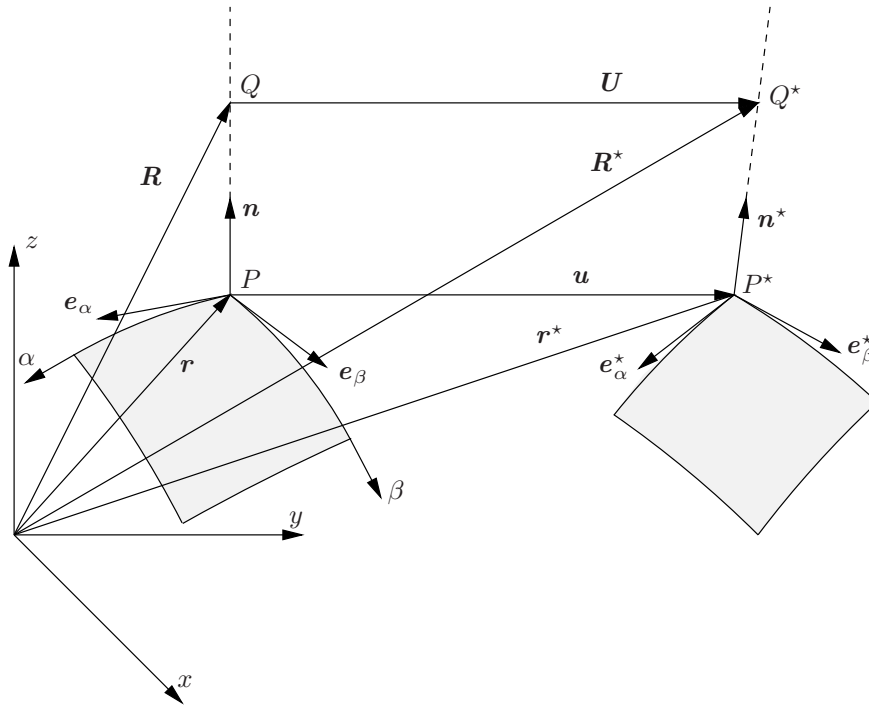
Koordinaattiviivoiksi α ja β valitaan kaarevuusviivat. Kuoren keskipinnan pisteessä P määritellään yksikkötangenttivektorit

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}, \quad (13.32)$$

$$\mathbf{e}_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}. \quad (13.33)$$

Kaarialkion neliö kuoren keskipinnalla on

$$ds^2 = A^2(d\alpha)^2 + B^2(d\beta)^2, \quad (13.34)$$



Kuva 13.5 Kuoren siirtymät.

missä A ja B ovat Lamén parametrit. Kuoren keskipinnan yksikkönormaalivektori on

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta. \quad (13.35)$$

Yksikkötangenttivektoreiden \mathbf{e}_α , \mathbf{e}_β ja normaalivektorin \mathbf{n} derivaatat koordinaatin α suhteen ovat

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \alpha} = -\frac{d\psi_\alpha}{d\alpha} \mathbf{e}_\beta - \frac{d\phi_\alpha}{d\alpha} \mathbf{n} = -\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \mathbf{e}_\beta - \frac{A}{R_\alpha} \mathbf{n}, \quad (13.36)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial \alpha} = \frac{d\psi_\alpha}{d\alpha} \mathbf{e}_\alpha = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \mathbf{e}_\alpha \quad (13.37)$$

ja

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} = \frac{d\phi_\alpha}{d\alpha} \mathbf{e}_\alpha = \frac{A}{R_\alpha} \mathbf{e}_\alpha. \quad (13.38)$$

Samalla tavalla muodostetaan kantavektoreiden derivaatat koordinaatin β suhteen.

Koottuna tangenttivektoreiden ja normaalivektorin derivaatat koordinaattien α ja β suhteen ovat

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\alpha \\ \mathbf{e}_\beta \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} & -\frac{A}{R_\alpha} \\ \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} & 0 & 0 \\ \frac{A}{R_\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\alpha \\ \mathbf{e}_\beta \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}, \quad (13.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\alpha \\ \mathbf{e}_\beta \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} & 0 \\ -\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} & 0 & -\frac{B}{R_\beta} \\ 0 & \frac{B}{R_\beta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\alpha \\ \mathbf{e}_\beta \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}. \quad (13.40)$$

Soveltamalla näitä kaavoja sekä yhteyttä

$$\frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \beta \partial \alpha} \quad (13.41)$$

johdetaan Codazzin kaavat

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{R_\alpha} \right) = \frac{1}{R_\alpha} \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \quad (13.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_\beta} \right) = \frac{1}{R_\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad (13.43)$$

ja kaavan

$$\frac{\partial^2 \mathbf{e}_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{e}_\alpha}{\partial \beta \partial \alpha}, \quad (13.44)$$

tai vaihtoehtoisesti kaavan

$$\frac{\partial^2 \mathbf{e}_\beta}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{e}_\beta}{\partial \beta \partial \alpha} \quad (13.45)$$

avulla johdetaan vastaavalla tavalla Gaussin yhtälö

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) + \frac{AB}{R_\alpha R_\beta} = 0. \quad (13.46)$$

Alkutilassa (deformoitumattomassa tilassa) kuoren mielivaltaisen pisteen Q paikkavektori on \mathbf{R} ja vastaavan keskipinnan pisteen P paikkavektori on \mathbf{r} . Pisteen Q siirtymävektori olkoon \mathbf{U} , ja pisteen P siirtymävektori on vastaavasti \mathbf{u} , missä

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_\alpha + v\mathbf{e}_\beta + w\mathbf{n}, \quad (13.47)$$

$$\mathbf{U} = U\mathbf{e}_\alpha + V\mathbf{e}_\beta + W\mathbf{n}. \quad (13.48)$$

Ohuen kuoren teoriassa tehdään otaksumat:

1. Venymä keskipinnan normaalin suunnassa on nolla eli $|PQ| = |P^*Q^*|$.
2. Deformoitumattoman tilan keskipinnan normaalilla sijainneet pisteet ovat myös deformatuneen keskipinnan normaalilla, eli P^*Q^* on kohtisuorassa deformatunutta keskipintaa vastaan.

Otaksumien 1 ja 2 nojalla saadaan kuvan 13.5 avulla yhteys

$$\zeta \mathbf{n} + \mathbf{U} = \zeta \mathbf{n}^* + \mathbf{u} \quad (13.49)$$

eli

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + (\mathbf{n}^* - \mathbf{n})\zeta, \quad (13.50)$$

missä

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{e}_\alpha^* \times \mathbf{e}_\beta^* \quad (13.51)$$

on deformoituneen keskipinnan normaalivektori. Deformoituneen keskipinnan pisteen P^* paikkavektori on

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{u} = \mathbf{r} + u\mathbf{e}_\alpha + v\mathbf{e}_\beta + w\mathbf{n}. \quad (13.52)$$

Deformoituneen keskipinnan α -viivan tangenttivektori on

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\alpha^* &= \frac{1}{A^*} \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \alpha} \\ &= \frac{1}{A^*} \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha} (u\mathbf{e}_\alpha + v\mathbf{e}_\beta + w\mathbf{n}) \right], \end{aligned} \quad (13.53)$$

missä A^* on

$$A^* = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \alpha}}. \quad (13.54)$$

Soveltamalla tangenttivektoreiden ja normaalivektorin derivaattojen kaavoja saadaan

$$\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \alpha} \approx A \left(1 + \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_\alpha} \right) \mathbf{e}_\alpha + \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right) \mathbf{e}_\beta + \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{A}{R_\alpha} u \right) \mathbf{n} \quad (13.55)$$

ja

$$(A^*)^2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \alpha} \right|^2 \approx A^2 \left(1 + \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_\alpha} \right)^2 \quad (13.56)$$

eli

$$A^* \approx A(1 + \varepsilon_\alpha), \quad (13.57)$$

missä

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_\alpha}. \quad (13.58)$$

Sijoittamalla edellä saadut tulokset deformoituneen keskipinnan tangenttivektorin kaavaan (13.53) tulee

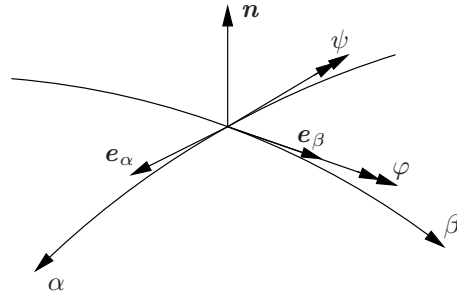
$$\mathbf{e}_\alpha^* = \frac{1}{A^*} \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \alpha} \approx \mathbf{e}_\alpha + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right) \mathbf{e}_\beta + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_\alpha} \right) \mathbf{n}. \quad (13.59)$$

Samalla tavalla kuin edellä α -viivan suunnassa johdetaan deformoituneen keskipinnan β -viivan tangenttivektori

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\beta^* &= \frac{1}{B^*} \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \beta} \\ &= \frac{1}{B^*} \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \beta} (u\mathbf{e}_\alpha + v\mathbf{e}_\beta + w\mathbf{n}) \right], \end{aligned} \quad (13.60)$$

missä B^* on

$$B^* = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \beta}}. \quad (13.61)$$



Kuva 13.6 Kuoren keskipinnan kiertymät.

Soveltamalla jälleen tangenttivektoreiden ja normaalivektorin derivaattojen kaavoja tulee

$$\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \beta} \approx \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right) \mathbf{e}_\alpha + B \left(1 + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_\beta} \right) \mathbf{e}_\beta + \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{B}{R_\beta} v \right) \mathbf{n} \quad (13.62)$$

ja

$$(B^*)^2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \beta} \right|^2 \approx B^2 \left(1 + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_\beta} \right)^2 \quad (13.63)$$

eli

$$B^* \approx B(1 + \varepsilon_\beta), \quad (13.64)$$

missä

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_\beta}. \quad (13.65)$$

Sijoittamalla edellä saadut tulokset deformatuneen keskipinnan tangenttivektorin kaavaan (13.60) tulee

$$\mathbf{e}_\beta^* = \frac{1}{B^*} \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \beta} \approx \mathbf{e}_\beta + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right) \mathbf{e}_\alpha + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_\beta} \right) \mathbf{n}. \quad (13.66)$$

Deformatuneen tilan keskipinnan tangenttivektoreiden avulla muodostetaan deformatuneen keskipinnan normaalivektori

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{e}_\alpha^* \times \mathbf{e}_\beta^* \quad (13.67)$$

$$\approx \mathbf{n} + \varphi \mathbf{e}_\alpha + \psi \mathbf{e}_\beta,$$

jossa

$$\varphi = -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_\alpha}, \quad (13.68)$$

$$\psi = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_\beta} \quad (13.69)$$

ovat normaalivektorin \mathbf{n} kiertymät tangenttivektoreiden \mathbf{e}_β ja \mathbf{e}_α ympäri

Kokoamalla tulokset saadaan kuoren mielivaltaisen pisteen siirtymävektori muotoon

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + \zeta(\varphi \mathbf{e}_\alpha + \psi \mathbf{e}_\beta), \quad (13.70)$$

ja siirtymävektorin komponentit ovat

$$U = u + \zeta\varphi, \quad (13.71)$$

$$V = v + \zeta\psi, \quad (13.72)$$

$$W = w. \quad (13.73)$$

Kuoren viiva-alkion ds_α suhteellinen pituudenmuutos eli venymä on

$$\begin{aligned} \frac{ds_\alpha^* - ds_\alpha}{ds_\alpha} &= \frac{A^*d\alpha - Ad\alpha}{Ad\alpha} \\ &= \frac{A^*}{A} - 1 \\ &\approx \frac{A(1 + \varepsilon_\alpha)}{A} - 1 \\ &= \varepsilon_\alpha, \end{aligned} \quad (13.74)$$

missä

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_\alpha} \quad (13.75)$$

on siis venymä α -viivan suunnassa. Samalla tavalla johdetaan venymälle β -viivan suunnassa kaava

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_\beta}. \quad (13.76)$$

Kuoren keskipinnan leikkausmuodonmuutos on

$$\omega \approx \mathbf{e}_\alpha^* \cdot \mathbf{e}_\beta^* \quad (13.77)$$

eli

$$\omega = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right). \quad (13.78)$$

Etäisyydellä ζ kuoren keskipinnalta saadaan yhteydet

$$R_\alpha^\zeta = R_\alpha + \zeta, \quad R_\beta^\zeta = R_\beta + \zeta, \quad (13.79)$$

$$ds_\alpha^\zeta = A \left(1 + \frac{\zeta}{R_\alpha} \right) d\alpha = A^\zeta d\alpha, \quad (13.80)$$

$$ds_\beta^\zeta = B \left(1 + \frac{\zeta}{R_\beta} \right) d\beta = B^\zeta d\beta \quad (13.81)$$

ja

$$\varepsilon_\alpha^\zeta = \frac{1}{A \left(1 + \frac{\zeta}{R_\alpha} \right)} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB \left(1 + \frac{\zeta}{R_\alpha} \right) \left(1 + \frac{\zeta}{R_\beta} \right)} \frac{\partial \left[A \left(1 + \frac{\zeta}{R_\alpha} \right) \right]}{\partial \beta} V + \frac{W}{R_\alpha + \zeta}. \quad (13.82)$$

Coddazzin ehdon

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_\beta} \right) = \frac{1}{R_\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta} \quad (13.83)$$

perusteella

$$\frac{\partial \left[A \left(1 + \frac{\zeta}{R_\alpha} \right) \right]}{\partial \beta} = \frac{\partial A}{\partial \beta} + \zeta \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_\alpha} \right) = \left(1 + \frac{\zeta}{R_\beta} \right) \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad (13.84)$$

joten venymän kaava yksinkertaistuu muotoon

$$\varepsilon_\alpha^\zeta = \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{R_\alpha}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} V + \frac{W}{R_\alpha} \right) \quad (13.85)$$

eli

$$\varepsilon_\alpha^\zeta = \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{R_\alpha}} (\varepsilon_\alpha + \zeta \kappa_\alpha), \quad (13.86)$$

jossa on määritelty

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \psi. \quad (13.87)$$

Samalla tavalla johdetaan

$$\varepsilon_\beta^\zeta = \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{R_\beta}} (\varepsilon_\beta + \zeta \kappa_\beta), \quad (13.88)$$

jossa on määritelty

$$\kappa_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varphi. \quad (13.89)$$

Leikkausmuodonmuutos keskipinnan suuntaisella pinnalla etäisyydellä ζ keskipinnalta on

$$\omega^\zeta = \frac{1}{\left(1 + \frac{\zeta}{R_\alpha} \right) \left(1 + \frac{\zeta}{R_\beta} \right)} \left\{ \left(1 + \frac{\zeta^2}{R_\alpha R_\beta} \right) \omega + 2 \left[1 + \left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} \right) \frac{\zeta}{2} \right] \zeta \kappa_{\alpha\beta} \right\}, \quad (13.90)$$

missä

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\psi}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\varphi}{A} \right) \right\}. \quad (13.91)$$

Ohuen kuoren tapauksessa

$$\frac{\zeta}{R_\alpha} \ll 1, \quad \frac{\zeta}{R_\beta} \ll 1, \quad (13.92)$$

ja tällöin muodonmuutoskomponenttien vektori saadaan muotoon

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_\alpha^\zeta \\ \varepsilon_\beta^\zeta \\ \omega^\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\beta \\ \omega \end{bmatrix} + \zeta \begin{bmatrix} \kappa_\alpha \\ \kappa_\beta \\ 2\kappa_{\alpha\beta} \end{bmatrix}, \quad (13.93)$$

missä

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_\alpha}, \quad (13.94)$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_\beta}, \quad (13.95)$$

$$\omega = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) \quad (13.96)$$

ja

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_\alpha} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(-\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_\beta} \right), \quad (13.97)$$

$$\kappa_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_\beta} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(-\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_\alpha} \right), \quad (13.98)$$

$$2\kappa_{\alpha\beta} = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{1}{B^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{BR_\beta} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{1}{A^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{AR_\alpha} \right) \quad (13.99)$$

13.3 Pyörähdyskuori

Pyörähdyskuoren meridiaanin yhtälö on

$$r = r(\alpha), \quad (13.100)$$

missä α on kuvassa 13.7 määritelty kulma. Pääkaarevuussäteet ovat

$$R_1 = R_\alpha, \quad (13.101)$$

$$R_2 = R_\beta = \frac{r}{\sin \alpha}. \quad (13.102)$$

Koska

$$ds_\alpha = A d\alpha = R_\alpha d\alpha \quad (13.103)$$

ja

$$ds_\beta = B d\beta = r d\beta, \quad (13.104)$$

niin Lamén parametrit ovat

$$A = R_\alpha, \quad B = r = R_\beta \sin \alpha. \quad (13.105)$$

Ehdosta

$$dr = R_\alpha d\alpha \cos \alpha \quad (13.106)$$

seuraa

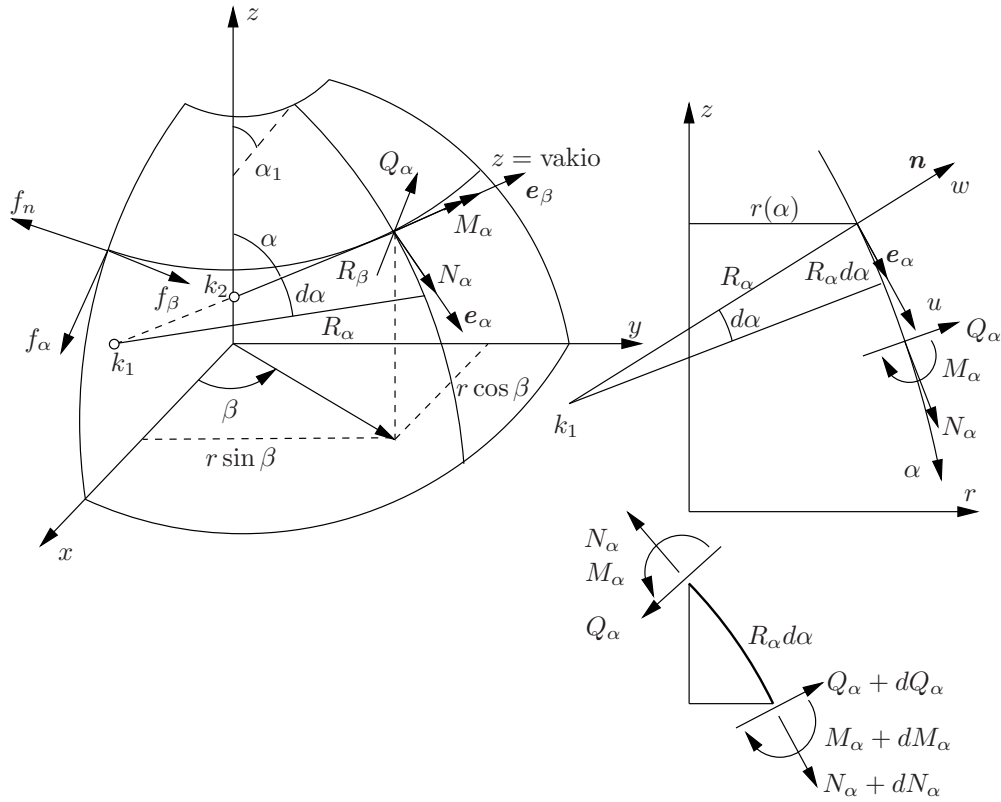
$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{dB}{d\alpha} = R_\alpha \cos \alpha. \quad (13.107)$$

Pyörähdysymmetrisen kuormituksen tapauksessa kuormakomponentti f_β on nolla, ja tällöin

$$N_{\alpha\beta} = Q_\beta = M_{\alpha\beta} = 0 \quad (13.108)$$

ja

$$v = \varepsilon_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta} = 0. \quad (13.109)$$



Kuva 13.7 Pyörähdyskuori.

Pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa tasapainoyhtälöt tulevat muotoon

$$\frac{d}{d\alpha}(R_\beta \sin \alpha N_\alpha) - R_\alpha \cos \alpha N_\beta + R_\beta \sin \alpha Q_\alpha + R_\alpha R_\beta \sin \alpha f_\alpha = 0, \quad (13.110)$$

$$\frac{d}{d\alpha}(R_\beta \sin \alpha Q_\alpha) - R_\beta \sin \alpha N_\alpha - R_\alpha \sin \alpha N_\beta + R_\alpha R_\beta \sin \alpha f_n = 0, \quad (13.111)$$

$$\frac{d}{d\alpha}(R_\beta \sin \alpha M_\alpha) - R_\alpha \cos \alpha M_\beta - R_\alpha R_\beta \sin \alpha Q_\alpha = 0. \quad (13.112)$$

Yleisen ortogonaalisessa koordinaatistossa kehitetyn kuoriteorian perusteella saadaan nyt pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa muodonmuutosten kaavat. Koordinaattiviivan α suuntainen muodonmuutos on

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{R_\alpha} \frac{du}{d\alpha} + \frac{w}{R_\alpha}, \quad (13.113)$$

missä u on α :n suuntainen siirtymä ja w on kuoren normaalin suuntainen siirtymä. Koordinaattiviivan β suuntainen muodonmuutos on

$$\begin{aligned} \varepsilon_\beta &= \frac{1}{R_\beta} (u \cot \alpha + w) \\ &= \frac{u \cos \alpha + w \sin \alpha}{r}. \end{aligned} \quad (13.114)$$

Kiertymä reunalla $\alpha = \text{vakio}$ (\mathbf{e}_β :n ympäri) on

$$\varphi = -\frac{1}{A} \frac{dw}{d\alpha} + \frac{u}{R_\alpha} = \frac{1}{R_\alpha} \left(u - \frac{dw}{d\alpha} \right). \quad (13.115)$$

Pyörähdyssymmetrisen tapauksen käyritymien kaavat ovat

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{R_\alpha} \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{1}{R_\alpha} \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{R_\alpha} \left(u - \frac{dw}{d\alpha} \right) \right], \quad (13.116)$$

$$\begin{aligned} \kappa_\beta &= \frac{1}{AB} \frac{dB}{d\alpha} \varphi = \frac{1}{R_\alpha R_\beta \sin \alpha} \frac{d(R_\beta \sin \alpha)}{d\alpha} \left[\frac{1}{R_\alpha} \left(u - \frac{dw}{d\alpha} \right) \right] \\ &= \frac{\cot \alpha}{R_\alpha R_\beta} \left(u - \frac{dw}{d\alpha} \right). \end{aligned} \quad (13.117)$$

Siirtymät u ja w määritetään muodonmuutosten avulla. Eliminoimalla siirtymä w tulee

$$\frac{du}{d\alpha} - u \cot \alpha = R_\alpha \varepsilon_\alpha - R_\beta \varepsilon_\beta \quad (13.118)$$

eli

$$\sin \alpha \frac{d\left(\frac{u}{\sin \alpha}\right)}{d\alpha} = R_\alpha \varepsilon_\alpha - R_\beta \varepsilon_\beta, \quad (13.119)$$

joka integroidaan muotoon

$$u = \sin \alpha \left[\int (R_\alpha \varepsilon_\alpha - R_\beta \varepsilon_\beta) \frac{1}{\sin \alpha} d\alpha + C \right], \quad (13.120)$$

missä oleva vakio C määritetään reunaehdosta. Normaalin suuntainen siirtymä on

$$w = -u \cot \alpha + R_\beta \varepsilon_\beta. \quad (13.121)$$

Kuoren reunan kiertymän lausekkeeksi tulee siirtymät eliminoimalla

$$\varphi = \frac{1}{R_\alpha} \left(u - \frac{dw}{d\alpha} \right) = -\cot \alpha (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) - \frac{R_\beta}{R_\alpha} \frac{d\varepsilon_\beta}{d\alpha}. \quad (13.122)$$

Kuoren reunan ($\alpha = \alpha_0$) pysty- ja vaakasiirtymät δ_v ja δ_h ovat

$$\delta_v = u \sin \alpha - w \cos \alpha = \frac{u}{\sin \alpha} - R_\beta \varepsilon_\beta \cos \alpha, \quad (13.123)$$

$$\delta_h = u \cos \alpha + w \sin \alpha = R_\beta \varepsilon_\beta \sin \alpha = r \varepsilon_\beta. \quad (13.124)$$

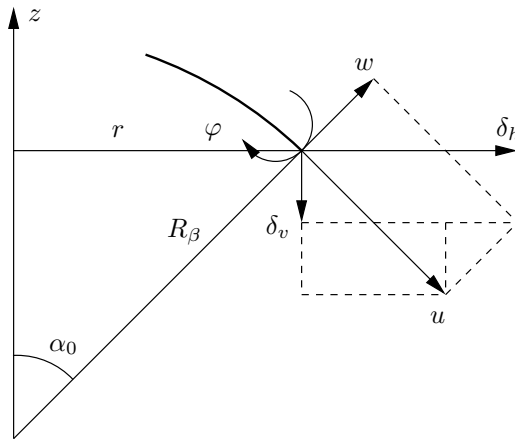
13.3.1 Reunaehdot

1. Siirtymä u on reunalla $\alpha = \alpha_0$ nolla. Tällöin

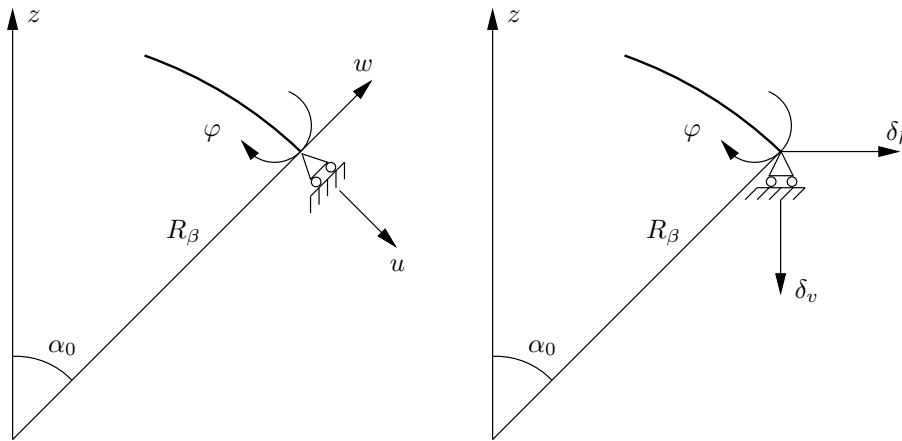
$$w = R_\beta \varepsilon_\beta \quad (13.125)$$

ja

$$\varphi = -\cot \alpha_0 (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) - \frac{R_\beta}{R_\alpha} \frac{d\varepsilon_\beta}{d\alpha}. \quad (13.126)$$



Kuva 13.8 Pyörähdyskuoren reunan siirtymät ja kiertymä.



Kuva 13.9 Pyörähdyskuoren reunan siirtymien reunaehdot.

2. Siirtymä δ_V on reunalla nolla. Tällöin

$$\delta_h = r\varepsilon_\beta \quad (13.127)$$

ja

$$\varphi = -\cot \alpha_0(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) - \frac{R_\beta}{R_\alpha} \frac{d\varepsilon_\beta}{d\alpha}. \quad (13.128)$$

Hooken lain mukaan

$$N_\alpha = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_\alpha + \nu\varepsilon_\beta), \quad (13.129)$$

$$N_\beta = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_\beta + \nu\varepsilon_\alpha) \quad (13.130)$$

ja

$$M_\alpha = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_\alpha + \nu\kappa_\beta), \quad (13.131)$$

$$M_\beta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_\beta + \nu\kappa_\alpha). \quad (13.132)$$

Kuoren taivutusjäykkyys on

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (13.133)$$

Yleistetystä Hookeen laista saadaan kääntämällä

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{Eh}(N_\alpha - \nu N_\beta), \quad (13.134)$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{Eh}(N_\beta - \nu N_\alpha), \quad (13.135)$$

ja kiertymän kaava voidaan tällöin panna muotoon

$$\varphi = -\cot \alpha_0 \frac{1 + \nu}{Eh}(N_\beta - N_\alpha) - \frac{R_\beta}{R_\alpha} \frac{1}{Eh} \frac{d}{d\alpha}(N_\beta - \nu N_\alpha). \quad (13.136)$$

Luku 14

Kuoren reunahäiriö

Joissakin tapauksissa kuoritehtävän ratkaisu saadaan riittävällä tarkkuudella superponoimalla kalvotilan ratkaisuun (yksityisratkaisu) reunahäiriön luonteinen taivutustilan likimääräinen ratkaisu. Menetelmä sopii tilanteisiin, joissa taivutustilan suuret vaimenevat nopeasti kuoren reunalta tai häiriöviivalta etäännyttäessä. Häiriöviivoja ovat esimerkiksi

- kuoren reunat,
- kuorman epäjatkuvuuskohdat,
- keskipinnan taitteet tai kaarevuuden jyrkät muutokset,
- kuoren jäykkyyden jyrkät muutokset.

Reunahäiriön ja kalvotilan superponointi sopii hyvin pyörähdyskuorille. Reunahäiriöllä (viivalla $\alpha = \text{vakio}$) on seuraavia ominaisuuksia:

1. Suuret muuttuvat jyrkästi koordinaatin α suunnassa. Esimerkiksi funktion

$$f(\alpha) = g(\alpha)e^{k\alpha} \quad (14.1)$$

derivaatta on

$$\frac{df}{d\alpha} = \left(\frac{dg}{d\alpha} + kg \right) e^{k\alpha} \approx kge^{k\alpha} = kf \gg f, \quad (14.2)$$

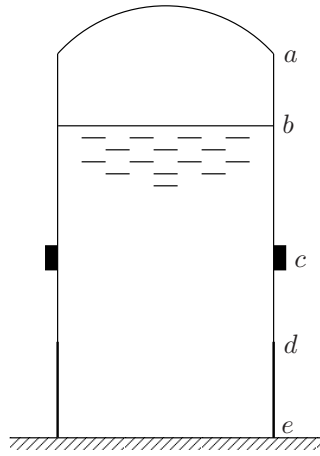
jos $k \gg 1$ ja funktio g muuttuu loivasti. Siten $f(\alpha)$ voidaan jättää derivaattansa rinnalla huomioonottamatta.

2. Kalvovoimille ovat voimassa arviot

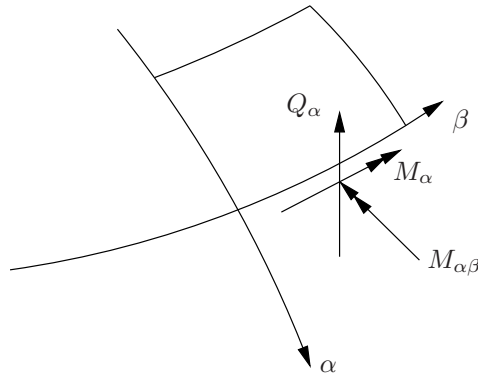
$$N_\beta \gg N_\alpha, \quad N_\beta \gg N_{\alpha\beta}, \quad (14.3)$$

ja N_β on samaa kertaluokkaa muiden kalvovoimien α -derivaattojen kanssa eli

$$N_\beta \sim \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} \sim \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} \sim \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial \alpha}. \quad (14.4)$$



Kuva 14.1 Kuoren häiriöviivoja.



Kuva 14.2 Voimasuureet viivalla $\alpha = \text{vakio}$.

3. Momenteille ja käyristymille ovat voimassa arviot

$$M_\beta \sim \nu M_\alpha, \quad (14.5)$$

$$\kappa_\beta \sim 0. \quad (14.6)$$

4. Leikkausvoimista Q_α on kertaluokkaa suurempi eli

$$\frac{\partial Q_\beta}{\partial \alpha} \sim Q_\alpha. \quad (14.7)$$

5. Muodonmuutos on pääasiassa taivutusta ja

$$\frac{\partial \kappa_\beta}{\partial \alpha} \sim \frac{\partial \kappa_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} \sim \kappa_\alpha. \quad (14.8)$$

6. Keskipinnan muodonmuutokset ovat pieniä, ja niille pätevät arviot

$$\varepsilon_\alpha \sim -\nu \varepsilon_\beta, \quad (14.9)$$

$$\varepsilon_\alpha \sim \varepsilon_\beta \sim \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial \alpha}, \quad (14.10)$$

eli liukuma on pieni venymään ε_β verrattuna.

7. Kalvosiirtymät ovat pieniä kuoren taipumaan verrattuna eli

$$w \sim \frac{\partial u}{\partial \alpha} \sim \frac{\partial v}{\partial \alpha}. \quad (14.11)$$

8. Suurimmat jännitykset aiheutuvat momentista M_α , kalvovoimasta N_α ja momentista M_β , ellei Poissonin vakio ν ole nolla ($M_\beta \sim \nu M_\alpha$).

Tarkastellaan tapausta, jossa häiriöviiva on käyrä $\alpha = \text{vakio}$. Olettamalla

$$N_\beta \gg N_\alpha, \quad N_\beta \gg N_{\alpha\beta} \quad \text{ja} \quad Q_\alpha \gg Q_\beta \quad (14.12)$$

kuoren normaalin suuntainen tasapainoehto

$$-\frac{AB}{R_\alpha} N_\alpha - \frac{AB}{R_\beta} N_\beta + \frac{\partial}{\partial \alpha}(BQ_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AQ_\beta) + ABf_n = 0 \quad (14.13)$$

yksinkertaistuu muotoon

$$-\frac{N_\beta}{R_\beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha}(BQ_\alpha) = 0. \quad (14.14)$$

Reunahäiriötehtävässä tarkastellaan homogeenisia tasapainoehtoja, eli asetetaan $f_\alpha = f_\beta = f_n = 0$. Kuormitus otetaan huomioon yksityisratkaisussa (kalvotilan ratkaisussa).

Otaksumien 3 perusteella

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_\alpha) \gg \frac{\partial}{\partial \beta}(AM_{\alpha\beta}), \quad (14.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_\alpha) \gg \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta, \quad (14.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_\alpha) \gg \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{\beta\alpha}, \quad (14.17)$$

ja momentin tasapainoehdosta kuoren tangenttitason paikallisen koordinaatiston y -akselin ympäri

$$\sum M_y = 0 \quad (14.18)$$

eli

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_\alpha) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta + \frac{\partial}{\partial \beta}(AM_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{\alpha\beta} - ABQ_\alpha = 0 \quad (14.19)$$

seuraa

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_\alpha) - ABQ_\alpha = 0. \quad (14.20)$$

Muodonmuutossuureet

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_\beta} \quad (14.21)$$

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_\alpha} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(-\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_\beta} \right) \quad (14.22)$$

yksinkertaistuvat reunahäiriötehtävässä muotoon

$$\varepsilon_\beta \approx \frac{w}{R_\beta}, \quad (14.23)$$

$$\kappa_\alpha \approx -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right). \quad (14.24)$$

Yleistetyn Hooken lain mukaan

$$N_\beta = C(\varepsilon_\beta + \nu\varepsilon_\alpha) \approx Eh\varepsilon_\beta, \quad (14.25)$$

$$M_\alpha = D(\kappa_\alpha + \nu\kappa_\beta) \approx D\kappa_\alpha, \quad (14.26)$$

missä

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad C = \frac{Eh}{1-\nu^2}. \quad (14.27)$$

Edellä olevissa yhtälöissä ovat tuntemattomina N_β , M_α , Q_α , κ_α , ε_β ja w . Eliminoimalla leikkausvoima Q_α päädytään tasapainoyhtälöön

$$\frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} (BM_\alpha) \right] - \frac{N_\beta}{R_\beta} = 0. \quad (14.28)$$

Lausumalla M_α ja N_β siirtymän w avulla tulee lopulta

$$\frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \right] \right\} + \frac{Eh}{DR_\beta^2} w = 0. \quad (14.29)$$

Reunahäiriön ominaisuuden 1 perusteella yhtälö (14.29) yksinkertaistuu muotoon

$$\frac{1}{A^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2 R_\beta^2} w = 0, \quad (14.30)$$

josta ratkaistaan kuoren taipuma. Jännitysresultantit ovat

$$M_\alpha = -\frac{D}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad M_\beta = \nu M_\alpha, \quad (14.31)$$

$$Q_\alpha = -\frac{D}{A^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3}, \quad (14.32)$$

$$N_\beta = \frac{Eh}{R_\beta} w. \quad (14.33)$$

Pyörähdyskuoren tapauksessa $A = R_\alpha$, ja tällöin tasapainoyhtälö saadaan muotoon

$$\left(\frac{R_\alpha}{R_\beta} \right)^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + \frac{12(1-\nu^2)R_\beta^2}{h^2} w = 0, \quad (14.34)$$

eli

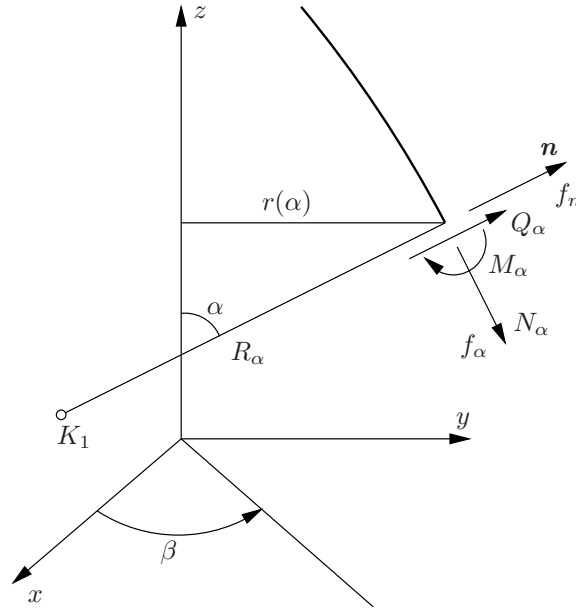
$$\left(\frac{R_\alpha}{R_\beta} \right)^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + 4K^4 w = 0, \quad (14.35)$$

missä

$$K = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R_\beta}{h}}. \quad (14.36)$$

Lausumalla taipuma muodossa

$$w \approx \frac{R_\beta}{Eh} N_\beta \quad (14.37)$$



Kuva 14.3 Pyörähdyskuori.

saadaan

$$M_\alpha \approx -\frac{DR_\beta}{EhR_\alpha^2} \frac{d^2 N_\beta}{d\alpha^2} \approx -\frac{DR_\beta^2}{EhR_\alpha^3} \frac{d^3 Q_\alpha}{d\alpha^3}. \quad (14.38)$$

Sijoittamalla momentin M_α kaava likimääräiseen yhtälöön

$$Q_\alpha \approx \frac{1}{R_\alpha} \frac{dM_\alpha}{d\alpha} \quad (14.39)$$

seuraa

$$\frac{1}{R_\alpha^4} \frac{d^4 Q_\alpha}{d\alpha^4} + 4 \left(\frac{K}{R_\beta} \right)^4 Q_\alpha = 0. \quad (14.40)$$

14.1 Pyörähdyskuoren reunahäiriö

Tarkastellaan reunahäiriötä uudelleen pyörähdyskuoren geometrian yhteydessä. Pyörähdyskuoren meridiaanin yhtälö on

$$r = r(\alpha). \quad (14.41)$$

Pyörähdyskuoren pääkaarevuussäteet ovat

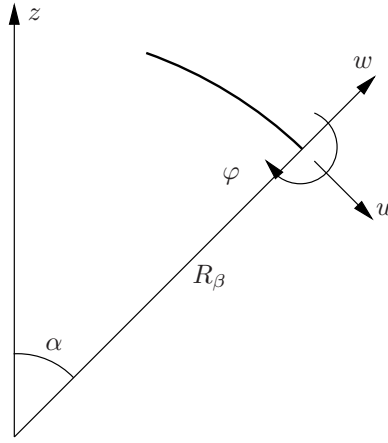
$$R_1 = R_\alpha, \quad (14.42)$$

$$R_2 = R_\beta = \frac{r}{\sin \alpha}. \quad (14.43)$$

Viiva-alkiot koordinaattiviivoja pitkin ovat

$$ds_\alpha = Ad\alpha = R_\alpha d\alpha, \quad (14.44)$$

$$ds_\beta = Bd\beta = rd\beta, \quad (14.45)$$



Kuva 14.4 Pyörähdyskuoren siirtymät ja kiertymä.

ja pyörähdyskuoren Lamén parametrit ovat

$$A = R_\alpha, \quad B = r = R_\beta \sin \alpha. \quad (14.46)$$

Ehdosta

$$dr = R_\alpha d\alpha \cos \alpha \quad (14.47)$$

seuraa

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{dB}{d\alpha} = R_\alpha \cos \alpha. \quad (14.48)$$

Pyörähdysymmetrisen kuormituksen tapauksessa kuormakomponentti f_β on nolla, ja tällöin

$$N_{\alpha\beta} = Q_\beta = M_{\alpha\beta} = 0 \quad (14.49)$$

ja

$$v = \varepsilon_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta} = 0. \quad (14.50)$$

Pyörähdysymmetrisessä kuormitustapauksessa tasapainoyhtälöt ovat

$$\frac{d}{d\alpha}(R_\beta \sin \alpha N_\alpha) - R_\alpha \cos \alpha N_\beta + R_\alpha \sin \alpha Q_\alpha + R_\alpha R_\beta \sin \alpha f_\alpha = 0, \quad (14.51)$$

$$\frac{d}{d\alpha}(R_\beta \sin \alpha Q_\alpha) - R_\beta \sin \alpha N_\alpha - R_\alpha \sin \alpha N_\beta + R_\alpha R_\beta \sin \alpha f_n = 0, \quad (14.52)$$

$$\frac{d}{d\alpha}(R_\beta \sin \alpha M_\alpha) - R_\alpha \cos \alpha M_\beta - R_\alpha R_\beta \sin \alpha Q_\alpha = 0. \quad (14.53)$$

Käyttämällä hyväksi edellä esitettyjä geometrisia yhteyksiä tasapainoehdot voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\frac{d}{d\alpha}(r N_\alpha) - R_\alpha \cos \alpha N_\beta + r Q_\alpha + R_\alpha r f_\alpha = 0, \quad (14.54)$$

$$\frac{d}{d\alpha}(r Q_\alpha) - r N_\alpha - R_\alpha \sin \alpha N_\beta + R_\alpha r f_n = 0, \quad (14.55)$$

$$\frac{d}{d\alpha}(r M_\alpha) - R_\alpha \cos \alpha M_\beta - R_\alpha r Q_\alpha = 0. \quad (14.56)$$

Ratkaistaan tasapainoyhtälöt kahdessa osassa:

1. Määritetään kalvotilan ratkaisu kuormista f_n ja f_α eli

$$N_\alpha^K, \quad N_\beta^K, \quad (14.57)$$

missä K tarkoittaa kalvotilaa.

2. Ratkaistaan homogeeniset tasapainoyhtälöt ja saadaan taivutustilan ratkaisu

$$N_\alpha^T, \quad N_\beta^T, \quad Q_\alpha, \quad M_\alpha, \quad M_\beta, \quad (14.58)$$

missä T tarkoittaa taivutustilaa.

Lopullinen ratkaisu on osien 1 ja 2 summa. Eräissä tapauksissa osan 2 ratkaisu saadaan riittävällä tarkkuudella seuraavalla yksinkertaisella tavalla, joka perustuu taivutustilan jyrkkään vaimenemiseen koordinaattiviivan α suunnassa. Taivutustilaa nimitetään tällöin reunahäiriöksi.

Tehtävän ratkaisun yksinkertaistaminen perustuu seuraaviin oletuksiin:

1. Koordinaatin α suuntainen siirtymä on pieni taipuman rinnalla eli

$$|u| \ll |w|. \quad (14.59)$$

2. Suureet muuttuvat jyrkästi koordinaatin α suunnassa.

Toisesta tasapainoyhtälöstä (14.55) seuraa

$$N_\beta = -\frac{r}{R_\alpha \sin \alpha} N_\alpha + \frac{1}{R_\alpha \sin \alpha} \frac{d}{d\alpha} (rQ_\alpha). \quad (14.60)$$

Ottamalla tämä huomioon ensimmäisessä tasapainoehdossa (14.54) tulee

$$\frac{d}{d\alpha} (rN_\alpha) + r \cot \alpha N_\alpha + rQ_\alpha - \cot \alpha \frac{d}{d\alpha} (rQ_\alpha) = 0, \quad (14.61)$$

mistä seuraa

$$\frac{d}{d\alpha} (r \sin \alpha N_\alpha) - \frac{d}{d\alpha} (r \cos \alpha Q_\alpha) = 0, \quad (14.62)$$

josta integroidaan

$$N_\alpha = \cot \alpha Q_\alpha. \quad (14.63)$$

Sijoittamalla tämä voiman N_β kaavaan (14.60) tulee

$$\begin{aligned} N_\beta &= -\frac{r \cos \alpha}{R_\alpha \sin^2 \alpha} Q_\alpha + \frac{1}{R_\alpha \sin \alpha} \frac{d}{d\alpha} (rQ_\alpha) \\ &= \frac{1}{R_\alpha} \frac{d}{d\alpha} (R_\beta Q_\alpha) \end{aligned} \quad (14.64)$$

eli

$$N_\beta = \frac{1}{R_\alpha} \frac{dR_\beta}{d\alpha} Q_\alpha + \frac{R_\beta}{R_\alpha} \frac{dQ_\alpha}{d\alpha} \approx \frac{R_\beta}{R_\alpha} \frac{dQ_\alpha}{d\alpha}. \quad (14.65)$$

Kolmannen tasapainoyhtälön (14.56) perusteella saadaan

$$Q_\alpha = \frac{1}{R_\alpha} \frac{dM_\alpha}{d\alpha} + \frac{\cos \alpha}{r} (M_\alpha - M_\beta) \approx \frac{1}{R_\alpha} \frac{dM_\alpha}{d\alpha}, \quad (14.66)$$

josta seuraa

$$N_\beta = \frac{R_\beta}{R_\alpha} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{R_\alpha} \frac{dM_\alpha}{d\alpha} \right) \approx \frac{R_\beta}{R_\alpha^2} \frac{d^2 M_\alpha}{d\alpha^2}. \quad (14.67)$$

Pyörähdyssymmetrisen tapauksen siirtymien ja muodonmuutosten väliset yhtälöt yksinkertaistuvat reunahäiriötehtävässä seuraavasti:

$$\varepsilon_\beta = \frac{u \cot \alpha + w}{R_\beta} \approx \frac{w}{R_\beta}, \quad (14.68)$$

$$\varphi = \frac{u}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\alpha} \frac{dw}{d\alpha} \approx -\frac{1}{R_\alpha} \frac{dw}{d\alpha}, \quad (14.69)$$

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{R_\alpha} \frac{d\varphi}{d\alpha} \approx -\frac{1}{R_\alpha^2} \frac{d^2 w}{d\alpha^2}, \quad (14.70)$$

$$\kappa_\beta = \frac{\cos \alpha}{r} \varphi \approx -\frac{\cot \alpha}{R_\alpha R_\beta} \frac{dw}{d\alpha}. \quad (14.71)$$

Otaksumalla, että rengasvoima N_β on kertaluokkaa suurempi kuin N_α , saadaan

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{Eh} (N_\beta - \nu N_\alpha) \approx \frac{1}{Eh} N_\beta, \quad (14.72)$$

josta seuraa

$$N_\beta \approx Eh \varepsilon_\beta \approx \frac{Eh}{R_\beta} w. \quad (14.73)$$

Momenttien kaavoja arvioidaan seuraavasti:

$$M_\alpha = D(\kappa_\alpha + \nu \kappa_\beta) = D \left(\frac{1}{R_\alpha} \frac{d\varphi}{d\alpha} + \frac{\nu \cos \alpha}{r} \varphi \right) \approx \frac{D}{R_\alpha} \frac{d\varphi}{d\alpha}, \quad (14.74)$$

$$M_\beta = D(\kappa_\beta + \nu \kappa_\alpha) \approx \nu D \kappa_\alpha \approx \nu M_\alpha. \quad (14.75)$$

Sijoittamalla N_β ja M_α likikaavaan

$$N_\beta \approx \frac{R_\beta}{R_\alpha^2} \frac{d^2 M_\alpha}{d\alpha^2} \quad (14.76)$$

tulee

$$\frac{R_\beta}{R_\alpha^2} \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{D}{R_\alpha^2} \frac{d^2 w}{d\alpha^2} \right) + \frac{Eh}{R_\beta} w = 0, \quad (14.77)$$

josta saadaan edelleen yksinkertaistamalla

$$\frac{R_\beta D}{R_\alpha^4} \frac{d^4 w}{d\alpha^4} + \frac{Eh}{R_\beta} w = 0 \quad (14.78)$$

tai

$$\left(\frac{R_\beta}{R_\alpha} \right)^4 \frac{d^4 w}{d\alpha^4} + 4K^4 w = 0, \quad (14.79)$$

missä on merkitty

$$K = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)R_\beta^2}{h^2}} = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}\sqrt{\frac{R_\beta}{h}} \quad (14.80)$$

on vaimenemisluku.

Ottamalla kulman α sijasta muuttujaksi kaarenpituus s saadaan

$$ds = R_\alpha d\alpha \quad (14.81)$$

ja

$$\frac{d^4 w}{ds^4} + 4 \left(\frac{K}{R_\beta} \right)^4 w = 0. \quad (14.82)$$

Tämän differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$w = e^{-\lambda s}(C_1 \cos \lambda s + C_2 \sin \lambda s) + e^{\lambda s}(C_3 \cos \lambda s + C_4 \sin \lambda s), \quad (14.83)$$

jossa on merkitty

$$\lambda = \frac{K}{R_\beta}. \quad (14.84)$$

Lasketaan samalla taipumafunktion derivaatat:

$$\frac{dw}{ds} = \lambda \{ e^{-\lambda s} [(-C_1 + C_2) \cos \lambda s + (-C_2 - C_1) \sin \lambda s] \quad (14.85)$$

$$+ e^{\lambda s} [(C_3 + C_4) \cos \lambda s + (C_4 - C_3) \sin \lambda s] \},$$

$$\frac{d^2 w}{ds^2} = 2\lambda^2 \{ e^{-\lambda s} [-C_2 \cos \lambda s + C_1 \sin \lambda s] \quad (14.86)$$

$$+ e^{\lambda s} [C_4 \cos \lambda s - C_3 \sin \lambda s] \},$$

$$\frac{d^3 w}{ds^3} = 2\lambda^3 \{ e^{-\lambda s} [(C_1 + C_2) \cos \lambda s + (-C_1 + C_2) \sin \lambda s] \quad (14.87)$$

$$+ e^{\lambda s} [(C_4 - C_3) \cos \lambda s + (-C_3 - C_4) \sin \lambda s] \}.$$

Reunahäiriösuuret ovat

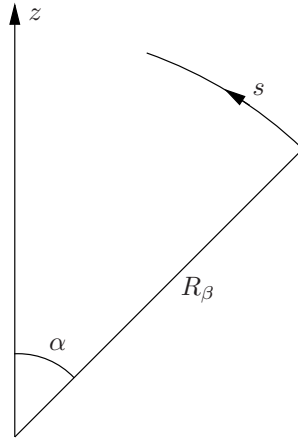
$$N_\beta = \frac{Eh}{R_\beta} w, \quad (14.88)$$

$$\varphi = \mp \frac{dw}{ds}, \quad (14.89)$$

$$M_\alpha = -D \frac{d^2 w}{ds^2}, \quad (14.90)$$

$$Q_\alpha = \mp D \frac{d^3 w}{ds^3}. \quad (14.91)$$

Edellä valitaan + merkki, jos koordinaattien s ja α suunnat ovat samat ja – merkki, jos koordinaattien s ja α suunnat ovat vastakkaiset.



Kuva 14.5 Koordinaatti s .

Lausumalla taipuma voiman N_β avulla eli

$$w = \frac{R_\beta}{Eh} N_\beta, \quad (14.92)$$

ja ottamalla huomioon, että

$$M_\alpha \approx -\frac{DR_\beta}{EhR_\alpha^2} \frac{d^2 N_\beta}{d\alpha^2} \approx -\frac{DR_\beta^2}{EhR_\alpha^3} \frac{d^3 Q_\alpha}{d\alpha^3}, \quad (14.93)$$

saadaan kaavasta

$$Q_\alpha \approx \frac{1}{R_\alpha} \frac{dM_\alpha}{d\alpha} \quad (14.94)$$

leikkausvoimalle Q_α differentiaaliyhtälö

$$\frac{1}{R_\alpha^4} \frac{d^4 Q_\alpha}{d\alpha^4} + 4 \left(\frac{K}{R_\beta} \right)^4 Q_\alpha = 0 \quad (14.95)$$

tai

$$\frac{d^4 Q_\alpha}{ds^4} + 4\lambda^4 Q_\alpha = 0, \quad (14.96)$$

missä on merkitty

$$\lambda = \frac{K}{R_\beta}. \quad (14.97)$$

Tarkastellaan reunahäiriötä alueessa $\alpha \leq \alpha_0$. Määritellään uusi muuttuja

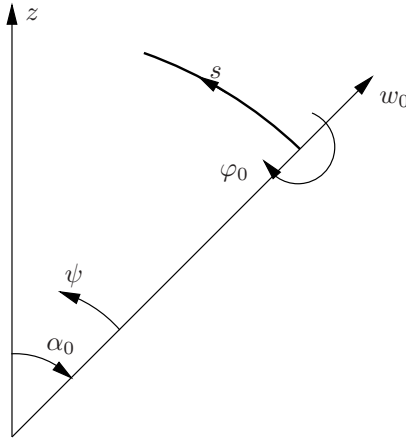
$$\psi = \alpha_0 - \alpha. \quad (14.98)$$

Tässä tapauksessa saadaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^4 w}{d\psi^4} + 4K^4 \left(\frac{R_\alpha}{R_\beta} \right)^4 w = 0 \quad (14.99)$$

tai

$$\frac{d^4 w}{d\psi^4} + 4\gamma^4 w = 0, \quad (14.100)$$



Kuva 14.6 Koordinaatti ψ ja reunan kiertymä ja siirtymä.

jonka ratkaisu on

$$w = e^{-\gamma\psi}(C_1 \cos \gamma\psi + C_2 \sin \gamma\psi) + e^{\gamma\psi}(C_3 \cos \gamma\psi + C_4 \sin \gamma\psi), \quad (14.101)$$

jossa on merkitty

$$\gamma = \frac{KR_\alpha}{R_\beta} = \lambda R_\alpha. \quad (14.102)$$

Jos häiriöt ovat riittävän kaukana toisistaan, niin riittää ottaa huomioon taipuman lausekkeessa vain vaimeneva osa

$$w = e^{-\gamma\psi}(C_1 \cos \gamma\psi + C_2 \sin \gamma\psi). \quad (14.103)$$

Taipumafunktion derivaatat ovat

$$\frac{dw}{d\alpha} = -\frac{dw}{d\psi} = \gamma e^{-\gamma\psi}[(C_1 - C_2) \cos \gamma\psi + (C_1 + C_2) \sin \gamma\psi], \quad (14.104)$$

$$\frac{d^2w}{d\alpha^2} = \frac{d^2w}{d\psi^2} = 2\gamma^2 e^{-\gamma\psi}(-C_2 \cos \gamma\psi + C_1 \sin \gamma\psi), \quad (14.105)$$

$$\frac{d^3w}{d\alpha^3} = -\frac{d^3w}{d\psi^3} = 2\gamma^3 e^{-\gamma\psi}[-(C_1 + C_2) \cos \gamma\psi + (C_1 - C_2) \sin \gamma\psi]. \quad (14.106)$$

Taivutusmomentti ja leikkausvoima ovat

$$M_\alpha = -D \frac{1}{A^2} \frac{d^2w}{d\psi^2}, \quad Q_\alpha = -\frac{D}{A^3} \frac{d^3w}{d\alpha^3} = \frac{D}{A^3} \frac{d^3w}{d\psi^3}. \quad (14.107)$$

Kuoren reunalla $\psi = 0$ voidaan antaa reunaehdot:

1. Taipuma ja kiertymä on annettu eli

$$w = w_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad (14.108)$$

missä

$$w_0 = w(0) = C_1, \quad (14.109)$$

$$\begin{aligned}\varphi_0 = \varphi(0) &= \frac{1}{A} \frac{dw}{d\psi} + \frac{u}{R_\alpha} \approx \frac{1}{A} \frac{dw}{d\psi} = \frac{1}{R_\alpha} \frac{dw}{d\psi} \\ &= -\frac{\gamma}{R_\alpha} (C_1 - C_2) = -\frac{K}{R_\beta} (C_1 - C_2).\end{aligned}\tag{14.110}$$

Vakioiden C_1 ja C_2 suhteen ratkaistuna

$$C_1 = w_0, \quad C_2 = \frac{R_\beta}{K} \varphi_0 + w_0.\tag{14.111}$$

2. Reunalla $\alpha = \alpha_0$ on annettu momentti ja leikkausvoima eli

$$M_\alpha = M_0, \quad Q_\alpha = Q_0,\tag{14.112}$$

missä

$$M_0 = \frac{2DK^2}{R_\beta^2} C_2, \quad Q_0 = \frac{2DK^3}{R_\beta^3} (C_1 + C_2).\tag{14.113}$$

Ratkaisemalla vakioiden C_1 ja C_2 suhteen tulee

$$C_1 = -\frac{R_\beta^2}{2DK^2} M_0 + \frac{R_\beta^3}{2DK^3} Q_0, \quad C_2 = \frac{R_\beta^2}{2DK^2} M_0.\tag{14.114}$$

Määrittelemällä vaikutuskertoimet tai joustokertoimet

$$\gamma_{11} = \frac{1}{2D} \left(\frac{R_\beta}{K} \right)^3 = \frac{2R_\beta K}{Eh},\tag{14.115}$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{2D} \left(\frac{R_\beta}{K} \right)^2 = \gamma_{21} = \frac{2K^2}{Eh},\tag{14.116}$$

$$\gamma_{22} = \frac{1}{D} \left(\frac{R_\beta}{K} \right) = \frac{4K^3}{EhR_\beta}\tag{14.117}$$

voidaan reunan siirtymien lausekkeet kirjoittaa muodossa

$$w_0 = \gamma_{11} Q_0 - \gamma_{12} M_0,\tag{14.118}$$

$$\varphi_0 = -\gamma_{12} Q_0 + \gamma_{22} M_0.\tag{14.119}$$

Vastaavasti jäykkyyskertoimien

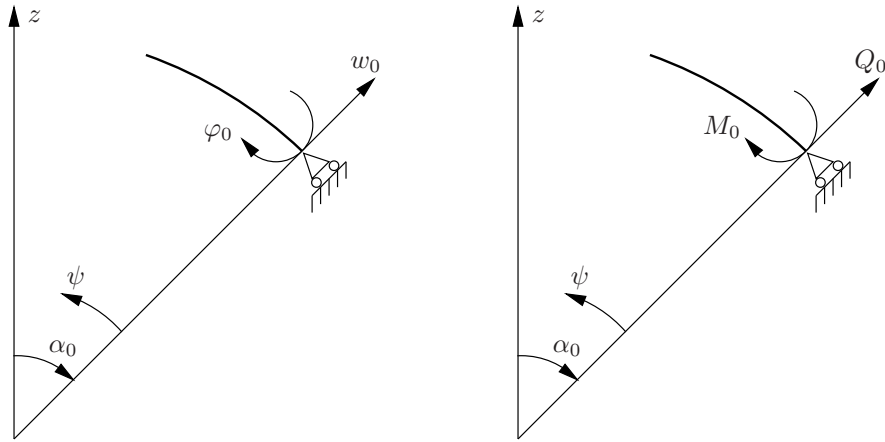
$$\Gamma_{11} = 4D \left(\frac{K}{R_\beta} \right)^3,\tag{14.120}$$

$$\Gamma_{12} = 2D \left(\frac{K}{R_\beta} \right)^2 = \Gamma_{21},\tag{14.121}$$

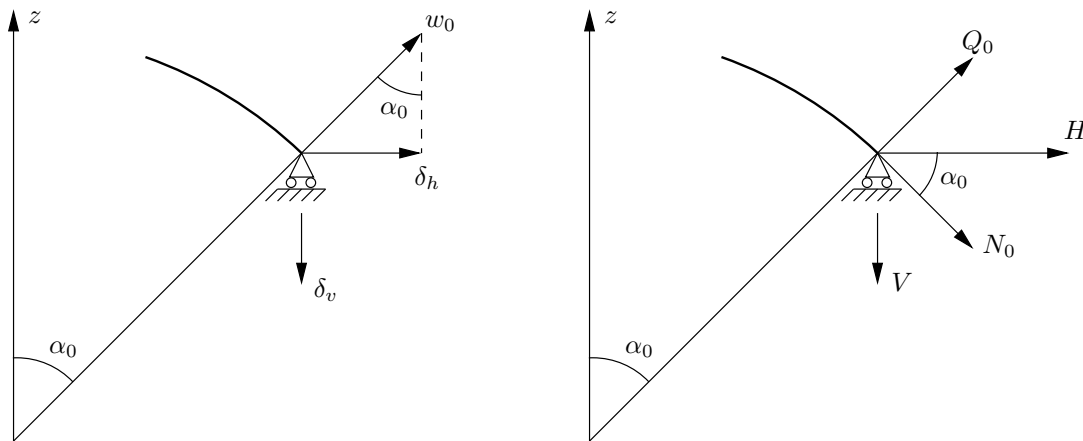
$$\Gamma_{22} = 2D \left(\frac{K}{R_\beta} \right)\tag{14.122}$$

avulla voidaan voimasuuret lausua reunan siirtymän ja kiertymän avulla kaavoilla

$$Q_0 = \Gamma_{11} w_0 + \Gamma_{12} \varphi_0,\tag{14.123}$$



Kuva 14.7 Reunan voima- ja siirtymäsuureet.



Kuva 14.8 Reunan vaaka- ja pystysiirtymä.

$$M_0 = \Gamma_{21}w_0 + \Gamma_{22}\varphi_0. \quad (14.124)$$

Vaaka- ja pystykomponenttien avulla lausuttuna saadaan yhteydet

$$\delta_h = (\gamma_{11} \sin^2 \alpha_0)H - (\gamma_{12} \sin \alpha_0)M_0, \quad (14.125)$$

$$\varphi_0 = -(\gamma_{21} \sin \alpha_0)H + \gamma_{22}M_0, \quad (14.126)$$

missä on käytetty yhteyksiä $\delta_h = w_0 \sin \alpha_0 + u_0 \cos \alpha_0 \approx w_0 \sin \alpha_0$, $N_\alpha = \cot \alpha Q_\alpha$ ja

$$\begin{aligned} H &= Q_0 \sin \alpha_0 + N_0 \cos \alpha_0 \\ &= Q_0 \sin \alpha_0 + Q_0 \cot \alpha_0 \cos \alpha_0 \\ &= Q_0 / \sin \alpha_0. \end{aligned} \quad (14.127)$$

Vastaavasti

$$H = \left(\frac{\Gamma_{11}}{\sin^2 \alpha_0} \right) \delta_h + \left(\frac{\Gamma_{12}}{\sin \alpha_0} \right) \varphi_0, \quad (14.128)$$

$$M_0 = \left(\frac{\Gamma_{21}}{\sin \alpha_0} \right) \delta_h + \Gamma_{22}\varphi_0. \quad (14.129)$$

Kuoren reunan läheisyydessä reunahäiriötehtävän avulla lasketut suureet ovat

$$w(\psi) = \gamma_{11} e^{-\gamma\psi} \left[\left(Q_0 - \frac{K}{R_\beta} M_0 \right) \cos \gamma\psi + \frac{K}{R_\beta} M_0 \sin \gamma\psi \right], \quad (14.130)$$

$$\varphi(\psi) = \gamma_{12} e^{-\gamma\psi} \left[\left(-Q_0 + 2\frac{K}{R_\beta} M_0 \right) \cos \gamma\psi - Q_0 \sin \gamma\psi \right], \quad (14.131)$$

$$M_\alpha(\psi) = e^{-\gamma\psi} \left[M_0 \cos \gamma\psi - \left(\frac{R_\beta}{K} Q_0 - M_0 \right) \sin \gamma\psi \right], \quad (14.132)$$

$$Q_\alpha(\psi) = e^{-\gamma\psi} \left[Q_0 \cos \gamma\psi + \left(-Q_0 + 2\frac{K}{R_\beta} M_0 \right) \sin \gamma\psi \right]. \quad (14.133)$$

Reunasiirtymien avulla lausutut vastaavat kaavat ovat

$$w(\psi) = e^{-\gamma\psi} \left[w_0 \cos \gamma\psi + \left(w_0 + \frac{R_\beta}{K} \varphi_0 \right) \sin \gamma\psi \right], \quad (14.134)$$

$$\varphi(\psi) = e^{-\gamma\psi} \left[\varphi_0 \cos \gamma\psi - \left(2\frac{K}{R_\beta} w_0 + \varphi_0 \right) \sin \gamma\psi \right], \quad (14.135)$$

$$M_\alpha(\psi) = -\Gamma_{12} e^{-\gamma\psi} \left[- \left(w_0 + \frac{R_\beta}{K} \varphi_0 \right) \cos \gamma\psi + w_0 \sin \gamma\psi \right], \quad (14.136)$$

$$Q_\alpha(\psi) = \Gamma_{11} e^{-\gamma\psi} \left[\left(w_0 + \frac{R_\beta}{2K} \varphi_0 \right) \cos \gamma\psi + \frac{R_\beta}{2K} \varphi_0 \sin \gamma\psi \right], \quad (14.137)$$

ja näiden avulla lasketaan

$$\varepsilon_\beta = \frac{w}{R_\beta}, \quad N_\beta = \frac{Eh}{R_\beta} w. \quad (14.138)$$

14.1.1 Kalvotilan siirtymät

Kalvotilan siirtymät kuoren reunalla ovat

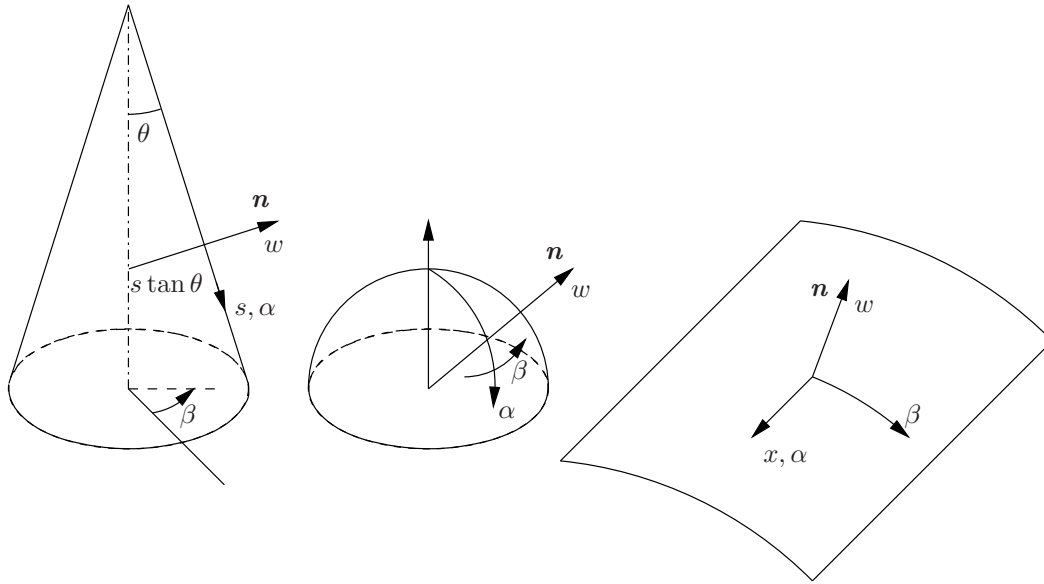
$$w_K = R_\beta \varepsilon_\beta, \quad (14.139)$$

$$\varphi_K = -\cot \alpha_0 (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) - \frac{R_\beta}{R_\alpha} \frac{d\varepsilon_\beta}{d\alpha} \quad (14.140)$$

tai

$$w_K = \frac{R_\beta}{Eh} (N_\beta - \nu N_\alpha), \quad (14.141)$$

$$\varphi_K = -\cot \alpha_0 \frac{1+\nu}{Eh} (N_\beta - N_\alpha) - \frac{1}{Eh} \frac{R_\beta}{R_\alpha} \left(\frac{dN_\beta}{d\alpha} - \nu \frac{dN_\alpha}{d\alpha} \right). \quad (14.142)$$



Kuva 14.9 Kartio- pallo- ja lieriökuoren koordinaatistot.

Erikoistapauksia

1. Sylinterikuoren tapauksessa

$$R_\beta = a, \quad \frac{1}{R_\alpha} \frac{d}{d\alpha} \rightarrow \frac{d}{dx}, \quad (14.143)$$

$$w_K = \frac{a}{Eh} (N_\beta - \nu N_x) = \frac{a}{Eh} (af_n - \nu N_x), \quad (14.144)$$

$$\varphi_K = -\frac{a}{Eh} \left(\frac{dN_\beta}{dx} - \nu \frac{dN_x}{dx} \right) = -\frac{a}{Eh} \left(a \frac{df_n}{dx} - \nu \frac{dN_x}{dx} \right) \quad (14.145)$$

reunalla $x = x_0$.

2. Kartion reunalla $s = s_0$

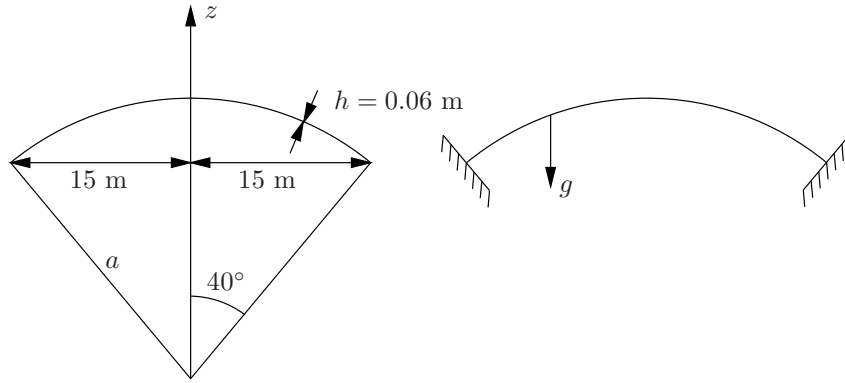
$$w_K = \frac{s \tan \theta}{Eh} (N_\beta - \nu N_s), \quad (14.146)$$

$$\varphi_K = -\tan \theta \frac{1 + \nu}{Eh} (N_\beta - N_s) - \frac{s \tan \theta}{Eh} \left(\frac{dN_\beta}{ds} - \nu \frac{dN_s}{ds} \right). \quad (14.147)$$

3. Pallokalotin ($R_\alpha = R_\beta$) reunalla $\alpha = \alpha_0$

$$w_K = \frac{a}{Eh} (N_\beta - \nu N_\alpha), \quad (14.148)$$

$$\varphi_K = -\cot \alpha_0 \frac{1 + \nu}{Eh} (N_\beta - N_\alpha) - \frac{1}{Eh} \left(\frac{dN_\beta}{d\alpha} - \nu \frac{dN_\alpha}{d\alpha} \right). \quad (14.149)$$



Kuva 14.10 Pallokalotti.

14.1.2 Yhteensopivuusyhtälöt

Siirtymien yhteensopivuusehdot ovat

$$w_T + w_K = w_r, \quad (14.150)$$

$$\varphi_T + \varphi_K = \varphi_r \quad (14.151)$$

eli

$$\gamma_{11}Q_0 - \gamma_{12}M_0 + w_K = w_r, \quad (14.152)$$

$$-\gamma_{21}Q_0 + \gamma_{22}M_0 + \varphi_K = \varphi_r, \quad (14.153)$$

missä w_r ja φ_r ovat tuen siirtymät.

Esimerkki 14.1 *Pallokalotin kuormana oma paino g . Määritetään voimasuuret reunan läheisyydessä.*

Pallokalotin säde on $a = 23.335$ m, seinän paksuus $h = 0.06$ m, kimmokerroin $E = 30 \cdot 10^6$ kN/m², Poissonin luku $\nu = 1/6$. Kuormana on oma paino $g = 2$ kN/m².

Kalvotilan ratkaisu on

$$N_\alpha = -\frac{ga}{1 + \cos \alpha}, \quad (14.154)$$

$$\frac{dN_\alpha}{d\alpha} = -\frac{ga \sin \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2}, \quad (14.155)$$

$$N_\beta = -ga \left(\cos \alpha - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right), \quad (14.156)$$

$$\frac{dN_\beta}{d\alpha} = ga \sin \alpha \left[1 + \frac{1}{(1 + \cos \alpha)^2} \right]. \quad (14.157)$$

Reunalla $\alpha_0 = 40^\circ$ saadaan lukuarvot:

$$N_\alpha(40^\circ) = -26.43 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad N_\beta(40^\circ) = -9.322 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad (14.158)$$

$$\frac{dN_\alpha(40^\circ)}{d\alpha} = -9.619 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad \frac{dN_\beta(40^\circ)}{d\alpha} = 39.62 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad (14.159)$$

$$Ehw_K(40^\circ) = -114.7 \text{ kN}, \quad Eh\varphi_K(40^\circ) = -65.01 \frac{\text{kN}}{\text{m}}. \quad (14.160)$$

Taulukko 14.1 Taivutustilan ratkaisun vaimeneminen.

ψ	$e^{-\gamma\psi}$
1°	0.638
2°	0.407
3°	0.259
4°	0.165
5°	0.067

Taivutustilan tarvittavat kertoimet ovat

$$D\gamma_{11} = 0.3712 \text{ m}^3, \quad D\gamma_{12} = 0.4099 \text{ m}^3, \quad D\gamma_{22} = 0.9055 \text{ m}, \quad (14.161)$$

$$K = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{a}{h}} = 25.771, \quad (\gamma = K). \quad (14.162)$$

Yhteensopivuusehdot ovat

$$\gamma_{11}Q_0 - \gamma_{12}M_0 + w_K = 0, \quad (14.163)$$

$$-\gamma_{21}Q_0 + \gamma_{22}M_0 + \varphi_K = 0 \quad (14.164)$$

eli

$$0.3712Q_0 - 0.4099M_0 + Dw_K = 0, \quad (14.165)$$

$$-0.4099Q_0 + 0.9055M_0 + D\varphi_K = 0, \quad (14.166)$$

joista ratkaistaan

$$Q_0 = 0.240 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad M_0 = 0.131 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}. \quad (14.167)$$

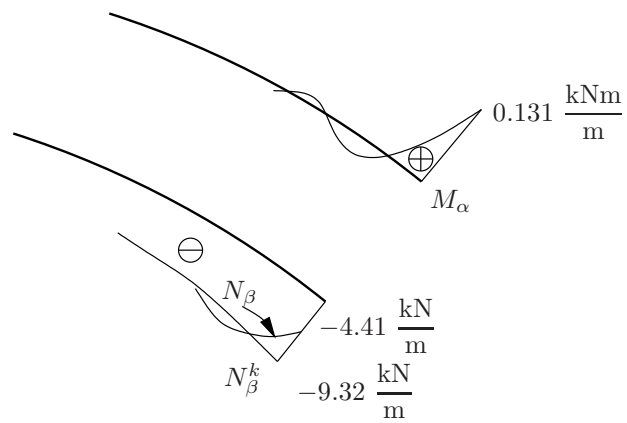
Jännitysresultantit ovat

$$M_\alpha = e^{-25.771\psi} (0.131 \cos 25.771\psi - 0.0863 \sin 25.771\psi) \frac{\text{kNm}}{\text{m}}, \quad (14.168)$$

$$Q_\alpha = e^{-25.771\psi} (0.240 \cos 25.771\psi + 0.0493 \sin 25.771\psi) \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad (14.169)$$

$$N_\beta^T = e^{-25.771\psi} (4.91 \cos 25.771\psi + 7.46 \sin 25.771\psi) \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad (14.170)$$

$$N_\beta = N_\beta^K + N_\beta^T. \quad (14.171)$$



Kuva 14.11 Pallokalottikuoren voimasuureiden jakaumat kiinnitetyn reunan lähellä.

Luku 15

Sylinterikuori

Yleisen ortogonaalisen käyräviivaisen koordinaatiston suhteen lausutut kuoren geometriset suureet ovat sylinterikuoren tapauksessa

$$A = 1, \quad B = a, \quad (15.1)$$

$$R_\alpha = \infty, \quad R_\beta = a, \quad (15.2)$$

$$d\psi_\alpha = d\psi_\beta = 0, \quad (15.3)$$

$$d\varphi_\alpha = 0, \quad d\varphi_\beta = d\beta. \quad (15.4)$$

Sylinterikuoren geometria yhtyy eukliidiseen geometriaan, ja se voidaan taivuttaa tasoksi.

Tasapainoyhtälöt voidaan johtaa kuvien 15.1, 15.2 ja 15.3 perusteella tai päätellä suoraan ortogonaalisen koordinaatiston yleisistä tasapainoehdoista asettamalla $x = \alpha$:

$$a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\beta x}}{\partial \beta} + a f_\alpha = 0, \quad (15.5)$$

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + a \frac{\partial N_{x\beta}}{\partial x} + Q_\beta + a f_\beta = 0, \quad (15.6)$$

$$a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\beta}{\partial \beta} - N_\beta + a f_n = 0, \quad (15.7)$$

$$a \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\beta x}}{\partial \beta} - a Q_x = 0, \quad (15.8)$$

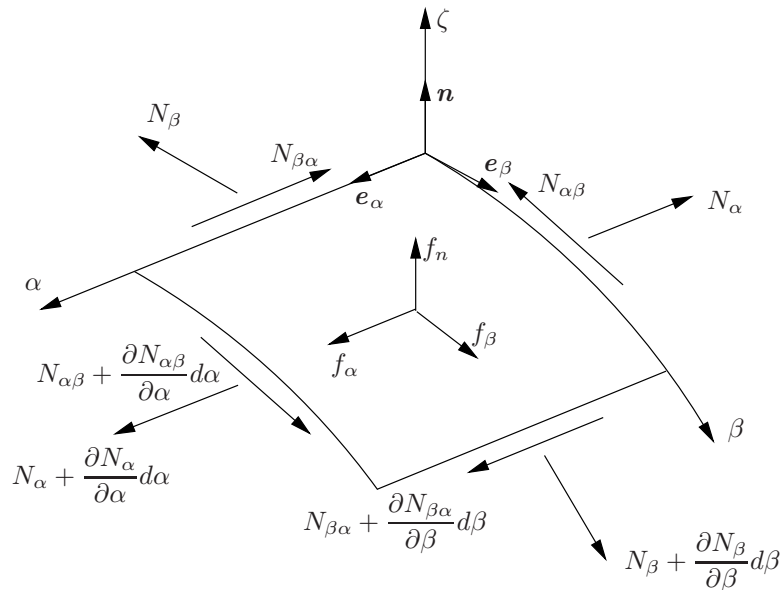
$$\frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} + a \frac{\partial M_{x\beta}}{\partial x} - a Q_\beta = 0. \quad (15.9)$$

Suorittamalla muuttujanvaihdos $s = a\beta$, $ds = ad\beta$ tulee

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{sx}}{\partial s} + a f_x = 0, \quad (15.10)$$

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{1}{a} Q_\beta + f_s = 0, \quad (15.11)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_s}{\partial s} - \frac{1}{a} N_\beta + f_n = 0, \quad (15.12)$$



Kuva 15.1 Sylinterikuoren kalvovoimat.

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{sx}}{\partial s} - Q_x = 0, \quad (15.13)$$

$$\frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\partial M_{xs}}{\partial x} - Q_s = 0. \quad (15.14)$$

Ohuen sylinterikuoren tapauksessa muodonmuutokset ovat

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \zeta \kappa, \quad (15.15)$$

missä kuoren keskipinnan muodonmuutosvektori ja käyristymävektori ovat

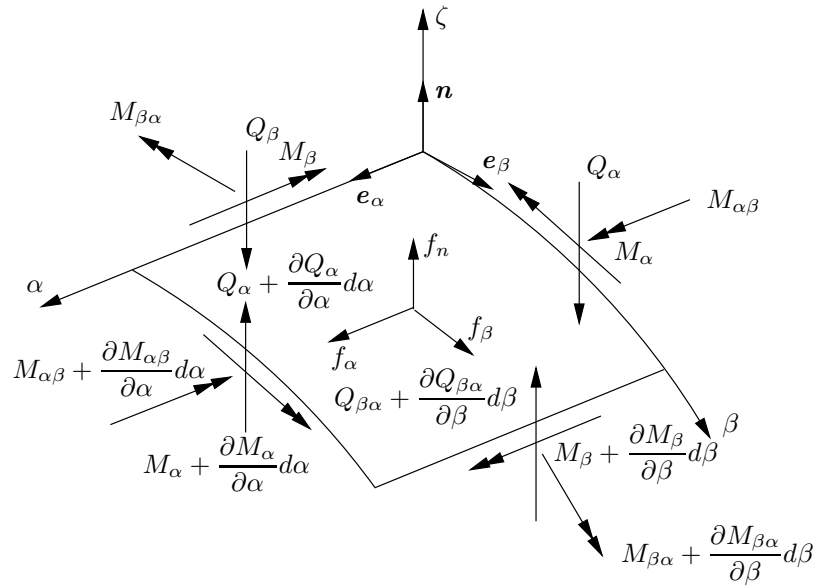
$$\varepsilon_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{a} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \beta} \end{bmatrix}, \quad \kappa = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{1}{a^2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \\ \frac{1}{a} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{bmatrix}, \quad (15.16)$$

tai

$$\varepsilon_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{a} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \end{bmatrix}, \quad \kappa = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial s} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (15.17)$$

Hooken lain mukaan kalvovoimat ovat

$$N_x = C(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_s) = C \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{a} \right) \right], \quad (15.18)$$



Kuva 15.2 Sylinterikuoren momentit ja leikkausvoimat.

$$N_s = C(\varepsilon_s + \nu\varepsilon_x) = C \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{a} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (15.19)$$

$$N_{xs} = \frac{1-\nu}{2} C \gamma_{xs} = \frac{1-\nu}{2} C \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \right), \quad (15.20)$$

ja taivutusmomentit ovat

$$M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_s) = D \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial}{\partial s} \left(-\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{v}{a} \right) \right], \quad (15.21)$$

$$M_s = D(\kappa_s + \nu\kappa_x) = D \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(-\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{v}{a} \right) - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \quad (15.22)$$

$$M_{xs} = (1-\nu)D\kappa_{xs} = (1-\nu)D \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{v}{2a} \right). \quad (15.23)$$

Teknillisessä taivutusteoriassa jätetään edellä olevissa kaavoissa alleviivatut termit huomioonottamatta.

Eliminoimalla leikkausvoimat tasapainoehtoissa saadaan kolme yhtälöä

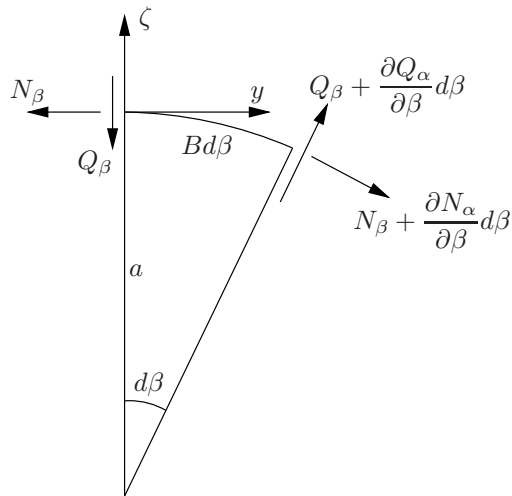
$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{sx}}{\partial s} + a f_x = 0, \quad (15.24)$$

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{xs}}{\partial x} + f_s = 0, \quad (15.25)$$

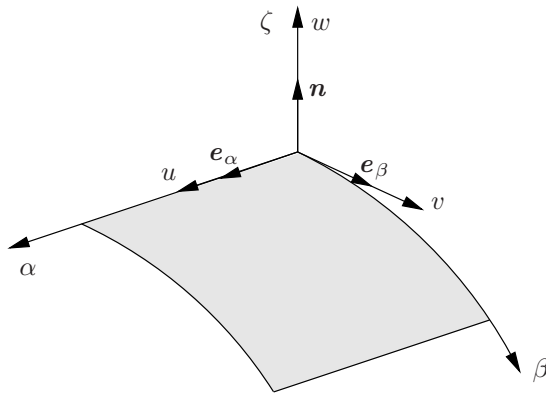
$$-\frac{1}{a} N_s + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xs}}{\partial x \partial s} + \frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} + f_n = 0. \quad (15.26)$$

Lausumalla jännitysresultantit siirtymien avulla tasapainoyhtälöissä tulee

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial s} + \nu \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{C} f_x = 0, \quad (15.27)$$



Kuva 15.3 Sylinterikuoren leikkausvoima Q_β .



Kuva 15.4 Sylinterikuoren koordinaatisto.

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s} + \left(1 + \frac{h^2}{12a^2}\right) \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial s} \nabla^2 w\right) + \frac{1}{C} f_s = 0, \quad (15.28)$$

$$\frac{\nu}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial s} \nabla^2 w\right) + \frac{1}{a^2} w + \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial s} \nabla^4 w - \frac{1}{C} f_n = 0, \quad (15.29)$$

missä

$$\nabla^2(\bullet) = \frac{\partial}{\partial x^2}(\bullet) + \frac{\partial}{\partial s^2}(\bullet), \quad \nabla^4(\bullet) = \nabla^2(\bullet) \nabla^2(\bullet). \quad (15.30)$$

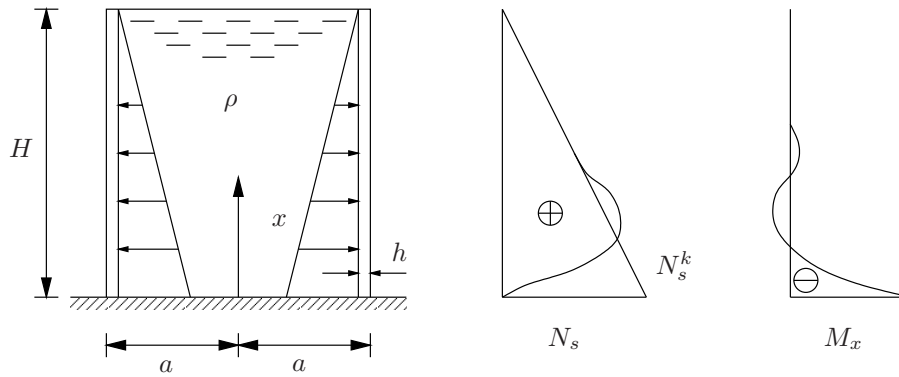
Pyörähdyssymmetrisen kuormituksen tapauksessa

$$f_s = 0, \quad Q_s = N_{xs} = M_{xs} = v = 0, \quad (15.31)$$

ja tasapainoyhtälöt yksinkertaistuvat muotoon

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \nu \frac{1}{a} \frac{dw}{dx} + \frac{1}{C} f_x = 0, \quad (15.32)$$

$$\nu \frac{du}{dx} + \frac{w}{a} + a \frac{h^2}{12} \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{a}{C} f_n = 0. \quad (15.33)$$



Kuva 15.5 Nestesäiliö.

Tapauksessa $f_x = 0$ seuraa ensimmäisestä yhtälöstä

$$\frac{du}{dx} + \frac{\nu}{a}w = \text{vakio} = C_5. \quad (15.34)$$

Toisaalta

$$\frac{du}{dx} + \frac{\nu}{a}w = \frac{1}{C}N_x \Rightarrow \nu \frac{du}{dx} = \frac{\nu N_x}{C} - \frac{\nu^2 w}{a}. \quad (15.35)$$

Sijoittamalla tulos toiseen tasapainoyhtälöön tulee

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w = \frac{1}{D} \left(f_n - \frac{\nu}{a} N_x \right), \quad (15.36)$$

missä

$$\lambda^4 = \frac{3(1 - \nu^2)}{a^2 h^2}. \quad (15.37)$$

Sylinterikuoren differentiaaliyhtälö on sama kuin reunahäiriötehtävälle aiemmin johdettu yhtälö, ja sen ratkaisu on

$$w = e^{-\lambda x} (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) + e^{\lambda x} (C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x) + w_p(x), \quad (15.38)$$

missä kertoimet C_i ovat integroimisvakioita ja w_p on yksityisratkaisu. Integroimalla ensimmäinen tasapainoyhtälö seuraa

$$u = C_6 + C_5 x - \frac{\nu}{a} \int_0^x w dx. \quad (15.39)$$

Esimerkki 15.1 Tutkitaan nesteellä täytettyä lieriökuorisäiliötä.

Säiliö on täynnä nestettä, jonka ominaispaino on γ . Säiliön korkeus on H , ja seinän paksuus on h . Seinään kohdistuva paine on

$$f_n = \gamma(H - x), \quad (15.40)$$

missä

$$\gamma = \rho g. \quad (15.41)$$

Reunalla $x = H$

$$N_x = 0 \Rightarrow C_5 = 0, \quad (15.42)$$

ja taipuman differentiaaliyhtälö on ($N_x/C = C_5 = 0$)

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w = \frac{1}{D} \rho g (H - x). \quad (15.43)$$

Yhtälön ratkaisu on

$$w = w_h + w_p, \quad (15.44)$$

missä homogeenisen osan ratkaisu on

$$w_h = e^{-\lambda x} (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) + e^{\lambda x} (C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x), \quad (15.45)$$

ja yksityisratkaisu on

$$w_p = \frac{\gamma a^2 (H - x)}{Eh}. \quad (15.46)$$

Kuoren akselin suuntainen siirtymä on

$$\begin{aligned} u &= C_6 - \frac{\nu}{a} \int_0^x w dx \\ &= C_6 + \frac{\nu}{2\lambda a} e^{-\lambda x} [C_1 (\cos \lambda x - \sin \lambda x) + C_2 (\cos \lambda x + \sin \lambda x)] \\ &\quad - \frac{\nu}{2\lambda a} e^{\lambda x} [C_3 (\cos \lambda x + \sin \lambda x) + C_4 (\sin \lambda x - \cos \lambda x)] \\ &\quad + \frac{\nu \gamma a}{2Eh} (H - x)^2. \end{aligned} \quad (15.47)$$

Integroimisvakiot C_1, C_2, C_3, C_4 ja C_6 voidaan määrittää reunaehdoista

$$u(0) = 0, \quad w(0) = 0, \quad \frac{dw(0)}{dx} = 0, \quad (15.48)$$

$$M_x(H) = -D \frac{d^2 w(H)}{dx^2} = 0, \quad Q_x(H) = -D \frac{d^3 w(H)}{dx^3} = 0. \quad (15.49)$$

Jos säiliön korkeus H on suuri säteeseen a verrattuna, niin säiliötä voidaan käsitellä äärettömän korkeana ja asettaa $C_3 = C_4 = 0$ eli ottaa huomioon vain alareunan reunaehdöt. Vakiot C_1, C_2 ja C_6 ratkeavat alareunan reunaehdoista

$$w(0) = C_1 + \frac{\gamma a^2 H}{Eh} = 0, \quad (15.50)$$

$$\frac{dw(0)}{dx} = \lambda (C_2 - C_1) - \frac{\gamma a^2}{Eh} = 0, \quad (15.51)$$

joista seuraa

$$C_1 = -\frac{\gamma a^2 H}{Eh}, \quad C_2 = \frac{\gamma a^2}{Eh} \left(\frac{1}{\lambda} - H \right). \quad (15.52)$$

Reunaehdosta $u(0) = 0$ seuraa

$$\frac{\nu}{2\lambda a} (C_1 + C_2) + C_6 + \frac{\nu \gamma a H^2}{2Eh} = 0, \quad (15.53)$$

josta saadaan edelleen

$$C_6 = -\frac{\nu}{2\lambda a} (C_1 + C_2) - \frac{\nu \gamma a H^2}{2Eh} = -\frac{\nu \gamma a}{2Eh} \left(H - \frac{1}{\lambda} \right)^2. \quad (15.54)$$

Kuoren seinän taipumafunktio $w(x)$ on

$$w(x) = \frac{\gamma a^2}{Eh} \left\{ H - x - e^{-\lambda x} \left[H \cos \lambda x + \left(H - \frac{1}{\lambda} \right) \sin \lambda x \right] \right\}, \quad (15.55)$$

ja voimasuureet ovat

$$N_s = C \left(\frac{w}{a} + \nu \frac{dw}{dx} \right) = C \left(\frac{w}{a} - \frac{\nu^2}{a} w \right) = \frac{C(1 - \nu^2)}{a} w = \frac{Eh}{a} w, \quad (15.56)$$

(koska $\frac{dw}{dx} + \frac{\nu}{a} w = C_5 = 0$),

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{\gamma a H h}{2\sqrt{3}(1 - \nu^2)} e^{-\lambda x} \left[\sin \lambda x - \left(1 - \frac{1}{\lambda H} \right) \cos \lambda x \right], \quad (15.57)$$

$$M_s = \nu M_x, \quad Q_x = -D \frac{d^3 w}{dx^3}. \quad (15.58)$$

Taivutusmomentin maksimiarvo on

$$(M_x)_{\max} = - \left(1 - \frac{1}{\lambda H} \right) \frac{\gamma a H h}{2\sqrt{3}(1 - \nu^2)}. \quad (15.59)$$

Sylinterikuoren kalvotilan ratkaisu hydrostaattiselle painekuormalle on

$$N_s = a f_n = \gamma(H - x)a, \quad (15.60)$$

$$(N_s)_{\max} = \gamma H a, \quad (15.61)$$

ja suurin kalvojännitys on

$$(\sigma_s)_{\max} = \frac{\gamma H a}{h}. \quad (15.62)$$

Yksityisratkaisua

$$w_p = \frac{\gamma(H - x)a^2}{Eh} \quad (15.63)$$

vastaava voima on

$$N_s = \frac{Eh}{a} w_p = \gamma(H - x)a, \quad (15.64)$$

joka on sama kuin kalvotilan ratkaisu.

Suurin taivutusjännitys on

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{6(M_x)_{\max}}{h^2} = - \frac{12\lambda^2 \gamma a^2 D H}{E h^3} \left(1 - \frac{1}{\lambda H} \right), \quad (15.65)$$

missä

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{3(1 - \nu^2)}}{a h}. \quad (15.66)$$

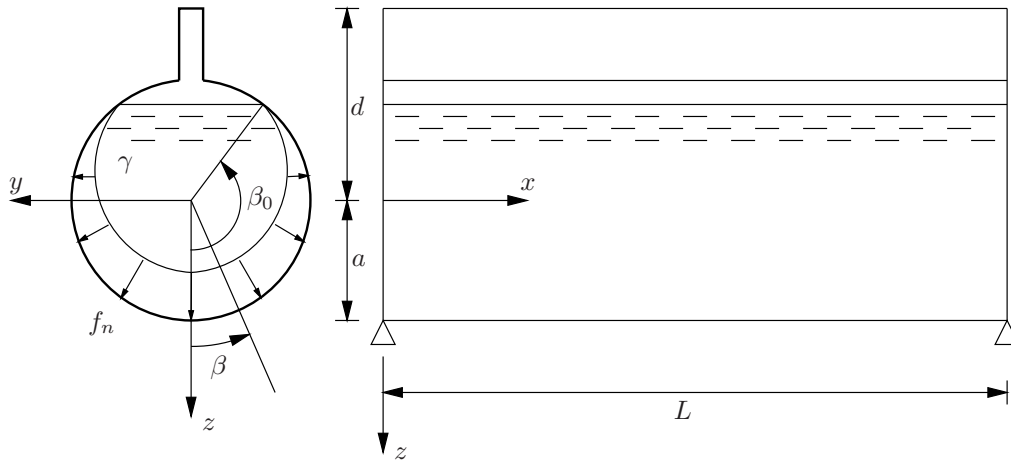
Asettamalla likimääräisesti

$$1 - \nu^2 \approx 1, \quad 1 - \frac{1}{\lambda H} \approx 1 \quad (15.67)$$

tulee

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{h} \gamma H a. \quad (15.68)$$

Todetaan, että suurin taivutusjännitys on noin $\sqrt{3}$ kertaa suurin kalvotilaratkaisun jännitys.



Kuva 15.6 Vaakasuorassa oleva nestesäiliö.

Esimerkki 15.2 Tarkastellaan päästään vapaasti tuettua lieriösäiliötä, jonka akseli on vaakasuuntainen.

Nesteen ominaispaino on γ . Säiliön päädyt on kiinnitetty nivelöidysti siten, että reunaehdot reunoilla $x = 0$ ja $x = L$ ovat

$$v = 0, \quad w = 0, \quad N_x = 0, \quad M_x = 0. \quad (15.69)$$

Reunaehdot ja symmetriaehdot toteutuvat valitsemalla siirtymille sarjakehitelmät

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos n\beta \cos \frac{m\pi x}{L}, \quad (15.70)$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \sin n\beta \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad (15.71)$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \cos n\beta \sin \frac{m\pi x}{L}. \quad (15.72)$$

Säiliön seinään kohdistuva paine on

$$f_n = \begin{cases} \gamma a (\cos \beta - \cos \beta_0), & \text{kun } \beta < \beta_0, \\ 0, & \text{kun } \beta > \beta_0. \end{cases} \quad (15.73)$$

Kuorman $f_n \equiv f$ Fourier-sarja on

$$f(x, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn} \cos n\beta \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad (15.74)$$

missä kertoimet ovat

$$f_{mn} = \frac{2}{L\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \int_0^L \gamma a (\cos \beta - \cos \beta_0) \cos n\beta \sin \frac{m\pi x}{L} d\beta dx, \quad (15.75)$$

josta saadaan

$$f_{mn} = \frac{8\gamma a}{mn\pi^2(n^2 - 1)} (\cos \beta_0 \sin n\beta_0 - n \sin \beta_0 \cos n\beta_0) \begin{cases} m=1, 3, 5, \dots, \\ n=2, 3, 4, \dots \end{cases} \quad (15.76)$$

ja

$$f_{m0} = \frac{4\gamma a}{m\pi^2} (\sin \beta_0 - \beta_0 \cos \beta_0), \quad (15.77)$$

$$f_{m1} = \frac{2\gamma a}{m\pi^2} (2\beta_0 - \sin 2\beta_0). \quad (15.78)$$

Jos säiliö on täytetty korkeuteen d säiliön akselista mitattuna, niin

$$f_n = \gamma(d + a \cos \beta) \quad (15.79)$$

ja

$$f_{m0} = \frac{4\gamma d}{m\pi}, \quad f_{m1} = \frac{4\gamma a}{m\pi}, \quad (15.80)$$

$$f_{mn} = 0, \quad \text{kun } n > 1, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

Sijoittamalla siirtymien ja kuorman sarjakehitelmät tasapainoyhtälöihin ja merkitsemällä

$$\gamma = \frac{L}{a}, \quad \eta = \frac{h}{2L}, \quad (15.81)$$

tulee

$$-[2m^2\pi^2 + (1 - \nu)\gamma^2 n^2]A_{mn} + (1 + \nu)\gamma mn\pi B_{mn} + 2\nu\gamma m\pi C_{mn} = 0, \quad (15.82)$$

$$3(1 + \nu)\gamma mn\pi A_{mn} - [3(1 - \nu)m^2\pi^2 + 6\gamma^2 n^2]B_{mn} \quad (15.83)$$

$$-2\gamma n^2[3 + \eta^2(m^2\pi^2 + \gamma^2 n^2)]C_{mn} = 0,$$

$$-3\nu\gamma m\pi A_{mn} + \gamma n^2[3 + \eta^2(m^2\pi^2 + \gamma^2 n^2)]B_{mn} \quad (15.84)$$

$$+[3\gamma^2 + \eta^2(m^2\pi^2 + \gamma^2 n^2)^2]C_{mn} = \frac{f_{mn}L^2h^2}{4D}.$$

Kun kuorman sarjakehitelmän kertoimet f_{mn} tunnetaan, niin voidaan määrittää kertoimet A_{mn} , B_{mn} ja C_{mn} kaikille kokonaisluvuille m ja n .

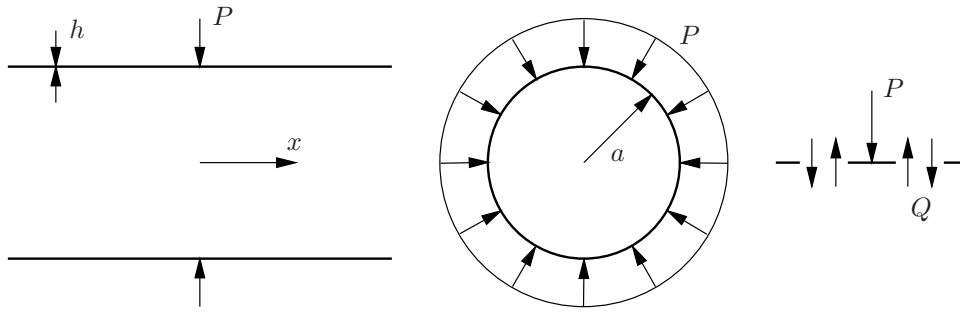
Esimerkki 15.3 *Sylinteriputkella on säteensuuntainen viivakuorma kohdassa $x = 0$. Tutkitaan putken siirtymiä ja jännityksiä.*

Kuorma saadaan mukaan ratkaisuun nyt reunaehdosta tarkastelemalla symmetristä sylinterin puoliskoa. Tällöin voidaan asettaa $w_p = 0$. Taipumafunktio on homogeenisen yhtälön ratkaisu

$$w_h = e^{-\lambda x}(C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) + e^{\lambda x}(C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x), \quad (15.85)$$

missä

$$\lambda^4 = \frac{3(1 - \nu^2)}{a^2 h^2} = \frac{Eh}{4a^2 D}. \quad (15.86)$$



Kuva 15.7 Viivakuorman kuormittama putki.

Koska ratkaisun täytyy hävitä äärettömyydessä, niin on oltava

$$C_3 = C_4 = 0, \quad (15.87)$$

ja

$$w_h = e^{-\lambda x} (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x). \quad (15.88)$$

Symmetrian nojalla kohdassa $x = 0$ saadaan ehdot

$$\frac{dw(0)}{dx} = 0, \quad (15.89)$$

$$P - 2Q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{1}{2}P = -D \frac{d^3 w(0)}{dx^3}. \quad (15.90)$$

Näiden yhtälöiden avulla ratkaistaan vakiot

$$C_1 = C_2 = -\frac{P}{8\lambda^3 D}. \quad (15.91)$$

Kuoren seinän taipuma on siten

$$w(x) = -\frac{P}{8\lambda^3 D} e^{-\lambda x} (\sin \lambda x + \cos \lambda x) \quad (15.92)$$

tai hieman muunnetussa muodossa

$$w(x) = -\frac{P}{8\lambda^3 D} e^{-\lambda x} \left[\sqrt{2} \sin \left(\lambda x + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (15.93)$$

Taipumafunktio $w(x)$ on eksponentiaalisesti vaimeneva siniaalto, jonka aallonpituus on

$$\frac{2\pi}{\lambda} \approx 4.89\sqrt{ah} \quad (15.94)$$

tapauksessa $\nu = 0.3$.

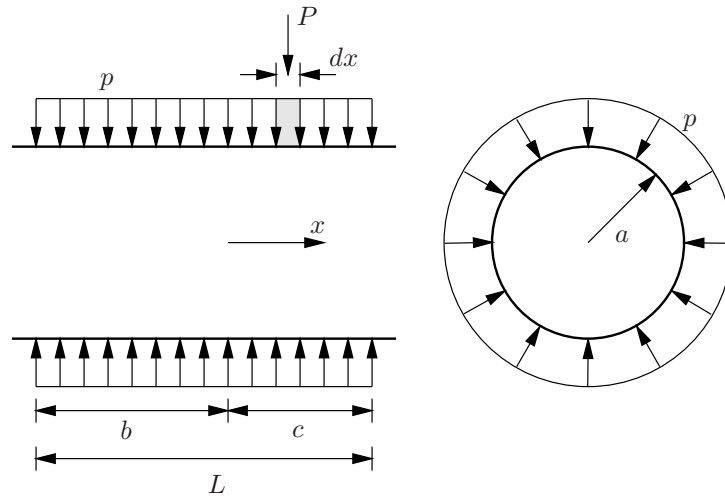
Ratkaisu voidaan esittää myös funktioiden

$$f_1(\lambda x) = e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x), \quad (15.95)$$

$$f_2(\lambda x) = e^{-\lambda x} \sin \lambda x = -\frac{1}{2\lambda} \frac{df_1(\lambda x)}{dx}, \quad (15.96)$$

$$f_3(\lambda x) = e^{-\lambda x} (\cos \lambda x - \sin \lambda x) = \frac{1}{\lambda} \frac{df_2(\lambda x)}{dx} = -\frac{1}{2\lambda^2} \frac{d^2 f_1(\lambda x)}{dx^2}, \quad (15.97)$$

$$f_4(\lambda x) = e^{-\lambda x} \cos \lambda x = -\frac{1}{2\lambda} \frac{df_3(\lambda x)}{dx} = -\frac{1}{2\lambda^2} \frac{d^2 f_2(\lambda x)}{dx^2} = \frac{1}{4\lambda^3} \frac{d^3 f_1(\lambda x)}{dx^3}, \quad (15.98)$$



Kuva 15.8 Tasaisen kuorman kuormittama putki.

$$f_1(\lambda x) = -\frac{1}{\lambda} \frac{df_4(\lambda x)}{dx} \quad (15.99)$$

avulla.

Tällöin ratkaisu on alueessa $x \geq 0$

$$w(x) = -\frac{P}{8\lambda^3 D} f_1(\lambda x), \quad (15.100)$$

$$N_\beta(x) = \frac{Ehw(x)}{a} = -\frac{EhP}{8\lambda^3 Da} f_1(\lambda x), \quad (15.101)$$

$$M_x(x) = -\frac{P}{4\lambda} f_3(\lambda x), \quad M_\beta(x) = \nu M_x(x), \quad (15.102)$$

$$Q_x(x) = \frac{P}{2} f_4(\lambda x). \quad (15.103)$$

Suurin taipuma ja momentti ovat

$$|w_{\max}| = \frac{P}{8\lambda^3 D} = \frac{Pa^2\lambda}{2Eh}, \quad (15.104)$$

$$|(M_x)_{\max}| = \frac{P}{4\lambda}, \quad (15.105)$$

ja suurimmat jännitykset pisteissä $x = 0$, $\zeta = \mp \frac{h}{2}$ ovat

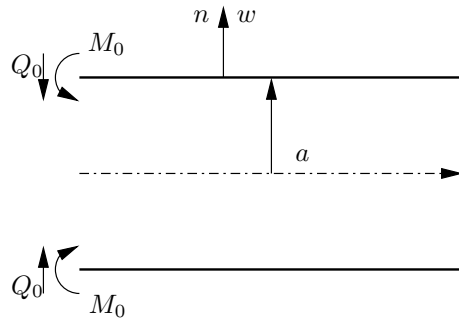
$$\sigma_x(0, \mp \frac{h}{2}) = \pm \frac{3P}{2\lambda h^2}, \quad \sigma_\beta(0, \mp \frac{h}{2}) = \frac{P\lambda}{2} \left(-\frac{a}{h} \pm \frac{3\nu}{\lambda^2 h^2} \right). \quad (15.106)$$

Ratkaisu vaimenee λx :n funktiona eksponentiaalisesti, ja käytännössä pistekuorman vaikutus voidaan jättää huomioonottamatta, kun $x > \pi/\lambda$.

Esimerkki 15.4 Tutkitaan sylinteriputkea, jota kuormittaa säteen suuntainen tasainen kuorma $p_n = -p$ matkalla L .

Radiaalisen viivakuorman ratkaisusta saadaan tasaisen paineen kuormittaman putken ratkaisu. Kuorman $P = p dx$ osuus taipumaan origossa on (viivakuorman ratkaisun perusteella)

$$\Delta w = -\frac{p dx}{8\lambda^3 D} f_1(\lambda x) \quad (15.107)$$



Kuva 15.9 Päästä kuormitettu puoliääretön putki.

ja

$$\begin{aligned}
 w(0) &= -\int_0^b \frac{p}{8\lambda^3 D} f_1(\lambda x) dx - \int_0^c \frac{p}{8\lambda^3 D} f_1(\lambda x) dx \\
 &= -\frac{pa^2}{2Eh} [2 - e^{-\lambda b} \cos \lambda b - e^{-\lambda c} \cos \lambda c] \\
 &= -\frac{pa^2}{2Eh} [2 - f_4(\lambda b) - f_4(\lambda c)].
 \end{aligned} \tag{15.108}$$

Taipuman lausekkeesta päätellään, että

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{b \rightarrow \infty} \\ \lim_{c \rightarrow \infty} \end{array} \right. w = -\frac{pa^2}{Eh}. \tag{15.109}$$

Esimerkki 15.5 Tarkastellaan reunalta $x = 0$ leikkausvoimalla ja momentilla kuormitettua pitkää sylinteriputkea.

Puoliäärettömän sylinterikuoren reunalla on annettu momentti ja leikkausvoima eli

$$M_x(0) = M_0, \quad Q_x(0) = Q_0. \tag{15.110}$$

Taipuman lausekkeeksi tulee

$$w(x) = -\frac{1}{2\lambda^3 D} e^{-\lambda x} [Q_0 \cos \lambda x + M_0 \lambda (\cos \lambda x - \sin \lambda x)]. \tag{15.111}$$

Taipuman suurin arvo on

$$w_{\max} = w_0 = -\frac{1}{2\lambda^3 D} (Q_0 + \lambda M_0), \tag{15.112}$$

ja reunan kiertymä on

$$\varphi(0) = -\frac{dw(0)}{dx} = -\frac{1}{2\lambda^2 D} (Q_0 + 2\lambda M_0). \tag{15.113}$$

Funktioiden f_i avulla kirjoitettu ratkaisu on

$$w(x) = -\frac{1}{2\lambda^3 D} [\lambda M_0 f_3(\lambda x) + Q_0 f_4(\lambda x)], \tag{15.114}$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{2\lambda^2 D} [2\lambda M_0 f_4(\lambda x) + Q_0 f_1(\lambda x)], \tag{15.115}$$

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{1}{\lambda D}[\lambda M_0 f_1(\lambda x) + Q_0 f_2(\lambda x)], \quad (15.116)$$

$$\frac{d^3w(x)}{dx^3} = \frac{1}{D}[2\lambda M_0 f_2(\lambda x) - Q_0 f_3(\lambda x)]. \quad (15.117)$$

Taipumafunktion perusteella lasketaan

$$M_x(x) = -D \frac{d^2w(x)}{dx^2}, \quad Q_x(x) = -D \frac{d^3w(x)}{dx^3}, \quad (15.118)$$

$$\varphi(x) = -\frac{dw(x)}{dx}, \quad N_\beta(x) = \frac{Eh}{a}w(x). \quad (15.119)$$

Funktiot f_1, \dots, f_4 tulevat merkityksettömän pieniksi, kun $x > \pi/\lambda$.

Esimerkki 15.6 *Lausutaan reunoilta kuormitetun lyhyen sylinteriputken taipuma reunan leikkausvoiman ja momentin avulla.*

Jos sylinterikuori on riittävän lyhyt eli

$$L < \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (15.120)$$

niin reunahäiriöt vaikuttavat toisiinsa merkittävästi. Taipuman lauseke kirjoitetaan tässä tapauksessa (Eulerin kaavojen avulla) muotoon

$$w(x) = C_1 \sin \lambda x \sinh \lambda x + C_2 \sin \lambda x \cosh \lambda x + C_3 \cos \lambda x \sinh \lambda x + C_4 \cos \lambda x \cosh \lambda x. \quad (15.121)$$

Vakiot C_i ratkaistaan jälleen reunaehdoista. Taipuma ja kiertymä kuoren reunoilla $x = 0$ ja $x = L$ ovat

$$w(0) = w(L) = -\frac{2\lambda a^2}{Eh}[Q_0 h_1(\lambda L) + \lambda M_0 h_2(\lambda L)], \quad (15.122)$$

$$\frac{dw(0)}{dx} = -\frac{dw(L)}{dx} = \frac{2\lambda^2 a^2}{Eh}[Q_0 h_2(\lambda L) + 2\lambda M_0 h_3(\lambda L)], \quad (15.123)$$

jossa on otettu käyttöön funktiot

$$h_1(\lambda L) = \frac{\cosh(\lambda L) + \cos(\lambda L)}{\sinh(\lambda L) + \sin(\lambda L)}, \quad (15.124)$$

$$h_2(\lambda L) = \frac{\sinh(\lambda L) + \sin(\lambda L)}{\sinh(\lambda L) + \sin(\lambda L)}, \quad (15.125)$$

$$h_3(\lambda L) = \frac{\cosh(\lambda L) - \cos(\lambda L)}{\sinh(\lambda L) + \sin(\lambda L)}. \quad (15.126)$$

Esimerkki 15.7 *Tarkastellaan sisäisen paineen kuormittamaa pitkää jäykästi kiinnitettyä sylinteriä.*

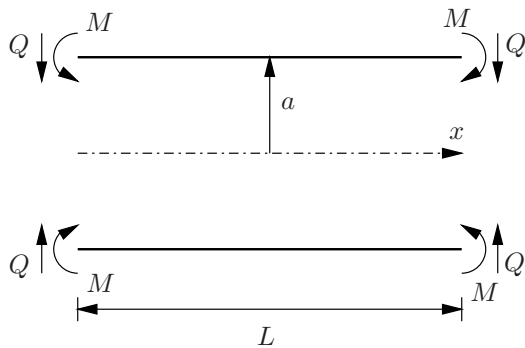
Tehtävän ratkaisu kootaan taivutustilan ja kalvotilan ratkaisuista. Kalvotilan siirtymä tasaisesta paineesta on

$$w_K = \frac{pa^2}{Eh}. \quad (15.127)$$

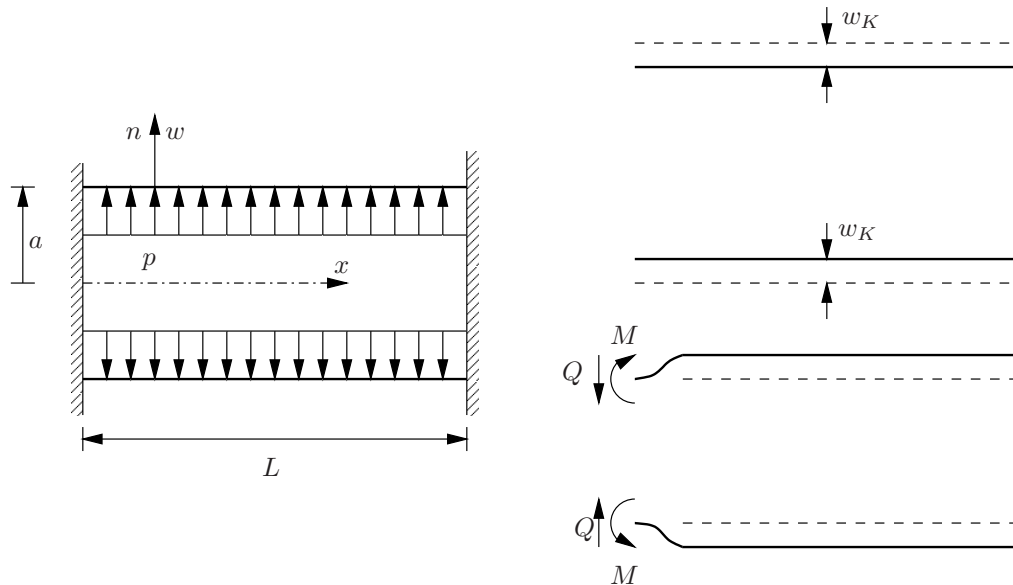
Sylinterin reunalla lausutaan yhteensopivuusehdot

$$w_T + w_K = 0, \quad (15.128)$$

$$\varphi_T = 0 \quad (15.129)$$



Kuva 15.10 Päistä kuormitettu lyhyt putki.



Kuva 15.11 Päistään jäykästi kiinnitetty paineen kuormittama putki.

eli

$$-\frac{1}{2\lambda^3 D}(Q_0 + \lambda M_0) + \frac{pa^2}{Eh} = 0, \quad (15.130)$$

$$Q_0 + 2\lambda M_0 = 0, \quad (15.131)$$

joista ratkaistaan

$$M_0 = -\frac{p}{2\lambda^2}, \quad Q_0 = \frac{p}{\lambda}. \quad (15.132)$$

Edellä K tarkoittaa kalvotilaa ja T taivutustilaa.

Kalvotilassa kuoren reunan kiertymä on nolla. Taipuman lausekkeeksi saadaan

$$w(x) = \frac{p}{4\lambda^4 D}[f_3(\lambda x) - 2f_4(\lambda x)] + \frac{pa^2}{Eh}. \quad (15.133)$$

Taivutusmomentin lauseke on

$$M_x(x) = -\frac{p}{2\lambda^2}[f_1(\lambda x) - 2f_2(\lambda x)], \quad (15.134)$$

ja kuoren jännitykset lasketaan kaavoilla

$$\sigma_x \left(x, \pm \frac{h}{2} \right) = \pm \frac{6}{h^2} M_x(x), \quad (15.135)$$

$$\sigma_\beta(x, \zeta) = \frac{Ew(x)}{a} + \nu\sigma_x(x, \zeta). \quad (15.136)$$

Jos reunat ovat vapaasti tuetut, niin $M_x = 0$ reunoilla ja $M_0 = 0$. Tällöin

$$Q_0 = 2\lambda^3 D\delta, \quad (15.137)$$

missä $\delta = \frac{pa^2}{Eh}$ on reunan kalvotilan taipuma.

Esimerkki 15.8 Tutkitaan renkailla vahvistettua sylinteriä.

Jos sylinterikuoren vahvistusrenkaat ovat hyvin jäykät, niin kuoren taipuma on nolla renkaiden kohdalla. Symmetrian nojalla kiertymä renkaan kohdalla on nolla eli

$$Q_0 h_2(\lambda L) + 2\lambda M_0 h_3(\lambda L) = 0, \quad (15.138)$$

josta ratkaistaan

$$M_0 = -\frac{Q_0 h_2(\lambda L)}{2\lambda h_3(\lambda L)}. \quad (15.139)$$

Sylinterikuoren kalvotilan siirtymä on

$$w_K = \frac{pa^2}{Eh}. \quad (15.140)$$

Jäykän renkaan kohdalla on voimassa ehto

$$w_T + w_K = 0 \quad (15.141)$$

eli

$$-\frac{2\lambda a^2}{Eh} \left[Q_0 h_1(\lambda L) - \frac{Q_0 h_2^2(\lambda L)}{2h_3(\lambda L)} \right] + \frac{pa^2}{Eh} = 0, \quad (15.142)$$

josta ratkaistaan

$$Q_0 = \frac{p}{\lambda \left[2h_1(\lambda L) - \frac{h_2^2(\lambda L)}{h_3(\lambda L)} \right]}, \quad (15.143)$$

$$M_0 = -\frac{ph_2(\lambda L)}{2\lambda^2 [2h_1(\lambda L)h_3(\lambda L) - h_2^2(\lambda L)]}. \quad (15.144)$$

Kun λL on suuri ($> \pi$), niin funktiot $h_1 \approx h_2 \approx h_3 \approx 1$ ja

$$Q_0 = \frac{p}{\lambda}, \quad M_0 = -\frac{p}{2\lambda^2} h_2(\lambda L). \quad (15.145)$$

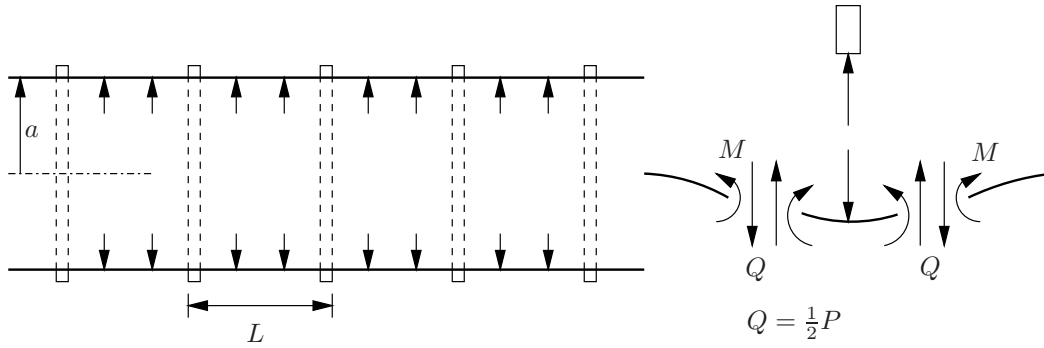
Renkaan ja kuoren välinen reaktiovoima on $P = 2Q_0$.

Jos renkaan kimmoisuus otetaan huomioon, niin saadaan yhteensopivuusehto

$$w_T + w_K = w_r, \quad (15.146)$$

missä w_r on renkaan radiaalisiirtymä

$$w_r = \frac{Pa^2}{EA}, \quad (15.147)$$



Kuva 15.12 Renkailla vahvistettu lieriö.

missä A on vahvistusrenkaan poikkileikkauksen pinta-ala. Saadaan yhteensopivuusehto

$$-\frac{\lambda a^2}{Eh} Q_0 \left[2h_1(\lambda L) - \frac{h_2^2(\lambda L)}{h_3(\lambda L)} \right] + \frac{pa^2}{Eh} = \frac{Pa^2}{EA}. \quad (15.148)$$

Kun λL on suuri, niin tulee ($Q_0 = P/2$)

$$-\frac{1}{2}P = -\frac{p}{\lambda} + \frac{Ph}{\lambda A} \quad (15.149)$$

eli

$$P = \frac{p}{\lambda \left(\frac{1}{2} + \frac{h}{A\lambda} \right)}, \quad Q_0 = \frac{1}{2}P, \quad M_0 = -\frac{P}{4\lambda} h_2(\lambda L). \quad (15.150)$$

Kun

$$A \rightarrow \infty, \quad P \rightarrow \frac{2p}{\lambda} \quad \text{ja} \quad Q_0 \rightarrow \frac{p}{\lambda}. \quad (15.151)$$

Kun

$$A \rightarrow 0, \quad P \rightarrow 0. \quad (15.152)$$

Esimerkki 15.9 Määritetään sylinteristä ja puolipalloista kootun paineastian jännitykset.

Jos säiliön sisällä on paine p , niin sylinterikuoren kalvovoimat ovat

$$N_{xK} = \frac{pa}{2}, \quad N_{\beta K} = pa. \quad (15.153)$$

Pallokuoren kalvotilaratkaisun kalvovoimat ovat vastaavasti

$$N_{\alpha K} = N_{\beta K} = \frac{pa}{2}. \quad (15.154)$$

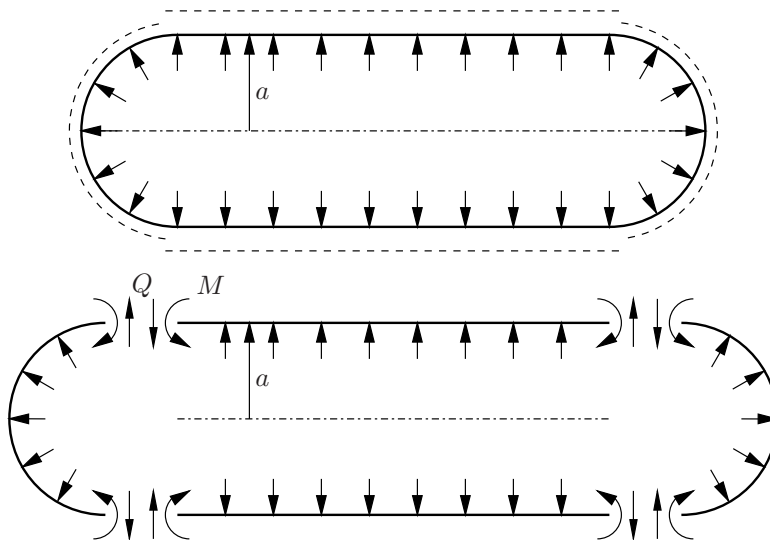
Sylinteri- ja pallokuoren siirtymät kuorten liitoskohdassa ovat

$$w_{sK} = \frac{a}{Eh} (N_{\beta K} - \nu N_{xK}) = \frac{a}{Eh} \left(pa - \nu \frac{pa}{2} \right) = \frac{pa^2}{2Eh} (2 - \nu), \quad (15.155)$$

$$w_{pK} = \frac{pa^2}{2Eh} (1 - \nu), \quad (15.156)$$

ja kuorien välinen siirtymäero on

$$w_{sK} - w_{pK} = \frac{pa^2}{2Eh}. \quad (15.157)$$



Kuva 15.13 Puolipalloista ja lieriöstä koottu paineastia.

Koska pallo- ja sylinterikuorien siirtymien tulee olla yhteensopivat, syntyy yhteensopivuuden pakottamisen seurauksena sauman ympäristöön taivutusjännityksiä. Yhteensopivuusehdoista

$$w_s = w_p, \quad (15.158)$$

$$\varphi_s = \varphi_p \quad (15.159)$$

ratkaistaan saumakohdan leikkausvoima Q_0 ja taivutusmomentti M_0 . Jos pallo- ja sylinterikuorten paksuudet ovat samat, niin reunan leikkausvoima aiheuttaa yhtä suuret kiertymät kummankin kuoren reunalle. Tässä tapauksessa $M_0 = 0$, ja leikkausvoima ratkaistaan ehdosta

$$w_p = w_s \quad (15.160)$$

eli

$$w_{pK} + w_{pT} = w_{sK} + w_{sT}, \quad (15.161)$$

josta seuraa yhtälö

$$\frac{pa^2}{2Eh}(1-\nu) + \frac{1}{2\lambda^3 D} Q_0 = \frac{pa^2}{2Eh}(2-\nu) - \frac{1}{2\lambda^3 D} Q_0, \quad (15.162)$$

jonka ratkaisu on

$$Q_0 = \frac{pa^2\lambda^3 D}{2Eh} = \frac{p}{8\lambda}. \quad (15.163)$$

Sylinterikuoren seinän taipuma on

$$\begin{aligned} w_s &= w_{sK} + w_{sT} \\ &= w_{sK} + \frac{1}{2\lambda^3 D} Q_0 f_4(\lambda x) \\ &= \frac{pa^2}{2Eh}(2-\nu) - \frac{p}{16\lambda^4 D} f_4(\lambda x), \end{aligned} \quad (15.164)$$

ja taivutusmomentti on

$$\begin{aligned} M_x(x) &= -D \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{Q_0}{\lambda} f_2(\lambda x) \\ &= \frac{ahp}{8\sqrt{3(1-\nu^2)}} f_2(\lambda x). \end{aligned} \quad (15.165)$$

Taivutusmomentin maksimikohta ratkaistaan ehdosta

$$\frac{dM_x(x)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4\lambda}. \quad (15.166)$$

Suurin jännitys sylinterikuoren ulkoreunalla taivutusmomentin maksimikohdassa on

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{pa}{2h} + \frac{3}{4} \frac{pa}{h\sqrt{3(1-\nu^2)}} f_2\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 1.293 \frac{pa}{2h}. \quad (15.167)$$

Sylinterikuoren tangentin (renkaan) suuntainen jännitys on

$$\begin{aligned} \sigma_\beta &= \frac{pa}{h} + \frac{Ew_{sT}}{a} + \frac{6\nu}{h^2} M_x \\ &= \frac{pa}{h} \left[1 - \frac{1}{4} f_4(\lambda x) + \frac{3\nu}{4\sqrt{3(1-\nu^2)}} f_2(\lambda x) \right]. \end{aligned} \quad (15.168)$$

Poissonin luvun arvolla $\nu = 0.3$ suurin tangentialinen jännitys on

$$(\sigma_\beta)_{\max} \approx 1.032 \frac{pa}{h} \quad (15.169)$$

kohdassa $x = 1.85/\lambda$.

Esimerkki 15.10 *Johdetaan yhteensopivuusehdot, joista voi ratkaista paineastian päätylaatan ja lieriökuoren liitoskohdan voimasuureet.*

Paineastia on tehty liittämällä sylinterikuoreen päädyiksi ympyrälaatat. Yhteensopivuusehdon kirjoittamista varten tarvitaan laatan ja sylinterikuoren reunan siirtymät ja kiertymät reunavoimista ja painekuormasta. Laatan reunan kiertymät reunan momentista M_0 ja paineesta p ovat

$$(\varphi_y)_{M_0} = \frac{a}{D_y(1+\nu)} M_0, \quad (15.170)$$

$$\varphi_{yp} = \frac{pa^3}{8D_y(1+\nu)}, \quad (15.171)$$

missä

$$D_y = \frac{Eh_y^3}{12(1-\nu^2)} \quad (15.172)$$

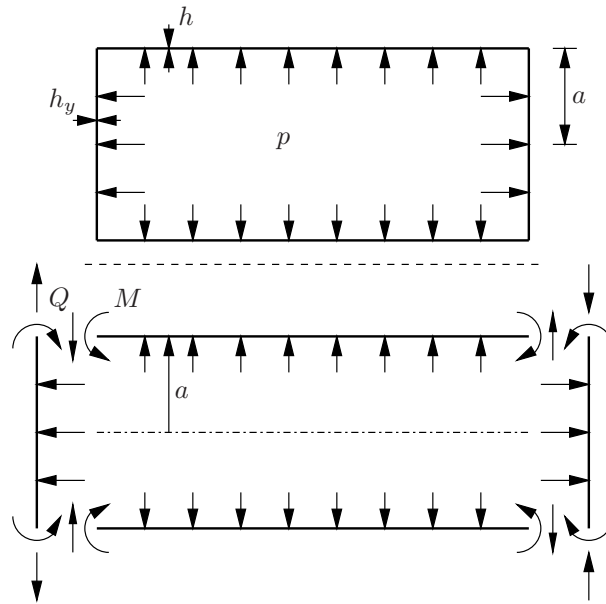
on laatan taivutusjäykkyys (laatta ja sylinteri samaa materiaalia).

Sylinterikuoren reunan kiertymä on

$$\varphi(0) = -\frac{dw(0)}{dx} = -\frac{1}{2\lambda^2 D} (2\lambda M_0 + Q_0). \quad (15.173)$$

Laatan ja kuoren kiertymien yhteensopivuusehto on

$$(\varphi_y)_{M_0} + \varphi_{yp} = \varphi_s. \quad (15.174)$$



Kuva 15.14 Lieriöstä ja ympyräläatoista koottu paineastia.

Ympyräläatan reunan säteen suuntainen siirtymä on

$$u = \frac{a(1-\nu)}{Eh_y} Q_0. \quad (15.175)$$

Sylinterikuoren reunan taipuma puolestaan on

$$\begin{aligned} w_s &= w_{sK} + w_{sT} \\ &= \frac{pa^2}{2Eh} (2-\nu) - \frac{1}{2\lambda^3 D} (\lambda M_0 + Q_0). \end{aligned} \quad (15.176)$$

Siirtymien yhteensopivuusehdoksi saadaan

$$w_s = u. \quad (15.177)$$

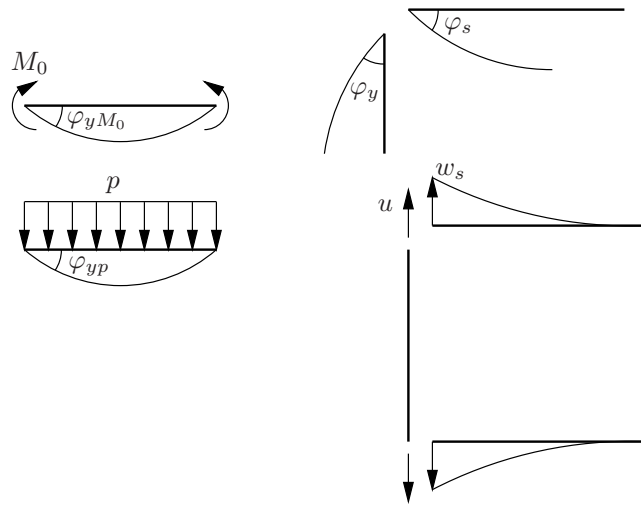
Liitoskohdan kiertymien ja siirtymien yhteensopivuusehdoista muodostetaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \frac{a}{D_y(1+\nu)} + \frac{1}{\lambda D} & \frac{1}{2\lambda^2 D} \\ \frac{1}{2\lambda^2 D} & \frac{a(1-\nu)}{Eh_y} + \frac{1}{2\lambda^3 D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{pa^3}{8D_y(1+\nu)} \\ \frac{pa^2(2-\nu)}{2Eh} \end{bmatrix}, \quad (15.178)$$

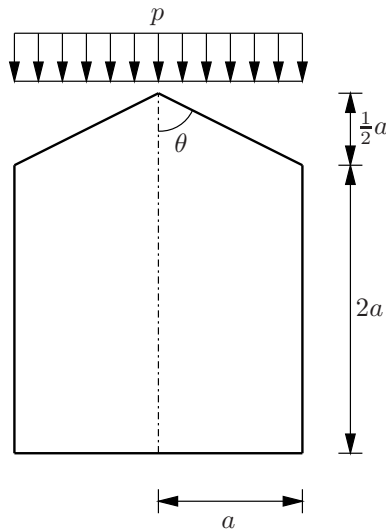
josta ratkaistaan reunan momentti ja leikkausvoima ja niiden perusteella lasketaan sekä laatan että sylinterikuoren tarvittavat suuret.

Esimerkki 15.11 Määritetään kartio- ja sylinterikuorista kootun säiliön kalvo- ja taiputustilan ratkaisut lumikuorman tapauksessa.

Säiliörakennus on pantu kokoon liittämällä toisiinsa sylinterikuori ja kartiokuori. Kuorten paksuus h on sama. Kattoa kuormittaa lumikuorma $p = 2 \text{ kN/m}^2$. Määritetään



Kuva 15.15 Liitoskohdan voima- ja siirtymäsuureet.



Kuva 15.16 Lumikuorma kartiosta ja lieriöstä kootulla säiliöllä.

terässäiliön momentti ja leikkausvoima kartion ja sylinterin liitoskohdassa otaksamalla, ettei sylinterikuoren alareunan vaikutusta liitoskohtaan tarvitse ottaa huomioon (ts. sen vaikutus on riittävästi vaimentunut).

Kartiokuoren kalvotilan ratkaisu

Kartiokuoren geometriset parametrit ovat

$$R_\alpha = \infty, \quad R_\beta = s \tan \theta = 2s, \quad (15.179)$$

missä s on huipulta lähtevä koordinaatti ja θ on kartion kaltevuuskulma pystysuoraan suuntaan nähden. Tasanjakautuneen lumikuorman normaalikomponentti kartiokuorelle on

$$f_n = -p \cos^2 \alpha. \quad (15.180)$$

Kartiokuoren kalvovoimien tasapainoehdot ovat

$$\frac{N_\beta^k}{R_\beta} = f_n, \quad (15.181)$$

$$2\pi s \sin \theta \cos \theta N_s^k = \pi (s \sin \theta)^2 p, \quad (15.182)$$

joissa yläindeksi k viittaa kartiokuoreen. Kalvovoimiksi saadaan

$$N_\beta^k = R_\beta f_n = s \tan \theta f_n, \quad (15.183)$$

$$N_s^k = -\frac{1}{2} p s \tan \theta. \quad (15.184)$$

Reunan kiertymän laskemista varten tarvitaan kalvovoimien derivaatat koordinaatin s suhteen

$$\frac{dN_\beta^k}{ds} = \tan \theta f_n, \quad \frac{dN_s^k}{ds} = -\frac{1}{2} p \tan \theta. \quad (15.185)$$

Kartiokuoren taipuma ja kiertymä ovat

$$w_K^k = \frac{s \tan \theta}{Eh} (N_\beta^k - \nu N_s^k), \quad (15.186)$$

$$\varphi_K^k = -\frac{(1 + \nu) \tan \theta}{Eh} (N_\beta^k - N_s^k) - \frac{s \tan \theta}{Eh} \left(\frac{dN_\beta^k}{ds} - \nu \frac{dN_s^k}{ds} \right), \quad (15.187)$$

joissa alaindeksi K viittaa kalvotilan suureen.

Kartiokuoren reunalla

$$N_s^k \left(\frac{\sqrt{5}}{2} a \right) = -\frac{\sqrt{5}}{2} p a, \quad (15.188)$$

$$N_\beta^k \left(\frac{\sqrt{5}}{2} a \right) = -0.8 \sqrt{5} p a, \quad (15.189)$$

$$w_K^k \left(\frac{\sqrt{5}}{2} a \right) = -3.25 \frac{p a^2}{Eh}, \quad (15.190)$$

$$\varphi_K^k \left(\frac{\sqrt{5}}{2} a \right) = 4.65 \frac{p a}{h}. \quad (15.191)$$

Sylinterikuoren kalvotilan ratkaisu

Sylinterikuoren kalvovoimat ovat

$$N_x^s = -\frac{1}{2} p a, \quad (15.192)$$

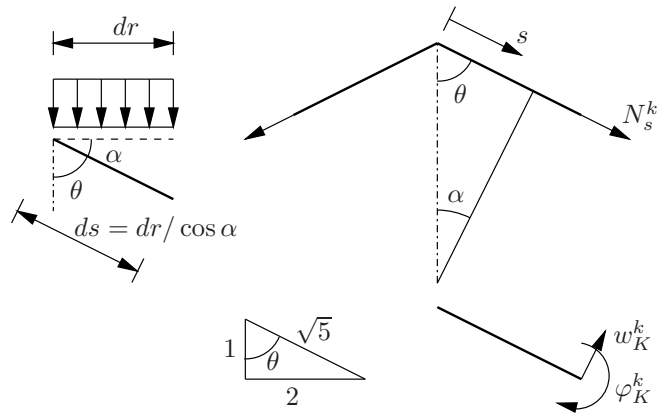
$$N_\beta^s = a f_n = 0, \quad (15.193)$$

joissa yläindeksi s tarkoittaa sylinteriä. Kalvovoimien avulla lasketaan sylinterikuoren kalvotilan siirtymä

$$w_K^s = \frac{a}{Eh} (N_\beta^s - \nu N_x^s) = \frac{\nu a^2}{2Eh} p. \quad (15.194)$$

Tässä tapauksessa sylinterikuoren kalvotilan kiertymä on nolla eli

$$\varphi_K^s = 0. \quad (15.195)$$



Kuva 15.17 Kartiokuoren kalvotilan suureet.

Liitoksen yhteensopivuus- ja tasapainoehdot

Kartiokuoren ja sylinterikuoren liitoskohdan yhteensopivuusehdot ovat

$$w^k \cos \theta = w^s, \quad (15.196)$$

$$\varphi^k = \varphi^s. \quad (15.197)$$

Yhteensopivuusehdoissa

$$w = w_K + w_T, \quad \varphi = \varphi_K + \varphi_T, \quad (15.198)$$

joissa alaindeksi K viittaa kalvotilaan ja T taivutustilaan.

Liitoskohdan voimien tasapainoehdot ovat

$$Q^k \cos \theta + N^k \sin \theta - Q^s = 0, \quad (15.199)$$

$$Q^k \sin \theta - N^k \cos \theta + N_x^s = 0, \quad (15.200)$$

joista ratkaistaan tarvittava kartiokuoren leikkausvoima

$$Q^k = Q^s \cos \theta - N_x^s \sin \theta. \quad (15.201)$$

Kartiokuoren taivutustila (reunahäiriö)

Kartiokuoren taivutustilan reunan siirtymä ja kiertymä ovat

$$w_T^k = g_{11} Q^k - g_{12} M = g_{11} \cos \theta Q^s - g_{12} M - g_{11} N_x^s \sin \theta, \quad (15.202)$$

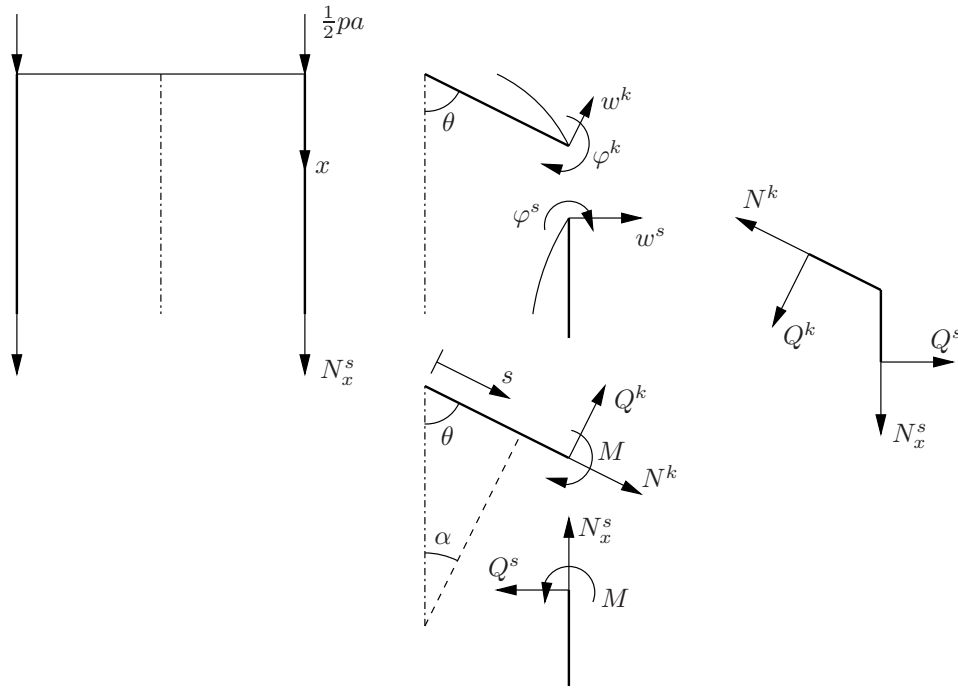
$$\varphi_T^k = -g_{21} Q^k + g_{22} M = -g_{21} \cos \theta Q^s + g_{22} M + g_{21} N_x^s \sin \theta, \quad (15.203)$$

joissa $M \equiv M^k$ on kartiokuoren taivutusmomentti reunalla. Kartiokuoren joustoker-
toimet ovat

$$g_{11} = \frac{1}{2D} \left(\frac{R_\beta}{K^k} \right)^3, \quad g_{12} = \frac{1}{2D} \left(\frac{R_\beta}{K^k} \right)^2 = g_{21}, \quad g_{22} = \frac{1}{D} \frac{R_\beta}{K^k}, \quad (15.204)$$

joissa

$$R_\beta = \frac{a}{\cos \theta} = a\sqrt{5}, \quad (15.205)$$



Kuva 15.18 Liitoskohdan voima- ja siirtymäsuureet.

$$K^k = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \left(\frac{a\sqrt{5}}{h} \right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (15.206)$$

Sylinterikuoren taivutustila (reunahäiriö)

Sylinterikuoren reunahäiriötehtävän reunan taipuma ja kiertymä ovat

$$w_T^s = -\gamma_{11}Q^s - \gamma_{12}M, \quad (15.207)$$

$$\varphi_T^s = -\gamma_{21}Q^s - \gamma_{22}M, \quad (15.208)$$

joissa $M \equiv M^s$ on sylinterikuoren taivutusmomentti reunalla. Sylinterikuoren joustokertoimet ovat

$$\gamma_{11} = \frac{1}{2D} \left(\frac{R_\beta}{K^s} \right)^3, \quad \gamma_{12} = \frac{1}{2D} \left(\frac{R_\beta}{K^s} \right)^2 = \gamma_{21}, \quad \gamma_{22} = \frac{1}{D} \frac{R_\beta}{K^s}, \quad (15.209)$$

joissa

$$R_\beta = a, \quad (15.210)$$

$$K^s = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \left(\frac{a}{h} \right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (15.211)$$

Yhteensopivuusehdot

Yhteensopivuusehtojen perusteella kirjoitetaan yhtälöt

$$\begin{aligned} \cos \theta w_K^k + g_{11} \cos^2 \theta Q - g_{12} \cos \theta M - g_{11} \sin \theta \cos \theta N_x^s \\ = w_K^s - \gamma_{11}Q - \gamma_{12}M, \end{aligned} \quad (15.212)$$

$$\varphi_K^k - g_{21} \cos \theta Q + g_{22} M + g_{21} \sin \theta N_x^s = -\gamma_{21} Q - \gamma_{22} M, \quad (15.213)$$

joissa on merkitty

$$Q^s \equiv Q, \quad M^s = M^k \equiv M. \quad (15.214)$$

Yhteensopivuusehdot ovat matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} g_{11} \cos^2 \theta + \gamma_{11} & \gamma_{12} - g_{12} \cos \theta \\ -g_{21} \cos \theta + \gamma_{21} & g_{22} + \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} \sin \theta \cos \theta N_x^s + w_K^s - \cos \theta w_K^k \\ -g_{21} N_x^s \sin \theta - \varphi_K^k \end{bmatrix}. \quad (15.215)$$

Lähtöarvoilla

$$a = 5 \text{ m}, \quad h = 0.01 \text{ m}, \quad \nu = 0.3, \quad E = 206 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}, \quad p = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \quad (15.216)$$

tulee

$$Q = -3.807 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad M = 0.693 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}. \quad (15.217)$$

Luku 16

Taitekuori

Taitekuoren osat toimivat sekä levyinä että laattoina. Tarkka ratkaisu voidaan johtaa kehittämällä levy- ja laattatilan suuret Fourier-sarjoiksi ja muodostamalla yhteensopivuusehdot liitoskohdissa (särmissä). Tietyissä tapauksissa tyydyttävä ratkaisu saadaan aikaan yksinkertaisesti:

1. Jos osalaattojen taipumat ovat pieniä särmien siirtymiin verrattuna, niin levykuori toimii kuten taivutettu palkki. Näin käy, kun osalevyt ovat kapeita ja liittyvät toisiinsa riittävän suuressa kulmassa (kulma $\alpha > 40^\circ$) tai kun poikkileikkauksen muodon vääristyminen estetään poikkilevyillä, kuva 16.2.
2. Jos särmien siirtymät ovat pieniä verrattuna osalaattojen taipumiin, niin levykuori toimii kuten siirtymättömille särmäviivoille tuettu laatasto (poikkisuunnassa) ja kuten levysysteemi (pituussuunnassa). Tämä on mahdollista, jos osalevyt liittyvät toisiinsa riittävän suuressa kulmassa, kuva 16.2.

Laakeisiin avoimiin levykuoriin, joissa särmien ja osalaattojen siirtymät ovat samaa suuruusluokkaa, on sovellettava tarkempia laskumenetelmiä, kuva 16.2.

16.1 Likimääräinen kalvotilan ratkaisu

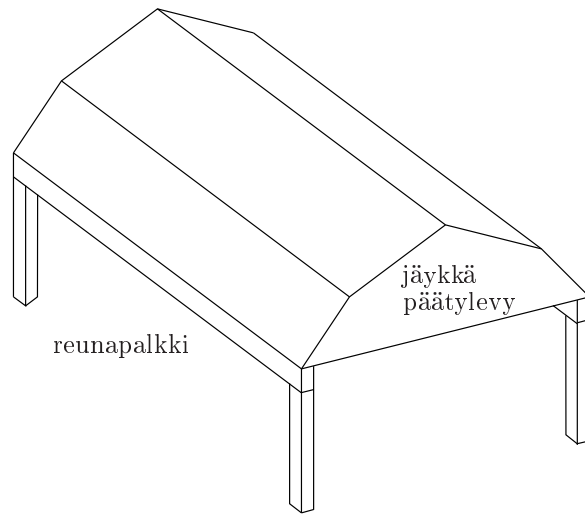
Kohdan 1 mukaisesti levyjen edellytetään liittyvän toisiinsa riittävän suuressa kulmassa. Särmit otaksutaan liikkumattomiksi. Levyt liittyvät toisiinsa nivelellisesti. Levyjä käsitellään palkkiteorian mukaan. Vaaditaan, että levyn leveyden suhde pituuteen on pienempi kuin yhden suhde neljään eli

$$\frac{b}{L} < \frac{1}{4}. \quad (16.1)$$

Tarkastellaan levykuorta, joka tukeutuu jäykkiin pätylevyihin, kuva 16.3. Pätylevyt ovat omassa tasossaan äärettömän jäykkiä, mutta joustavat kohtisuoraan tasoaan vastaan. Kuormitus otaksutaan vakioksi jänteen suunnassa.

16.1.1 Kuormituksen jakaminen särmille

Kuorma jaetaan särmiin vaikuttaviksi viivakuormiksi joko staattisesti määrätyn tai jatkuvan palkin teorian mukaisesti. Särämäkuorma jaetaan särmään liittyvien levyjen suuntaisiin



Kuva 16.1 Taitekuori, joka on tuettu tasoissaan jäykillä päätylevyillä ja reunapalkkeilla.

komponentteihin. Kuvan 16.4 tapauksessa saadaan tasapainoehdot

$$p_1 \cos \alpha_1 = p_2 \cos \alpha_2, \quad (16.2)$$

$$p_1 \sin \alpha_1 - p_2 \sin \alpha_2 = p_B, \quad (16.3)$$

joista ratkaistaan

$$p_1 = \frac{\cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} p_B, \quad (16.4)$$

$$p_2 = \frac{\cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} p_B. \quad (16.5)$$

Levyjä 1, 2, ... käsitellään palkkeina, kuva 16.5. Kuorman

$$p = p_A + p_B \quad (16.6)$$

aiheuttama taivutusmomentti on M_0 . Leikkausvoimat T_A ja T_B aiheuttavat taivutusmomentin

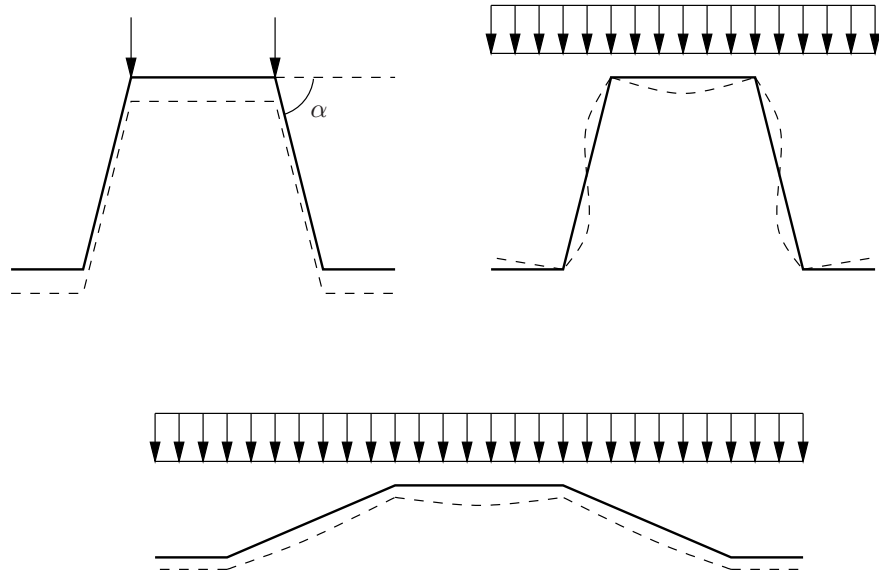
$$M_1 = -T_A \frac{b}{2} - T_B \frac{b}{2} \quad (16.7)$$

ja normaalivoiman

$$N_1 = -T_A + T_B. \quad (16.8)$$

Palkin (levyn AB), kuva 16.6, ala- ja yläreunan venymät ovat

$$\begin{aligned} \varepsilon_A &= \frac{N_1}{EA} + \frac{M_0 + M_1}{EI} \frac{b}{2} \\ &= \frac{M_0}{EI} \frac{b}{2} - \frac{1}{E} \left(\frac{1}{A} + \frac{b^2}{4I} \right) T_A - \frac{1}{E} \left(-\frac{1}{A} + \frac{b^2}{4I} \right) T_B, \end{aligned} \quad (16.9)$$



Kuva 16.2 Taitekuori. a) Osalaattojen taipumat ovat pieniä. b) Särmien taipumat ovat pieniä. c) Laakea taitekuori.

$$\varepsilon_B = \frac{N_1}{EA} + \frac{M_0 + M_1}{EI} \left(-\frac{b}{2} \right) \quad (16.10)$$

$$= -\frac{M_0 \frac{b}{2}}{EI} - \frac{1}{E} \left(\frac{1}{A} - \frac{b^2}{4I} \right) T_A - \frac{1}{E} \left(-\frac{1}{A} - \frac{b^2}{4I} \right) T_B$$

eli

$$\varepsilon_A = \frac{M_0}{EW} - \frac{4}{EA} T_A - \frac{2}{EA} T_B, \quad (16.11)$$

$$\varepsilon_B = -\frac{M_0}{EW} + \frac{2}{EA} T_A + \frac{4}{EA} T_B, \quad (16.12)$$

missä

$$I = \frac{Ab^2}{12}, \quad A = bd, \quad W = \frac{db^2}{6}, \quad (16.13)$$

b on levyn leveys ja d on levyn paksuus.

Yhteensopivusehdon

$$\varepsilon_{BA} = \varepsilon_{BC} \quad (16.14)$$

ja tasapainoehdon

$$T_{BA} = T_{BC} = T_B \quad (16.15)$$

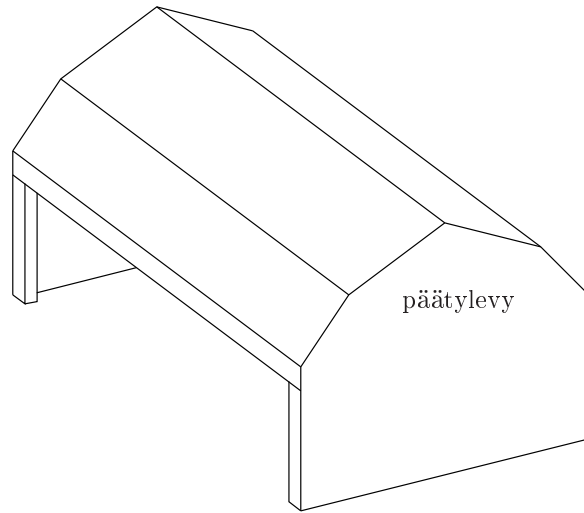
perusteella johdetaan kolmen leikkausvoiman yhtälö

$$-\frac{M_{10}}{EW_1} + \frac{2}{EA_1} T_A + \frac{4}{EA_1} T_B = \frac{M_{20}}{EW_2} - \frac{4}{EA_2} T_B - \frac{2}{EA_2} T_C \quad (16.16)$$

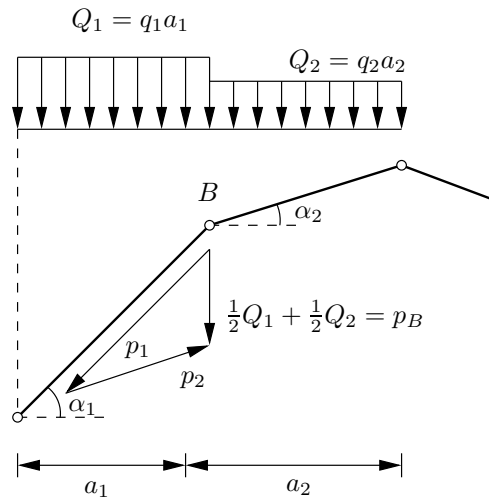
eli

$$\frac{2}{EA_1} T_A + \left(\frac{4}{EA_1} + \frac{4}{EA_2} \right) T_B + \frac{2}{EA_2} T_C = \frac{M_{10}}{EW_1} + \frac{M_{20}}{EW_2}, \quad (16.17)$$

missä indeksit 1 ja 2 viittaavat levyihin.



Kuva 16.3 Tasoissaan jäykkiin päätylevyihin tuettu taitekuori.



Kuva 16.4 Kuormien jakaminen särmille.

Esimerkki 16.1 Määritetään kuvan 16.7 taitekuorikatoksen jännitykset.

Taitekuorikatoksen vaakatasoa kohti laskettu tasainen kuormitus levyjen 1, 2 ja 3 alueella on

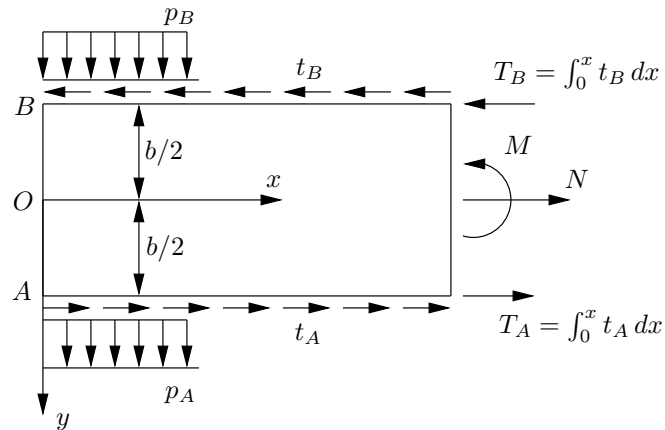
$$q_1 = 5310 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad q_2 = 9750 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad q_3 = 3000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \quad (16.18)$$

Särmien viivakuormat ovat

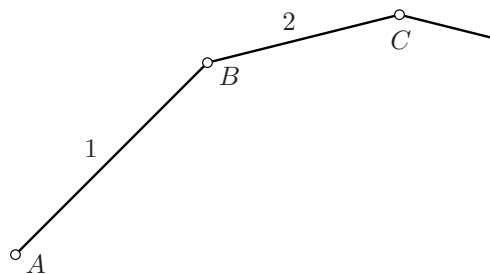
$$Q_1 = q_1 a_1 = 10620 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad (16.19)$$

$$Q_2 = q_2 a_2 = 23475 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad (16.20)$$

$$Q_3 = q_3 a_3 = 6000 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \quad (16.21)$$



Kuva 16.5 Taitekuoren osalevy.



Kuva 16.6 Levyjen ja särmien numerointi.

Särmien viivakuormien perusteella lasketaan levyjen suuntaiset komponentit

$$p_{1B} = \frac{\cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} \left(Q_1 + \frac{1}{2} Q_2 \right) = 32255 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad (16.22)$$

$$p_{2B} = \frac{\cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} \left(Q_1 + \frac{1}{2} Q_2 \right) = 22808 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad (16.23)$$

$$p_{2C} = \frac{\cos \alpha_3}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)} \left(\frac{1}{2} Q_2 + Q_3 \right) = 18188 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad (16.24)$$

$$p_{3C} = \frac{\cos \alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)} \left(\frac{1}{2} Q_2 + Q_3 \right) = 25721 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \quad (16.25)$$

Levyihin vaikuttavat kuormat ovat

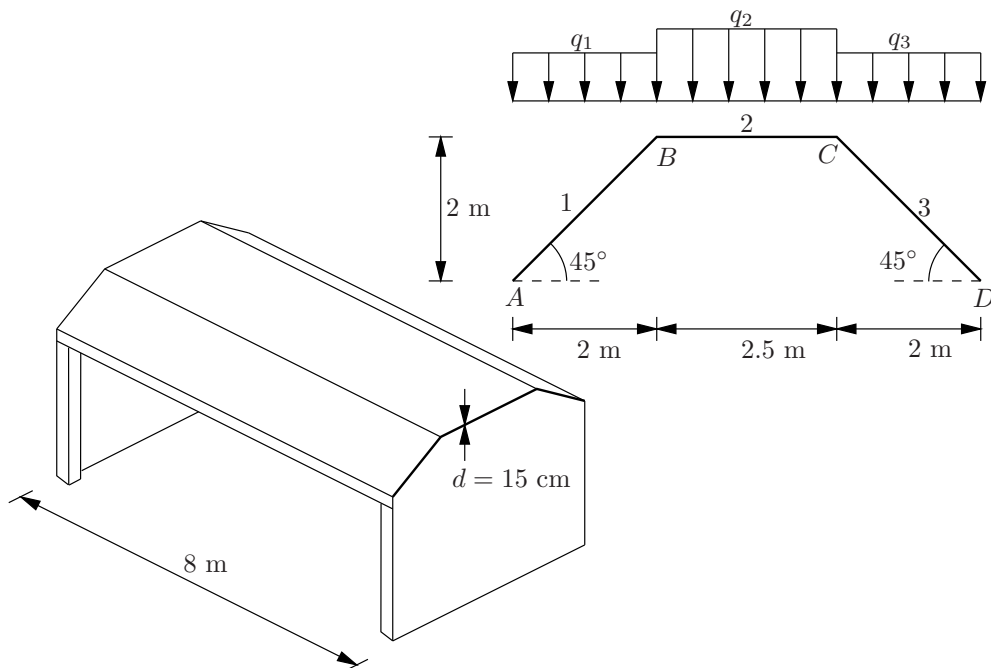
$$p_1 = p_{1B} = 32255 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad (16.26)$$

$$p_2 = -p_{2B} + p_{2C} = -4620 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad (16.27)$$

$$p_3 = -p_{3C} = -25721 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \quad (16.28)$$

Taivutusmomentit jänteen keskellä ($x = 4 \text{ m}$) ovat

$$M_{10} = \frac{p_1 L^2}{8} = 258040 \text{ Nm}, \quad (16.29)$$



Kuva 16.7 Taitekuorikatotos.

$$M_{20} = \frac{p_2 L^2}{8} = -36960 \text{ Nm}, \quad (16.30)$$

$$M_{30} = \frac{p_3 L^2}{8} = -205768 \text{ Nm}. \quad (16.31)$$

Poikkileikkausten pinta-alat ja taivutusvastukset ovat

$$A_1 = 0.424 \text{ m}^2, \quad A_2 = 0.375 \text{ m}^2, \quad A_3 = 0.424 \text{ m}^2, \quad (16.32)$$

$$W_1 = 0.200 \text{ m}^3, \quad W_2 = 0.156 \text{ m}^3, \quad W_3 = 0.200 \text{ m}^3. \quad (16.33)$$

Yhteensopivuusehdoiksi saumoissa saadaan

$$T_A = 0, \quad (16.34)$$

$$\frac{2}{EA_1} T_A + \left(\frac{4}{EA_1} + \frac{4}{EA_2} \right) T_B + \frac{2}{EA_2} T_C = \frac{M_{10}}{EW_1} + \frac{M_{20}}{EW_2}, \quad (16.35)$$

$$\frac{2}{EA_2} T_B + \left(\frac{4}{EA_2} + \frac{4}{EA_3} \right) T_C + \frac{2}{EA_3} T_D = \frac{M_{20}}{EW_2} + \frac{M_{30}}{EW_3}, \quad (16.36)$$

$$T_D = 0 \quad (16.37)$$

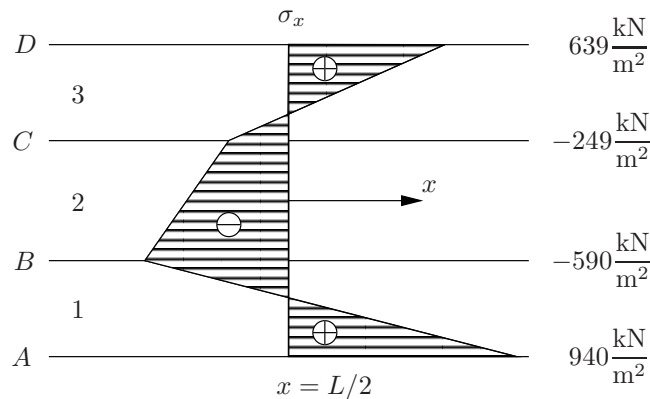
eli

$$\left(\frac{4}{A_1} + \frac{4}{A_2} \right) T_B + \frac{2}{A_2} T_C = \frac{M_{10}}{W_1} + \frac{M_{20}}{W_2}, \quad (16.38)$$

$$\frac{2}{A_2} T_B + \left(\frac{4}{A_2} + \frac{4}{A_3} \right) T_C = \frac{M_{20}}{W_2} + \frac{M_{30}}{W_3}. \quad (16.39)$$

Sijoittamalla lukuarvot tulee yhtälöryhmä

$$20.10T_B + 5.33T_C = 1053277, \quad (16.40)$$



Kuva 16.8 Taitekuorikatoksen normaaliännityksen σ_x jakauma.

$$5.33T_B + 20.10T_C = -1265763, \quad (16.41)$$

josta ratkaistaan

$$T_B = 74335 \text{ N}, \quad T_C = -82714 \text{ N}. \quad (16.42)$$

Jännitykset jänteen keskellä ($x = 4 \text{ m}$) ovat

$$\sigma_{1A} = \frac{M_{10}}{W_1} - \frac{4}{A_1}T_A - \frac{2}{A_1}T_B = 940 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \quad (16.43)$$

$$\sigma_{1B} = -\frac{M_{10}}{W_1} + \frac{2}{A_1}T_A + \frac{4}{A_1}T_B = -590 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \quad (16.44)$$

$$\sigma_{2B} = \frac{M_{20}}{W_2} - \frac{4}{A_2}T_B - \frac{2}{A_2}T_C = -590 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \quad (16.45)$$

$$\sigma_{2C} = -\frac{M_{20}}{W_2} + \frac{2}{A_2}T_B + \frac{4}{A_2}T_C = -249 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \quad (16.46)$$

$$\sigma_{3C} = \frac{M_{30}}{W_3} - \frac{4}{A_3}T_C - \frac{2}{A_3}T_D = -249 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \quad (16.47)$$

$$\sigma_{3D} = -\frac{M_{30}}{W_3} + \frac{2}{A_3}T_C + \frac{4}{A_3}T_D = 639 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}. \quad (16.48)$$

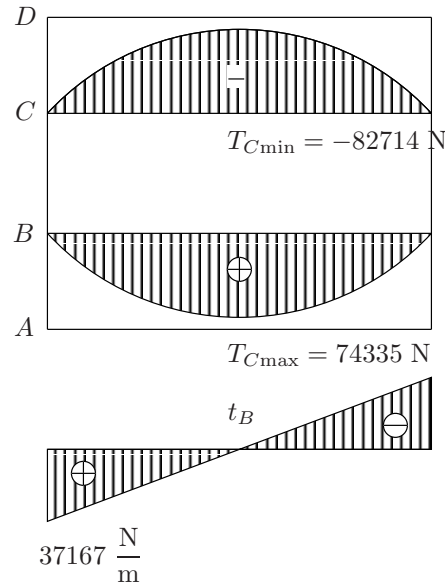
Jännityskomponentin σ_x jakauma, kuva 16.8, poikkeaa palkkiteorialla ratkaistusta jakaumasta. Leikkausvoiman jakauma, kuva 16.9, taitekuoren akselin suunnassa on

$$T(x) = 4T_{\max} \frac{x(L-x)}{L^2}, \quad (16.49)$$

$$t(x) = \frac{dT(x)}{dx} = 4T_{\max} \frac{L-2x}{L^2}, \quad (16.50)$$

ja leikkausjännitys on

$$\tau = \frac{t}{d}. \quad (16.51)$$



Kuva 16.9 Taitekuorikatoksen leikkausvoimat.

16.2 Kuormitus q riippuu pituuskoordinaatista

Johdetaan seuraavaksi likimääräinen laskutapa kalveteorian mukaan samoin otaksumin kuin edellisessä kohdassa tapaukselle, jossa kuorma q riippuu koordinaatista x . Otaksutaan kuitenkin, että q on symmetrinen keskikohdan $x = L/2$ suhteen. Kehitetään $q(x)$ Fourier-sarjaksi

$$q(x) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} q_n \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{L} \quad (16.52)$$

kertoimin

$$q_n = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin \alpha_n x dx, \quad (16.53)$$

missä symmetrian vuoksi nolasta eroavia ovat vain parittomat termit. Kuormituksen jakaminen särmille tehdään kuten edellisessä kohdassa x :n suhteen vakiokuormitukselle. Osalevyä käsitellään palkkiteorian mukaan. Kuorma $p(x)$ on

$$p(x) = p_A(x) + p_B(x). \quad (16.54)$$

Osalevyn differentiaalisen alkion tasapainoehdot ovat, kuva 16.10,

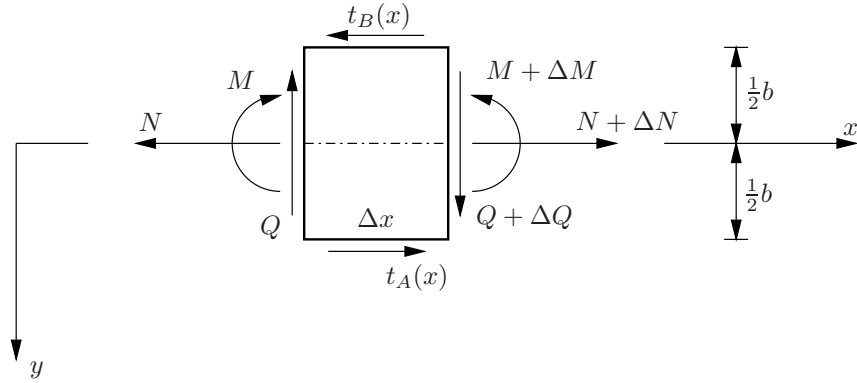
$$\frac{dN}{dx} + t_A - t_B = 0, \quad (16.55)$$

$$\frac{dQ}{dx} + p = 0, \quad (16.56)$$

$$\frac{dM}{dx} - Q + t_A \frac{b}{2} + t_B \frac{b}{2} = 0. \quad (16.57)$$

Esittämällä jännitysresultantit muodossa

$$N(x) = \sum N_n \sin \alpha_n x, \quad (16.58)$$



Kuva 16.10 Osalevyn alkion Δx tasapaino.

$$Q(x) = \sum Q_n \cos \alpha_n x, \quad (16.59)$$

$$M(x) = \sum M_n \sin \alpha_n x, \quad (16.60)$$

$$t_A(x) = \sum t_{An} \sin \alpha_n x, \quad (16.61)$$

$$t_B(x) = \sum t_{Bn} \sin \alpha_n x \quad (16.62)$$

saadaan

$$N_n = -\frac{1}{\alpha_n} (t_{An} - t_{Bn}), \quad (16.63)$$

$$Q_n = \frac{1}{\alpha_n} p_n, \quad (16.64)$$

$$M_n = \frac{1}{\alpha_n} (Q_n - T_{An} \frac{b}{2} - T_{Bn} \frac{b}{2}). \quad (16.65)$$

Kahden osalevyn liitoskohdassa B , kuva 16.11, on voimassa yhteensopivuusehto

$$\varepsilon_{1B} = \varepsilon_{2B}, \quad (16.66)$$

eli

$$\frac{N_{1n}}{EA_1} - \frac{M_{1n} b}{EI_1 2} = \frac{N_{2n}}{EA_2} + \frac{M_{2n} b}{EI_2 2}, \quad (16.67)$$

josta seuraa kolmen leikkausvoiman yhtälö

$$\frac{2}{A_1} t_{An} + \left(\frac{4}{A_1} + \frac{4}{A_2} \right) t_{Bn} + \frac{2}{A_2} t_{Cn} = \frac{1}{\alpha_n} \left(\frac{p_{1n}}{W_1} + \frac{p_{2n}}{W_2} \right), \quad (16.68)$$

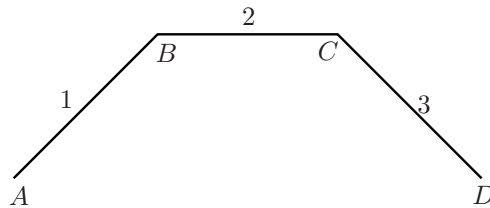
missä

$$W_i = \frac{b_i A_i}{6}, \quad i = 1, 2 \quad (16.69)$$

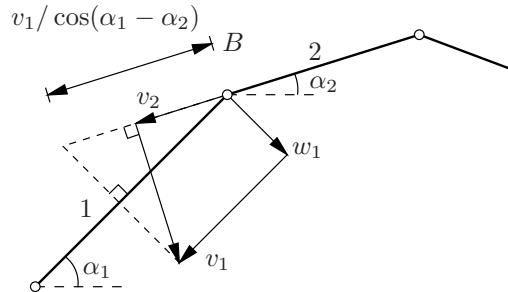
on osapoikkileikkauksen i taivutusvastus.

Särmien siirtymät määritetään laskemalla ensin levyn paikallisen y -akselin suuntainen siirtymä $v(x)$ ratkaisemalla differentiaaliyhtälö

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -M(x). \quad (16.70)$$



Kuva 16.11 Taitekuoren osien ja särmien numerointi.



Kuva 16.12 Taitekuoren särmän siirtymät.

Sijoittamalla tähän

$$v(x) = \sum v_n \sin \alpha_n x, \quad (16.71)$$

$$M(x) = \sum M_n \sin \alpha_n x, \quad (16.72)$$

tulee

$$v_n = \frac{1}{\alpha_n} \frac{M_n}{EI} = \frac{1}{\alpha_n^4 EI} \left[p_n - \alpha_n \left(t_{An} \frac{b}{2} + t_{Bn} \frac{b}{2} \right) \right]. \quad (16.73)$$

Kuvan 16.12 perusteella saadaan levyn tasoa vastaan kohtisuorat siirtymät

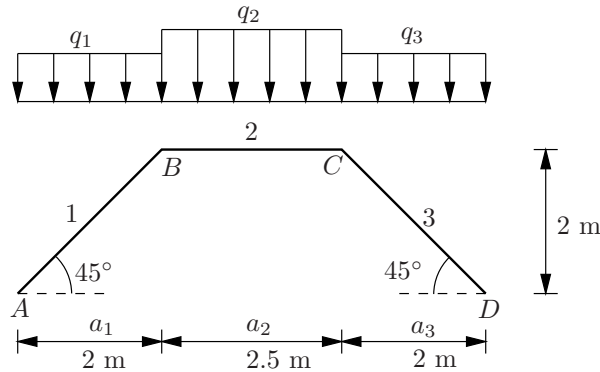
$$\begin{aligned} w_2 &= \left[\frac{v_1}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)} - v_2 \right] \cot(\alpha_1 - \alpha_2) \\ &= \frac{v_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} - v_2 \cot(\alpha_1 - \alpha_2), \end{aligned} \quad (16.74)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \left[v_1 - \frac{v_2}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)} \right] \cot(\alpha_1 - \alpha_2) \\ &= v_1 \cot(\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{v_2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}. \end{aligned} \quad (16.75)$$

Esimerkki 16.2 Määritetään kuvan 16.13 taitekuorikatoksen jännitykset.

Lasketaan edellisen kohdan esimerkki uudelleen sarjakehitelmän avulla. Tasaisen kuorman Fourier-sarjan kertoimet ovat

$$q_n = \frac{2}{L} \int_0^L q_0 \sin \alpha_n dx = \begin{cases} \frac{4q_0}{\alpha_n L}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots, \end{cases} \quad (16.76)$$



Kuva 16.13 Taitekuorikatosesimerkin ratkaisu Fourier-sarjojen avulla.

missä q_0 on tasaisen kuorman intensiteetti.

Soveltamalla kolmen leikkausvoiman yhtälöä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{A_1} + \frac{4}{A_2} & \frac{2}{A_2} \\ \frac{2}{A_2} & \frac{4}{A_2} + \frac{4}{A_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{Bn} \\ t_{Cn} \end{bmatrix} = \frac{6}{\alpha_n} \begin{bmatrix} \frac{p_{1n}}{b_1 A_1} + \frac{p_{2n}}{b_2 A_2} \\ \frac{p_{2n}}{b_2 A_2} + \frac{p_{3n}}{b_3 A_3} \end{bmatrix}, \quad (16.77)$$

johon sijoitetaan lukuarvot

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.424 \text{ m}^2, & A_2 &= 0.375 \text{ m}^2, & A_3 &= 0.424 \text{ m}^2, \\ b_1 &= 2.828 \text{ m}, & b_2 &= 2.5 \text{ m}, & b_3 &= 2.828 \text{ m}, \\ p_1 &= 32255 \frac{\text{N}}{\text{m}}, & p_2 &= -4620 \frac{\text{N}}{\text{m}}, & p_3 &= -25721 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \end{aligned} \quad (16.78)$$

Kuorman Fourier-sarjan kertoimet ovat

$$p_{in} = \frac{4}{\alpha_n L} p_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{ja} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (16.79)$$

Sijoittamalla lukuarvot yhteensopivuusyhtälöihin tulee

$$\begin{bmatrix} 20.10 & 5.33 \\ 5.33 & 20.10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{Bn} \\ t_{Cn} \end{bmatrix} = \frac{24L}{n^2 \pi^2} \begin{bmatrix} \frac{32255}{2.828 \cdot 0.424} - \frac{4620}{2.5 \cdot 0.375} \\ -\frac{4620}{2.5 \cdot 0.375} - \frac{25721}{2.828 \cdot 0.424} \end{bmatrix}, \quad (16.80)$$

josta ratkaistaan

$$\begin{bmatrix} t_{Bn} \\ t_{Cn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3117 \\ -3456 \end{bmatrix} \frac{96}{\pi^2 n^2}. \quad (16.81)$$

Merkitään, että leikkausvoimat tekijää $96/(\pi^2 n^2)$ vaille ovat

$$\tilde{t}_B = 311, \quad \tilde{t}_C = -3456. \quad (16.82)$$

Osalevyn ala- ja yläreunaan vaikuttavien jakautuneiden leikkausvoimien Fourier-sarjat ovat

$$t_A(x) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} t_{An} \cos \alpha_n x, \quad (16.83)$$

$$t_B(x) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} t_{Bn} \cos \alpha_n x. \quad (16.84)$$

Koska

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad (16.85)$$

saadaan leikkausvoimien maksimiarvoiksi kohdassa $x = 0$

$$t_B(0) = 37400 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad t_C(0) = -41480 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \quad (16.86)$$

Jännityskomponentti σ_x jänteen keskellä on

$$\begin{aligned} \sigma_x \left(\frac{L}{2} \right) &= \sum_{n=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{N_n}{A} \pm \frac{M_n}{W} \right] \\ &= \frac{1}{A} \sum_{n=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[-\frac{t_{Bn} - t_{Cn}}{\alpha_n} \pm \frac{6p_n}{\alpha_n^2 b} \mp 3 \frac{t_{Bn} + t_{Cn}}{\alpha_n} \right] \\ &= \frac{1}{A} \sum_{n=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[\pm \frac{24p}{\alpha_n^3 L b} + (-1 \mp 3) \frac{t_{Bn}}{\alpha_n} + (1 \mp 3) \frac{t_{Cn}}{\alpha_n} \right] \end{aligned} \quad (16.87)$$

eli

$$\sigma_x \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{1}{A} \sum_{n=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n^3} \frac{L^2}{\pi^3} \left[\pm \frac{24p}{b} + 12(-1 \mp 3) \tilde{t}_B + 12(1 \mp 3) \tilde{t}_C \right], \quad (16.88)$$

missä

$$\sum_{n=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n^3} = \frac{\pi^3}{32}. \quad (16.89)$$

Levyssä 1 on jännitys

$$\sigma_x \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{1}{0.424} \left(\pm \frac{24 \cdot 32255}{2.828} + 12 \cdot 3117(1 \mp 3) \right) \frac{8^2}{32} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \quad (16.90)$$

Reunoilla A ja B

$$\sigma_{xA} \left(\frac{L}{2} \right) = 940 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \quad \sigma_{xB} \left(\frac{L}{2} \right) = -590 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}. \quad (16.91)$$

Levyssä 2

$$\sigma_{xB} \left(\frac{L}{2} \right) = -590 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \quad \sigma_{xC} \left(\frac{L}{2} \right) = -249 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}. \quad (16.92)$$

Levyssä 3

$$\sigma_{xC} \left(\frac{L}{2} \right) = -249 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \quad \sigma_{xD} \left(\frac{L}{2} \right) = 639 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}. \quad (16.93)$$

Todetaan, että jännitykset ovat samat kuin edellisen kohdan esimerkissä.

Luku 17

Pyörähdyskuoren ratkaisu elementtimenetelmällä

Pyörähdysymmetriselle kuorelle on edellä johdettu pyörähdysymmetrisen kuormituksen tapauksessa muodonmuutosten kaavat. Koordinaattiviivan α suuntainen muodonmuutos on

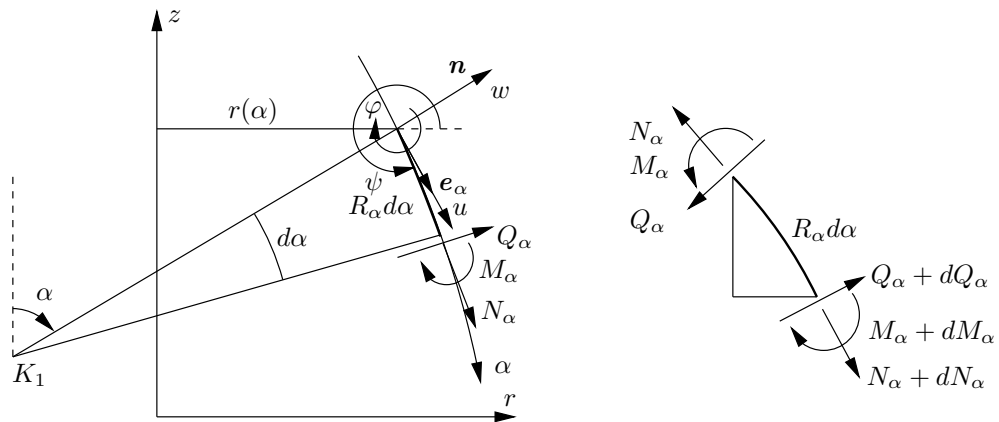
$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{R_\alpha} \frac{du}{d\alpha} + \frac{w}{R_\alpha}, \quad (17.1)$$

missä u on α :n suuntainen siirtymä ja w on kuoren normaalin suuntainen siirtymä. Koordinaattiviivan β suuntainen muodonmuutos on

$$\begin{aligned} \varepsilon_\beta &= \frac{1}{R_\beta} (u \cot \alpha + w) \\ &= \frac{u \cos \alpha + w \sin \alpha}{r}. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Pyörähdysymmetrisen tapauksen käyristymien kaavat ovat

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{R_\alpha} \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{1}{R_\alpha} \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{R_\alpha} \left(u - \frac{dw}{d\alpha} \right) \right], \quad (17.3)$$



Kuva 17.1 Pyörähdyskuoren siirtymä- ja voimasuureet.

$$\begin{aligned}\kappa_\beta &= \frac{1}{R_\alpha R_\beta \sin \alpha} \frac{d(R_\beta \sin \alpha)}{d\alpha} \left[\frac{1}{R_\alpha} \left(u - \frac{dw}{d\alpha} \right) \right] \\ &= \frac{\cot \alpha}{R_\alpha R_\beta} \left(u - \frac{dw}{d\alpha} \right).\end{aligned}\tag{17.4}$$

Hooken lain mukaan kalvovoimien ja venymien väliset yhteydet ovat

$$N_\alpha = \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\varepsilon_\alpha + \nu \varepsilon_\beta),\tag{17.5}$$

$$N_\beta = \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\varepsilon_\beta + \nu \varepsilon_\alpha),\tag{17.6}$$

missä E on kimmokerroin, ν on Poissonin luku ja h on kuoren paksuus. Vastaavasti taivutusmomenttien ja käyritysmien väliset yhteydet ovat

$$M_\alpha = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} (\kappa_\alpha + \nu \kappa_\beta),\tag{17.7}$$

$$M_\beta = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} (\kappa_\beta + \nu \kappa_\alpha).\tag{17.8}$$

Kuoren taivutusjäykkyys on

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.\tag{17.9}$$

17.1 Kaksisolmuinen kuusivapausasteinen ohuen kuoren elementti

Korvataan seuraavassa pyörähdyskuoren kaareva reuna tai meridiaaniviiva kaksisolmuisilla suoraviivaisilla elementeillä. Tästä aiheutuva virhe pienenee elementtijakoa tihennettäessä. Otetaan koordinaatin α sijasta käyttöön fysikaalinen koordinaatti, kaarenpituus s , jonka differentiaali on

$$ds = R_\alpha d\alpha.\tag{17.10}$$

Suoraviivaisen elementin tapauksessa

$$R_\alpha = \infty.\tag{17.11}$$

Muodonmuutosten kaavat yksinkertaistuvat suoraviivaisen pyörähdys- tai kartiokuoren tapauksessa muotoon

$$\varepsilon_s = \frac{du}{ds},\tag{17.12}$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{u \cos \alpha + w \sin \alpha}{r},\tag{17.13}$$

$$\kappa_s = -\frac{d^2 w}{ds^2},\tag{17.14}$$

$$\kappa_\beta = -\frac{\cos \alpha}{r} \frac{dw}{ds}.\tag{17.15}$$

Otetaan vielä kulman α sijasta käyttöön kulma ψ , kuva 17.1, jolloin päädytään tasokehän yhteydestä tuttuun koordinaatistoon. Kartiokuoren muodonmuutosten kaavat lausuttuina kulman $\psi = 2\pi - \alpha$ avulla ovat

$$\varepsilon_s = \frac{du}{ds}, \quad (17.16)$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{u \cos \psi - w \sin \psi}{r}, \quad (17.17)$$

$$\kappa_s = -\frac{d^2w}{ds^2}, \quad (17.18)$$

$$\kappa_\beta = -\frac{\cos \psi}{r} \frac{dw}{ds}. \quad (17.19)$$

Interpoloidaan siirtymää u lineaarisilla polynomeilla kaavalla

$$u(\xi) = (1 - \xi)u_1 + \xi u_2 \quad (17.20)$$

eli

$$u(\xi) = N_1^u(\xi)u_1 + N_2^u(\xi)u_2, \quad (17.21)$$

missä $N_1(\xi)$, $N_2(\xi)$ ovat muotofunktiot ja u_1 , u_2 ovat solmupistesiertymät. Taipumaa w interpoloidaan vastaavalla tavalla kolmannen asteen polynomeilla muodossa

$$w(\xi) = N_1^w(\xi)w_1 + N_2^w(\xi) \left(\frac{dw}{ds} \right)_1 + N_3^w(\xi)w_2 + N_4^w(\xi) \left(\frac{dw}{ds} \right)_2. \quad (17.22)$$

Interpolaatiokaavoissa on otettu käyttöön laaduton koordinaatti $\xi \in [0, 1]$,

$$\xi = \frac{s}{L}, \quad (17.23)$$

missä L on elementin pituus. Siirtymien interpolaatiopolynomit eli muotofunktiot ovat

$$N_1^u(\xi) = 1 - \xi, \quad N_2^u(\xi) = \xi, \quad (17.24)$$

$$N_1^w(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad N_2^w(\xi) = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L, \quad (17.25)$$

$$N_3^w(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad N_4^w(\xi) = (-\xi^2 + \xi^3)L.$$

Matriisimerkinnöin voidaan interpolaatiokaavat kirjoittaa muotoon

$$\begin{bmatrix} u(\xi) \\ w(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^u(\xi) & 0 & 0 & N_2^u(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & N_1^w(\xi) & N_2^w(\xi) & 0 & N_3^w(\xi) & N_4^w(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ w'_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ w'_2 \end{bmatrix}. \quad (17.26)$$

Lyhyemmin merkittynä

$$\begin{bmatrix} u(\xi) \\ w(\xi) \end{bmatrix} = \mathbf{N}(\xi)\mathbf{q}. \quad (17.27)$$

Vektori \mathbf{q} sisältää solmujen 1 ja 2 tuntemattomat vapausasteet u_i , w_i ja w'_i , $i = 1, 2$ lausuttuna elementin paikallisessa koordinaatistossa. Edellä on käytetty lyhennysmerkintää

$$w'_i \equiv \left(\frac{dw}{ds} \right)_i. \quad (17.28)$$

Kootaan muodonmuutokset ja käyritymät vektoreihin

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\beta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_s \\ \kappa_\beta \end{bmatrix} \quad (17.29)$$

ja elementin solmujen siirtymävapausasteet vektoriin

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix}. \quad (17.30)$$

Sijoittamalla siirtymien interpolaatiokaavat muodonmuutosten ja siirtymien välisiin differentiaaliyhtälöihin, ns. kinemaattisiin yhtälöihin tulee

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{k1} & \mathbf{B}_{k2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{B}_k \mathbf{q}, \quad (17.31)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{t1} & \mathbf{B}_{t2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{B}_t \mathbf{q}, \quad (17.32)$$

missä

$$\mathbf{B}_{k1} = \begin{bmatrix} -1/L & 0 & 0 \\ (1-\xi) \cos \psi/r & -(1-3\xi^2+2\xi^3) \sin \psi/r & -L(\xi-2\xi^2+\xi^3) \sin \psi/r \end{bmatrix}, \quad (17.33)$$

$$\mathbf{B}_{k2} = \begin{bmatrix} 1/L & 0 & 0 \\ \xi \cos \psi/r & -(3\xi^2-2\xi^3) \sin \psi/r & -L(-\xi^2+\xi^3) \sin \psi/r \end{bmatrix}, \quad (17.34)$$

$$\mathbf{B}_{t1} = \begin{bmatrix} 0 & (6-12\xi)/L^2 & (4-6\xi)/L \\ 0 & (6\xi-6\xi^2) \cos \psi/(rL) & (-1+4\xi-3\xi^2) \cos \psi/r \end{bmatrix}, \quad (17.35)$$

$$\mathbf{B}_{t2} = \begin{bmatrix} 0 & (-6+12\xi)/L^2 & (2-6\xi)/L \\ 0 & (-6\xi+6\xi^2) \cos \psi/(rL) & (2\xi-3\xi^2) \cos \psi/r \end{bmatrix}, \quad (17.36)$$

indeksi k viittaa kalvotilaan ja indeksi t taivutustilaan. Myös sädettä r interpoloidaan lineaarisilla polynomeilla kaavalla

$$r(\xi) = (1-\xi)x_1 + \xi x_2, \quad (17.37)$$

missä $x_1 = r_1$ ja $x_2 = r_2$ ovat säteen r arvot solmuissa $i = 1, 2$.

Integroimalla kuoren paksuuden yli saadaan muodonmuutosenergian lauseke muotoon

$$\begin{aligned} U &= U_k + U_t \\ &= \frac{1}{2} \int_A (N_s \varepsilon_s + N_\beta \varepsilon_\beta) dA + \frac{1}{2} \int_A (M_s \kappa_s + M_\beta \kappa_\beta) dA, \end{aligned} \quad (17.38)$$

missä pyörähdyskuoren tapauksessa pinta-ala -alkio on

$$dA = 2\pi r L d\xi. \quad (17.39)$$

Lausumalla muodonmuutosenergian lausekkeessa yhden elementin e alueella voimasuureet Hooken lain kautta muodonmuutosten avulla eli

$$\begin{bmatrix} N_s \\ N_\beta \end{bmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\beta \end{bmatrix} \equiv \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (17.40)$$

$$\begin{bmatrix} M_s \\ M_\beta \end{bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_s \\ \kappa_\beta \end{bmatrix} \equiv \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}, \quad (17.41)$$

ja muodonmuutokset solmuvapausasteiden avulla kinemaattisilla yhtälöillä saadaan

$$\begin{aligned} U &= U_k + U_t \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left(\int_0^1 \mathbf{B}_k^T \mathbf{C} \mathbf{B}_k 2\pi r L d\xi \right) \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left(\int_0^1 \mathbf{B}_t^T \mathbf{D} \mathbf{B}_t 2\pi r L d\xi \right) \mathbf{q} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_k \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_t \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (17.42)$$

missä

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_k + \mathbf{K}_t \quad (17.43)$$

on pyörähdyskuorielementin jäykkyyismatriisi.

Jäykkyyismatriisin alkioiden määrittämisessä tarvittavat integraalit lasketaan numeerisesti kaavalla

$$I = \int_0^1 f(\eta) d\eta \approx \sum_1^N w_i f(\eta_i), \quad (17.44)$$

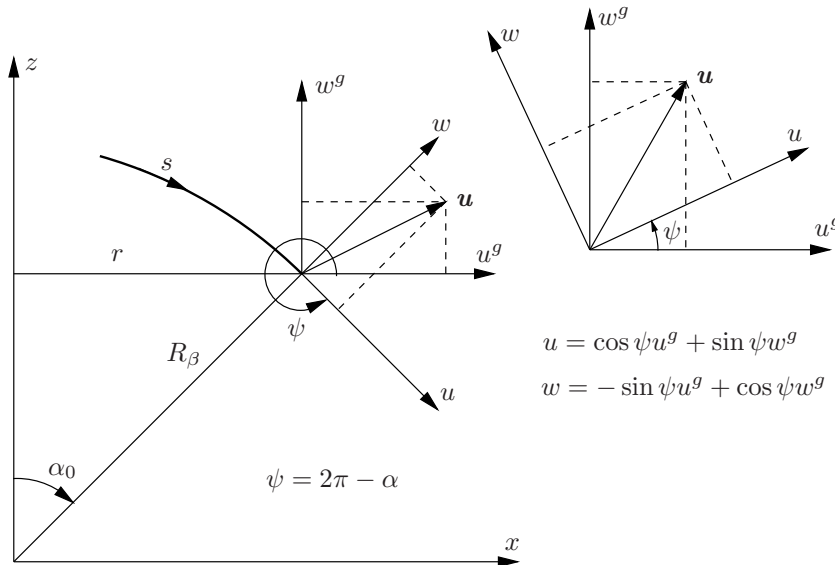
missä η_i ovat integrointipisteet ja w_i niihin liittyvät painokertoimet. Gaussin menetelmän integrointipisteet annetaan tavallisesti koordinaatin $\eta \in [-1, 1]$ avulla, joten tarvitaan lisäksi muunnoskaava $\xi = \frac{1}{2}(1 + \eta)$.

Rakenteen jäykkyyismatriisi kootaan sijoittelusummauksella elementtien osuuksista täsmälleen samalla tavalla kuin kehärakenteelle, koska vapausasteet ovat kummassakin tapauksessa samat. Ennen rakenteen jäykkyyismatriisin kokoamista täytyy elementtien paikallisten koordinaatistojen suhteen muodostetut jäykkyyismatriisit muuntaa globaaliseen rakennekoordinaatistoon. Vapausasteiden väliseksi muunnoskaavaksi johdetaan kuvan 17.2 avulla

$$\begin{bmatrix} u \\ w \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^g \\ w^g \\ (w')^g \end{bmatrix}, \quad (17.45)$$

missä indeksi g viittaa globaaliseen koordinaatistoon. Muunnoskaava on lyhyemmin merkittynä

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}\mathbf{q}^g. \quad (17.46)$$



Kuva 17.2 Pyörähdyskuoren siirtymävapausasteiden muunnokset.

Solmuissa $i = 1, 2$ muunnoskaava on

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{q}_i^g, \quad (17.47)$$

jossa

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 = \mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (17.48)$$

Jakamalla jäykkyyismatriisi \mathbf{K} osiin solmujen $i = 1, 2$ mukaisesti saadaan

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T & \mathbf{q}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \quad (17.49)$$

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{q}_1^g)^T & (\mathbf{q}_2^g)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{T}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^g \\ \mathbf{q}_2^g \end{bmatrix},$$

joten jäykkyyismatriisin muunnoskaava on

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^g & \mathbf{K}_{12}^g \\ \mathbf{K}_{21}^g & \mathbf{K}_{22}^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{T}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix}. \quad (17.50)$$

Edellä $\mathbf{0}$ on 3×3 nollamatriisi.

17.1.1 Kuormavektori

Tehtyjen otaksujen mukaisesti kuormien täytyy olla pyörähdysymmetrisiä. Solmun kohdalla vaikuttava ja leveyspiiriä pitkin tasanjakautunut viivakuorma voidaan jakaa globaalisten x - ja z -akseleiden suuntaisiin komponentteihin ja lisätä ne sellaisinaan kuormavektoriin, kun viivakuorman intensiteetti on ensin kerrottu tekijällä $2\pi r$.

Tutkitaan seuraavaksi kuormavektorin muodostamista, kun jakautuneen kuorman komponentit normaalin n ja koordinaatin α tai s suuntaan ovat p_n ja p_s . Ulkoisen voiman potentiaali on

$$V = - \int [p_s(s)u(s) + p_n(s)w(s)] 2\pi r(s) ds. \quad (17.51)$$

Yhden elementin alueella saadaan ottamalla käyttöön koordinaatti ξ

$$V = - \int_0^1 [p_s(\xi)u(\xi) + p_n(\xi)w(\xi)] 2\pi r(\xi)L d\xi. \quad (17.52)$$

Interpoloidaan jakautuneita kuormia lineaarisilla polynomeilla

$$p_s(\xi) = (1 - \xi)p_{s1} + \xi p_{s2}, \quad p_n(\xi) = (1 - \xi)p_{n1} + \xi p_{n2}, \quad (17.53)$$

missä p_{si} ja p_{ni} ovat kuormien intensiteettien solmuarvot.

Sijoittamalla siirtymien interpolaatiokaavat potentiaalin kaavaan (17.52) saadaan

$$V = -\mathbf{q}^T \mathbf{f}, \quad (17.54)$$

missä (ekvivalenttinen) kuormavektori \mathbf{f} on

$$\mathbf{f} = \int_0^1 \begin{bmatrix} N_1^u(\xi)p_s(\xi) \\ N_1^w(\xi)p_n(\xi) \\ N_2^w(\xi)p_n(\xi) \\ N_2^u(\xi)p_s(\xi) \\ N_3^w(\xi)p_n(\xi) \\ N_4^w(\xi)p_n(\xi) \end{bmatrix} 2\pi r(\xi) d\xi. \quad (17.55)$$

Integraali $\int_0^1 f(\xi) d\xi$ lasketaan jälleen numeerisesti.

Sylinterikuoren tapauksessa säde r on vakio, ja jäykkyysmatriin ja kuormavektorin termit voidaan laskea helposti suljetussa muodossa.

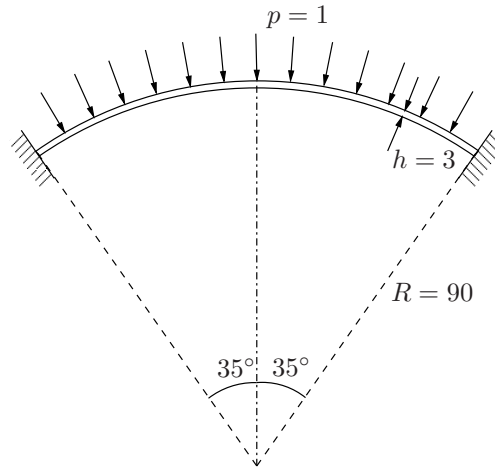
Esimerkki 17.1 *Analysoidaan jäykästi tuettua tasaisen paineen kuormittamaa pallokalottia, jonka reunakulma on $\alpha = 35^\circ$.*

Lasketaan pallokalotin keskipisteen taipuma jakamalla meridiaani $\alpha \in [0, 35^\circ]$ yhtäpitkiin elementteihin, joiden lukumäärä eri malleissa on 10, 20, 40 ja 80. Otaksutaan lukuarvot $E = 10^6$, $\nu = 1/6$, $R = 90$, (pallokalotin säde), $h = 3$. Kuormana on tasainen paine $p = 1$. Eri elementtimallien antamat taipumat on esitetty taulukossa 17.1. Jäykkyysmatriisin ja kuormavektorin termit on integroitu Gaussin kolmen pisteen kaavalla.

17.2 Kaksisolmuinen ohuen laatan elementti

Pienten muodonmuutosten tapauksessa tarvitaan kinemaattisista yhtälöistä vain laatan käyritysmien kaavoja. Ympyrälaatan käyritysmien kaavat ovat

$$\kappa_s = -\frac{d^2 w}{ds^2}, \quad (17.56)$$



Kuva 17.3 Pallokalotti, tasainen paine $p = 1$.

Taulukko 17.1 Pallokalotin keskipisteen taipuma.

Elem. lkm	w
10	$-0.1639451 \times 10^{-2}$
20	$-0.1639593 \times 10^{-2}$
40	$-0.1639724 \times 10^{-2}$
80	$-0.1639771 \times 10^{-2}$

$$\kappa_\beta = -\frac{1}{r} \frac{dw}{ds}. \quad (17.57)$$

Taipumaa w interpoloidaan samalla tavalla kuin kartiokuorielementin tapauksessa kolmannen asteen polynomeilla kaavalla

$$w(\xi) = N_1^w(\xi)w_1 + N_2^w(\xi) \left(\frac{dw}{ds} \right)_1 + N_3^w(\xi)w_2 + N_4^w(\xi) \left(\frac{dw}{ds} \right)_2, \quad (17.58)$$

missä $\xi = s/L \in [0, 1]$, L on elementin pituus ja siirtymien muotofunktiot ovat

$$\begin{aligned} N_1^w(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, & N_2^w(\xi) &= (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L, \\ N_3^w(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3, & N_4^w(\xi) &= (-\xi^2 + \xi^3)L. \end{aligned} \quad (17.59)$$

Matriisimuodossa interpolaatiokaava on

$$u(\xi)w(\xi) = \begin{bmatrix} N_1^w(\xi) & N_2^w(\xi) & N_3^w(\xi) & N_4^w(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_1' \\ w_2 \\ w_2' \end{bmatrix} \quad (17.60)$$

eli

$$w(\xi) = \mathbf{N}(\xi)\mathbf{q}. \quad (17.61)$$

Vektori \mathbf{q} sisältää nyt solmujen 1 ja 2 tuntemattomat vapausasteet w_i ja w_i' , $i = 1, 2$. Edellä on jälleen merkitty

$$w_i' \equiv \left(\frac{dw}{ds} \right)_i. \quad (17.62)$$

Kokoamalla käyritymän komponentit vektoriin $\boldsymbol{\kappa}$ ja solmuvapausasteet vektoriin \mathbf{q} eli

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_s \\ \kappa_\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \quad (17.63)$$

ja sijoittamalla taipuman interpolaatiokaava käyritymien ja taipuman välisiin differentiaaliyhtälöihin tulee

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{B}\mathbf{q}, \quad (17.64)$$

missä

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} (6 - 12\xi)/L^2 & (4 - 6\xi)/L \\ (6\xi - 6\xi^2)/(rL) & (-1 + 4\xi - 3\xi^2)/r \end{bmatrix}, \quad (17.65)$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} (-6 + 12\xi)/L^2 & (2 - 6\xi)/L \\ (-6\xi + 6\xi^2)/(rL) & (2\xi - 3\xi^2)/r \end{bmatrix}. \quad (17.66)$$

Säteen lineaarinen interpolaatiokaava on

$$r(\xi) = (1 - \xi)r_1 + \xi r_2, \quad (17.67)$$

missä $x_1 = r_1$ ja $x_2 = r_2$ ovat säteen solmuarvot.

Laatan paksuuden yli integroitu muodonmuutosenergian lauseke on

$$U = \frac{1}{2} \int_A (M_s \kappa_s + M_\beta \kappa_\beta) dA, \quad (17.68)$$

missä

$$dA = 2\pi r L d\xi. \quad (17.69)$$

Lausumalla elementin e alueella momentit M_s ja M_β Hooken lain kautta käyritymien avulla kaavalla

$$\begin{bmatrix} M_s \\ M_\beta \end{bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_s \\ \kappa_\beta \end{bmatrix} \equiv \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} \quad (17.70)$$

ja käyritymät edelleen kinemaattisilla yhtälöillä $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}\mathbf{q}$ tulee

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left(\int_0^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} 2\pi r L d\xi \right) \mathbf{q}, \quad (17.71)$$

missä

$$\mathbf{K} = \int_0^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} 2\pi r L d\xi \quad (17.72)$$

on pyörähdyssymmetrisen laattaelementin jäykkyyismatriisi. Jäykkyyismatriisin alkioiden integraalit lasketaan numeerisesti kuten kartiokuorielementin tapauksessa.

Solmun kohdalla vaikuttava pyörähdyssymmetrinen viivakuorma kerrotaan tekijällä $2\pi r$ ja lisätään kuormavektoriin kyseisen solmun taipumavapausasteen kohdalle. Vastaavalla tavalla menetellään pyörähdyssymmetrisen momenttikuorman \bar{m}_s tapauksessa. Kuorma lisätään nyt kiertymävapausasteen kohdalle.

Jakautuneen pyörähdyssymmetrisen kuorman p_n tapauksessa ulkoisen voiman potentiaali elementissä e on

$$V^e = - \int_0^L p_n(s)w(s) 2\pi r(s) ds = - \int_0^1 p_n(\xi)w(\xi) 2\pi r(\xi)L d\xi. \quad (17.73)$$

Sijoittamalla taipuman interpolaatiokaava $w = \mathbf{N}\mathbf{q}$ ja kuormituspaineen intensiteetin lineaarisen interpolaation kaava

$$p_n(\xi) = (1 - \xi)p_{n1} + \xi p_{n2}, \quad (17.74)$$

missä p_{n1} ja p_{n2} ovat paineen solmuarvot, potentiaalin V^e kaavaan saadaan

$$V^e = -\mathbf{q}^T \mathbf{f}^e, \quad (17.75)$$

missä elementin e ekvivalenttinen kuormavektori \mathbf{f}^e on

$$\mathbf{f}^e = \int_0^1 \begin{bmatrix} N_1^w(\xi)p_n(\xi) \\ N_2^w(\xi)p_n(\xi) \\ N_3^w(\xi)p_n(\xi) \\ N_4^w(\xi)p_n(\xi) \end{bmatrix} 2\pi r(\xi) d\xi. \quad (17.76)$$

Esimerkki 17.2 *Lasketaan vapaasti tuetun ja jäykästi tuetun ympyrälaatan keskipisteen taipuma laatan keskellä olevasta pistekuormasta P .*

a) Vapaasti tuetun ympyrälaatan keskipisteen taipuman tarkka, analyttinen ratkaisu pistekuorman tapauksessa on

$$w = \frac{Pa^2}{16\pi D} \frac{3 + \nu}{1 + \nu}, \quad (17.77)$$

missä a on laatan säde. Otaksumalla lukuarvot $E = 2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\nu = 0.3$, $a = 10 \text{ mm}$, $h = 0.1 \text{ mm}$ ja $P = 1 \text{ N}$ tulee

$$w = 0.275735938 \text{ mm}. \quad (17.78)$$

Jakamalla säde kymmeneen yhtä pitkään elementtiin saadaan elementtimenetelmän tulos

$$w = 0.2756140 \text{ mm}, \quad (17.79)$$

jossa on virhettä 0.04 %.

b) Jäykästi tuetun ympyrälaatan keskipisteen taipuma pistekuormasta on

$$w = \frac{Pa^2}{16\pi D}. \quad (17.80)$$

Otaksumalla $E = 2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\nu = 0.3$, $a = 10 \text{ mm}$, $h = 0.1 \text{ mm}$ ja $P = 1 \text{ N}$ tulee

$$w = 0.108623248 \text{ mm}. \quad (17.81)$$

Yhden elementin mallilla saadaan tulos

$$w = 0.09655400 \text{ mm}, \quad (17.82)$$

jonka virhe on noin 11 %. Jakamalla säde kymmeneen yhtä pitkään elementtiin saadaan elementtimenetelmällä keskipisteen taipuman arvo

$$w = 0.1085013 \text{ mm}, \quad (17.83)$$

jossa on virhettä noin 0.1 %. Kahdenkymmenen tasapituisten elementin mallilla saadaan tulos

$$w = 0.1085928 \text{ mm}, \quad (17.84)$$

jonka virhe on noin 0.03 %.

Esimerkki 17.3 *Lasketaan vapaasti tuetun ja jäykästi tuetun ympyrälaatan keskipisteen taipuma tasaisesta kuormasta $p_n = p$.*

a) Vapaasti tuetun, tasaisen kuorman kuormittaman ympyrälaatan keskipisteen taipuman analyttinen ratkaisu on

$$w = \frac{pa^4}{64D} \frac{5 + \nu}{1 + \nu}. \quad (17.85)$$

Otaksumalla $E = 2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\nu = 0.3$, $a = 10 \text{ mm}$, $h = 0.1 \text{ mm}$ ja $p = 1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ tulee

$$w = 34.78125 \text{ mm}. \quad (17.86)$$

Kymmeneen yhtä pitkän elementin mallilla lasketaan tulos

$$w = 34.78134 \text{ mm}, \quad (17.87)$$

jossa on virhettä vain 0.00026 %.

b) Jäykästi tuetun ympyrälaatan keskipisteen taipuma tasaisesta kuormasta on

$$w = \frac{pa^4}{64D}. \quad (17.88)$$

Otaksumalla $E = 2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\nu = 0.3$, $a = 10 \text{ mm}$, $h = 0.1 \text{ mm}$ ja $p = 1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ tulee

$$w = 8.53125 \text{ mm}. \quad (17.89)$$

Yhden elementin mallilla saadaan tulos

$$w = 9.1 \text{ mm}, \quad (17.90)$$

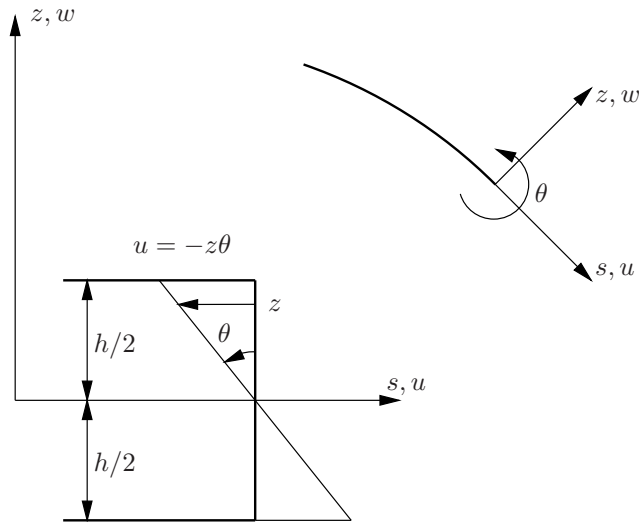
jossa on virhettä noin 6.7 %. Jakamalla säde kymmeneen yhtä pitkään elementtiin saadaan

$$w = 8.531339 \text{ mm}, \quad (17.91)$$

jossa on virhettä noin 0.001 %. Kahdenkymmenen tasapituisten elementin mallilla saadaan tulos

$$w = 8.531256 \text{ mm}, \quad (17.92)$$

jonka virhe on enää 0.00007 %.



Kuva 17.4 Paksuseinäisen pyörähdyskuoren kiertymä θ .

17.3 Paksun pyörähdyskuoren elementti

Poikittaisen leikkausmuodonmuutoksen huomioonottavan eli ns. paksun kuoren teorian muodonmuutosten kaavat ovat kartiokuorelle

$$\varepsilon_s = \frac{du}{ds}, \quad (17.93)$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{u \cos \psi - w \sin \psi}{r}, \quad (17.94)$$

$$\gamma_{sz} = \frac{dw}{ds} - \theta, \quad (17.95)$$

$$\kappa_s = -\frac{d\theta}{ds}, \quad (17.96)$$

$$\kappa_\beta = -\frac{\cos \psi}{r} \theta, \quad (17.97)$$

missä θ on kuoren poikkileikkauksen $s = \text{vakio}$ kiertymä, kuva 17.4.

Paksuseinäisen kuoren leikkauksen $s = \text{vakio}$ mielivaltaisen pisteen (s, z) siirtymät ovat kuvan 17.4 mukaan

$$U(s, z) = u(s) - z\theta(s), \quad W(s, z) = w(s), \quad (17.98)$$

missä $u(s)$ ja $w(s)$ ovat kuoren keskipinnan $z = 0$ siirtymät. Ohuen kuoren tapauksessa $dw/ds = \theta$, ja tällöin päädytään aiemmin esitettyihin ohuen pyörähdyskuoren muodonmuutosten kaavoihin (17.16), ..., (17.19).

Seinämän paksuuden h yli integroitu kartiomaisen kuoren muodonmuutosenergian lauseke on

$$\begin{aligned} U &= U_k + U_t + U_l \\ &= \frac{1}{2} \int_A (N_s \varepsilon_s + N_\beta \varepsilon_\beta) dA + \frac{1}{2} \int_A (M_s \kappa_s + M_\beta \kappa_\beta) dA + \frac{1}{2} \int_A Q_s \gamma_{sz} dA, \end{aligned} \quad (17.99)$$

missä

$$dA = 2\pi r L d\xi, \quad (17.100)$$

L on elementin pituus ja indeksi l viittaa leikkausmuodonmuutokseen. Kimmoisen isotrooppisen aineen tapauksessa jännitysresultanttien ja muodonmuutosten väliset yhteydet ovat

$$\begin{bmatrix} N_s \\ N_\beta \end{bmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\beta \end{bmatrix} \equiv \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (17.101)$$

$$\begin{bmatrix} M_s \\ M_\beta \end{bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_s \\ \kappa_\beta \end{bmatrix} \equiv \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}, \quad (17.102)$$

$$Q_s = kGh\gamma_{sz}, \quad (17.103)$$

missä $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ on liukumoduuli ja kerroin $k = 5/6$ (homogeeniselle kuorelle).

Muodonmuutosenergian lauseke sisältää nyt vain tuntemattomien funktioiden $u(x)$, $w(x)$ ja $\theta(x)$ ensimmäisiä derivaattoja, ja siirtymäsuureita voidaan interpoloida yksinkertaisimmillaan lineaarisilla polynomeilla.

Kaksisolmuisen paksun kartiomaisen pyörähdyskuorielementin tuntemattomien suureiden interpolaatiokaavat voidaan kirjoittaa matriisimerkinnöin muotoon

$$\begin{bmatrix} u(\xi) \\ w(\xi) \\ \theta(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^u(\xi) & 0 & 0 & N_2^u(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & N_1^w(\xi) & 0 & 0 & N_2^w(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & N_1^\theta(\xi) & 0 & 0 & N_2^\theta(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (17.104)$$

eli

$$\begin{bmatrix} u(\xi) \\ w(\xi) \\ \theta(\xi) \end{bmatrix} = \mathbf{N}(\xi)\mathbf{q}, \quad (17.105)$$

missä vektori \mathbf{q} sisältää solmujen 1 ja 2 tuntemattomat vapausasteet u_i , w_i ja θ_i , $i = 1, 2$ elementin paikallisessa koordinaatistossa. Lineaariset muotofunktiot ovat

$$N_1^u = N_1^w = N_1^\theta = 1 - \xi, \quad N_2^u = N_2^w = N_2^\theta = \xi \quad (17.106)$$

laaduttoman koordinaatin $\xi = s/L$ funktiona.

Merkitsemällä

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\beta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_s \\ \kappa_\beta \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \quad (17.107)$$

voidaan kinemaattiset yhtälöt esittää muodossa

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{k1} & \mathbf{B}_{k2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{B}_k\mathbf{q}, \quad (17.108)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{t1} & \mathbf{B}_{t2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{B}_t\mathbf{q}, \quad (17.109)$$

$$\gamma_{sz} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{l1} & \mathbf{B}_{l2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{B}_l \mathbf{q}, \quad (17.110)$$

missä

$$\mathbf{B}_{k1} = \begin{bmatrix} -1/L & 0 & 0 \\ (1-\xi) \cos \psi/r & -(1-\xi) \sin \psi/r & 0 \end{bmatrix}, \quad (17.111)$$

$$\mathbf{B}_{k2} = \begin{bmatrix} 1/L & 0 & 0 \\ \xi \cos \psi/r & -\xi \sin \psi/r & 0 \end{bmatrix}, \quad (17.112)$$

$$\mathbf{B}_{t1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/L \\ 0 & 0 & -(1-\xi) \cos \psi/r \end{bmatrix}, \quad (17.113)$$

$$\mathbf{B}_{t2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/L \\ 0 & 0 & -\xi \cos \psi/r \end{bmatrix}, \quad (17.114)$$

$$\mathbf{B}_{l1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/L & -(1-\xi) \end{bmatrix}, \quad (17.115)$$

$$\mathbf{B}_{l2} = \begin{bmatrix} 0 & 1/L & -\xi \end{bmatrix}, \quad (17.116)$$

joissa indeksit k , t ja l viittaavat kalvotilaan, taivutustilaan ja leikkausmuodonmuutokseen. Kuoren pyörähdyssäteen r lineaarinen interpolaatio on

$$r(\xi) = (1-\xi)x_1 + \xi x_2. \quad (17.117)$$

Eliminoimalla jännitysresultantit konstitutiivisten yhtälöiden avulla ja käyttämällä hyväksi kinemaattisia yhtälöitä saadaan elementin muodonmuutosenergian lauseke muotoon

$$\begin{aligned} U &= U_k + U_t + U_l \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left(\int_0^1 \mathbf{B}_k^T \mathbf{C} \mathbf{B}_k 2\pi r L d\xi \right) \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left(\int_0^1 \mathbf{B}_t^T \mathbf{D} \mathbf{B}_t 2\pi r L d\xi \right) \mathbf{q} \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left(\int_0^1 \mathbf{B}_l^T k G h \mathbf{B}_l 2\pi r L d\xi \right) \mathbf{q} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_k \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_t \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_l \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (17.118)$$

missä

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_k + \mathbf{K}_t + \mathbf{K}_l \quad (17.119)$$

on elementin jäykkyysmatriisi. Jäykkyysmatriisin termit integroidaan numeerisesti Gaussin menetelmällä. Paksun kuoren elementillä voidaan laskea myös ohuen kuoren tehtäviä, kun käytetään Gaussin yhden pisteen menetelmää leikkausmuodonmuutokseen liittyvän energian ja jäykkyysmatriisin osan laskemisessa. Muussa tapauksessa ohuen kuoren ehto $dw/ds = \theta$ pakotetaan toteutumaan siten että $dw/ds = \theta \equiv 0$. Koska yhden pisteen menetelmä on riittävä myös muille termeille saadaan tällä tavalla ohuelle kuorelle tehokas ja yksinkertainen elementti. Koordinaatiston muunnos paikallisesta globaaliseen koordinaatistoon on sama kuin ohuen kuoren elementillä.

17.3.1 Kuormavektori

Solmun kohdalla vaikuttava leveyspiiriä pitkin tasanjakautunut viivakuorma jaetaan x - ja z -akseleiden suuntaisiin komponentteihin, jotka lisätään kuormavektoriin tekijällä $2\pi r$ kerrottuna.

Jakautuneen kuorman komponentit normaalin n ja koordinaatin s suuntaan ovat p_n ja p_s . Ulkoisen voiman potentiaali on

$$V = - \int [p_s(s)u(s) + p_n(s)w(s)] 2\pi r(s) ds. \quad (17.120)$$

Elementin e alueella koordinaatin ξ avulla lausuttuna

$$V^e = - \int_0^1 [p_s(\xi)u(\xi) + p_n(\xi)w(\xi)] 2\pi r(\xi)L d\xi. \quad (17.121)$$

Interpoloidaan jakautuneita kuormia lineaarisilla polynomeilla

$$p_s(\xi) = (1 - \xi)p_{s1} + \xi p_{s2}, \quad p_n(\xi) = (1 - \xi)p_{n1} + \xi p_{n2}, \quad (17.122)$$

missä p_{si} ja p_{ni} ovat kuormien intensiteettien solmuarvot.

Sijoittamalla siirtymien interpolaatiokaavat potentiaalin kaavaan (17.121) saadaan

$$V = -\mathbf{q}^T \mathbf{f}, \quad (17.123)$$

missä kuormavektori \mathbf{f} on

$$\mathbf{f} = \int_0^1 \begin{bmatrix} N_1^u(\xi)p_s(\xi) \\ N_1^w(\xi)p_n(\xi) \\ 0 \\ N_2^u(\xi)p_s(\xi) \\ N_2^w(\xi)p_n(\xi) \\ 0 \end{bmatrix} 2\pi r(\xi) d\xi. \quad (17.124)$$

Paikallisessa koordinaatistossa muodostettu kuormavektori muunnetaan globaaliin koordinaatistoon kuten ohuen kuoren elementin tapauksessa.

Esimerkki 17.4 Lasketaan paksun kuoren elementillä jäykästi, tuetun tasaisen paineen kuormittaman pallokalotin keskipisteen taipuma, kun kuoren reunakulma on $\alpha = 35^\circ$.

Jaetaan meridiaani $\alpha \in [0, 35^\circ]$ yhtäpitkiin elementteihin. Otaksutaan, että $E = 10^6$, $\nu = 1/6$, $R = 90$, $h = 3$. Eri elementtimallien antamat taipumat on esitetty taulukossa 17.2. Jäykkyysmatriisin termit on integroitu Gaussin yhden pisteen kaavalla, (kuoren säteen suhde paksuuteen on tässä tapauksessa $R/h = 90/3 = 30$), ja kuormavektorin termit on integroitu Gaussin kahden pisteen kaavalla.

Esimerkki 17.5 Lasketaan paksun kuoren elementillä jäykästi tuetun ympyrälaatan keskipisteen taipuma tasaisesta kuormasta $p_n = p$.

Otaksutaan lukuarvot $E = 2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\nu = 0.3$, $a = 10 \text{ mm}$, $h = 0.1 \text{ mm}$ ja $p = 1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ ja kertoimelle k otetaan arvo $5/6$. Laatan säteen ja paksuuden suhde on nyt

Taulukko 17.2 Pallokalotin keskipisteen taipuma paksun kuoren elementillä.

Elem. lkm	w
10	$-0.1662519 \times 10^{-2}$
20	$-0.1633154 \times 10^{-2}$
40	$-0.1626408 \times 10^{-2}$
80	$-0.1624669 \times 10^{-2}$

$a/h = 100$. Ohuen laatan tapauksessa lasketaan jäykkyyssmatriisin termit Gaussin yhden pisteen kaavalla. Kuormavektorin termit integroidaan Gaussin kahden pisteen kaavalla.

Verrataan numeerista tulosta jäykästi tuetun ohuen ympyrälaatan keskipisteen taipumaan, joka tasaisesta kuormasta on

$$w = \frac{pa^4}{64D}. \quad (17.125)$$

Otaksutuilla lukuarvoilla tulee

$$w = 8.53125 \text{ mm}. \quad (17.126)$$

Yhden elementin mallilla ei saada nyt kunnollista tulosta, vaan tulee

$$w = 0.0052 \text{ mm}. \quad (17.127)$$

Jakamalla säde kymmeneen yhtä pitkään elementtiin saadaan

$$w = 8.562478 \text{ mm}. \quad (17.128)$$

Kahdenkymmenen tasapituisen elementin mallilla saadaan tulos

$$w = 8.542196 \text{ mm}. \quad (17.129)$$

Liite A

Tavallisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisusta

A.1 Vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö

Homogeeninen, lineaarinen, vakiokertoiminen, funktion $y(x)$ differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$a_0 \frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y(x) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Sijoittamalla yhtälöön (A.1) yrite

$$y(x) = e^{kx} \quad (\text{A.2})$$

johdetaan algebrallinen yhtälö

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0, \quad (\text{A.3})$$

jonka juuret ovat k_1, k_2, \dots, k_n .

Differentiaaliyhtälön (A.1) ratkaisu on siten

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}, \quad (\text{A.4})$$

missä C_1, C_2, \dots, C_n ovat integroimisvakiot.

Esimerkki A.1 Ratkaistaan vakiokertoiminen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö (A.5).

Sijoittamalla differentiaaliyhtälöön

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - 3 \frac{dy(x)}{dx} + 2y(x) = 0 \quad (\text{A.5})$$

yrite e^{kx} saadaan polynomiksi (A.3)

$$k^2 - 3k + 2 = 0, \quad (\text{A.6})$$

jonka juuret ovat

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad (\text{A.7})$$

ja differentiaaliyhtälön ratkaisu on siten

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}. \quad (\text{A.8})$$

Esimerkki A.2 Ratkaistaan vakiokertoiminen kolmannen kertaluvun differentiaaliyhtälö (A.9).

Differentiaaliyhtälön

$$\frac{d^3y(x)}{dx^3} - \frac{dy(x)}{dx} = 0 \quad (\text{A.9})$$

tapauksessa saadaan polynomi

$$k^3 - k = 0, \quad (\text{A.10})$$

jonka juuret ovat

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = -1, \quad (\text{A.11})$$

ja differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$y(x) = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x}. \quad (\text{A.12})$$

Jos polynomien (A.3) juuret ovat kompleksikonjugaatit (kertoimet a_i otaksutaan reaaliksi), esimerkiksi

$$k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i, \quad (\text{A.13})$$

jossa i on imaginaariyksikkö

$$i = \sqrt{-1}, \quad (\text{A.14})$$

niin ratkaisu muodostuu termeistä

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x), \quad (\text{A.15})$$

$$e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x). \quad (\text{A.16})$$

Esimerkki A.3 Ratkaistaan vakiokertoiminen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö (A.17).

Differentiaaliyhtälön

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 4\frac{dy(x)}{dx} + 5y(x) = 0 \quad (\text{A.17})$$

tapauksessa saadaan polynomi

$$k^2 + 4k + 5 = 0, \quad (\text{A.18})$$

jonka juuret ovat

$$k_{1,2} = -2 \pm i, \quad (\text{A.19})$$

ja tarkasteltavan differentiaaliyhtälön ratkaisu on siten

$$y(x) = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x). \quad (\text{A.20})$$

Esimerkki A.4 Ratkaistaan vakiokertoiminen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö (A.21).

Ratkaistavana on yhtälö

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + a^2y(x) = 0. \quad (\text{A.21})$$

Nyt saadaan polynomi ja juuret

$$k^2 + a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm a i, \quad (\text{A.22})$$

ja niitä vastaava differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$y(x) = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax. \quad (\text{A.23})$$

A.1.1 Moninkertainen juuri

Olkoon juuri k_i α_i -kertainen. Tällöin differentiaaliyhtälön (A.1) ratkaisuja ovat

$$e^{k_i x} \quad \text{ja} \quad x e^{k_i x}, \quad x^2 e^{k_i x}, \dots, x^{\alpha_i - 1} e^{k_i x}. \quad (\text{A.24})$$

Esimerkki A.5 Ratkaistaan kolmannen kertaluvun differentiaaliyhtälö (A.25).

Differentiaaliyhtälön

$$\frac{d^3 y(x)}{dx^3} - 3 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + 3 \frac{dy(x)}{dx} - y(x) = 0 \quad (\text{A.25})$$

tapauksessa polynomin

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0 \quad \text{eli} \quad (k - 1)^3 = 0 \quad (\text{A.26})$$

juuret ovat

$$k_{1,2,3} = 1, \quad (\text{A.27})$$

ja differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^x. \quad (\text{A.28})$$

Jos juuri

$$k_i = p + qi \quad (\text{A.29})$$

on α -kertainen, niin ratkaisuja ovat

$$e^{(p+qi)x}, \quad x e^{(p+qi)x}, \quad x^2 e^{(p+qi)x}, \dots, x^{(\alpha-1)} e^{(p+qi)x}, \quad (\text{A.30})$$

joissa

$$e^{(p+qi)x} = e^{px} (\cos qx + i \sin qx). \quad (\text{A.31})$$

Esimerkki A.6 Ratkaistaan neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälö (A.32).

Differentiaaliyhtälön

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} + 2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + y(x) = 0 \quad (\text{A.32})$$

tapauksessa polynomi (A.3) on

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0 \quad \text{eli} \quad (k^2 + 1)^2 = 0, \quad (\text{A.33})$$

jolla on kaksoisjuuri

$$k_{1,2} = \pm i, \quad (\text{A.34})$$

ja yhtälön (A.32) ratkaisu on

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x. \quad (\text{A.35})$$

A.1.2 Epähomogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaiseminen

Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} + p_1 \frac{d^{(n-1)}y(x)}{dx^{(n-1)}} + \cdots + p_n y(x) = f(x). \quad (\text{A.36})$$

Sen ratkaisu on homogeenisen osan ratkaisun ja yksityisratkaisun summa

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x), \quad (\text{A.37})$$

jossa

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x). \quad (\text{A.38})$$

Esimerkki A.7 Ratkaistaan toisen kertaluvun epähomogeeninen differentiaaliyhtälö (A.39).

Differentiaaliyhtälön

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + y(x) = x \quad (\text{A.39})$$

tapauksessa ratkaisu yksityisratkaisu mukaanlukien löytyy helposti, ja se on

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x. \quad (\text{A.40})$$

Tässä tapauksessa siis $y_p(x) = x$.

A.1.3 Vakion varioimismenetelmä

Monimutkaisemmissa tapauksissa yksityisratkaisua voidaan hakea vakion varioimiskeinolla.

Kirjoitetaan yksityisratkaisu homogeenisen ratkaisun muotoon

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i(x), \quad (\text{A.41})$$

ja tuntemattomat funktiot $C_i(x)$ määritetään ehdoista

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{dC_i(x)}{dx} y_i(x) &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \frac{dC_i(x)}{dx} \frac{dy_i(x)}{dx} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \frac{dC_i(x)}{dx} \frac{d^2 y_i(x)}{dx^2} &= 0, \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{dC_i(x)}{dx} \frac{d^{(n-2)} y_i(x)}{dx^{(n-2)}} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \frac{dC_i(x)}{dx} \frac{d^{(n-1)} y_i(x)}{dx^{(n-1)}} &= f(x). \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Esimerkki A.8 Ratkaistaan toisen kertaluvun epähomogeeninen differentiaaliyhtälö (A.43).

Differentiaaliyhtälön

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + y(x) = \frac{1}{\cos x} \quad (\text{A.43})$$

homogeenisen osan ratkaisu on

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \quad (\text{A.44})$$

Haetaan yksityisratkaisua muodossa

$$y(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x. \quad (\text{A.45})$$

Tällöin saadaan ehdot

$$\frac{dC_1(x)}{dx} \cos x + \frac{dC_2(x)}{dx} \sin x = 0, \quad (\text{A.46})$$

$$-\frac{dC_1(x)}{dx} \sin x + \frac{dC_2(x)}{dx} \cos x = \frac{1}{\cos x}. \quad (\text{A.47})$$

Ehdoista seuraa

$$\frac{dC_1(x)}{dx} = -\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow C_1(x) = \ln |\cos x| + \bar{C}_1, \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{dC_2(x)}{dx} = 1 \Rightarrow C_2(x) = x + \bar{C}_2, \quad (\text{A.49})$$

ja differentiaaliyhtälön (A.43) ratkaisuksi saadaan

$$y(x) = \bar{C}_1 \cos x + \bar{C}_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x. \quad (\text{A.50})$$

A.1.4 Cauchyn menetelmä

Cauchyn menetelmässä käytetään hyväksi homogeenisen n :n kertaluvun differentiaaliyhtälön

$$\mathcal{L}[y(x)] = 0, \quad (\text{A.51})$$

missä \mathcal{L} on lyhennysmerkintä yhtälön (A.1) lineaariselle differentiaalioperaattorille, ratkaisua, joka toteuttaa ehdot

$$K(s, s) = \frac{dK(s, s)}{ds} = \dots = \frac{d^{(n-2)}K(s, s)}{ds^{(n-2)}} = 0, \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{d^{(n-1)}K(s, s)}{ds^{(n-1)}} = 1.$$

Yksityisratkaisu saadaan funktion K avulla muodossa

$$y(x) = \int_{x_0}^x K(x, s) f(s) ds. \quad (\text{A.53})$$

Esimerkki A.9 Ratkaistaan toisen kertaluvun epähomogeeninen differentiaaliyhtälö (A.54).

Differentiaaliyhtälön

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + a^2 y(x) = f(x) \quad (\text{A.54})$$

homogeenisen osan ratkaisu on

$$y_h(x) = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax, \quad (\text{A.55})$$

ja sen perusteella saadaan ehdot (A.52)

$$C_1 \cos as + C_2 \sin as = 0, \quad (\text{A.56})$$

$$-aC_1 \sin as + aC_2 \cos as = 1, \quad (\text{A.57})$$

joista ratkaistaan C_1 ja C_2

$$C_1 = -\frac{\sin as}{a}, \quad C_2 = \frac{\cos as}{a}. \quad (\text{A.58})$$

Funktioksi K saadaan sijoittamalla C_1 ja C_2 yhtälöön (A.55)

$$\begin{aligned} K(x, s) &= \frac{1}{a} (-\sin as \cos ax + \cos as \sin ax) \\ &= \frac{1}{a} \sin a(x - s). \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

Yksitysratkaisu saadaan nyt integroimalla kaavasta

$$y_p(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \sin a(x - s) f(s) ds. \quad (\text{A.60})$$

Vaihtoehtoisesti merkitsemällä $\bar{y}(x) \equiv y_h(x)$ voidaan asettaa ehdot

$$\bar{y}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0, \quad (\text{A.61})$$

$$\frac{d\bar{y}(0)}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad aC_2 = 1, \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1}{a}, \quad (\text{A.62})$$

jolloin

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{a} \sin ax, \quad (\text{A.63})$$

ja

$$y_p(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \sin a(x - s) f(s) ds. \quad (\text{A.64})$$

Esimerkki A.10 Ratkaistaan kerrospalkin kuudennen kertaluvun differentiaaliyhtälö (A.65).

Kerrospalkin differentiaaliyhtälön

$$\frac{d^6 w(x)}{dx^6} - \alpha^2 \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = -\alpha^2 \frac{p(x)}{EI} + \frac{1}{EI_0} \frac{d^2 p(x)}{dx^2}. \quad (\text{A.65})$$

homogeenisen osan ratkaisu on

$$w_h(x) = C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x + C_3 x^3 + C_4 x^2 + C_5 x + C_6. \quad (\text{A.66})$$

Yksityisratkaisu $w_p(x)$ haetaan Cauchyn menetelmällä. Merkitään $\bar{w}(x) \equiv w_h(x)$. Saadaan ehdot

$$\begin{aligned} \bar{w}(0) = 0 &\Rightarrow C_2 + C_6 = 0, \\ \frac{d\bar{w}(0)}{dx} = 0 &\Rightarrow \alpha C_1 + C_5 = 0, \\ \frac{d^2\bar{w}(0)}{dx^2} = 0 &\Rightarrow \alpha^2 C_2 + 2C_4 = 0, \\ \frac{d^3\bar{w}(0)}{dx^3} = 0 &\Rightarrow \alpha^3 C_1 + 6C_3 = 0, \\ \frac{d^4\bar{w}(0)}{dx^4} = 0 &\Rightarrow \alpha^4 C_2 = 0, \\ \frac{d^5\bar{w}(0)}{dx^5} = 1 &\Rightarrow \alpha^5 C_1 = 1, \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

joiden ratkaisu on

$$C_1 = \frac{1}{\alpha^5}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{1}{6\alpha^2}, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = -\frac{1}{\alpha^4}, \quad C_6 = 0 \quad (\text{A.68})$$

ja

$$\bar{w}(x) = \frac{1}{\alpha^5} \sinh \alpha x - \frac{1}{6\alpha^2} x^3 - \frac{1}{\alpha^4} x. \quad (\text{A.69})$$

Yksityisratkaisu saadaan nyt Cauchyn mukaan integroimalla kaavasta

$$\begin{aligned} w_p(x) &= \int_0^x \bar{w}(x-s) f(s) ds \\ &= -\frac{1}{EI\alpha^5} \int_0^x \left[\alpha^2 p(s) - \frac{EI}{EI_0} \frac{d^2 p(s)}{ds^2} \right] \left\{ \sinh[\alpha(x-s)] - \frac{1}{6} \alpha^3 (x-s)^3 - \alpha(x-s) \right\} ds. \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

A.1.5 Operaattorimenetelmä

Merkitsemällä derivaattaoperaattoria x :n suhteen symbolilla D , jolloin kertaluvun k tapauksessa kirjoitetaan

$$\frac{d^k y(x)}{dx^k} \equiv D^k y(x), \quad (\text{A.71})$$

saadaan lineaarinen differentiaaliyhtälö (A.1) esitettyä operaattorimuodossa

$$(a_0 D^n + a_1 D^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y(x) = f(x) \quad (\text{A.72})$$

eli

$$F(D)y(x) = f(x), \quad (\text{A.73})$$

jossa on otettu käyttöön merkintä $F(D)$ lineaariselle differentiaalioperaattorille.

Jos differentiaaliyhtälön oikean puolen termi on polynomi astetta p eli

$$f(x) = P_p(x) \equiv A_0x^p + A_1x^{(p-1)} + \dots + A_p, \quad (\text{A.74})$$

niin yksityisratkaisu on

$$y(x) = \frac{1}{F(D)}P_p(x), \quad (\text{A.75})$$

jossa

$$\frac{1}{F(D)} = Q_p(D) + \frac{R(D)}{F(D)} \quad (\text{A.76})$$

eli

$$F(D)Q_p(D) + R(D) = 1, \quad (\text{A.77})$$

missä R on 'jakojäännös'. Operoimalla identiteettioperaattorilla (A.77) p -asteista polynomia saadaan

$$[F(D)Q_p(D) + R(D)](A_0x^p + A_1x^{(p-1)} + \dots + A_p) \equiv A_0x^p + A_1x^{(p-1)} + \dots + A_p. \quad (\text{A.78})$$

Jos

$$R(D)(A_0x^p + A_1x^{(p-1)} + \dots + A_p) = 0, \quad (\text{A.79})$$

niin

$$F(D)[Q_p(D)(A_0x^p + A_1x^{(p-1)} + \dots + A_p)] \equiv A_0x^p + A_1x^{(p-1)} + \dots + A_p, \quad (\text{A.80})$$

ja tällöin

$$Q_p(D)(A_0x^p + A_1x^{(p-1)} + \dots + A_p) \quad (\text{A.81})$$

on yhtälön

$$F(D)y(x) = A_0x^p + A_1x^{(p-1)} + \dots + A_p \quad (\text{A.82})$$

ratkaisu.

Esimerkki A.11 Ratkaistaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö (A.83).

Differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + y(x) = x^2 - x + 2 \quad (\text{A.83})$$

on operaattorimuodossa

$$(D^2 + 1)y(x) = x^2 - x + 2, \quad (\text{A.84})$$

josta $y(x)$ voidaan ratkaista muodollisesti kuten algebrallisesta yhtälöstä eli

$$y(x) = \frac{1}{D^2 + 1}(x^2 - x + 2) \equiv F(D)P_2(x). \quad (\text{A.85})$$

Operaattorin $F(D)$ avulla saadaan

$$Q_2(D) = 1 - D^2, \quad (\text{A.86})$$

ja puolestaan operaattorin $Q_2(D)$ avulla muodostetaan erikoisratkaisu

$$y_p(x) = (1 - D^2)(x^2 - x + 2) = x^2 - x. \quad (\text{A.87})$$

Esimerkki A.12 Ratkaistaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö (A.88).

Differentiaaliyhtälön

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 2\frac{dy(x)}{dx} + 2y(x) = x^2e^{-x} \quad (\text{A.88})$$

operaattorimuoto on

$$(D^2 + 2D + 2)y(x) = x^2e^{-x}, \quad (\text{A.89})$$

josta ratkaistaan yksityisratkaisu

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{D^2 + 2D + 2} x^2 e^{-x} \\ &= e^{-x} \frac{1}{D^2 + 1} x^2 \\ &= e^{-x} (1 - D^2) x^2 = e^{-x} (x^2 - 2). \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

Esimerkki A.13 Haetaan ratkaisu kerrospalkin taipuman neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälölle.

Kerrospalkin neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälön

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4} - \alpha^2 \frac{d^2w(x)}{dx^2} = \alpha^2 \frac{M(x)}{EI} - \frac{1}{EI_0} \frac{d^2M(x)}{dx^2} \quad (\text{A.91})$$

homogeenisen osan ratkaisu on

$$w_h(x) = C_1 + C_2x + C_3 \cosh \alpha x + C_4 \sinh \alpha x. \quad (\text{A.92})$$

Differentiaaliyhtälön operaattorimuodosta

$$(D^4 - \alpha^2 D^2)w(x) = f(x) \quad (\text{A.93})$$

saadaan yksityisratkaisu

$$\begin{aligned} w_p(x) &= \frac{1}{D^4 - \alpha^2 D^2} f(x) \\ &= -\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{1}{D^2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{D^2}{\alpha^4} + \frac{D^4}{\alpha^6} + \dots \right] f(x). \end{aligned} \quad (\text{A.94})$$

Esimerkki A.14 Haetaan ratkaisu aukollisen tukiseinän toisen kertaluvun differentiaaliyhtälölle.

Ratkaistavana on aukollisen tukiseinän normaalivoiman differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \alpha^2 T(x) = \beta M(x). \quad (\text{A.95})$$

Homogeenisen osan ratkaisu on

$$T(x) = C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x. \quad (\text{A.96})$$

Yhtälön operaattorimuodosta

$$(D^2 - \alpha^2)T(x) = \beta M(x) \quad (\text{A.97})$$

ratkaistaan

$$\begin{aligned}
 T_p(x) &= \frac{1}{D^2 - \alpha^2} \beta M(x) \\
 &= -\frac{1}{\alpha^2} \left[1 + \frac{D^2}{\alpha^2} + \frac{D^4}{\alpha^4} + \dots \right] \beta M(x).
 \end{aligned}
 \tag{A.98}$$

Operaattorin $F(D)$ kehittäminen voidaan suorittaa jakokulmassa:

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 1 - \frac{1}{\alpha^2} D^2 \\
 \frac{1}{\alpha^2} D^2 \\
 \frac{1}{\alpha^4} D^4 - \frac{1}{\alpha^4} D^4 \\
 \frac{1}{\alpha^4} D^4 \\
 \frac{1}{\alpha^4} D^4 - \frac{1}{\alpha^6} D^6 \\
 \vdots
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \frac{-\alpha^2 + D^2}{\alpha^2} \\
 -\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^4} D^2 - \frac{1}{\alpha^6} D^4 \dots \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \vdots
 \end{array}
 \tag{A.99}$$

Liite B

Väännön differentiaaliyhtälön ratkaisu

B.1 Väännön differentiaaliyhtälö

Jakamalla väännön differentiaaliyhtälö jäykkyydellä EI_ω tulee

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} - k^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2} = f(z), \quad (\text{B.1})$$

missä

$$k^2 = \frac{GI_v}{EI_\omega}, \quad f(z) = \frac{m}{EI_\omega}. \quad (\text{B.2})$$

Differentiaaliyhtälön (B.1) ratkaisu on

$$\varphi(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz + \varphi_0, \quad (\text{B.3})$$

missä $\varphi_0(z)$ on yksityisratkaisu.

Resultantit ovat

$$M_v = GI_v \frac{d\varphi}{dz} = GI_v \left(C_2 + C_3 k \cosh kz + C_4 k \sinh kz + \frac{d\varphi_0}{dz} \right), \quad (\text{B.4})$$

$$B = -EI_\omega \frac{d^2\varphi}{dz^2} = -GI_v \left(C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz + \frac{1}{k^2} \frac{d^2\varphi_0}{dz^2} \right) \quad (\text{B.5})$$

ja

$$M_\omega = \frac{dB}{dz} = -GI_v \left(C_3 k \cosh kz + C_4 k \sinh kz + \frac{1}{k^2} \frac{d^3\varphi_0}{dz^3} \right). \quad (\text{B.6})$$

Kokonaisvääntömomentti on

$$M_z = M_v + M_\omega = GI_v \left(C_2 + \frac{d\varphi_0}{dz} - \frac{1}{k^2} \frac{d^3\varphi_0}{dz^3} \right). \quad (\text{B.7})$$

M_v on de Saint Venantin vääntöteorian (vapaan väännön) vääntömomentti ja M_ω on esitetyn väännön vääntömomentti.

B.2 Eräitä yksityisratkaisuja

1. Tasaisen kuorman, $m(z) = m_0$, yksityisratkaisu on

$$\varphi_0 = -\frac{m_0}{2} \frac{1}{GI_v} z^2. \quad (\text{B.8})$$

2. Linearisesti jakautuneelle kuormalle, $m(z) = m_0 \frac{z}{L}$,

$$\varphi_0 = -\frac{m_0}{6L} \frac{1}{GI_v} z^3. \quad (\text{B.9})$$

3. Pistemäiselle vääntömomentille, M_0 kohdassa $z = a$,

$$\varphi_0 = 0, \text{ kun } z < a, \quad (\text{B.10})$$

$$\varphi_0 = \frac{M_0}{kGI_v} [\sinh k(z - a) - k(z - a)], \text{ kun } z > a. \quad (\text{B.11})$$

4. Pistemäiselle bimomentille, B_0 kohdassa $z = a$,

$$\varphi_0 = 0, \text{ kun } z < a, \quad (\text{B.12})$$

$$\varphi_0 = \frac{B_0}{GI_v} [\cosh k(z - a) - 1], \text{ kun } z > a. \quad (\text{B.13})$$

Esimerkki B.1 Ratkaistaan väännön differentiaaliyhtälö, kun vapaasti tuetulla palkilla on pistebimomenttikuorma B_0 kohdassa $z = a$.

Vääntökulma on pistebimomenttikuorman tapauksessa

$$\varphi(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz + \frac{B_0}{GI_v} \left\langle \cosh k(z - a) - 1 \right\rangle, \quad (\text{B.14})$$

missä $\langle \bullet \rangle = 0$, kun $z < a$. Vääntökulman 1. ja 2. derivaatta ovat

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(z)}{dz} &= C_2 + C_3 k \cosh kz + C_4 k \sinh kz + \frac{B_0}{GI_v} \left\langle k \sinh k(z - a) \right\rangle, \\ \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} &= C_3 k^2 \sinh kz + C_4 k^2 \cosh kz + \frac{B_0}{GI_v} \left\langle k^2 \cosh k(z - a) \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Vapaasti tuetun sauvan reunaehdoista

$$\varphi(0) = 0, \quad B(0) = 0, \quad \varphi(L) = 0, \quad B(L) = 0 \quad (\text{B.16})$$

saadaan nyt yhtälöryhmä

$$\text{a)} \Rightarrow C_1 + C_4 = 0,$$

$$\text{b)} \Rightarrow C_4 = 0,$$

$$\text{c)} \Rightarrow C_1 + C_2 L + C_3 \sinh kL + C_4 \cosh kL + \frac{B_0}{GI_v} [\cosh k(L - a) - 1] = 0, \quad (\text{B.17})$$

$$\text{d)} \Rightarrow C_3 k^2 \sinh kL + C_4 k^2 \cosh kL + \frac{B_0}{GI_v} k^2 \cosh k(L - a) = 0,$$

jonka ratkaisu on

$$\begin{aligned} C_1 &= -C_4 = 0, \\ C_2 &= \frac{B_0}{LGI_v}, \\ C_3 &= -\frac{B_0}{GI_v} \frac{\cosh k(L-a)}{\sinh kL}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Vääntökulma $\varphi(z)$ ja sen derivaatat ovat

$$\varphi(z) = \frac{B_0}{LGI_v} z - \frac{B_0}{GI_v} \frac{\cosh k(L-a)}{\sinh kL} \sinh kz + \frac{B_0}{GI_v} \left\langle \cosh k(z-a) - 1 \right\rangle, \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{B_0}{LGI_v} - \frac{B_0}{LGI_v} kL \frac{\cosh k(L-a)}{\sinh kL} \cosh kz + \frac{B_0}{GI_v} \left\langle k \sinh k(z-a) \right\rangle, \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} = -\frac{B_0}{L^2GI_v} (kL)^2 \frac{\cosh k(L-a)}{\sinh kL} \sinh kz + \frac{B_0}{GI_v} \left\langle k^2 \cosh k(z-a) \right\rangle, \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{d^3\varphi(z)}{dz^3} = -\frac{B_0}{L^3GI_v} (kL)^3 \frac{\cosh k(L-a)}{\sinh kL} \cosh kz + \frac{B_0}{GI_v} \left\langle k^3 \sinh k(z-a) \right\rangle. \quad (\text{B.22})$$

Kun $z < a$, niin vääntökulman 1. derivaatta voidaan kirjoittaa edelleen muotoon

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{B_0}{LGI_v} \left[1 - kL \frac{\cosh k(L-a)}{\sinh kL} \cosh kz \right] \quad (\text{B.23})$$

ja välillä $z > a$

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{B_0}{LGI_v} \left[1 - kL \frac{\cosh ka}{\sinh kL} \cosh k(L-z) \right]. \quad (\text{B.24})$$

Vääntömomenttien M_v , M_ω ja M_z lausekkeiksi tulee

$$M_v = GI_v \frac{d\varphi}{dz} = \frac{B_0}{L} \left[1 - kL \frac{\cosh k(L-a)}{\sinh kL} \cosh kz + \left\langle kL \sinh k(z-a) \right\rangle \right], \quad (\text{B.25})$$

$$B = -EI_\omega \frac{d^2\varphi}{dz^2} = B_0 \left[\frac{\cosh k(L-a)}{\sinh kL} \sinh kz - \left\langle \cosh k(z-a) \right\rangle \right], \quad (\text{B.26})$$

$$M_\omega = -EI_\omega \frac{d^3\varphi}{dz^3} = kB_0 \left[\frac{\cosh k(L-a)}{\sinh kL} \cosh kz - \left\langle \sinh k(z-a) \right\rangle \right]. \quad (\text{B.27})$$

Tuella $z = 0$ vääntymä on

$$\theta(0) = \frac{d\varphi(0)}{dz} = \frac{B_0}{LGI_v} \left[1 - kL \frac{\cosh kb}{\sinh kL} \right], \quad (\text{B.28})$$

missä $b = L - a$.

Tuella $z = L$ vääntymä on

$$\theta(L) = \frac{B_0}{LGI_v} \left[1 - kL \frac{\cosh ka}{\sinh kL} \right]. \quad (\text{B.29})$$

Liite C

Fourier-muunnos

Parittoman funktion $f(x) = -f(-x)$ Fourier-sinimuunnos ja käänteismuunnos ovat

$$\bar{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \alpha \xi d\xi, \tag{C.1}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{f}(\alpha) \sin \alpha x d\alpha.$$

Muunnoksen edellytyksenä on, että

1. $f(x)$ on paloittain jatkuva jokaisella äärellisellä välillä,
2. $f(x)$ on absoluuttisesti integroitava eli

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < M < \infty. \tag{C.2}$$

Parillisen funktion $f(-x) = f(x)$ kosinimuunnos on vastaavasti

$$\bar{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \alpha \xi d\xi, \tag{C.3}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{f}(\alpha) \cos \alpha x d\alpha.$$

Symmetrisen funktion f toisen derivaatan muunnos on

$$\bar{f}_{,xx}(\alpha) = -\alpha^2 \bar{f}(\alpha). \tag{C.4}$$

Taulukko C.1 Fourier-sinimuunnoksia

$f(x)$	$\bar{f}(\alpha)$
$f = 1, \quad 0 < x < a,$ $f = 0, \quad a < x < \infty$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos \alpha a}{\alpha}$
$\frac{1}{x}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \Re y > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha y}$
$\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \Re y > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha e^{-\alpha y}$
$\arctan \frac{x}{y}, \quad \Re y > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha y}$
$\frac{1}{4} \ln \frac{(x+c)^2 + y^2}{(x-c)^2 + y^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha y} \sin \alpha c$
$\frac{y}{(c-x)^2 + y^2} - \frac{y}{(c+x)^2 + y^2},$ $\Re y > 0, \quad c + iy \notin \Re$	$\sqrt{2\pi} e^{-\alpha y} \sin \alpha c$
$\frac{1}{x} \sin \beta x, \quad \beta > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \ln \left \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right $
$\frac{\pi}{2} e^{-kx}, \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2}$
$\frac{\pi}{4} (2 - kx) e^{-kx}, \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha^3}{(\alpha^2 + k^2)^2}$
$\frac{\pi}{4} \frac{x}{k} e^{-kx}, \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + k^2)^2}$
$\frac{\pi}{4} \frac{1}{k^4} [2 - (2 + kx) e^{-kx}], \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha(\alpha^2 + k^2)^2}$
$\frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2} (1 - e^{-kx}), \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha(\alpha^2 + k^2)}$

Taulukko C.2 Fourier-kosinimuunnoksia

$f(x)$	$\bar{f}(\alpha)$
$f = 1, \quad 0 < x < a,$ $f = 0, \quad a < x < \infty$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha a}{\alpha}$
$\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \Re y > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha y}$
$\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \Re y > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha e^{-\alpha y}$
$\frac{1}{2} \ln \left \frac{x^2 + z^2}{x^2 + y^2} \right , \quad y > 0, \quad z > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha y} - e^{-\alpha z})$
$\frac{c - x}{(c - x)^2 + y^2} + \frac{c + x}{(c + x)^2 + y^2}$	$\sqrt{2\pi} e^{-\alpha y} \sin \alpha c, \quad \Re y > \Im c $
$\frac{y}{(c - x)^2 + y^2} + \frac{y}{(c + x)^2 + y^2}$	$\sqrt{2\pi} e^{-\alpha y} \cos \alpha c, \quad \Re y > \Im c $
$\frac{\pi}{2} \frac{1}{k} e^{-kx}, \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha^2 + k^2}$
$\frac{\pi}{4} \frac{1}{k} (1 - kx) e^{-kx}, \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + k^2)^2}$
$\frac{\pi}{4} \frac{1}{k^3} (1 + kx) e^{-kx}, \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\alpha^2 + k^2)^2}$
$\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2}{x^2} \right)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha} \sin \alpha$

Kirjallisuutta

- [Heinisuo, 1985] Heinisuo M., *Vaakakuormituksen jakautuminen levyseinille matalissa rakennuksissa*. Rakennusteollisuus, no. 1, ss. 26 - 29, 1985.
- [Stathopoulos, 1984] Stathopoulos T. H., *Wind loads on the low-rise buildings*, Engineering Structures, **6**, April 1984.
- [Källsner, 1983] Källsner B., *Windaussteigung von Wandkonstruktionen im Holzkelettbau mit Plattenwerkstoffen*, Bauen mit Holz, **6**, 1983.
- [Chielsielski, 1982] Chielsielski E., *Stabilität von Holzhäusern unter Horizontalbelastung*, Bauen mit Holz, no. 7, 1982.
- [Parland, 1979] Parland H., *Rakenteiden vääntö*, Tampereen TKK, rakennusstatiiikka, opetusmoniste no. 1, 1979.