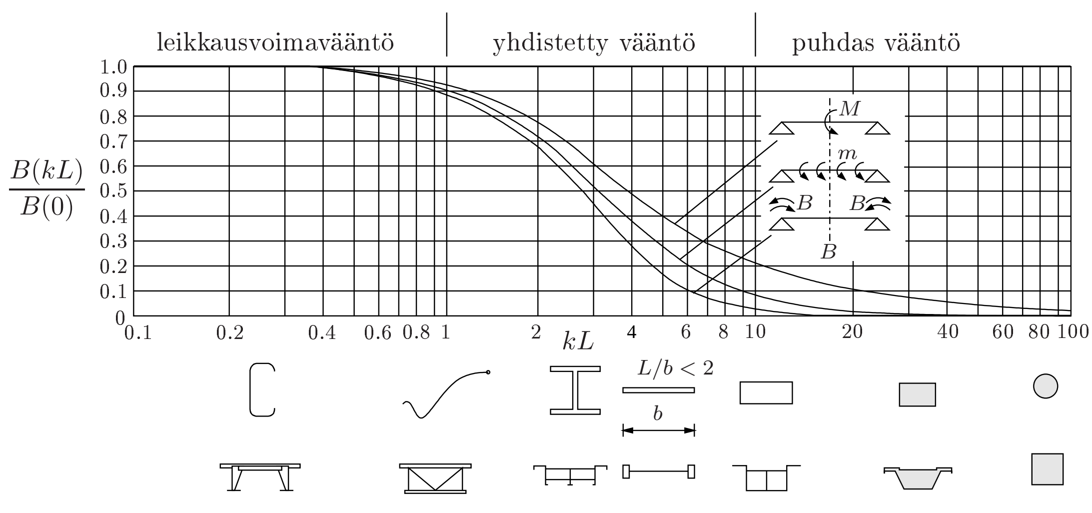
Rakenteiden mekaniikan jatkokurssi

luentomoniste

Markku Tuomala



Sisältö

Luku 1

Kimmoteorian perusyhtälöt

1.1 Jännitystila

Tarkastellaan kolmiulotteisessa avaruudessa kappaletta B, jonka materiaali otaksutaan homogeeniseksi ja kimmoiseksi. Kuormituksen vaikutuksesta kappaleeseen B syntyy jännitystila. Leikataan B osiin B_1 ja B_2 mielivaltaisella pinnalla A. Pinnan A alkioon ΔA vaikuttaa voima $\Delta \boldsymbol{F}$, jota vastaa jännitysvektori

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta A}. \tag{1.1}$$

Koska vektori $\boldsymbol{t}$ ja sen komponentit riippuvat pinnan A normaalista $\boldsymbol{n}$ tarkasteltavan pisteen kohdalla, voidaan merkitä täydellisemmin $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})$.

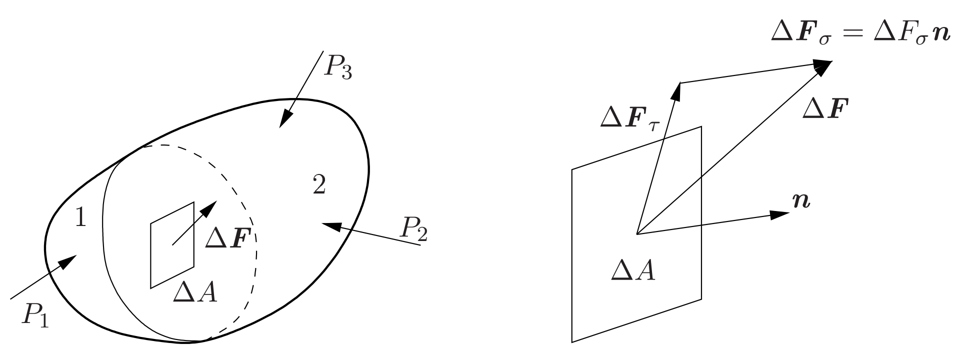
Jaetaan voimavektori $\Delta \boldsymbol{F}$ pinnan normaalin $\boldsymbol{n}$ suuntaiseen komponenttiin ΔF_σ ja pinnan tangenttitason suuntaiseen komponenttiin ΔF_τ. Määritellään normaalijännitys

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_\sigma}{\Delta A} \tag{1.2}$$

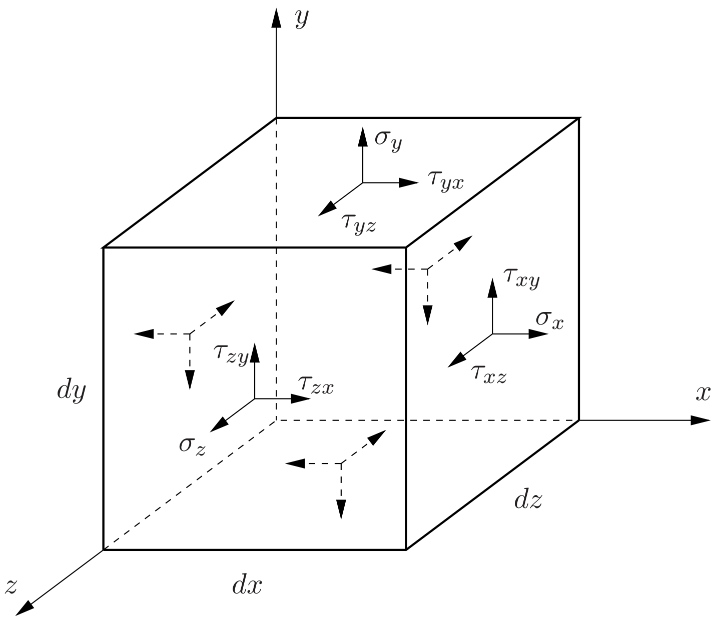
ja leikkausjännitys

$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_\tau}{\Delta A}. \tag{1.3}$$

Kuvan 1.2 esittämässä tapauksessa leikkauspintana A ovat vuoronperään suorakulmaisen



Kuva 1.1 Kappale B ja pinta-alkioon ΔA kohdistuva voima $\Delta \boldsymbol{F}$.



Kuva 1.2 Jännityskomponentit suorakulmaisessa koordinaatistossa.

koordinaatiston koordinaattiviivoja x, y ja z vastaan kohtisuorat pinnat (tasot), ja tässä tapauksessa saatavat jännityskomponentit voidaan koota matriisiin

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Momentin tasapainoehdosta akselin z ympäri

$$\sum M_z = 0 \tag{1.5}$$

seuraa yhtälö

$$(\tau_{xy} dydz)dx - (\tau_{yx} dxdz)dy = 0, \tag{1.6}$$

joten

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \tag{1.7}$$

Samalla tavalla johdetaan

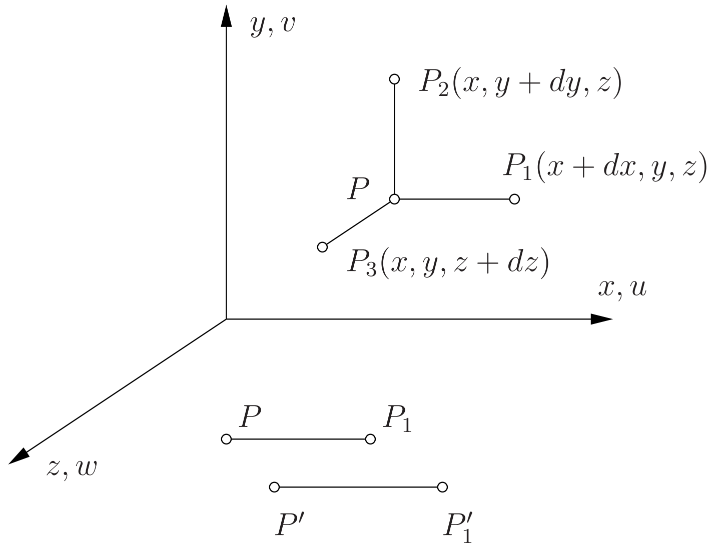
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \tag{1.8}$$

Riippumattomia komponentteja jännitysmatriisissa on siten kuusi kappaletta.

1.2 Muodonmuutostila

Tutkitaan kuvan 1.3 janan PP_1 pituuden muutosta deformaation aikana:

$$P'P_1' - PP_1 = (x + u + dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx) - (x + u + dx) = \frac{\partial u}{\partial x} dx. \tag{1.9}$$



Kuva 1.3 Janan PP_1 venymä.

Määritellään x-akselin suuntainen venymä

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{1.10}$$

Akseleiden y ja z suunnissa saadaan vastaavasti

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{1.11}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{1.12}$$

Tarkastellaan seuraavaksi janojen PP_1 ja PP_2 välisen suoran kulman muuttumista deformaation aikana. Kuvan 1.4 perusteella määritellään muodonmuutossuure nimeltään liukuma

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1.13}$$

ja samalla tavalla saadaan

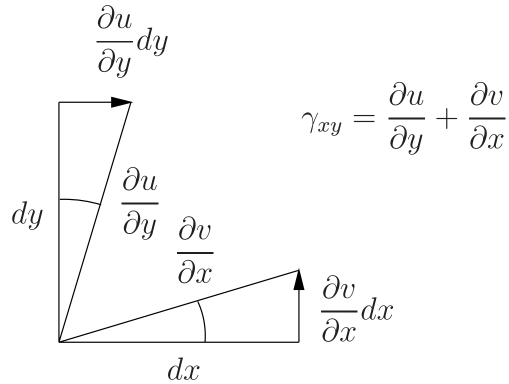
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{1.14}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \tag{1.15}$$

Kootaan muodonmuutoskomponentit $\varepsilon_i \equiv \varepsilon_{ii}$ ja $\gamma_{ij} \equiv 2\varepsilon_{ij}$ muodonmuutosmatriisiin $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \tag{1.16}$$

Matriisi $\boldsymbol{\varepsilon}$ on symmetrinen eli $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.



Kuva 1.4 Liukuma (x, y)-tasossa.

Differentioimalla siirtymäkomponentit u, v ja w tulee

$$\left\{\begin{array}{c} du \\ dv \\ dw \end{array}\right\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c} dx \\ dy \\ dz \end{array}\right\} \tag{1.17}$$

eli lyhyemmin merkittynä

$$d\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}\, d\boldsymbol{x}. \tag{1.18}$$

Matriisi $\boldsymbol{U}$ on nimeltään siirtymägradientti. $\boldsymbol{U}$ voidaan jakaa osiin

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{\Omega}, \tag{1.19}$$

missä

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}^T), \tag{1.20}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}^T). \tag{1.21}$$

$\boldsymbol{\Omega}$ on rotaatiomatriisi

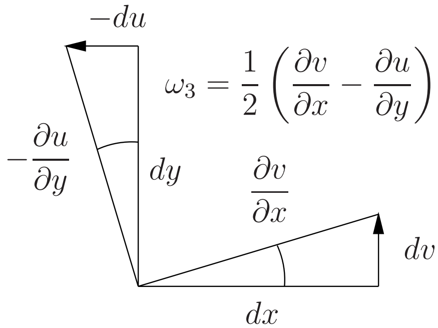
$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.22}$$

Rotaatiomatriisi voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.23}$$

missä

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{1.24}$$



Kuva 1.5 Rotaatio ω_3.

$\boldsymbol{\Omega}$ on vinosymmetrinen eli

$$\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}^T. \tag{1.25}$$

Jäykänkappaleen kiertymässä esimerkiksi akselin z ympäri

$$\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.26}$$

1.3 Yhteensopivuusyhtälöt

Siirtymäkomponentteja on kolme: u, v ja w. Muodonmuutoskomponentteja on kuusi kappaletta: ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz}. Muodonmuutoskomponentit ε_{ij} eivät ole toisistaan riippumattomia, vaan niiden on toteutettava yhteensopivuusyhtälöt.

Derivoimalla venymien ε_x ja ε_y kaavoja

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.27}$$

saadaan ensin

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}, \tag{1.28}$$

ja sitten liukuman γ_{xy} määrittelykaavasta

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.29}$$

seuraa

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}. \tag{1.30}$$

Kaavoista (1.28) ja (1.30) seuraa yhteensopivuusehto

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \tag{1.31}$$

Samalla tavalla johdetaan

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \tag{1.32}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}. \tag{1.33}$$

Toisenlaiset kolme yhteensopivuusyhtälöä voidaan johtaa derivoimalla muodonmuutosten ε_x, γ_{yz}, γ_{xz} ja γ_{xy} kaavat sopivalla tavalla:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \tag{1.34}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z}, \tag{1.35}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}, \tag{1.36}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}. \tag{1.37}$$

Laskemalla yhteen kaavat (1.34), (1.35), (1.36) ja (1.37) todetaan, että

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \tag{1.38}$$

eli

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}. \tag{1.39}$$

Samalla tavalla johdetaan

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \tag{1.40}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \tag{1.41}$$

Kaavat (1.31), (1.32), (1.33) ja (1.39), (1.40), (1.41) eivät ole toisistaan riippumattomia.

1.4 Yleistetty Hooken laki

Tarkastellaan suorakulmaista särmiötä, johon vaikuttaa jännitystila $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. Isotrooppisen kimmoisen aineen tapauksessa jännitystä σ_x vastaa muodonmuutos

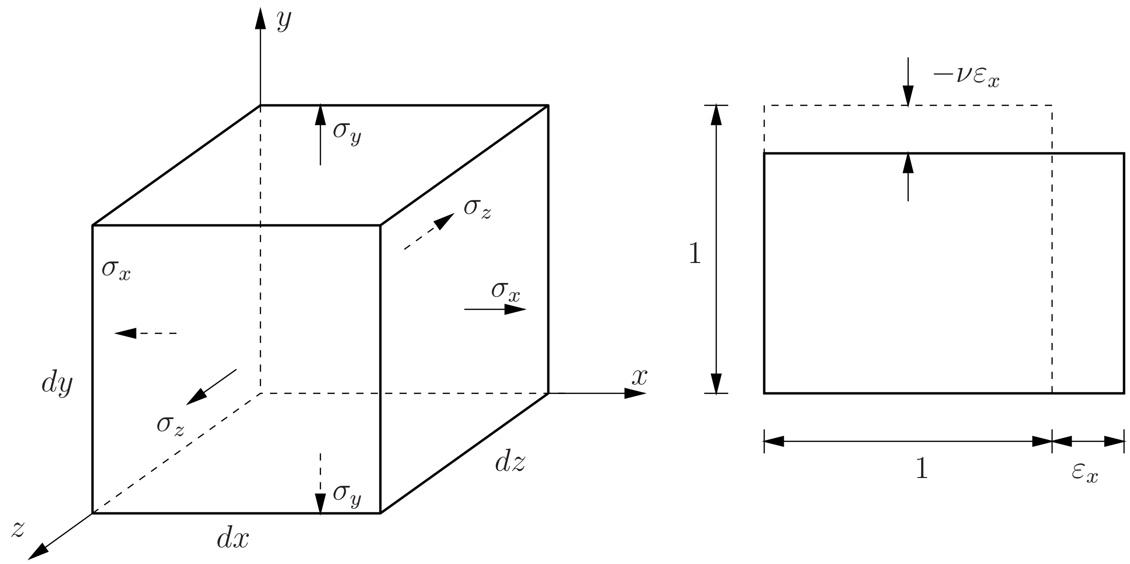
$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}. \tag{1.42}$$

Vastaavasti σ_y:n ja σ_z:n vaikutuksesta

$$\varepsilon''_x = -\frac{\nu \sigma_y}{E}, \quad \varepsilon'''_x = -\frac{\nu \sigma_z}{E}, \tag{1.43}$$

missä ν on Poissonin luku. Yhteensä

$$\begin{aligned} \varepsilon_x =& \varepsilon'_x + \varepsilon''_x + \varepsilon'''_x \\ =& \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]. \end{aligned} \tag{1.44}$$



Kuva 1.6 Normaalijännitykset σ_x, σ_y ja σ_z ja jännityksen σ_x aiheuttamat venymät (x, y)-tasossa.

Samanlaiset kaavat voidaan johtaa y- ja z-akseleiden suuntaisille venymille. Liukuman ja leikkausjännityksen välinen kimmoinen yhteys (x, y)-tasossa on

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \tag{1.45}$$

missä G on liukumoduuli. Samanlaiset yhteydet ovat voimassa (x, z)- ja (y, z)-tasoissa.

Yleistetty Hooken laki 3-ulotteisessa isotrooppisessa tapauksessa voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right], \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right], \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}, \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right], \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Määritellään suhteellinen tilavuuden muutos

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{1.47}$$

Hooken lain perusteella

$$e = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2\nu}{E}s, \tag{1.48}$$

missä on merkitty

$$s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z. \tag{1.49}$$

Kaavasta (1.48) seuraa

$$\sigma_y + \sigma_z = \frac{Ee}{1-2\nu} - \sigma_x. \tag{1.50}$$

Sijoittamalla kaava (1.50) ε_x:n kaavaan tulee

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \frac{\nu E e}{1-2\nu} + \nu\sigma_x\right] = \frac{1+\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu e}{1-2\nu}, \tag{1.51}$$

josta voidaan ratkaista

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_x + \frac{E}{(1+\nu)}\frac{\nu}{(1-2\nu)}e = 2G\varepsilon_x + \lambda e, \tag{1.52}$$

missä

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.53}$$

on liukumoduuli ja

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{1.54}$$

on Lamén vakio.

Samalla tavalla johdetaan kaavat jännityksille σ_y ja σ_z, ja saadaan ryhmä

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x, \tag{1.55}$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y, \tag{1.56}$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z. \tag{1.57}$$

Leikkausjännitysten ja liukumien väliset kimmoiset yhtälöt ovat

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}. \tag{1.58}$$

Esimerkki 1.1 *Määritetään hydrostaattisessa jännitystilassa paineen ja suhteellisen tilavuudenmuutoksen välinen yhteys.*

Hydrostaattisessa jännitystilassa

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p. \tag{1.59}$$

Suhteelliseksi tilavuudenmuutokseksi

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}s \tag{1.60}$$

saadaan nyt

$$e = \frac{1-2\nu}{E}(-3p), \tag{1.61}$$

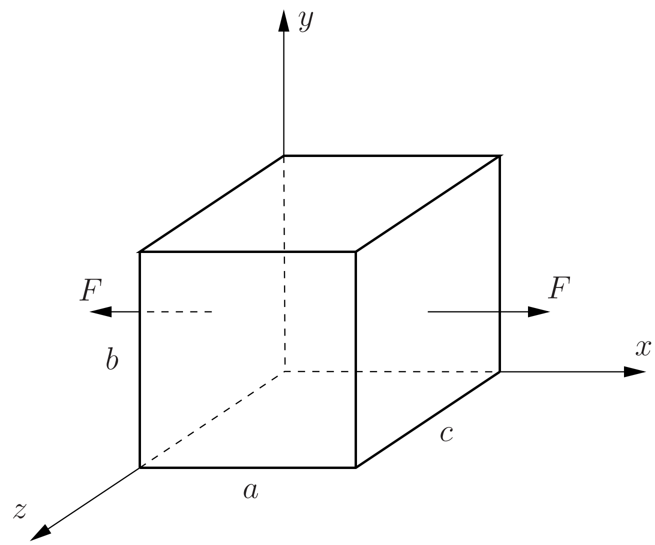
josta ratkaistaan

$$-p = \frac{E}{3(1-2\nu)}e \quad \text{tai} \quad -p = (\lambda + \frac{2G}{3})e = Ke, \tag{1.62}$$

missä

$$K = \left(\lambda + \frac{2G}{3}\right) \tag{1.63}$$

on tilavuudenmuutoskerroin.



Kuva 1.7 Suorakulmainen särmiö abc, jota kuormittaa voima F.

Esimerkki 1.2 *Tutkitaan kuvan 1.7 suorakulmaista särmiötä abc, jota kuormittaa voima F x-akselin suunnassa.*

Suorakulmaisen särmiön tilavuus alkutilassa on $V_0 = abc$. Deformoituneessa tilassa sen tilavuus on

$$\begin{aligned} V =& a(1+\varepsilon)b(1-\nu\varepsilon)c(1-\nu\varepsilon) \\ =& V_0(1+\varepsilon)(1-\nu\varepsilon)^2. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Tilavuuksien erotus on

$$\Delta V = V - V_0 = V_0\varepsilon(1-2\nu). \tag{1.65}$$

Koska $\Delta V > 0$ ja $\varepsilon > 0$, niin $1 - 2\nu > 0$ ja $\nu < 1/2$, ts. Poissonin luvun suurin mahdollinen arvo on 1/2.

1.5 Tasapainoyhtälöt

Tasapainoyhtälöt voidaan johtaa tutkimalla tilavuusalkion $dx\,dy\,dz$ tasapainoa (x, y, z)-avaruudessa, kuva 1.8. Tilavuusalkioon vaikuttavan tilavuusvoimavektorin $\boldsymbol{f}$ komponentit ovat f_x, f_y ja f_z. Akselin x suunnassa saadaan tasapainoehto

$$\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz + \left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dxdz + \left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy + f_x dxdydz = 0, \tag{1.66}$$

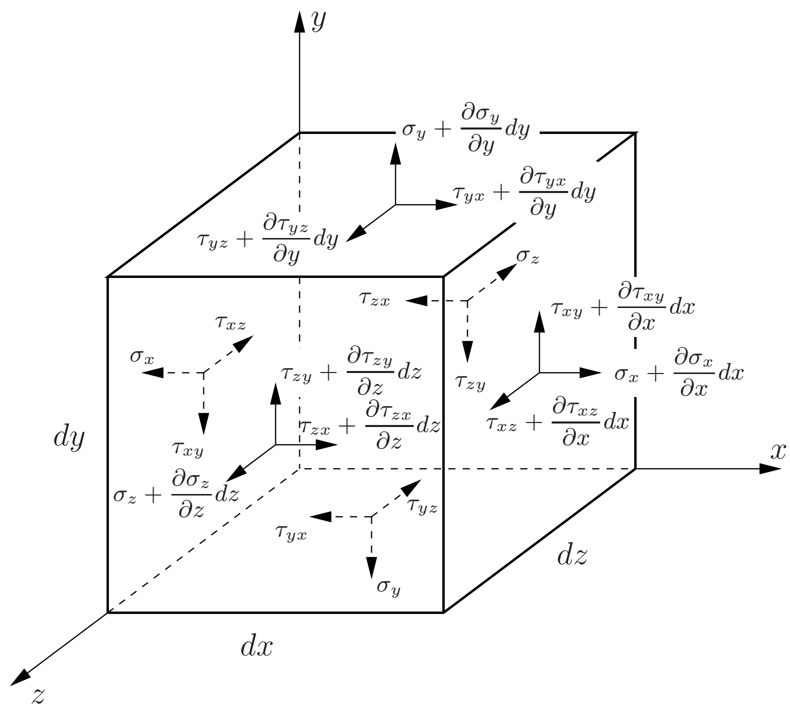
eli

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0, \tag{1.67}$$

missä f_x on x-akselin suuntainen tilavuusvoimavektorin komponentti.

Samalla tavalla johdetaan tasapainoehdot akseleiden y ja z suunnissa. Akseleiden x, y ja z suuntaiset tasapainoyhtälöt ovat

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0, \tag{1.68}$$



Kuva 1.8 Tasapainoehdot.

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0, \tag{1.69}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0. \tag{1.70}$$

Asettamalla vastaavuudet $x \leftrightarrow 1$, $y \leftrightarrow 2$, $z \leftrightarrow 3$ ja merkitsemällä

$$\sigma_{11,1} \equiv \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}, \quad \sigma_{12,2} \equiv \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad \cdots, \quad \sigma_{33,3} \equiv \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \tag{1.71}$$

voidaan tasapainoehdot kirjoittaa lyhyemmin indeksimuodossa

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad i = 1, \ldots, 3. \tag{1.72}$$

Jättämällä summamerkki pois ja muistamalla summeerata toistuvan indeksin suhteen päästään vieläkin lyhyempään merkintätapaan

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad i = 1, \ldots, 3. \tag{1.73}$$

Esimerkki 1.3 *Kappaleen pisteessä P tunnetaan jännityskomponentit*

$$\begin{aligned} &\sigma_x = x^2 + y^2, \quad \sigma_y = y^2 + z^2, \quad \sigma_z = z^2 + x^2, \\ &\tau_{xy} = xy, \qquad \tau_{yz} = yz, \qquad \tau_{xz} = xz. \end{aligned} \tag{1.74}$$

Märitetään näiden kanssa tasapainossa olevat tilavuusvoimien komponentit.

Sijoittamalla tasapainoyhtälöihin (1.68), (1.69) ja (1.70) saadaan

$$
\begin{aligned}
2x + x + x + f_x &= 0, \\
y + 2y + y + f_y &= 0, \\
z + z + 2z + f_z &= 0,
\end{aligned}
\tag{1.75}
$$

joten tilavuusvoimat ovat

$$
f_x = -4x, \quad f_y = -4y, \quad f_z = -4z. \tag{1.76}
$$

Johdetaan seuraavaksi tasapainoehdot kappaleen reunalla. Ajatellaan reunan läheisyydestä leikatuksi infinitesimaalinen (differentiaalinen) tetraedrin muotoinen kappale, jonka tahkojen pinta-alat ovat A, A_x, A_y ja A_z. Pinnan (tahkon) ABC yksikkönormaalivektori on

$$
\boldsymbol{n} = n_x\boldsymbol{i} + n_y\boldsymbol{j} + n_z\boldsymbol{k}, \tag{1.77}
$$

missä $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ ja $\boldsymbol{k}$ ovat akselien x, y ja z suuntaiset yksikkövektorit ja n_x, n_y ja n_z ovat yksikkönormaalivektorin komponentit. Matriisimerkinnällä

$$
\boldsymbol{n} = \left\{ \begin{array}{c} n_x \\ n_y \\ n_z \end{array} \right\}. \tag{1.78}
$$

Samaan tahkoon vaikuttava pintavoimavektori on

$$
\bar{\boldsymbol{t}} = \bar{t}_x\boldsymbol{i} + \bar{t}_y\boldsymbol{j} + \bar{t}_z\boldsymbol{k}, \tag{1.79}
$$

missä $\bar{t}_x$, $\bar{t}_y$ ja $\bar{t}_z$ ovat tunnetut pintavoimavektorin komponentit. Viiva suureen päällä tarkoittaa tässä yhteydessä tunnettua suuretta. Matriisimerkinnällä

$$
\bar{\boldsymbol{t}} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \\ \bar{t}_z \end{array} \right\}. \tag{1.80}
$$

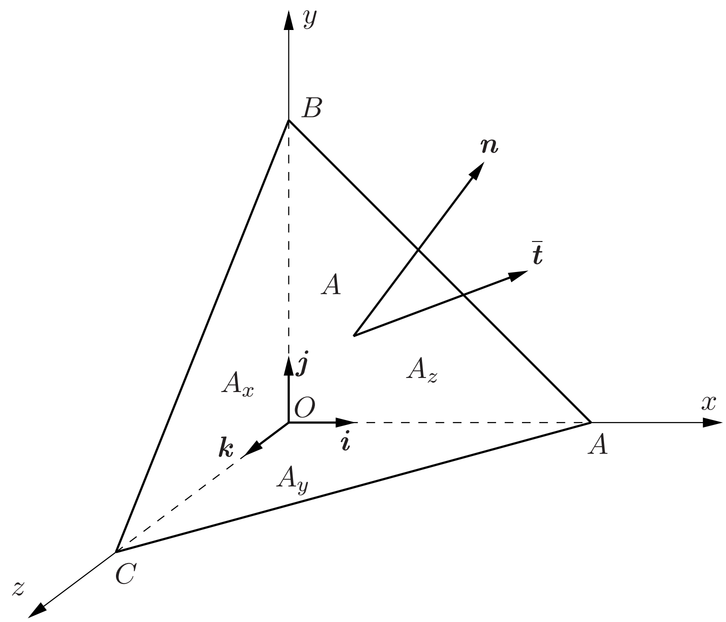
Kuvan 1.9 perusteella saadaan akselin x suuntaiseksi tasapainoehdoksi

$$
\bar{t}_x A - \sigma_x A_x - \tau_{xy} A_y - \tau_{xz} A_z = 0. \tag{1.81}
$$

Tilavuusvoimakomponentin f_x osuus voidaan jättää pois, koska se menee muiden termien rinnalla merkityksettömäksi tilavuusalkiota pienennettäessä.

Yksikkönormaalivektorin komponentit toteuttavat ehdot

$$
\begin{aligned}
n_x &= \cos(\boldsymbol{n}, x) = \frac{A_x}{A}, \\
n_y &= \cos(\boldsymbol{n}, y) = \frac{A_y}{A}, \\
n_z &= \cos(\boldsymbol{n}, z) = \frac{A_z}{A},
\end{aligned}
\tag{1.82}
$$



Kuva 1.9 Reunan tasapainoehdot.

joten jakamalla pinta-alalla A saadaan x-akselin suuntainen tasapainoehto muotoon

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = \bar{t}_x. \tag{1.83}$$

Samanlaiset reunan tasapainoehdot johdetaan myös y- ja z-akseleiden suunnissa ja päädytään tasapainoehtojen ryhmään

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= \bar{t}_x, \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z &= \bar{t}_y, \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z &= \bar{t}_z. \end{aligned} \tag{1.84}$$

Indeksimerkinnällä reunan tasapainoehdot voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.85}$$

jossa siis summataan toistuvan indeksin j yli.

1.6 Siirtymämenetelmä

Kolmiulotteisessa kimmoteoriassa on tuntemattomia suureita 15 kappaletta: $\{u, v, w\}$, $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$, $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x z, \tau_{yz}, \tau_{xy}\}$, joiden ratkaisemiseen on käytettävissä yhtä monta yhtälöä: venymien kaavat (1.10), (1.11), (1.12), liukumien kaavat (1.13), (1.14), (1.15), yleistetty Hooken laki (1.46) ja tasapainoyhtälöt (1.68), (1.69), (1.70). Eliminoimalla muut paitsi siirtymät pois päädytään siirtymämenetelmään. Lausumalla Hooken laissa muodonmuutokset siirtymien avulla saadaan

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \tag{1.86}$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Sijoittamalla jännitysten σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} kaavat ensimmäiseen tasapainoyhtälöön tulee

$$\lambda\frac{\partial e}{\partial x} + 2G\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) + f_x = 0 \tag{1.87}$$

eli

$$G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} + f_x = 0. \tag{1.88}$$

Muodostamalla samanlaiset yhtälöt y:n ja z:n suunnassa saadaan yhteensä kolme Lamén eli Navierin yhtälöä:

$$G\Delta u + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} + f_x = 0, \tag{1.89}$$

$$G\Delta v + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial y} + f_y = 0, \tag{1.90}$$

$$G\Delta w + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} + f_z = 0, \tag{1.91}$$

missä

$$\Delta(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial z^2} \tag{1.92}$$

on Laplacen operaattori.

1.7 Voimamenetelmä

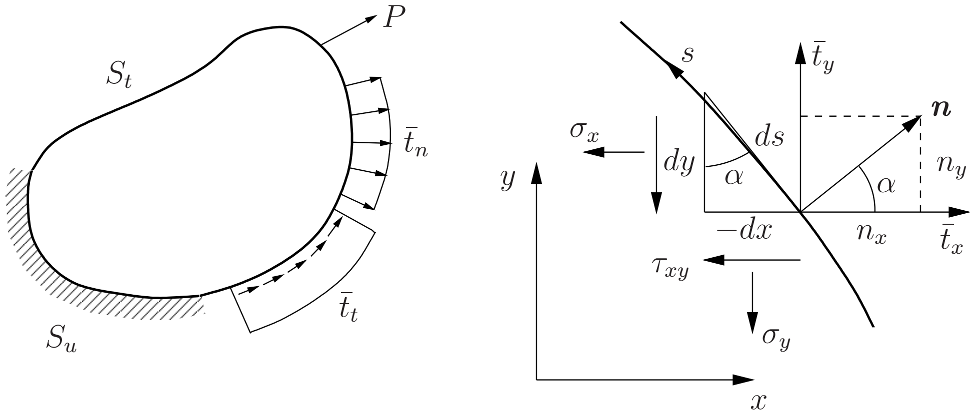
Voimamenetelmä perustuu yhteensopivuusehtoihin (1.31), (1.32), (1.33) tai (1.39), (1.40), (1.41). Niissä muodonmuutokset lausutaan Hooken lain kautta jännitysten avulla. Ottamalla huomioon tasapainoyhtälöt päädytään Beltramin-Michellin yhtälöihin:

$$\Delta\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\mathrm{div}\,\boldsymbol{f} - 2\frac{\partial f_x}{\partial x}, \tag{1.93}$$

$$\Delta\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\mathrm{div}\,\boldsymbol{f} - 2\frac{\partial f_y}{\partial y}, \tag{1.94}$$

$$\Delta\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\mathrm{div}\,\boldsymbol{f} - 2\frac{\partial f_z}{\partial z}, \tag{1.95}$$

$$\Delta\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x}, \tag{1.96}$$



Kuva 1.10 Kappaleen reunaehdot.

$$\Delta\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 s}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y}, \tag{1.97}$$

$$\Delta\tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 s}{\partial z \partial x} = -\frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z}, \tag{1.98}$$

missä Δ on Laplacen operaattori, $\operatorname{div}(\bullet) = \nabla \cdot (\bullet)$ on divergenssioperaattori, eli $\operatorname{div}\boldsymbol{f} = f_{x,x}+f_{y,y}+f_{z,z}$ ja tilavuusvoimavektori on $\boldsymbol{f} = [f_x, f_y, f_z]^T$. Beltramin-Michellin yhtälöissä on 6 tuntematonta jännityskomponenttia.

1.8 Reunaehdot

Siirtymä- tai voimamenetelmän yhtälöiden ratkaisemiseksi on tunnettava siirtymien tai jännitysten arvoja tarkasteltavan kappaleen reunoilla:

1. Tuetulla reunan osalla S_u tunnetaan siirtymät eli

   $$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w}, \tag{1.99}$$

   missä viiva suureen päällä tarkoittaa annettua (tunnetua) arvoa.

2. Kuormitetulla reunan osalla S_t tunnetaan reunakuorma eli

   $$n_x\sigma_x + n_y\tau_{yx} + n_z\tau_{zx} = \bar{t}_x, \tag{1.100}$$

   $$n_x\tau_{xy} + n_y\sigma_y + n_z\tau_{zy} = \bar{t}_y, \tag{1.101}$$

   $$n_x\tau_{xz} + n_y\tau_{yz} + n_z\sigma_z = \bar{t}_z, \tag{1.102}$$

   missä $\bar{t}_x, \bar{t}_y, \bar{t}_z$ ovat reunan osalla S_t annetut pintavoimavektorin komponentit ja n_x, n_y, n_z ovat pinnan yksikkönormaalivektorin komponentit.

Kuvan 1.10 perusteella johdetaan tasotapauksessa x-akselin suuntaiseksi tasapainoehdoksi

$$\sigma_x dy + \tau_{xy}(-dx) - \bar{t}_x ds = 0 \tag{1.103}$$

eli

$$\sigma_x \frac{dy}{ds} + \tau_{xy}\left(-\frac{dx}{ds}\right) = \bar{t}_x, \tag{1.104}$$

jossa

$$\frac{dy}{ds} = \cos\alpha = n_x, \quad -\frac{dx}{ds} = \sin\alpha = n_y, \tag{1.105}$$

ja reunan tasapainoehto saadaan muotoon

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = \bar{t}_x. \tag{1.106}$$

Vastaavasti y-akselin suuntaiseksi tasapainoehdoksi saadaan

$$\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = \bar{t}_y. \tag{1.107}$$

1.9 Virtuaalisen työn periaate

Kertomalla tasapainoyhtälöt ja voimien reunaehdot virtuaalisilla siirtymillä δu, δv ja δw sekä integroimalla yli kappaleen tilavuuden ja reunan osan S_t, jolla reunavoimat tunnetaan, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}
&\int_V \left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + f_x\right)\delta u\, dV + \\
&\int_V \left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + f_y\right)\delta v\, dV + \\
&\int_V \left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + f_z\right)\delta w\, dV + \\
&\int_{S_t} [(-t_x + \bar{t}_x)\delta u + (-t_y + \bar{t}_y)\delta v + (-t_z + \bar{t}_z)\delta w]\, dS = 0.
\end{aligned} \tag{1.108}$$

Reunan osalla S_u $\delta u = \delta v = \delta w = 0$, koska $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$ ja $w = \bar{w}$, eli siirtymät tunnetaan.

Soveltamalla kahden funktion, u ja v, tulon derivoimiskaavaa

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \Rightarrow \quad u'v = (uv)' - uv', \tag{1.109}$$

missä u ja v ovat mielivaltaisia funktioita ja pilkku tarkoittaa derivaattaa koordinaatin x,

y tai z suhteen, saadaan kaava (1.108) muunnettua muotoon

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x \delta u) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy}\delta u) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{xz}\delta u)\right] dV - \int_V \left(\sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \tau_{xy}\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \tau_{xz}\frac{\partial \delta u}{\partial z}\right) dV +$$
$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{yx} \delta v) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{y}\delta v) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{yz}\delta v)\right] dV - \int_V \left(\tau_{yx} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \sigma_{y}\frac{\partial \delta v}{\partial y} + \tau_{yz}\frac{\partial \delta v}{\partial z}\right) dV +$$
$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{zx} \delta w) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{zy}\delta w) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{z}\delta w)\right] dV - \int_V \left(\tau_{zx} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \tau_{zy}\frac{\partial \delta w}{\partial y} + \sigma_{z}\frac{\partial \delta w}{\partial z}\right) dV +$$
$$\int_V (f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w) dV +$$
$$\int_{S_t} \left[(-t_x + \bar{t}_x)\delta u + (-t_y + \bar{t}_y)\delta v + (-t_z + \bar{t}_z)\delta w\right] dS = 0. \tag{1.110}$$

Soveltamalla Gaussin integroimiskaavaa tai lausetta, jonka mukaan

$$\int_V \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dV = \int_S (f n_x + g n_y + h n_z)\, dS, \tag{1.111}$$

missä f, g ja h ovat mielivaltaisia funktioita ja n_x, n_y ja n_z ovat reunapinnan yksikkönormaalivektorin komponentit, saadaan kaava (1.110) edelleen muotoon

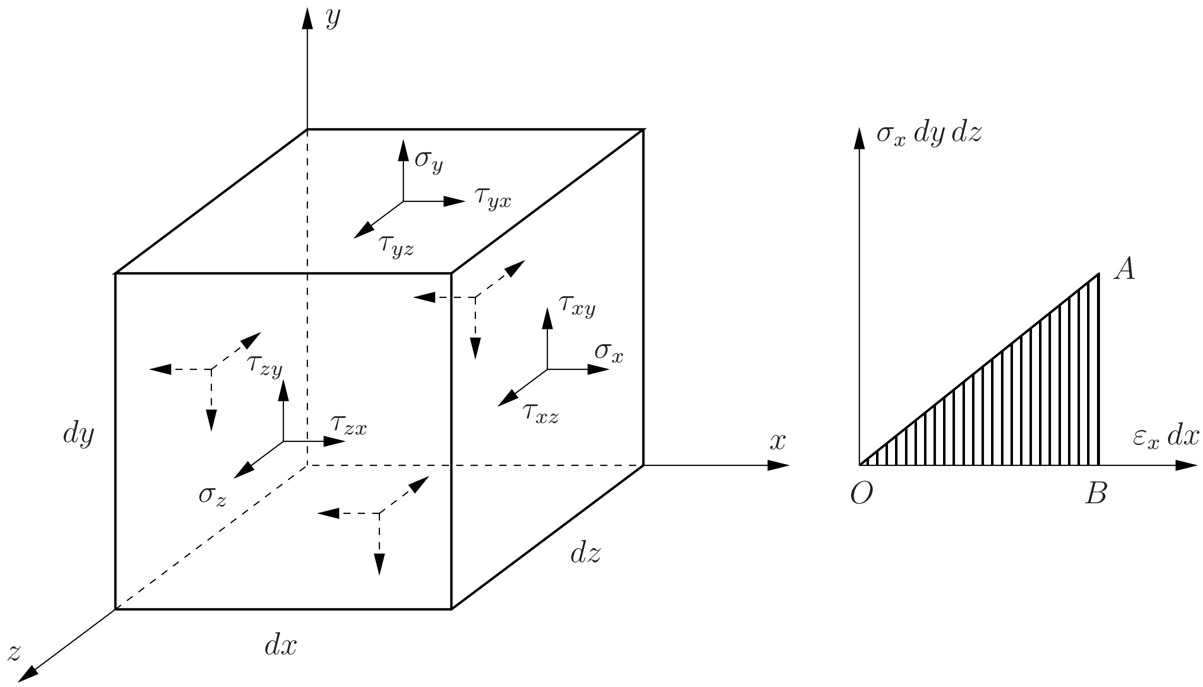
$$\int_S (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z)\, \delta u\, dS - \int_V \left(\sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \tau_{xy}\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \tau_{xz}\frac{\partial \delta u}{\partial z}\right) dV +$$
$$\int_S (\tau_{yx} n_x + \sigma_{y} n_y + \tau_{yz} n_z)\, \delta v\, dS - \int_V \left(\tau_{yx} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \sigma_{y}\frac{\partial \delta v}{\partial y} + \tau_{yz}\frac{\partial \delta v}{\partial z}\right) dV +$$
$$\int_S (\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_{z} n_z)\, \delta w\, dS - \int_V \left(\tau_{zx} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \tau_{zy}\frac{\partial \delta w}{\partial y} + \sigma_{z}\frac{\partial \delta w}{\partial z}\right) dV + \tag{1.112}$$
$$\int_V (f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w)\, dV +$$
$$\int_{S_t} \left[(-t_x + \bar{t}_x)\delta u + (-t_y + \bar{t}_y)\delta v + (-t_z + \bar{t}_z)\delta w\right]\, dS = 0.$$

Ottamalla huomioon reunan tasapainoyhtälöt

$$t_x = n_x \sigma_x + n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx},$$
$$t_y = n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y + n_z \tau_{zy}, \tag{1.113}$$
$$t_z = n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_z,$$

reunan osan S_t voimien reunaehdot

$$t_x = \bar{t}_x, \quad t_y = \bar{t}_y, \quad t_z = \bar{t}_z \tag{1.114}$$



Kuva 1.11 Muodonmuutosenergia.

ja muodonmuutosten määrittelykaavat

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_x &= \frac{\partial \delta u}{\partial x}, \quad \delta\gamma_{xy} = \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x}, \\
\delta\varepsilon_y &= \frac{\partial \delta v}{\partial y}, \quad \delta\gamma_{yz} = \frac{\partial \delta v}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial y}, \\
\delta\varepsilon_z &= \frac{\partial \delta w}{\partial z}, \quad \delta\gamma_{xz} = \frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial x},
\end{aligned} \tag{1.115}$$

saadaan lopulta virtuaalisen työn yhtälö muotoon

$$\begin{aligned}
&\int_V (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz})dV \\
&- \int_V (f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w)dV - \int_{S_t} (\bar{t}_x \delta u + \bar{t}_y \delta v + \bar{t}_z \delta w)dS = 0.
\end{aligned} \tag{1.116}$$

Virtuaalisen työn yhtälöstä (1.116) voidaan johtaa tasapainoyhtälöt.

1.10 Energiaperiaatteet

Jännityksen σ_x tekemä työ on kuvan 1.11 kolmion OAB pinta-ala

$$dU_{\sigma_x} = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x\, dxdydz = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x\, dV, \tag{1.117}$$

missä $dV = dxdydz$. Yhteensä tilavuusalkion muodonmuutosenergia on

$$dU = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz})\, dV. \tag{1.118}$$

Kappaleen muodonmuutosenergia saadaan integroimalla yli kappaleen tilavuuden V.

Lausumalla muodonmuutokset jännitysten avulla,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy},\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz},\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz},
\end{aligned} \tag{1.119}$$

tulee muodonmuutosenergian lausekkeeksi jännitysten funktiona

$$U = \tilde{U} = \frac{1}{4G}\int_V [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]\, dV. \tag{1.120}$$

Sijoittamalla vaihtoehtoisesti kaavaan (1.118)

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda e, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy},\\
\sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda e, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz},\\
\sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda e, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz},
\end{aligned} \tag{1.121}$$

saadaan

$$U = G\int_V [\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\nu e^2}{1-2\nu} + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)]\, dV. \tag{1.122}$$

Ulkoisten kuormien potentiaali määritellään kaavalla

$$V = -\int_V (f_x u + f_y v + f_z w)\, dV - \int_{S_t} (\bar{t}_x u + \bar{t}_y v + \bar{t}_z w) dS. \tag{1.123}$$

1.10.1 Potentiaalienergian minimin periaate

Kappaleen kokonaispotentiaalienergialla

$$\Pi = U + V \tag{1.124}$$

on minimiarvo tasapainotilassa eli

$$\Pi = \Pi_{\min}. \tag{1.125}$$

Potentiaalienergian ensimmäinen variaatio on tällöin nolla eli

$$\delta\Pi = 0. \tag{1.126}$$

1.10.2 Komplementaarisen energian minimin periaate

Kappaleen komplementaarisella energialla

$$\tilde{\Pi} = \tilde{U} + \tilde{V} \tag{1.127}$$

on minimiarvo tasapainotilassa. Lausekkeessa (1.127) ulkoinen potentiaali on

$$\tilde{V} = -\int_{S_u} (\bar{u}t_x + \bar{v}t_y + \bar{w}t_z)dS, \tag{1.128}$$

missä

$$\begin{aligned} t_x &= n_x\sigma_x + n_y\tau_{xy} + n_z\tau_{xz}, \\ t_y &= n_x\tau_{xy} + n_y\sigma_y + n_z\tau_{zy}, \\ t_z &= n_x\tau_{xz} + n_y\tau_{yz} + n_z\sigma_z. \end{aligned} \tag{1.129}$$

1.10.3 Ritzin menetelmä

Valitsemalla siirtymille u, v ja w jatkuvuus- ja kinemaattiset reunaehdot toteuttavat kehitelmät

$$\begin{aligned} u &= \varphi_0(x,y,z) + \sum_k a_k\varphi_k(x,y,z), \\ v &= \psi_0(x,y,z) + \sum_k b_k\psi_k(x,y,z), \\ w &= \theta_0(x,y,z) + \sum_k c_k\theta_k(x,y,z), \end{aligned} \tag{1.130}$$

joissa φ_k, ψ_k ja θ_k ovat kantafunktioita ja a_k, b_k ja c_k ovat kertoimia, ja sijoittamalla sarjakehitelmät (1.130) potentiaalienergian Π lausekkeeseen tulee

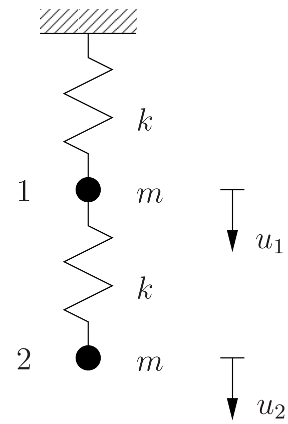
$$\Pi = \Pi\,(a_k, b_k, c_k). \tag{1.131}$$

Kimmoteorian probleeman ratkaisu saadaan nyt minimoimalla Π kertoimien a_k, b_k ja c_k suhteen.

Minimin välttämättömät ehdot ovat

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Pi}{\partial a_k} &= 0,\ k = 1,\ldots,K_a, \\ \frac{\partial\Pi}{\partial b_k} &= 0,\ k = 1,\ldots,K_b, \\ \frac{\partial\Pi}{\partial c_k} &= 0,\ k = 1,\ldots,K_c, \end{aligned} \tag{1.132}$$

missä K_a, K_b ja K_c ovat tuntemattomien parametrien lukumäärät kussakin siirtymän kehitelmässä. Kaavoista (1.132) seuraa lineaarinen yhtälöryhmä kertoimien a_k, b_k ja c_k ratkaisemiseksi. Jos kantafunktiot muodostavat täydellisen kehitelmän, niin ratkaisun virhe lähestyy nollaa, kun termien lukumäärä lähenee ääretöntä.



Kuva 1.12 Kahden jousen ja massan systeemi.

Esimerkki 1.4 *Tutkitaan kahden sarjaan kytketyn jousen ja massan muodostamaa systeemiä, joka on ripustettu pystysuoraan yläpäästään.*

Otaksutaan jousien jousivakiot samoiksi, eli $k_1 = k_2 = k$. Massojen voimat ovat $F_1 = F_2 = F = mg$. Massan 1 siirtymä on u_1, ja massan 2 siirtymä on u_2. Potentiaalienergian lausekkeeksi tulee nyt

$$\Pi = \frac{1}{2}ku_1^2 + \frac{1}{2}k(u_1 - u_2)^2 - Fu_1 - Fu_2. \tag{1.133}$$

Funktion Π minimin välttämättömät ehdot ovat

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} &= 0 \quad \Rightarrow \quad 2ku_1 - ku_2 = F, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} &= 0 \quad \Rightarrow \quad -ku_1 + ku_2 = F, \end{aligned} \tag{1.134}$$

joiden perusteella ratkaistaan

$$u_1 = 2\frac{F}{k}, \quad u_2 = 3\frac{F}{k}. \tag{1.135}$$

Tasapainotilassa potentiaalienergian ensimmäinen variaatio on nolla eli

$$\delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial u_1}\delta u_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial u_2}\delta u_2 = 0. \tag{1.136}$$

Koska δu_1 ja δu_2 ovat mielivaltaisia variaatioita, päätellään, että

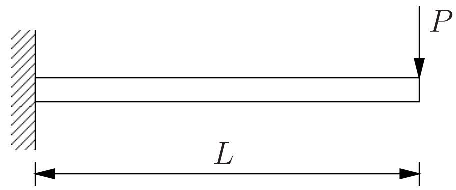
$$\delta\Pi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0. \tag{1.137}$$

Potentiaalifunktion Π lauseke esittää esimerkin tapauksessa (u_1, u_2, Π)-avaruudessa paraboloidia, jonka minimin välttämättömät ehdot ovat juuri edellä esitetyt tasapainoehdot (1.134).

Esimerkki 1.5 *Määritetään ulokepalkin taipuma potentiaalienergian minimin periaatteen avulla.*

Ulokepalkin pituus on L ja sen päässä kohdassa $x = L$ on kuorma P. Otaksutaan taipumalle kehitelmä

$$v(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3, \tag{1.138}$$



Kuva 1.13 Ulokepalkki, pistekuorma P päässä $x = L$.

missä $\xi = x/L \in (0,1)$ on laaduton koordinaatti. Ulokkeen tuella $x = 0$ reunaehtojen perusteella

$$\begin{aligned} v(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_0 = 0, \\ v'(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_1 = 0, \end{aligned} \tag{1.139}$$

missä $(\bullet)' \equiv d(\bullet)/dx$, ja palkin taipuman lauseke on siten

$$v(\xi) = a_2\xi^2 + a_3\xi^3. \tag{1.140}$$

Esimerkin ulokepalkin potentiaalienergian lauseke on

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EI(v'')^2\,dx - Pv(L). \tag{1.141}$$

Ottamalla huomioon, että

$$\frac{d(\bullet)}{dx} = \frac{1}{L}\frac{d(\bullet)}{d\xi}, \tag{1.142}$$

saadaan ulokkeen käyristymän lauseke

$$v'' = \frac{1}{L^2}(2a_2 + 6a_3\xi). \tag{1.143}$$

Sijoittamalla käyristymän lauseke potentiaalienergian kaavaan (1.141) ja ottamalla huomioon, että $dx = Ld\xi$, tulee integroimalla

$$\Pi = \frac{EI}{L^3}(2a_2^2 + 6a_2a_3 + 6a_3^2) - P(a_2 + a_3). \tag{1.144}$$

Funktion Π minimin välttämättömät ehdot ovat

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Pi}{\partial a_2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad 4a_2 + 6a_3 = \frac{PL^3}{EI}, \\ \frac{\partial\Pi}{\partial a_3} = 0 \quad &\Rightarrow \quad 6a_2 + 12a_3 = \frac{PL^3}{EI}, \end{aligned} \tag{1.145}$$

joista ratkaistaan

$$a_2 = \frac{PL^3}{2EI}, \quad a_3 = -\frac{PL^3}{6EI}. \tag{1.146}$$

Taipuman lausekkeeksi saadaan ξ:n funktiona

$$v(\xi) = (3\xi^2 - \xi^3)\frac{PL^3}{6EI} \tag{1.147}$$

tai x:n funktiona

$$v(x) = (3Lx^2 - x^3)\frac{P}{6EI}. \tag{1.148}$$

Taivutusmomentin jakauma on

$$M(x) = -EIv''(x) = P(x - L), \tag{1.149}$$

ja taivutusmomentin arvo tuella, $x = 0$, on $M(0) = -PL$. Tässä tapauksessa saatiin tarkka tulos otaksumalla taipumalle kolmannen asteen polynomi. Yleensä energiamenetelmällä saadaan vain likiratkaisu.

Luku 2

Vapaa vääntö

2.1 Coulombin teoria

Tarkastellaan kuvan 2.1 sauvaa, jonka poikkileikkaus on ympyrä. Sauvaa kuormittaa vääntömomentti $\bar{M} = M_z(L)$. Pyöreän akselin väännössä poikkileikkaustasot säilyvät tasoina.

Vääntökulma φ on poikkileikkauksen kiertymä. Vääntökulman derivaatta sauvan akselin suuntaisen koordinaatin z suhteen on vääntymä

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz}. \tag{2.1}$$

Kuvan 2.1 perusteella saadaan

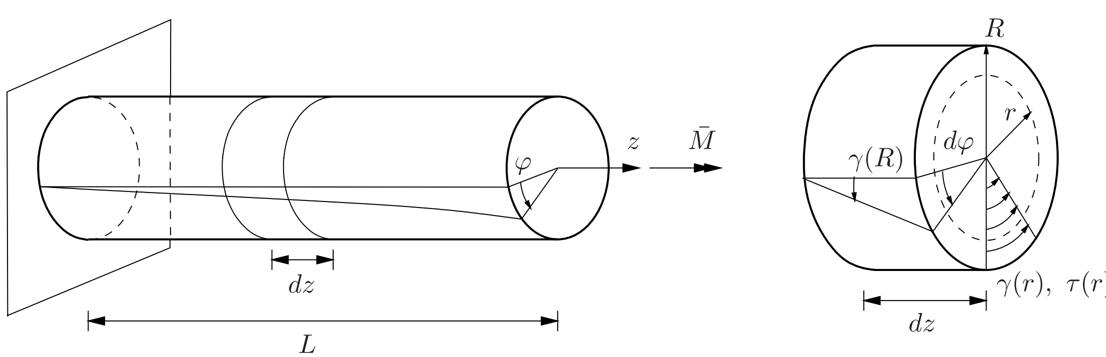
$$d\varphi\, r = \gamma(r) dz, \tag{2.2}$$

joten väännön aiheuttama liukuma sauvassa on

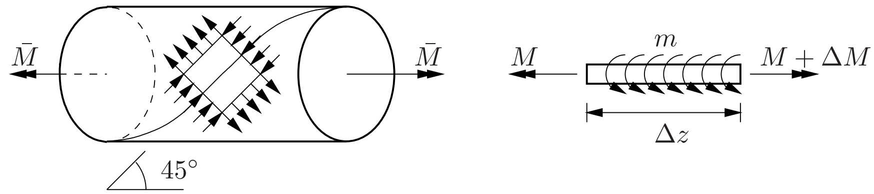
$$\gamma(r) = \frac{d\varphi}{dz}\, r = \theta r. \tag{2.3}$$

Leikkausjännitystä τ vastaava vääntömomentti on

$$M_z = \int\limits_A \tau r \, dA = 2\pi \int\limits_0^R \tau r^2 \, dr. \tag{2.4}$$



Kuva 2.1 Pyöreän ulokesauvan vääntö.



Kuva 2.2 Väännetyssä pyöreässä sauvassa vallitseva puhdas leikkaus ja sauvan alkion Δz tasapaino.

Merkitään seuraavassa vääntömomenttia (z-akselin ympäri) lyhyemmin $M \equiv M_z$. Kuvan 2.1 staattisesti määrätyn ulokesauvan tapauksessa sisäinen vääntömomentti on jokaisessa poikkileikkauksessa sama kuin ulkoinen vääntömomenttikuorma, eli $M(z) = \bar{M}$.

Hooken lain mukaan kimmoisessa sauvassa leikkausjännityksen ja liukuman välinen kimmoinen yhteys on

$$\tau = G\gamma = G\theta r. \tag{2.5}$$

Sijoittamalla leikkausjännityksen lauseke vääntömomentin kaavaan tulee

$$M = G\theta 2\pi \int_0^R r^3 \, dr = G\theta I_p, \tag{2.6}$$

missä I_p on polaarinen jäyhyysmomentti

$$I_p = \int_A r^2 \, dA = 2\pi \int_0^R r^3 \, dr = \pi \frac{R^4}{2}. \tag{2.7}$$

Suure GI_p on pyöreän akselin vääntöjäykkyys. Ympyräputken tapauksessa

$$I_p = \frac{\pi}{2}(b^4 - a^4), \tag{2.8}$$

missä b on putken ulkosäde ja a on vastaavasti sisäsäde. Suurin leikkausjännitys poikkileikkauksessa syntyy kehälle $r = R$, jossa

$$\tau_{\max} = G\theta R = \frac{MR}{I_p}. \tag{2.9}$$

Leikkausmuodonmuutos γ ja jännitys τ jakaantuvat lineaarisesti säteen suunnassa koordinaatin r funktiona. Sauvassa vallitseva jännitystila on ns. puhdas leikkaus, kuva 2.2.

Kuvan 2.2 perusteella johdetaan sauvan alkion Δz tasapainoyhtälö

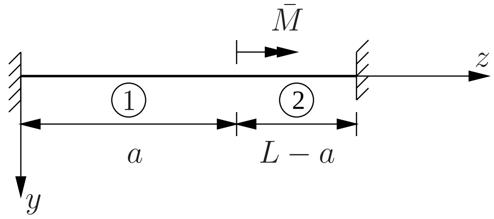
$$m\Delta z + \Delta M = 0, \tag{2.10}$$

josta seuraa

$$\frac{dM}{dz} + m = 0, \tag{2.11}$$

missä $m(z)$ on ulkoinen, sauvan pituusyksikköä kohti laskettu vääntömomentti.

Kuva 2.3 Sauvan reunaehdot.



Kuva 2.4 Pistevääntömomentin kuormittama sauva.

Siirtymämenetelmän differentiaaliyhtälö saadaan lausumalla vääntömomentti M vääntymän $\theta = \varphi'$ avulla muodossa

$$\frac{d}{dz}(GI_p \frac{d\varphi}{dz}) + m = 0. \tag{2.12}$$

Jos vääntöjäykkyys GI_p on vakio, niin tasapainoyhtälö yksinkertaistuu muotoon

$$GI_p \frac{d^2\varphi}{dz^2} + m(z) = 0. \tag{2.13}$$

Tavallisimmat reunaehtotapaukset ovat:

1. Vapaasti kiertyvässä päässä vääntömomentti $M = \bar{M}$, missä viiva suureen päällä tarkoittaa annettua arvoa.

2. Kiinnitetyssä päässä vääntökulma $\varphi = 0$.

Esimerkki 2.1 *Päistään kiinnitetyn sauvan kohdassa $z = a$ vaikuttaa pistemäinen vääntömomentti $\bar{M}$. Määritetään vääntökulma ja vääntömomentin jakauma.*

Sauvan reunaehdot ovat

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(L) = 0. \tag{2.14}$$

Jaetaan sauva osiin $(0, a)$ ja (a, L), kuva 2.4. Kummallakaan osavälillä ei ole jakautunutta vääntömomenttikuormaa, ja vääntökulmat $\varphi_1(z)$ ja $\varphi_2(z)$ väleillä 1 ja 2 integroidaan nyt homogeenisista tasapainoyhtälöistä:

$$GI_p\varphi_1'' = 0, \quad GI_p\varphi_2'' = 0, \tag{2.15}$$

$$GI_p\varphi_1' + C_1 = 0, \quad GI_p\varphi_2' + D_1 = 0, \tag{2.16}$$

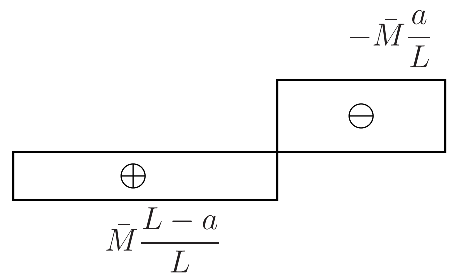
$$GI_p\varphi_1 + C_1 z + C_2 = 0, \quad GI_p\varphi_2 + D_1 z + D_2 = 0, \tag{2.17}$$

missä on merkitty

$$(\bullet)' \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial z}. \tag{2.18}$$

Integroimisvakiot C_1, C_2, D_1 ja D_2 ratkaistaan kahden reunaehdon, yhden jatkuvuusehdon ja kohdassa $z = a$ lausutun momentin tasapainoehdon avulla:

$$\varphi_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, \tag{2.19}$$



Kuva 2.5 Vääntömomenttikuvio.

$$\varphi_2(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad D_1 L + D_2 = 0, \tag{2.20}$$

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a), \tag{2.21}$$

$$\bar{M} + GI_p\theta_2 - GI_p\theta_1 = 0. \tag{2.22}$$

Sauvan vääntöjäykkyys otaksutaan vakioksi eli

$$(GI_p)_1 = (GI_p)_2. \tag{2.23}$$

Jatkuvuusehdosta (2.21) seuraa ensin yhtälö

$$C_1 a = D_1 a + D_2, \tag{2.24}$$

ja sitten reunaehdon (2.20) perustella tulee

$$C_1 a + (L - a)D_1 = 0. \tag{2.25}$$

Tasapainoehdon (2.22) avulla saadaan yhtälö

$$-C_1 + D_1 = \bar{M}. \tag{2.26}$$

Kahden viimeisimmän yhtälön avulla saadaan ratkaistua vakiot

$$D_1 = \frac{a}{L}\bar{M}, \quad C_1 = \bar{M}\left(\frac{a}{L} - 1\right). \tag{2.27}$$

Vääntömomentti $M(z) = GI_p\theta(z)$ on välillä $(0, a)$

$$M = GI_p\theta_1 = -C_1 = \bar{M}\left(\frac{L-a}{L}\right) \tag{2.28}$$

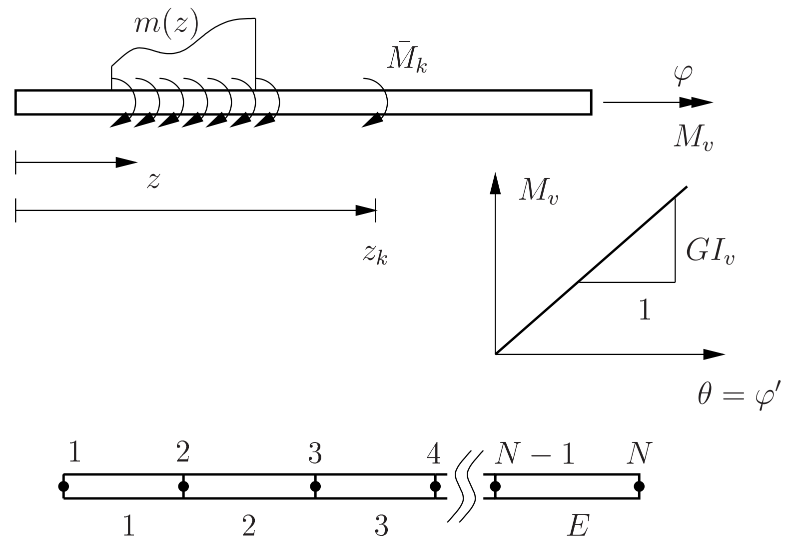
ja välillä (a, L)

$$M = GI_p\theta_2 = -D_1 = \bar{M}\left(-\frac{a}{L}\right). \tag{2.29}$$

Kuvan 2.5 vääntömomenttijakauma on samanmuotoinen kuin leikkausvoiman jakauma kaksitukisessa palkissa. Vääntökulman lausekkeiksi väleille $(0, a)$ ja (a, L) tulee

$$\varphi_1 = -\frac{1}{GI_p}(C_1 z) = \frac{\bar{M}}{GI_p}\left(1 - \frac{a}{L}\right)z, \tag{2.30}$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{GI_p}(D_1 z + D_2) = -\frac{D_1}{GI_p}(z - L) = -\frac{\bar{M}}{GI_p}a\left(\frac{z}{L} - 1\right). \tag{2.31}$$



Kuva 2.6 Vääntösauvan elementtimalli.

2.2 Väännön differentiaaliyhtälön ratkaisu elementtimenetelmällä

Kappaleen potentiaalienergia on

$$\Pi = U + V, \tag{2.32}$$

missä U on muodonmuutosenergia ja V on ulkoisten kuormien potentiaali. Vääntösauvan tapauksessa muodonmuutosenergia on

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} M_v \varphi' dz, \tag{2.33}$$

missä $\varphi' = d\varphi/dz$ on vääntymä, ja ulkoisten voimien potentiaali on

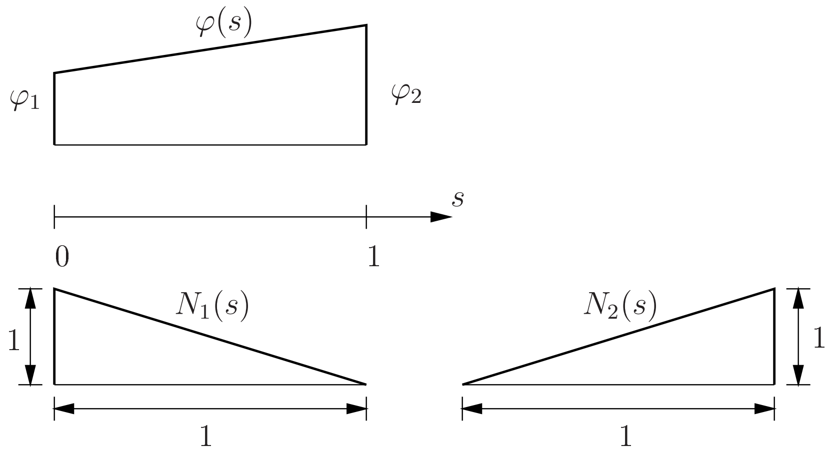
$$V = -\int_0^L \bar{m}(z)\varphi(z)dz - \sum_i \bar{M}_i \varphi(z_i), \tag{2.34}$$

missä $\bar{m}(z)$ on annettu jakautunut vääntömomenttikuorma ja $\bar{M}_i$ on pistevääntömomenttikuorma kohdassa $z = z_i$. Koska $M_v = GI_v\varphi'$, saadaan muodonmuutosenergialle lauseke

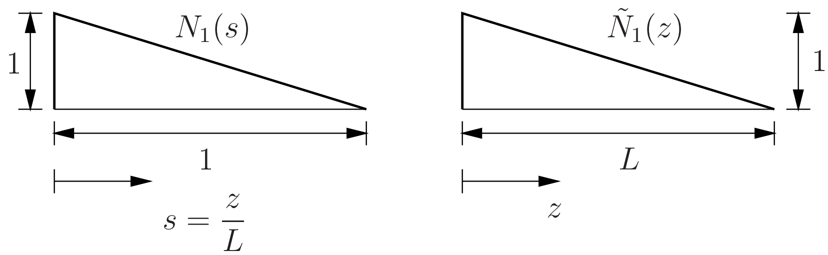
$$U = \int \frac{1}{2} GI_v (\varphi')^2 \, dz. \tag{2.35}$$

Elementtimenetelmässä sauva jaetaan osiin eli elementteihin $1, 2, 3, \ldots, E$. Solmuja on tässä tapauksessa $N = E+1$ kappaletta. Merkitään, että tarkasteltavan elementin e pituus on $L_e \equiv L$, ja otetaan käyttöön elementin e alueella laaduton koordinaatti $s = z/L$. Tällöin $s \in (0, 1)$, $z \in (0, L)$ ja $dz = Lds$. Kunkin elementin alueella vääntökulmaa $\varphi(s) = \tilde{\varphi}(z)$ interpoloidaan lineaarisella polynomilla

$$\begin{aligned} \varphi(s) =& (1-s)\varphi_1 + s\varphi_2 \\ =& N_1(s)\varphi_1 + N_2(s)\varphi_2 \end{aligned} \tag{2.36}$$



Kuva 2.7 Vääntökulman φ interpolointiin käytettävät lineaariset muotofunktiot.



Kuva 2.8 Lineaarinen muotofunktio $N_1(s)$ koordinaatin s funktiona ja muotofunktio $\tilde{N}_1(z)$ koordinaatin $z = Ls$ funktiona.

eli

$$\varphi(s) = \begin{bmatrix} N_1(s) & N_2(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}, \tag{2.37}$$

missä $N_1(s)$ ja $N_2(s)$ ovat muotofunktiot ja φ_1 ja φ_2 ovat vääntökulman arvot elementin solmuissa 1 ja 2.

Yhden mielivaltaisen elementin e muodonmuutosenergia on

$$U^e = \int_0^L \frac{1}{2} G I_v \theta^2 \, dz, \tag{2.38}$$

missä $L \equiv L_e$ on elementin e pituus, $\theta = \varphi'$ on vääntymä ja

$$\theta = \varphi' = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dz} = \frac{d\varphi}{ds}\frac{1}{L}. \tag{2.39}$$

Sijoittamalla vääntymän kaavaan vääntökulman lineaarinen interpolaatio tulee

$$\varphi' = N_1' \varphi_1 + N_2' \varphi_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}. \tag{2.40}$$

Sijoittamalla puolestaan vääntymän $\theta = \varphi'$ kaava muodonmuutosenergian U^e lausekkeeseen saadaan [1]

$$U^e = \frac{1}{2}LGI_v \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^{eT}\boldsymbol{K}^e\boldsymbol{\varphi}^e, \tag{2.41}$$

missä

$$\boldsymbol{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{GI_v}{L} & -\frac{GI_v}{L} \\ -\frac{GI_v}{L} & \frac{GI_v}{L} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}^e = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}. \tag{2.42}$$

Matriisi $\boldsymbol{K}^e$ on elementin e jäykkyysmatriisi, ja $\boldsymbol{\varphi}^e$ on elementin vääntökulmien vektori.

Elementin e osuus ulkoisten voimien potentiaaliin on

$$V^e = -\int_0^{L^e} \bar{m}(z)\varphi(z)\,dz - \sum_i \bar{M}_i\varphi(z_i), \tag{2.43}$$

missä $L^e = L$ on elementin e pituus ja $\bar{M}_i$ ovat elementin alueella, elementtikohtaisessa koordinaatistossa välillä $[0, L^e]$, määritellyt pistemäiset vääntömomenttikuormat. Pistemäinen vääntömomentti voidaan esittää samaan tapaan kuin jatkuva kuorma Dirac'in δ-funktion avulla muodossa

$$\bar{m}_i = \bar{M}_i\delta(z - z_i), \tag{2.44}$$

missä $\delta(z) = 0$, kun $z \neq 0$ ja

$$\int \delta(z)\,dz = 1. \tag{2.45}$$

Sijoittamalla vääntökulman lineaarinen approksimaatio

$$\varphi(s) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{z}{L} & \frac{z}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \tag{2.46}$$

elementin e ulkoisten voimien potentiaalin osuuteen V^e tulee

$$V^e = -\begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} \int_0^{L^e} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{z}{L} \\ \frac{z}{L} \end{Bmatrix} (\bar{m}(z) + \sum \bar{m}_i)\,dz \tag{2.47}$$

eli

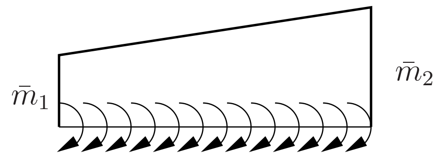
$$V^e = -\begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \equiv -\boldsymbol{\varphi}^{eT}\boldsymbol{f}^e, \tag{2.48}$$

missä $\boldsymbol{f}^e$ on elementin e solmuvoimavektori

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \int_0^{L^e} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{z}{L} \\ \frac{z}{L} \end{Bmatrix} (\bar{m}(z) + \sum \bar{m}_i)\,dz \tag{2.49}$$

Esimerkki 2.2 *Määritetään lineaarisesti jakautuneen vääntömomenttikuorman ekvivalentti kuormavektori.*

[1] Lineaarisen vääntökulman interpolaation tapauksessa vääntymä θ = vakio.



Kuva 2.9 Lineaarisesti jakautunut annettu vääntömomenttikuorma $\bar{m}(s)$.

Jos vääntömomenttikuorma $\bar{m}(s)$ on elementissä lineaarisesti jakautunut eli

$$\bar{m}(s) = (1-s)\bar{m}_1 + s\bar{m}_2, \tag{2.50}$$

niin potentiaalin $V^e = -\boldsymbol{\varphi}^{eT}\boldsymbol{f}^e$ lausekkeen kuormavektoriksi $\boldsymbol{f}^e$ tulee integroinnin jälkeen

$$\boldsymbol{f}^e = \int_0^1 \left\{ \begin{array}{c} (1-s) \\ s \end{array} \right\} \left[\begin{array}{cc} 1-s & s \end{array} \right] ds L \left\{ \begin{array}{c} \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \end{array} \right\} = \frac{L}{6} \left\{ \begin{array}{c} 2\bar{m}_1 + \bar{m}_2 \\ \bar{m}_1 + 2\bar{m}_2 \end{array} \right\}. \tag{2.51}$$

Tasaisen kuorman tapauksessa $\bar{m}_1 = \bar{m}_2 = \bar{m}$, ja kuormavektoriksi tulee

$$\boldsymbol{f}^e = \bar{m}L \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\}. \tag{2.52}$$

Esimerkki 2.3 *Määritetään pistevääntömomenttikuorman ekvivalentti kuormavektori.*

Jos elementin e pisteessä $z = z_i$ on vääntömomenttikuorma

$$\bar{m}_i = \bar{M}_i \delta(z - z_i), \tag{2.53}$$

niin kuormavektoriksi $\boldsymbol{f}^e$ tulee

$$\boldsymbol{f}^e = \int_0^1 \left\{ \begin{array}{c} 1 - \dfrac{z}{L} \\ \dfrac{z}{L} \end{array} \right\} \bar{M}_i \delta(z - z_i)\, dz = \bar{M}_i \left\{ \begin{array}{c} 1 - \dfrac{z_i}{L} \\ \dfrac{z_i}{L} \end{array} \right\} \tag{2.54}$$

Dirac'in δ-funktion ominaisuuden (2.45) perusteella.

Jos momenttikuorma $\bar{M}_i$ on jänteen keskellä $z = L/2$, niin kuormavektoriksi tulee

$$\boldsymbol{f}^e = \bar{M}_i \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\}. \tag{2.55}$$

Sauvan potentiaalienergia saadaan laskemalla elementtien energiaosuudet yhteen

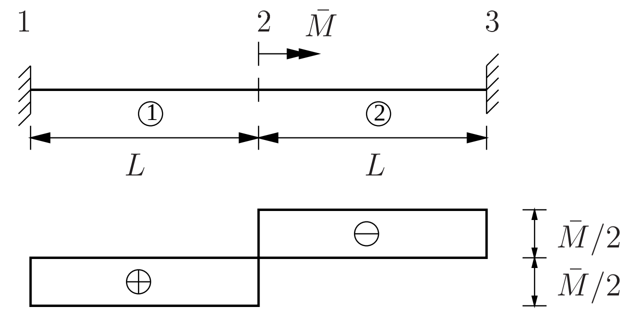
$$\Pi = \sum_{e=1}^{E} \Pi^e. \tag{2.56}$$

Potentiaalienergia

$$\Pi = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{f} \tag{2.57}$$

saa minimiarvon tasapainotilassa. Tällöin potentiaalienergian ensimmäinen variaatio on nolla eli

$$\delta\Pi = 0, \tag{2.58}$$



Kuva 2.10 Elementtimenetelmällä ratkaistu vääntömomenttikuvio.

mistä seuraa

$$\delta\Pi = \delta\boldsymbol{\varphi}^T(\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{f}) = \boldsymbol{0}. \tag{2.59}$$

Koska $\delta\boldsymbol{\varphi}$ on mielivaltainen solmuvääntökulmien variaatioiden vektori, saadaan ehdosta $\delta\Pi = 0$ lineaarinen yhtälöryhmä

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{f}, \tag{2.60}$$

josta ratkaistaan reunaehtojen sijoittamisen jälkeen tuntemattomat solmujen vääntökulmat.

Ehdosta $\delta\Pi = 0$ seuraava yhtälöryhmä kootaan elementtien $m = 1, \ldots, E$ osuuksista:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & & & & \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & & & \\ & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 & & \\ & & K_{21}^3 & K_{22}^3 + K_{11}^4 & \cdots & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & & \cdots & K_{22}^{E-1} + K_{11}^E & K_{12}^E \\ & & & & K_{21}^E & K_{22}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \vdots \\ \varphi_{N-1} \\ \varphi_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 + f_1^4 \\ \vdots \\ f_2^{E-1} + f_1^E \\ f_2^E \end{Bmatrix}, \tag{2.61}$$

missä K_{ij}^e, $e = 1, \ldots, E$ ja $i, j = 1, 2$ ovat jäykkyysmatriisin alkiot ja f_i^e, $e = 1, \ldots, E$ ja $i = 1, 2$ ovat kuormavektorin alkiot. Jos solmuun k vaikuttaa pistemomentti $\bar{M}_k$, se lisätään sellaisenaan riville k vektoriin $\boldsymbol{f}$.

Esimerkki 2.4 *Päistään kiinnitetyn sauvan kohdassa $z = L$ vaikuttaa pistemäinen vääntömomentti $\bar{M}$. Määritetään vääntökulma ja vääntömomentin jakauma elementtimenetelmällä.*

Jaetaan sauva kahteen elementtiin. Elementtimallissa on kolme solmua. Solmussa 2 on vääntömomentti $\bar{M}$. Sauvan reunaehdot ovat

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_3 = 0. \tag{2.62}$$

Kootaan yhtälöryhmä edellä esitetyllä periaatteella:

$$\frac{GI_v}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{M} \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{2.63}$$

Reunaehtojen huomioonottamisen jälkeen jää vain yksi yhtälö

$$\frac{GI_v}{L} 2\varphi_2 = \bar{M} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \frac{\bar{M}L}{2GI_v}. \tag{2.64}$$

Elementissä 1 vääntymä on

$$\theta = -\frac{1}{L}\varphi_1 + \frac{1}{L}\varphi_2 = \frac{\bar{M}}{2GI_v}, \tag{2.65}$$

ja vääntömomentti on

$$M_v = GI_v\theta = \frac{\bar{M}}{2}. \tag{2.66}$$

Elementissä 2 vastaavasti

$$\theta = -\frac{1}{L}\varphi_2 + \frac{1}{L}\varphi_3 = -\frac{\bar{M}}{2GI_v} \tag{2.67}$$

ja

$$M_v = GI_v\theta = -\frac{\bar{M}}{2}. \tag{2.68}$$

2.3 De Saint-Venantin vääntöteoria

Pyöreän sauvan väännössä sauvan poikkipinta säilyy tasona. Muissa sauvoissa vääntö aiheuttaa poikkipinnan käyristymistä (deplanaatio). Jos käyristyminen saa tapahtua vapaasti, sauvaan syntyy vain leikkausjännityksiä ja kyseessä on vapaa vääntö eli Saint-Venantin vääntö. Jos käyristyminen on estetty, syntyy sauvaan myös akselin suuntaisia jännityksiä (estetty vääntö).

Myös vääntösauvan tuennan on sallittava vapaa deplanaatio, jotta vapaa vääntö olisi mahdollinen. Esimerkiksi sauvan päässä olevan pistemäisen vääntömomentin kuormittaman ulokkeen tapauksessa voidaan ajatella, että tuella kiertymä on estetty mutta poikkipinnan käyristyminen saa tapahtua vapaasti. Toisaalta, vaikka tuenta sauvan päässä olisikin jäykkä, kiinnityskohtaan aiheutuu poikkipinnan käyristymisen estämisestä Saint-Venantin periaatteen mukaan vain paikallinen häiriö, joka vaimenee nopeasti tuelta etäännyttäessä, ja vapaan väännön teoriaa voidaan soveltaa muualla paitsi tuen läheisyydessä. Deplanaation estäminen tuella jäykistää sauvaa väännön suhteen.

Tarkastellaan yhdesti yhtenäistä poikkileikkausta (x, y)-tasossa, joka on kohtisuorassa sauvan akselia z vastaan. Koordinaattiakseleiden x, y ja z suuntaiset siirtymät ovat u, v ja w. De Saint-Venantin (de Saint-Venant, 1856) mukaan otaksutaan jännityksistä, että

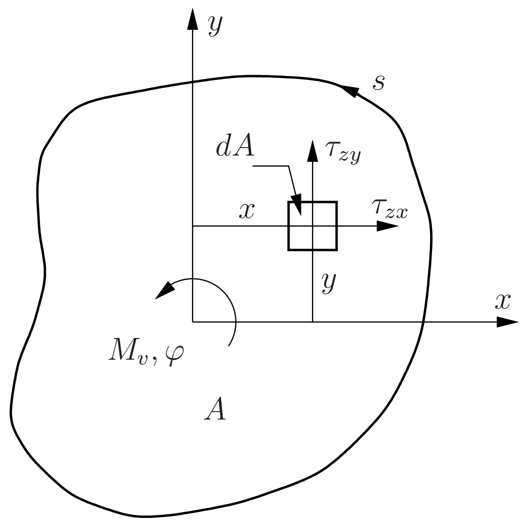
$$\sigma_z = \sigma_y = \sigma_x = \tau_{xy} = 0, \tag{2.69}$$

ja muodonmuutoksista, että

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Sauvan poikittaiset liukumat ovat

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}. \tag{2.71}$$



Kuva 2.11 Vääntösauvan poikkileikkaus ja vääntömomentti.

Hooken lain mukaan kimmoisen sauvan tapauksessa poikittaiset leikkausjännitykset ovat

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx}, \quad \tau_{zy} = G\gamma_{zy}. \tag{2.72}$$

Koordinaattiakselin z suuntainen tasapainoyhtälö

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \tag{2.73}$$

yksinkertaistuu nyt muotoon

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0. \tag{2.74}$$

Koordinaattiakselin x suuntaisesta tasapainoyhtälöstä seuraa

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = f_1(x, y) \tag{2.75}$$

integroimalla, ja vastaavasti y:n suunnassa tulee

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = f_2(x, y). \tag{2.76}$$

Kaavojen (2.70) avulla johdetaan integroimalla siirtymille u ja v lausekkeet

$$u = -Cz(y - y_v), \quad v = Cz(x - x_v), \tag{2.77}$$

missä (x_v, y_v) ovat vääntökeskiön koordinaatit ja C on vakio. Poikkileikkauksen infinitesimaalisen elementin rotaatio z-akselin ympäri on

$$\varphi_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{2.78}$$

joten siirtymien kaavoista (2.77) seuraa

$$\varphi_z = Cz. \tag{2.79}$$

Sauvan vääntymä on vääntökulman derivaatta z:n suhteen ja

$$\theta = \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} = C. \tag{2.80}$$

Liukumien ja leikkausjännitysten välisten kimmoisten yhteyksien (2.72) ja kaavojen (2.71), (2.77) avulla saadaan

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G} + \theta(y - y_v), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G} + \theta(x - x_v). \tag{2.81}$$

Integroimalla kaavoista (2.81) seuraa huomioonottaen kaavat (2.75) ja (2.76), että akselin z suuntainen siirtymä on

$$w(x,y) = \theta\psi(x,y) + \theta(x\, y_v - y\, x_v), \tag{2.82}$$

missä $\theta\psi(x,y)$ on poikkileikkauksen käyristymä ja $\psi(x,y)$ on ominaiskäyristymä (käyristymä/yksikkövääntymä) tai lyhyemmin deplanaatio.

Jos origo sijaitsee vääntökeskiössä, niin siirtymäkomponentit ovat vapaassa väännössä, kun deplanaatio saa tapahtua vapaasti,

$$u = -(\theta z)y, \quad v = (\theta z)x, \quad w = \theta\psi(x,y). \tag{2.83}$$

Leikkausjännitykset lausuttuna siirtymien avulla ovat

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = G\theta\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right), \\ \tau_{zy} &= G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = G\theta\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right). \end{aligned} \tag{2.84}$$

Sijoittamalla leikkausjännitysten kaavat sauvan akselin z suuntaiseen tasapainoehtoon (2.74) seuraa

$$G\theta\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{2.85}$$

eli

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \tag{2.86}$$

Jos sauvan vaippa on kuormittamaton, niin reunan tasapainoehdon

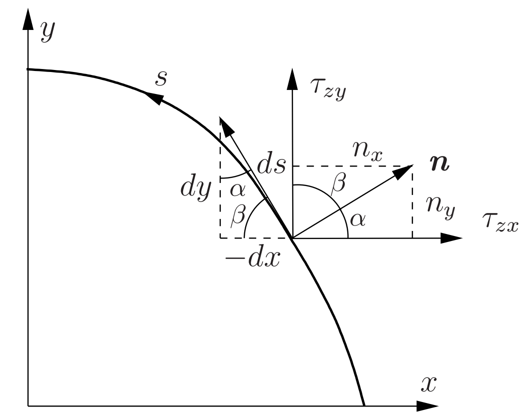
$$t_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z = 0 \tag{2.87}$$

perusteella, kun $\sigma_z = 0$, saadaan yhtälö

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0, \tag{2.88}$$

missä $n_x = \cos\alpha$ ja $n_y = \sin\alpha = \cos\beta$ ovat sauvan vaipan yksikkönormaalivektorin komponentit ja α on normaalivektorin $\boldsymbol{n}$ ja x-akselin välinen kulma. Samaan yhtälöön päädytään myös asettamalla poikkipinnan reunalla leikkausjännitys τ_n nollaksi, kun sauvan reunalla ei ole kuormitusta, eli

$$\tau_n = \tau_{zx}\cos\alpha + \tau_{zy}\cos\beta = 0. \tag{2.89}$$



Kuva 2.12 Poikkileikkauksen reunakäyrä ja vaipan yksikkönormaalivektori.

Leikkausjännitysten kaavojen (2.84) perusteella saadaan reunaehto muotoon

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right)\cos\beta = 0. \tag{2.90}$$

Kuvan 2.12 avulla johdetaan geometriset yhteydet

$$n_x = \cos\alpha = \frac{dx}{dn} = \frac{dy}{ds}, \quad n_y = \cos\beta = \frac{dy}{dn} = -\frac{dx}{ds}. \tag{2.91}$$

Kaavojen (2.91) perusteella reunaehto (2.90) tulee muotoon

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dn} - y\frac{dy}{ds} + x(-\frac{dx}{ds}) = 0, \tag{2.92}$$

josta seuraa (ketjuderivointikaavalla) lopulta muoto

$$\frac{d\psi}{dn} - \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(y^2 + x^2) = 0. \tag{2.93}$$

Siirtymämenetelmän yhtälöt ovat siten kenttäyhtälö

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \tag{2.94}$$

joka on Laplacen yhtälö, ja reunaehto

$$\frac{d\psi}{dn} - \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(y^2 + x^2) = 0 \tag{2.95}$$

reunalla $s \in \Gamma$.

Leikkausvoimat Q_x ja Q_y määritellään kaavoilla

$$Q_x = \int_A \tau_{zx}\, dA, \quad Q_y = \int_A \tau_{zy}\, dA, \tag{2.96}$$

ja poikkileikkauksen vääntömomentti on (kuva 2.11)

$$M_v = \int_A (-\tau_{zx} y + \tau_{zy} x) dA. \tag{2.97}$$

Vapaan väännön tapauksessa leikkausvoimat ovat nollia, eli $Q_x = Q_y = 0$, ja M_v on rippumaton koordinaattiakseleiden x ja y sijainnista. Käyristymäfunktion ψ avulla lausuttu vääntömometti M_v on

$$
\begin{aligned}
M_v =& G\theta \int_A \left\{ -\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) y + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) x \right\} dA \\
=& G\theta \int_A \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} y + \frac{\partial \psi}{\partial y} x + x^2 + y^2 \right) dA \qquad (2.98) \\
=& G\theta I_v .
\end{aligned}
$$

Suure

$$
I_v = I_p + \int_A \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} y + \frac{\partial \psi}{\partial y} x \right) dA \tag{2.99}
$$

on sauvan vääntöjäyhyys. Pyöreällä sauvalla tai putkella $\psi = 0$, ja $I_v = I_p$ (polaarinen jäyhyys).

2.4 Voimamenetelmä (L. Prandtl 1903)

Määritellään jännitysfuktio $\phi = \phi(x, y)$ siten, että

$$
\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}. \tag{2.100}
$$

Tällöin sauvan akselin z suuntaisesta tasapainoehdosta seuraa

$$
\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = 0, \tag{2.101}
$$

eli koordinaattiakselin z suuntainen tasapainoehto toteutuu identtisesti.

Yhteensopivuusehtojen perusteella saadaan

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 0 \\
-\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 0
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = C = \text{vakio}. \tag{2.102}
$$

Ottamalla huomioon liukumien ja siirtymien väliset yhteydet

$$
\gamma_{zx} = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad \gamma_{zy} = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right), \tag{2.103}
$$

tulee

$$
\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} = -2\theta. \tag{2.104}
$$

Lausumalla liukumat leikkausjännitysten avulla kaavoilla

$$
\gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}, \quad \gamma_{zy} = \frac{1}{G} \tau_{zy}, \tag{2.105}
$$

ja ottamalla huomioon jännitysfunktion määrittelyssä käytetyt kaavat (2.100) päädytään lopulta differentiaaliyhtälöön

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\,\theta, \tag{2.106}$$

joka on voimamenetelmän kenttäyhtälö ja luonteeltaan yhteensopivuusehto.

Yhtälön (2.106) yhteensopivuusehtoluonne käy ilmi seuraavasta tarkastelusta. Sauvan akselin suuntaisen siirtymän w differentiaali on

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy. \tag{2.107}$$

Kierrettäessä suljettu lenkki Γ poikkileikkauksessa täytyy olla voimassa yhteensopivuusehto

$$\oint_\Gamma \frac{dw}{ds}ds = 0, \tag{2.108}$$

jos alueessa ei ole dislokaatioita. Sijoittamalla yhteensopivuusehtoon

$$\begin{aligned} \frac{dw}{ds} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds} \\ &= -\left(\frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \theta y\right) n_y + \left(-\frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial x} - \theta x\right) n_x, \end{aligned} \tag{2.109}$$

missä on käytetty hyväksi yhtälöitä

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{zx} + \theta y = \frac{\tau_{zx}}{G} + \theta y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{zy} - \theta x = \frac{\tau_{zy}}{G} - \theta x, \tag{2.110}$$

$$n_x = \frac{dy}{ds}, \quad n_y = -\frac{dx}{ds} \tag{2.111}$$

ja jännitysfunktion määrittelykaavoja (2.100), tulee

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma \frac{dw}{ds}\,ds &= -\oint_\Gamma \left\{ \left(\frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \theta y\right) n_y + \left(\frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \theta x\right) n_x \right\} ds \\ &= -\frac{1}{G}\int_A \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2G\,\theta\right) dA = 0, \end{aligned} \tag{2.112}$$

missä A on polun Γ sisään jäävä alue.

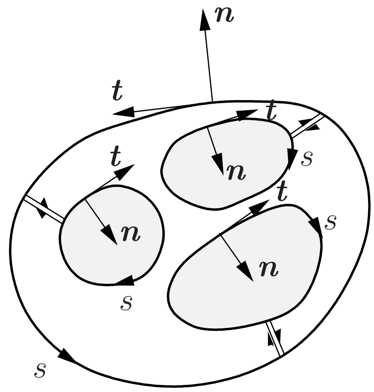
Edellä on käytetty myös Gaussin lausetta muuntamaan viivaintegraali pintaintegraaliksi. Gaussin-Greenin kaavan mukaan funktioille $f(x,y)$ ja $g(x,y)$ alueessa A, jonka reunakäyrä on Γ,

$$\int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) dA = \int_\Gamma (f n_x + g n_y) ds, \tag{2.113}$$

missä n_x ja n_y ovat reunakäyrän Γ yksikkönormaalivektorin komponentit.

Jotta yhtennsopivuusehto toteutuisi, täytyy integrandin hävitä edellisessä integraalissa, ja tällöin on oltava voimassa yhtälö (2.106)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\,\theta. \tag{2.114}$$



Kuva 2.13 Onteloita sisältävä poikkileikkaus.

Reunaehdosta $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n} = \tau_n = 0$ [2] tai reunavoiman kaavasta $t_z = 0$ seuraa jännitysfunktion avulla

$$\begin{aligned}
\tau_n =& \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y \\
=& \tau_{zx}\cos\alpha + \tau_{zy}\cos\beta \\
=& \frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\beta \\
=& \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} \\
=& \frac{d\phi}{ds} = 0,
\end{aligned} \tag{2.115}$$

joten jännitysfunktio ϕ on vakio poikkipinnan reunalla. Yhdesti yhtenäiselle alueelle valitaan $\phi = 0$ reunalla. Jos alue ei ole yhdesti yhtenäinen, vaan siinä on onteloita, niin ϕ on vakio reunaviivoilla, mutta erisuuri reunalla ja onteloiden reunoilla.

Voimamenetelmän kaavat ovat kenttäyhtälö

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -2G\theta, \quad x, y \in A \tag{2.116}$$

ja reunaehto

$$\phi(s) = 0 \ \text{ reunalla } \ s \in \Gamma. \tag{2.117}$$

Leikkausvoimat Q_x ja Q_y ovat nollia vapaan väännön tapauksessa, koska akselin z

[2] $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n} = (\tau_{zx}\boldsymbol{i} + \tau_{zy}\boldsymbol{j})\cdot(n_x\boldsymbol{i} + n_y\boldsymbol{j})$.

suuntaisen tasapainoehdon (2.74) ja reunan tasapainoehdon (2.88) perusteella saadaan

$$
\begin{aligned}
Q_x =& \int_A \tau_{zx}\, dA \\
=& \int_A \left[\tau_{zx} + x \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \right) \right] dA \\
=& \int_A \left[\frac{\partial (x\tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial (x\tau_{zy})}{\partial y} \right] dA \\
=& \oint_\Gamma x(\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y)\, ds = 0
\end{aligned}
\tag{2.118}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
Q_y =& \int_A \tau_{zy}\, dA \\
=& \int_A \left[\tau_{zy} + y \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \right) \right] dA \\
=& \int_A \left[\frac{\partial (y\tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial (y\tau_{zy})}{\partial y} \right] dA \\
=& \oint_\Gamma x(\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y)\, ds = 0.
\end{aligned}
\tag{2.119}
$$

Vääntömomentti M_v lasketaan kaavalla

$$
\begin{aligned}
M_v =& \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA \\
=& \int_A \left\{ -\frac{\partial \phi}{\partial x} x - \frac{\partial \phi}{\partial y} y \right\} dA \\
=& -\int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(x\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(y\phi) \right\} dA + \int_A 2\phi dA \\
=& -\oint_\Gamma \{(x\phi) n_x + (y\phi) n_y\}\, ds + \int_A 2\phi dA.
\end{aligned}
\tag{2.120}
$$

Edellä on sovellettu osittaisderivointikaavaa

$$u'v = (uv)' - uv' \tag{2.121}$$

ja Gaussin-Greenin kaavaa (2.113)

Vääntömomentin kaavan oikean puolen ensimmäinen termi (viivaintegraali) on yhdesti yhtenäiselle poikkileikkaukselle nolla, koska reunakäyrällä voidaan asettaa $\phi(s) = 0$, ja siten

$$M_v = 2 \int_A \phi(x, y) dA, \tag{2.122}$$

eli vääntömomentti on vääntöfunktiokukkulan tilavuus kaksinkertaisena. Vertaamalla kaavaan $M_v = GI_v\theta$ nähdään, että

$$I_v = \frac{2}{G\theta}\int_A \phi(x,y)dA. \tag{2.123}$$

Jos poikkileikkaus sisältää onteloita, niin vääntömomentti on

$$\begin{aligned} M_v =& \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y)dA \\ =& \int_A \left\{ -\frac{\partial\phi}{\partial x}x - \frac{\partial\phi}{\partial y}y \right\} dA \\ =& -\int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(x\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(y\phi) \right\} dA + \int_A 2\phi dA \\ =& -\sum_{i=0}^{n} \phi_i \oint_{\Gamma_i} (x\, n_x + y\, n_y)\; ds + \int_A 2\phi\, dA, \end{aligned} \tag{2.124}$$

missä $\Gamma \equiv \Gamma_0$ on poikkileikkauksen ulkoreuna ja onteloiden reunat ovat $\Gamma_i,\ 1,\ldots,n$. Poikkileikkauksen ulkoreunalla voidaan asettaa jälleen $\phi_0 = 0$. Onteloiden reunoilla $\phi_i =$ vakio. Koska onteloiden reunat kierretään myötäpäivään, saadaan Gaussin lauseen perusteella

$$\oint_{\Gamma_i} \phi_i\,(x\, n_x + y\, n_y)\; ds = -\phi_i \int_{A_i} 2\, dA = -2A_i\phi_i, \tag{2.125}$$

missä A_i on ontelon i sisään jäävä pinta-ala, ja vääntömomentin kaavaksi tulee

$$M_v = \int_A 2\phi\, dA + \sum_{i=1}^{n} 2\phi_i A_i. \tag{2.126}$$

Vääntömomentti on siten myös ontelopoikkileikkauksen tapauksessa jännitysfunktiokukkulan tilavuus kaksinkertaisena, kun tilavuuteen lasketaan mukaan onteloiden kohdalla olevien tasankojen alle jäävät tilavuudet.

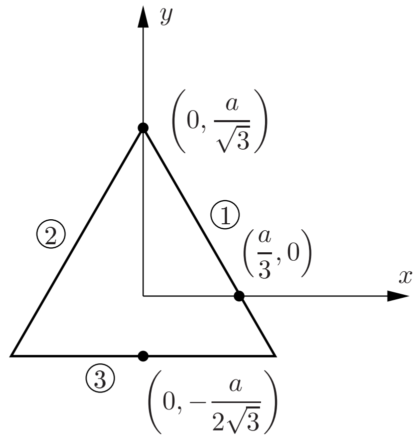
Esimerkki 2.5 *Määritetään tasasivuisen kolmion muotoisen poikkileikkauksen leikkausjännitykset ja väntöjäyhyys.*

Poikkileikkauksen rajaavat suorat

$$\begin{aligned} 1:&\quad \frac{3}{a}x + \frac{\sqrt{3}}{a}y - 1 = 0 \quad \text{eli} \quad f_1(x,y) = 0, \\ 2:&\quad -\frac{3}{a}x + \frac{\sqrt{3}}{a}y - 1 = 0 \quad \text{eli} \quad f_2(x,y) = 0, \\ 3:&\quad -\frac{2\sqrt{3}}{a}y - 1 = 0 \quad \text{eli} \quad f_3(y) = 0. \end{aligned} \tag{2.127}$$

Jännitysfunktio

$$\phi = k\, f_1\, f_2\, f_3, \tag{2.128}$$



Kuva 2.14 Tasasivuisen kuolmion muotoinen poikkileikkaus.

joka on muodostettu kertomalla reunaviivojen yhtälöt keskenään, toteuttaa väännön kenttäyhtälön ja on reunalla nolla. Parametri k ratkaistaan sijoittamalla otaksuttu jännitysfunktio voimamenetelmän kenttäyhtälöön

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta, \tag{2.129}$$

jolloin seuraa

$$\frac{36}{a^2} k = -2G\theta \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{Ga^2}{18}\theta. \tag{2.130}$$

Leikkausjännitykset ovat

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{Ga\theta}{\sqrt{3}} \left(-3\frac{y^2}{a^2} + \sqrt{3}\frac{y}{a} + 3\frac{x^2}{a^2} \right), \\ \tau_{zy} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = Ga\theta \frac{x}{a} \left(2\sqrt{3}\frac{y}{a} + 1 \right). \end{aligned} \tag{2.131}$$

Resultoiva leikkausjännitys on

$$\tau_r = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}. \tag{2.132}$$

Suurin jännitys syntyy sivujen keskellä. Esimerkiksi

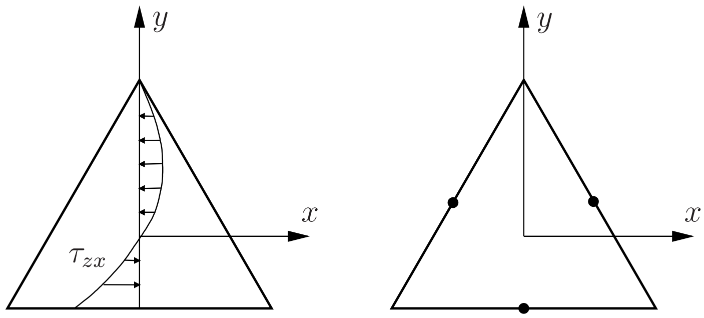
$$\tau_{zx}\left(0, -\frac{a}{2\sqrt{3}}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} Ga\theta. \tag{2.133}$$

Kolmiopoikkileikkauksen vääntöjäyhyys on

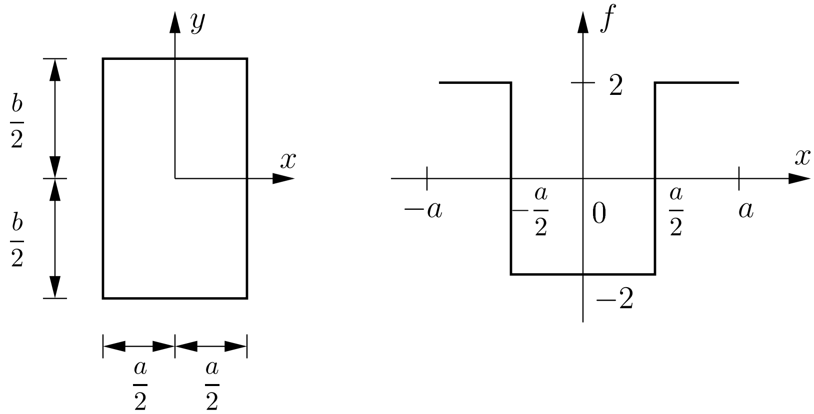
$$I_v = \frac{2}{G\theta} \int\limits_A \phi(x,y) dA = \frac{\sqrt{3}}{80} a^4. \tag{2.134}$$

Vääntymä ja suurin leikkausjännitys ovat nyt

$$\theta = \frac{M_v}{GI_v} = \frac{80 M_v}{\sqrt{3} a^4 G}, \quad \tau_{\max} = \frac{20 M_v}{a^3}. \tag{2.135}$$



Kuva 2.15 Kolmiopoikkileikkauksen leikkausjännityksen τ_{zx} jakauma ja leikkausjännityksen maksimien paikat.



Kuva 2.16 Suorakaidepoikkileikkaus.

Poikkileikkauksen suurin leikkausjännitys määritetään kaavalla

$$\tau_{\max} = \frac{M_v}{W_v}, \tag{2.136}$$

missä W_v on poikkileikkauksen vääntövastus. De Saint-Venant on johtanut likikaavan

$$I_v \approx \frac{A^4}{40 I_p}. \tag{2.137}$$

Epäsäännöllinen poikkileikkaus voidaan jakaa osiin, joiden vääntöjäyhyydet tunnetaan. Tällöin on likimäärin

$$I_v \approx \sum I_{vi} = \tilde{I}_v, \quad (I_v > \tilde{I}_v). \tag{2.138}$$

Esimerkki 2.6 *Määritetään suorakaidepoikkileikkauksen jännitysfunktio ja vääntöjäyhyys.*

Jaksollinen funktio $f(x)$ välillä $[-L, L]$, $f(-L) = f(L)$, voidaan esittää Fourier-sarjan muodossa

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi}{L}x + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{m\pi}{L}x, \tag{2.139}$$

missä sarjan kertoimet ovat

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.140}$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx, \quad m = 1,2,3,\ldots. \tag{2.141}$$

Parillisen funktion $f(x) = f(-x)$ Fourier-sarja voidaan esittää muodossa

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi}{L}x, \tag{2.142}$$

missä

$$a_m = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx, \quad m = 0,1,2,\ldots. \tag{2.143}$$

Kuvan 2.16 jaksollisen funktion tapauksessa

$$\begin{aligned}
a_m =& \frac{2}{a}\left[\int\limits_{0}^{a/2}(-2)\cos\frac{m\pi x}{a}\,dx + \int\limits_{a/2}^{a} 2\cos\frac{m\pi x}{a}\,dx\right]\\
=& \frac{2}{a}\left[-2\,\Big/_{0}^{a/2}\frac{a}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{a} + 2\,\Big/_{a/2}^{a}\frac{a}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{a}\right]\\
=& \frac{2}{a}\left[-2\frac{a}{m\pi}(\sin\frac{m\pi}{2} - 0) + 2\frac{a}{m\pi}(\sin m\pi - \sin\frac{m\pi}{2})\right]\\
=& -\frac{8}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{2}, \text{ kun } m = 0,1,2,3,\ldots,
\end{aligned} \tag{2.144}$$

joten

$$a_m = \begin{cases} -\dfrac{8}{m\pi}(-1)^{\frac{m-1}{2}}, & \text{kun } m = 1,3,5,\ldots, \\ 0, & \text{kun } n = 0,2,4,\ldots\,. \end{cases} \tag{2.145}$$

Merkitään $n = \dfrac{m-1}{2}$ eli $m = 2n+1$, jolloin

$$a_n = -\frac{8}{(2n+1)\pi}(-1)^n, \quad \text{kun } n = 0,1,2,\ldots. \tag{2.146}$$

Suorakaidepoikkileikkauksen jännitysfunktio esitetään Fourier-sarjana

$$\phi(x,y) = G\theta\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(y)\cos\alpha_n x, \quad \alpha_n = (2n+1)\frac{\pi}{a}. \tag{2.147}$$

Sijoittamalla jännitysfunktion ϕ sarjakehitelmä differentiaaliyhtälöön

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -2G\theta \tag{2.148}$$

ja sijoittamalla kuvan 2.16 funktion $f(x)$ kosinisarja

$$f(x) = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\cos\alpha_n x \tag{2.149}$$

kenttäyhtälön oikealle puolelle tulee

$$
\begin{aligned}
&G\theta \sum_{n=0}^{\infty} \left[Y_n'' - \alpha_n^2 Y_n + \frac{8}{\pi} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \right] \cos \alpha_n x = 0, \\
&\Rightarrow \quad Y_n'' - \alpha_n^2 Y_n = -\frac{8 \cdot (-1)^n}{\pi \cdot (2n+1)}, \quad n = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}
\tag{2.150}
$$

missä on merkitty

$$
(\bullet)' = \frac{d}{dy}(\bullet). \tag{2.151}
$$

Saadun tavallisen differentiaaliyhtälön (2.150) ratkaisu on

$$
Y_n = A_n \cosh \alpha_n y + B_n \sinh \alpha_n y + \frac{8}{\pi} \frac{1}{\alpha_n^2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}. \tag{2.152}
$$

Reunaehdoista

$$
Y_n \left(\pm \frac{b}{2} \right) = 0 \tag{2.153}
$$

seuraa

$$
A_n = -\frac{8}{\pi} \frac{1}{\alpha_n^2} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cosh \left(\dfrac{\alpha_n b}{2} \right)}, \quad B_n = 0, \tag{2.154}
$$

ja jännitysfunktioksi tulee

$$
\phi = G\theta \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[1 - \frac{\cosh \alpha_n y}{\cosh \left(\alpha_n \dfrac{b}{2} \right)} \right] \cos \alpha_n x, \tag{2.155}
$$

joka voidaan muuntaa edelleen muotoon

$$
\phi = G\theta \left[\frac{a^2}{4} - x^2 - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\cosh \alpha_n y}{\cosh \left(\dfrac{\alpha_n b}{2} \right)} \cos \alpha_n x \right]. \tag{2.156}
$$

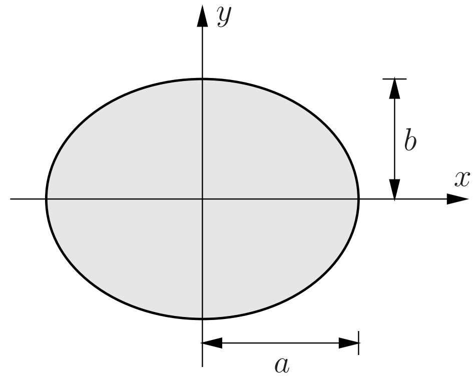
Leikkausjännitykset ovat

$$
\tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = G\theta \left[2x - \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{\cosh \alpha_n y}{\cosh \left(\dfrac{\alpha_n b}{2} \right)} \sin \alpha_n x \right], \tag{2.157}
$$

$$
\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -G\theta \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{\sinh \alpha_n y}{\cosh \left(\dfrac{\alpha_n b}{2} \right)} \cos \alpha_n x. \tag{2.158}
$$

Jännitys on suurin pitkien sivujen keskipisteissä, missä

$$
\tau_{zy} \left(\frac{a}{2}, 0 \right) = G\theta a \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{\cosh \left(\dfrac{\alpha_n b}{2} \right)} \right]. \tag{2.159}
$$



Kuva 2.17 Ellipsipoikkileikkaus.

Leikkausjännityksen Fourier-sarja suppenee nopeasti, ja yhden termin antama tulos poikkeaa enintään 1% tarkasta arvosta. Siten

$$\tau_{\max} \approx G\theta a \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{\cosh \dfrac{\pi b}{2a}} \right). \tag{2.160}$$

Suorakaidepoikkileikkauksen vääntöjäyhyys on

$$I_v = \frac{2}{G\theta} \int_A \phi dA = \frac{ba^3}{3} \left[1 - \frac{192a}{\pi^5 b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh \dfrac{\alpha_n b}{2}}{(2n+1)^5} \right]. \tag{2.161}$$

Yhden termin antama tulos

$$I_v = \frac{ba^3}{3} \left(1 - \frac{192a}{\pi^5 b} \tanh \frac{\pi b}{2a} \right) \tag{2.162}$$

poikkeaa tarkasta arvosta vähemmän kuin $0,5\%$.

Esimerkki 2.7 *Määritetään ellipsipoikkileikkauksen jännitysfunktio, leikkausjännitykset ja vääntöjäyhyys.*

Ellipsipoikkileikkauksen reunakäyrän (ellipsin) yhtälö on

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{2.163}$$

Jännitysfunktio muodostetaan reunakäyrän avulla:

$$\phi = C \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \tag{2.164}$$

Sijoitetaan jännitysfunktio (2.164) kenttäyhtälöön [3]

$$\phi_{,xx} + \phi_{,yy} = -2G\theta, \tag{2.165}$$

josta ratkaistaan vakiolle C arvo

$$C = -\frac{a^2 b^2 G\theta}{a^2 + b^2}. \tag{2.166}$$

[3] $(\bullet)_{,x}$ tarkoittaa osittaisderivaattaa koordinaatin x suhteen.

Vääntömomentti on ellipsipoikkileikkauksen tapauksessa

$$M_v = 2\int_A \phi dA = -\frac{2G\theta a^2 b^2}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{a^2}\int_A x^2\,dx\,dy + \frac{1}{b^2}\int_A y^2\,dx\,dy - \int_A dx\,dy\right]. \tag{2.167}$$

Ellipsipoikkileikkaukselle

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A x^2 dA = \frac{\pi a^3 b}{4}, \\ I_x &= \int_A y^2 dA = \frac{\pi a b^3}{4}, \\ A &= \int_A dA = \pi ab, \end{aligned} \tag{2.168}$$

joten vääntömomentin lauseke on

$$M_v = \frac{\pi G\theta a^3 b^3}{a^2+b^2} = GI_v\theta. \tag{2.169}$$

Jännitysfunktion lausekkeen vakion C kaavan avulla saadaan

$$C = -\frac{M_v}{\pi ab} \quad \text{ja} \quad \phi = -\frac{M_v}{\pi ab}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right). \tag{2.170}$$

Leikkausjännitykset ovat

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{2M_v}{\pi ab^3}y, \\ \tau_{zy} &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{2M_v}{\pi a^3 b}x, \end{aligned} \tag{2.171}$$

ja suurin leikkausjännitys on

$$\tau_{\max} = \frac{2M_v}{\pi ab^2} \tag{2.172}$$

kohdassa $x = 0$, $y = b$.

Sauvan siirtymät ovat vapaassa väännössä

$$u = -\theta yz, \quad v = \theta xz, \quad w = \theta\psi(x,y). \tag{2.173}$$

Käyristymäfunktio integroidaan kaavoista

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{G\theta}\frac{\partial\phi}{\partial y} + y = \left(1 - \frac{2M_v}{\pi ab^3 G\theta}\right)y \tag{2.174}$$

ja

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{1}{G\theta}\frac{\partial\phi}{\partial x} - x = \left(\frac{2M_v}{\pi a^3 bG\theta} - 1\right)x, \tag{2.175}$$

joiden perusteella tulee

$$\psi = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}xy + \text{vakio}. \tag{2.176}$$

Jos asetetaan $w(0,0) = 0$, niin saadaan akselin z suuntaiselle siirtymälle kaava

$$w = \frac{\theta(b^2-a^2)}{a^2+b^2}\,xy. \tag{2.177}$$

2.5 Vääntökeskiö

Vapaassa väännössä leikkausvoimat Q_x ja Q_y häviävät, ja vääntömomentti on riippumaton koordinaatiston (x, y) valinnasta. Kaksoissymmetrisen poikkileikkauksen vääntökeskiö sijaitsee painopisteessä. Aina vääntökeskiön asemaa ei kuitenkaan tiedetä etukäteen, joten laskelmat on tehtävä jossain valitussa (x, y)-koordinaatistossa. Laskentakoordinaatistoksi voidaan valita painopistekoordinaatisto, jossa poikkileikkauksen staattiset momentit häviävät eli $S_x = \int_A y\,dA = S_y = \int_A x\,dA = 0$, tai sen erikoistapaus pääkoordinaatisto, jossa lisäksi $I_{xy} = \int_A xy\,dA = 0$.

Valitussa koordinaatistossa poikkileikkauksen mielivaltaisen pisteen (x, y) siirtymät toistaiseksi tuntemattoman vääntökeskiöakselin (x_v, y_v) suhteen ovat

$$\bar{u} = -\theta z(y - y_v), \quad \bar{v} = \theta z(x - x_v), \quad \bar{w}(x, y) = \theta\bar{\psi}(x, y), \tag{2.178}$$

missä $\theta =$ vakio on vääntymä.

Sauvan väännössä vääntökeskiöakseli pysyy suorana, mutta muut sauvan akselin suuntaiset suorat kiertyvät ruuviviivoiksi. Vakiovääntymän, $\theta =$ vakio, tapauksessa ehdoista

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \tag{2.179}$$

seuraa

$$x = x_v, \quad y = y_v \tag{2.180}$$

suorana pysyvän säikeen koordinaateiksi.

Vääntökeskiön suhteen lausuttujen siirtymien kaavojen avulla leikkausjännitysten lausekkeiksi tulee

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right) = G\theta\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x} - y + y_v\right), \\ \tau_{zy} &= G\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right) = G\theta\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y} + x - x_v\right). \end{aligned} \tag{2.181}$$

Muut jännityskomponentit ovat nollia, eli

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0. \tag{2.182}$$

Sijoittamalla leikkausjännitysten kaavat sauvan akselin suuntaiseen tasapainoehtoon (2.74) tulee

$$\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial y^2} = 0. \tag{2.183}$$

Reunan tasapainoehdosta

$$\tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y = 0, \tag{2.184}$$

missä

$$n_x = \frac{dx}{dn}, \quad n_y = \frac{dy}{dn} \tag{2.185}$$

ovat poikkileikkauksen reunakäyrän yksikkönormaalivektorin komponentit, seuraa leikkausjännitysten kaavojen avulla

$$\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x} - y + y_v\right) n_x + \left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y} + x - x_v\right) n_y = 0 \tag{2.186}$$

eli

$$\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x} + y_v\right) \frac{dx}{dn} + \left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y} - x_v\right) \frac{dy}{dn} - yn_x + xn_y = 0, \tag{2.187}$$

joka voidaan kirjoittaa edelleen muotoon

$$\frac{d}{dn}(\bar{\psi} + x\,y_v - y\,x_v) = yn_x - xn_y. \tag{2.188}$$

Funktio $\bar{\psi} + x\,y_v - y\,x_v$ toteuttaa siirtymämenetetelmän kenttäyhtälön ja reunaehdon, joten se eroaa käyristymäfunktiosta $\psi(x, y)$ vain vakion C verran, eli

$$\psi = \bar{\psi} + x\,y_v - y\,x_v + C. \tag{2.189}$$

Vääntökeskiön asema voidaan ratkaista minimoimalla poikkipinnan vääristymiseen sitoutuva energia. Minimoitavaksi lausekkeeksi saadaan

$$F(x_v, y_v, C) = \int_A \psi^2(x, y)\,dA = \int_A [\bar{\psi}(x, y) + x\,y_v - y\,x_v + C]^2\,dA. \tag{2.190}$$

Minimin välttämättömät ehdot ovat

$$\frac{\partial F(x_v, y_v, C)}{\partial x_v} = 0, \quad \frac{\partial F(x_v, y_v, C)}{\partial y_v} = 0, \quad \frac{\partial F(x_v, y_v, C)}{\partial C} = 0. \tag{2.191}$$

Minimointiehdoista seuraa yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -S_x \\ -I_{xy} & I_y & S_y \\ S_x & -S_y & -A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_v \\ y_v \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_A y\bar{\psi}\,dA \\ -\int_A x\bar{\psi}\,dA \\ \int_A \bar{\psi}\,dA \end{Bmatrix}, \tag{2.192}$$

missä

$$\begin{aligned} A &= \int_A dA, \quad S_x = \int_A y\,dA, \quad S_y = \int_A x\,dA, \\ I_x &= \int_A y^2\,dA, \quad I_y = \int_A x^2\,dA, \quad I_{xy} = \int_A xy\,dA. \end{aligned} \tag{2.193}$$

Painopistekoordinaatistossa $S_x = S_y = 0$ ja pääkoordinaatistossa lisäksi $I_{xy} = 0$. Tällöin vääntökeskiön koordinaatit ovat

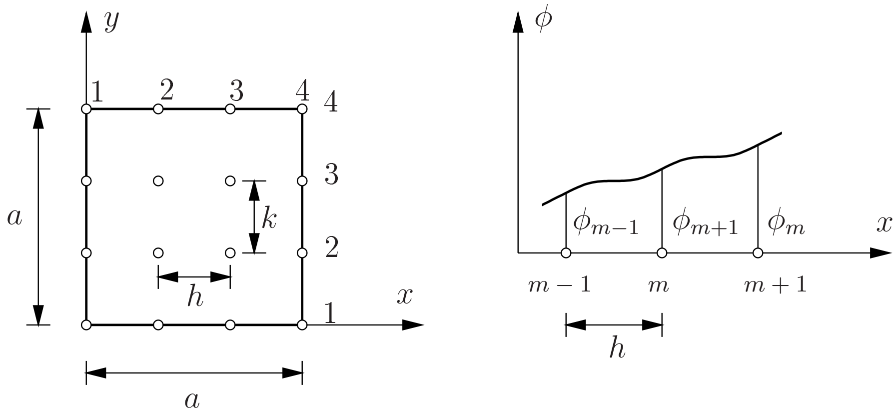
$$x_v = \frac{\int_A y\bar{\psi}\,dA}{I_x}, \quad y_v = -\frac{\int_A x\bar{\psi}\,dA}{I_y}, \tag{2.194}$$

ja vakio C on

$$C = -\frac{\int_A \bar{\psi}\,dA}{A}, \tag{2.195}$$

jolloin, tapauksessa $S_x = S_y = 0$, funktio ψ toteuttaa ehdon

$$\int_A \psi\,dA = \int_A (\bar{\psi} + C)\,dA = 0. \tag{2.196}$$



Kuva 2.18 Differenssimenetelmän hila.

2.6 Differenssimenetelmä

Voimamenetelmän kenttäyhtälö

$$\Delta\phi(x,y) = -2G\theta, \quad x,y \in A, \tag{2.197}$$

poikkileikkauksessa eli alueessa A reunaehdolla

$$\phi(s) = 0 \quad \text{reunalla} \quad s \in \Gamma \tag{2.198}$$

voidaan ratkaista likimääräisesti differenssimenetelmällä. Tällöin osittaisderivaatat korvataan differenssiosamäärillä.

Funktion $\phi(x)$ ensimmäisen derivaatan differenssiapproksimaatio on kuvan 2.18 hilassa

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \approx \frac{1}{2\Delta x}(\phi_{m+1} - \phi_{m-1}) \tag{2.199}$$

tai molekyylimuodossa

$$2h\frac{\partial\phi}{\partial x} \simeq \boxed{\begin{array}{c|c|c} \text{-1} & 0 & 1 \end{array}}\,, \tag{2.200}$$

missä $h = \Delta x$ on hilaväli koordinaatin x suunnassa. Samalla tavalla muodostetaan toisille derivaatoille approksimaatiot

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}(\phi_{m+1} - 2\phi_m + \phi_{m-1}), \tag{2.201}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \approx \frac{1}{k^2}(\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}), \tag{2.202}$$

koordinaattien x ja y suunnissa, missä $k = \Delta y$ on hilaväli akselin y suunnassa. Molekyylimuodossa

$$h^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \simeq \boxed{\begin{array}{c|c|c} 1 & -2 & 1 \end{array}}\,, \tag{2.203}$$

$$k^2\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \simeq \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \hline -2 \\ \hline 1 \end{array}}\,. \tag{2.204}$$

Jos hilavälit ovat samat eli $k = \Delta y = h = \Delta x$, niin saadaan Laplacen operaattorin differenssimolekyyli

$$h^2 \Delta\phi \simeq \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}\,. \tag{2.205}$$

Esimerkki 2.8 *Lasketaan differenssimenetelmällä neliöpoikkileikkauksen vääntömomentti ja vääntöjäyhyys.*

Kuvan 2.18 poikkileikkauksen tapauksessa saadaan hilapisteissä (i, j) differenssiyhtälöt

$$\begin{aligned} (2,2):&\quad -4\phi_{22} + \phi_{21} + \phi_{32} + \phi_{23} + \phi_{12} = -2G\theta h^2, \\ (3,2):&\quad -4\phi_{32} + \phi_{31} + \phi_{42} + \phi_{33} + \phi_{22} = -2G\theta h^2, \\ (2,3):&\quad -4\phi_{23} + \phi_{22} + \phi_{33} + \phi_{24} + \phi_{13} = -2G\theta h^2, \\ (3,3):&\quad -4\phi_{33} + \phi_{32} + \phi_{43} + \phi_{34} + \phi_{23} = -2G\theta h^2. \end{aligned} \tag{2.206}$$

Poikkileikkauksen reunalla $\phi = 0$, joten

$$\phi_{11} = \phi_{21} = \phi_{31} = \phi_{41} = \phi_{42} = \phi_{43} = \phi_{44} = \phi_{34} = \phi_{24} = \phi_{14} = \phi_{13} = \phi_{12} = 0. \tag{2.207}$$

Kootaan differenssiyhtälöt ryhmäksi

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{22} \\ \phi_{32} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = -2G\theta h^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \tag{2.208}$$

jonka ratkaisu on

$$\phi_{22} = \phi_{32} = \phi_{23} = \phi_{33} = \frac{a^2 G\theta}{9}. \tag{2.209}$$

Vääntömomentti lasketaan kaavasta

$$M_v = 2 \int_A \phi \, dA, \tag{2.210}$$

eli M_v on jännitysfunktiokukkulan (ϕ-kukkulan) kaksinkertainen tilavuus. Esimerkin tapauksessa

$$M_v = 2\left\{ \frac{1}{3}a^2 \frac{3}{2}\phi - \frac{1}{3}\left(\frac{a}{3}\right)^2 \frac{1}{2}\phi \right\} = 2a^2\phi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{54}\right] = \left(\frac{26}{243}\right) a^4 G\theta \approx 0.107 a^4 G\theta, \tag{2.211}$$

ja $I_v = 0.107a^4$, kun tarkka arvo on $0.141a^4$.

Kuvan 2.20 5×5 hilan tapauksessa ottamalla reunaehdot ja symmetria huomioon jo verkon pisteiden numeroinnissa saadaan yhtälöt

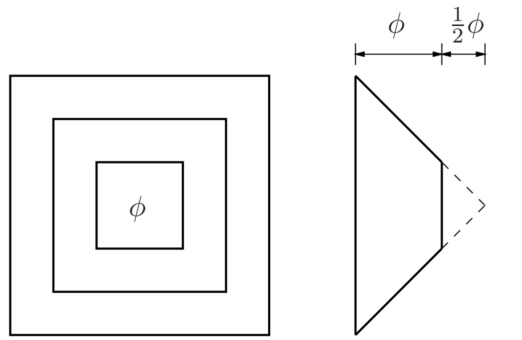
$$\begin{aligned} -4\phi_1 + 4\phi_2 &= -2h^2 G\theta, \\ -4\phi_2 + 2\phi_3 + \phi_1 &= -2h^2 G\theta, \\ -4\phi_3 + 2\phi_2 &= -2h^2 G\theta, \end{aligned} \tag{2.212}$$

joiden ratkaisu on

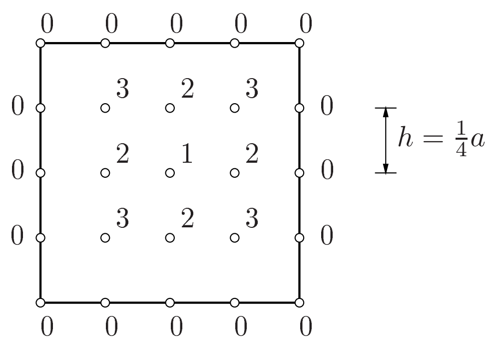
$$\phi_1 = 2.25 G\theta h^2, \quad \phi_2 = 1.75 G\theta h^2, \quad \phi_3 = 1.375 G\theta h^2. \tag{2.213}$$

Vääntöjäyhyyden likiarvo on kuvan 2.20 hilaverkolla

$$I_v = 0.115a^4. \tag{2.214}$$



Kuva 2.19 Differenssimenetelmällä saatu jännitysfunktio.



Kuva 2.20 Hilaverkko 5×5.

2.7 Vapaan väännön ratkaisu potentiaalienergian minimin periaatteella

Tarkastellaan kuvan 2.21 mukaista ulokesauvaa. Sauvan potentiaalienergian lauseke voidaan kirjoittaa muotoon

$$\Pi = \frac{1}{2} G \int_0^L \int_A (\gamma_{zx}^2 + \gamma_{zy}^2) \, dA \, dz - \bar{M}_v \varphi(L), \tag{2.215}$$

missä $\bar{M}_v$ on tunnettu ulkoinen vääntömomentti sauvan päässä $z = L$. Sijoittamalla kaavaan (2.215) poikkileikkaustason liukumien kaavat

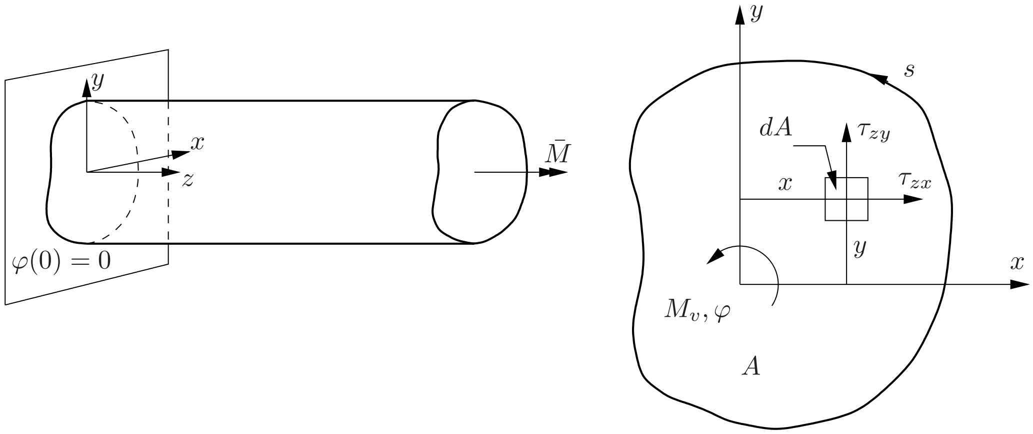
$$\gamma_{zx} = \left(-y + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \theta, \quad \gamma_{zy} = \left(x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \theta \tag{2.216}$$

tulee potentiaalienergian lausekkeeksi

$$\Pi = \frac{1}{2} G L \theta^2 \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)^2 \right] dA - \bar{M}_v L \theta. \tag{2.217}$$

Varioidaan (muutetaan) siirtymäsuureita, vääntymää θ ja poikkipinnan käyristymää ψ, siten että

$$\theta \to \theta + \alpha \hat{\theta}, \quad \psi \to \psi + \epsilon \hat{\psi}, \tag{2.218}$$



Kuva 2.21 Ulokesauvan vääntö.

missä α ja ϵ ovat vakiokertoimia. Sijoituksen (2.218) jälkeen saadaan potentiaalienergian lausekkeeksi

$$\Pi = \frac{1}{2} GL(\theta + \alpha\hat{\theta})^2 \int_A \left[\left(\frac{\partial(\psi + \epsilon\hat{\psi})}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial(\psi + \epsilon\hat{\psi})}{\partial y} + x \right)^2 \right] dA - \bar{M}_v L(\theta + \alpha\hat{\theta}) \quad (2.219)$$

eli

$$
\begin{aligned}
\Pi =& \frac{1}{2} G L \theta^2 \int\limits_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)^2 \right] dA - \bar{M}_v L \theta \\
&+ \left\{ G\theta \int\limits_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)^2 \right] dA - \bar{M}_v \right\} L \alpha \hat{\theta} \\
&+ G L \theta^2 \int\limits_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \epsilon \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \epsilon \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} \right] dA \\
&+ \frac{1}{2} G L \alpha^2 \hat{\theta}^2 \int\limits_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)^2 \right] dA \\
&+ G L \theta \alpha \hat{\theta} \int\limits_A \left[2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \epsilon \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \epsilon \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} \right] dA \\
&+ \frac{1}{2} G L \theta^2 \int\limits_A \left[\epsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \right)^2 + \epsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} \right)^2 \right] dA \\
&+ \frac{1}{2} G L \alpha^2 \hat{\theta}^2 \int\limits_A \left[2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \epsilon \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \epsilon \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} \right] dA \\
&+ G L \theta \alpha \hat{\theta} \int\limits_A \left[\epsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \right)^2 + \epsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} \right)^2 \right] dA \\
&+ \frac{1}{2} G L \alpha^2 \hat{\theta}^2 \int\limits_A \left[\epsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \right)^2 + \epsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} \right)^2 \right] dA,
\end{aligned}
\tag{2.220}
$$

missä ensimmäinen termi on potentiaalienergia perustilassa, kaksi seuraavaa termiä muodostavat potentiaalienergian ensimmäisen variaation, kolme seuraavaa toisen variaation, kaksi seuraavaa kolmannen variaation, ja viimeinen termi on neljäs variaatio, vakioiden α ja ϵ samankorkuisten potenssien mukaan järjestettynä. Potentiaalienergia ajatellaan kehitetyksi Taylorin sarjaksi

$$
\begin{aligned}
\Pi(\alpha, \epsilon) = \Pi(0,0) + d\alpha \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} \bigg|_{\alpha=0, \epsilon=0} + d\epsilon \frac{\partial \Pi}{\partial \epsilon} \bigg|_{\alpha=0, \epsilon=0} \\
+ \frac{1}{2!} \left(d\alpha^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha^2} \bigg|_{\alpha=0, \epsilon=0} + 2 d\alpha d\epsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha \partial \epsilon} \bigg|_{\alpha=0, \epsilon=0} + d\epsilon^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \epsilon^2} \bigg|_{\alpha=0, \epsilon=0} \right) \cdots .
\end{aligned}
\tag{2.221}
$$

Tasapainotilassa potentiaalienergialla on minimiarvo, ja sen ensimmäinen variaatio $\delta \Pi$

on nolla. Suureiden ψ ja θ variaatioiksi määritellään

$$\delta\psi = \epsilon \frac{d(\psi + \epsilon\hat{\psi})}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}, \quad \delta\theta = \alpha \frac{d(\theta + \alpha\hat{\theta})}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0}. \tag{2.222}$$

Vastaavasti funktionaalin Π ensimmäinen variaatio on

$$\delta\Pi = \epsilon \frac{\partial\Pi}{\partial\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} + \alpha \frac{\partial\Pi}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}. \tag{2.223}$$

Samalla tavalla muodostetaan funktionaalin toinen, kolmas ja neljäs variaatio.

Potentiaalienergian Π ensimmäinen variaatio on nyt

$$\begin{aligned}\delta\Pi =& \left\{ G\theta \int\limits_A \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x \right)^2 \right] dA - \bar{M}_v \right\} L\alpha\hat{\theta} \\ &+ GL\theta^2 \int\limits_A \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y \right) \epsilon \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x \right) \epsilon \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y} \right] dA = 0.\end{aligned} \tag{2.224}$$

Ensimmäisen variaation $\delta\Pi$ jälkimmäisessä termissä oleva pintaintegraali muunnetaan osittaisintegroinnilla ja Gaussin-Greenin lauseella [4] muotoon

$$\begin{aligned}&\int\limits_A \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y \right) \epsilon \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x \right) \epsilon \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y} \right] dA = \\ &- \int\limits_A \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right) \epsilon\hat{\psi} dA + \int\limits_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y \right) \epsilon\hat{\psi} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x \right) \epsilon\hat{\psi} \right\} \right] dA \\ &= - \int\limits_A \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right) \epsilon\hat{\psi}\, dA + \oint\limits_\Gamma \left\{ \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y \right) n_x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x \right) n_y \right\} \epsilon\hat{\psi}\, ds \\ &= - \int\limits_A \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right) \epsilon\hat{\psi}\, dA + \oint\limits_\Gamma \left[\frac{d\psi}{dn} - \frac{1}{2} \frac{d}{ds}(x^2 + y^2) \right] \epsilon\hat{\psi}\, ds,\end{aligned} \tag{2.225}$$

ja potentiaalienergian ensimmäiseksi variaatioksi tulee

$$\begin{aligned}\delta\Pi =& \left\{ G\theta \int\limits_A \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x \right)^2 \right] dA - \bar{M}_v \right\} L\alpha\hat{\theta} \\ &+ GL\theta^2 \left\{ - \int\limits_A \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right) \epsilon\hat{\psi}\, dA + \oint\limits_\Gamma \left[\frac{d\psi}{dn} - \frac{1}{2} \frac{d}{ds}(x^2 + y^2) \right] \epsilon\hat{\psi}\, ds \right\}.\end{aligned} \tag{2.226}$$

Koska $\delta\theta = \alpha\hat{\theta}$ ja $\delta\psi = \epsilon\hat{\psi}$ ovat mielivaltaisia virtuaalisia siirtymiä, ehdosta $\delta\Pi = 0$ seuraa

$$G\theta \int\limits_A \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x \right)^2 \right] dA = \bar{M}_v, \tag{2.227}$$

[4] Gaussin lauseen mukaan $\int\limits_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dA = \oint\limits_\Gamma (f n_x + g n_y)\, ds$.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.228}$$

alueessa A ja

$$\frac{d\psi}{dn} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(x^2 + y^2) \tag{2.229}$$

alueen A (poikkileikkauksen) reunalla Γ. Yhtälöt (2.227), (2.228) ja (2.229) toteutuvat tasapainotilassa.

Potentiaalienergian minimin periaatetta käyttäen voidaan muodostaa likiratkaisu valitsemalla käyristymäfunktiolle $\psi(x, y)$ kehitelmä

$$\psi^* = \sum_{i=1}^{n} a_i\psi_i(x, y), \tag{2.230}$$

missä $\psi_i(x, y)$:t ovat tunnettuja kantafunktioita ja a_i:t ovat tuntemattomia kertoimia. Sijoittamalla kehitelmä (2.230) kaavaan (2.217) saadaan kertoimista a_i riippuva potentiaalienergian $\Pi = \Pi(a_i)$ lauseke, jonka ensimmäinen variaatio on tasapainotilassa nolla eli

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial a_i}\delta a_i = 0. \tag{2.231}$$

Ehdosta (2.231) seuraa lineaarinen yhtälöryhmä

$$\sum_{j=1}^{n} B_{ij}a_j + C_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.232}$$

missä yhtälöryhmän kertoimet $B_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n$ ja vakiot $C_i,\ i = 1, \ldots, n$ lasketaan kaavoilla

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \int_A \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x} + \frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right) dA, \\ C_i &= \int_A \left(-y\frac{\partial\psi_i}{\partial x} + x\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\right) dA. \end{aligned} \tag{2.233}$$

Yhtälöryhmä (2.232) kirjoitettuna matriisimuodossa on

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{Bmatrix}. \tag{2.234}$$

Vääntöjäyhyyden

$$I_v = \frac{\bar{M}_v}{G\theta} \tag{2.235}$$

likiarvo on

$$I_v^* = \int_A \left[\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial y} + x\right)^2\right] dA, \tag{2.236}$$

ja se voidaan saattaa muotoon

$$I_v^* = \int_A \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial \psi^*}{\partial y} - y\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) dA \tag{2.237}$$

eli

$$I_v^* = I_p + \sum_{i=1}^{n} a_i C_i. \tag{2.238}$$

Vääntymän likiarvo on

$$\theta^* = \frac{\bar{M}_v}{GI_v^*}. \tag{2.239}$$

Edellä määritetty vääntöjäyhyys I_v^* on todellisen vääntöjäyhyyden I_v ylälikiarvo. Tämä nähdään tarkastelemalla kuvan 2.21 L:n pituisen ulokesauvan vääntöä. Potentiaalienergian lauseke Π on nyt

$$\begin{aligned}\Pi =& \frac{L}{2} GI_v\theta^2 - \bar{M}_v L\theta \\ =& \frac{L}{2}\bar{M}_v L\theta - \bar{M}_v L\theta = -\frac{L}{2}\bar{M}_v\theta.\end{aligned} \tag{2.240}$$

Likiratkaisun potentiaalienergian Π^* lauseke on

$$\Pi^* = \frac{L}{2} GI_v^*(\theta^*)^2 - \bar{M}_v L\theta^* = \frac{L}{2}\bar{M}_v\theta^* - \bar{M}_v L\theta^* = -\frac{L}{2}\bar{M}_v\theta^*. \tag{2.241}$$

Potentiaalienergian minimin periaatteen mukaan

$$\Pi^* \geq \Pi \tag{2.242}$$

eli

$$-\frac{L}{2}\bar{M}_v\theta^* \geq -\frac{L}{2}\bar{M}_v\theta \quad \Rightarrow \quad \theta^* \leq \theta. \tag{2.243}$$

Koska vääntymä θ on

$$\theta = \frac{\bar{M}_v}{GI_v}, \tag{2.244}$$

saadaan sijoituksella

$$\frac{\bar{M}_v}{GI_v^*} \leq \frac{\bar{M}_v}{GI_v} \quad \Rightarrow \quad I_v \leq I_v^*. \tag{2.245}$$

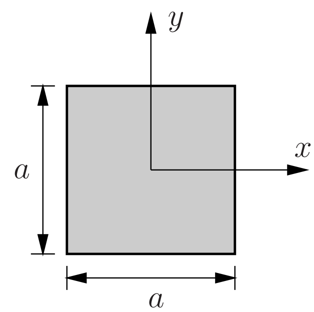
Esimerkki 2.9 *Lasketaan neliöpoikkileikkauksen vääntöjäyhyys potentiaalienergian minimin periaatteella.*

Neliöpoikkileikkauksen sivun pituudeksi otetaan a. Valitaan käyristymäfunktioksi

$$\psi^*(x, y) = a_0\psi_0(x, y) + a_1\psi_1(x, y), \tag{2.246}$$

missä otaksutut kantafunktiot ovat

$$\psi_0 = xy, \quad \psi_1(x, y) = y^3x - yx^3. \tag{2.247}$$



Kuva 2.22 Neliöpoikkileikkaus.

Suorakaidepoikkileikkaukselle $a_0 \neq 0$, mutta neliöpoikkileikkauksen tapauksessa $a_0 = 0$. Kantafunktion ψ_1 ensimmäisten derivaattojen kaavojen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} &= y^3 - 3yx^2, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} &= 3y^2x - x^3 \end{aligned} \tag{2.248}$$

avulla lasketaan (integroimalla poikkipinnan yli) vakiot

$$B_{11} = \frac{3a^8}{280}, \quad C_1 = \frac{a^6}{60}. \tag{2.249}$$

Asettamalla potentiaalienergian ensimmäinen variaatio nollaksi tulee

$$\delta\Pi = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 B_{11} + C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{14}{9a^2}. \tag{2.250}$$

Vääntöjäyhyyden likiarvo on

$$I_v^* = I_p + a_1 C_1 = 2\,\frac{a^4}{12} - \frac{14}{9a^2}\,\frac{a^6}{60} = 0.1407\,a^4, \tag{2.251}$$

ja tarkka arvo on $I_v = 0.1406\,a^4$.

2.8 Ratkaisu komplementaarisen energian minimin periaatteella

Komplementaarisen energian lauseke vääntösauvan tapauksessa, kun τ_{zx} ja τ_{zy} ovat ainoat nollasta poikkeavat jännityskomponentit, on

$$\Pi_c = \frac{1}{2G}\int_0^L \int_A \left(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2\right) dA = \frac{L}{2G}\int_A \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2\right] dA, \tag{2.252}$$

missä jännitysfunktion ϕ tulee olla derivoituva sekä toteuttaa ehto $\phi = 0$ (yhdesti yhtenäisen) poikkileikkauksen reunalla Γ.

Vääntömomentti on jännitysfunktiokukkulan kaksinkertainen tilavuus, eli

$$\bar{M}_v = 2\int_A \phi\, dA, \tag{2.253}$$

missä viiva suureen päällä tarkoittaa annettua arvoa. Ehto (2.253) voidaan ottaa huomioon komplementaarisen energian lausekkeessa Lagrangen kertojan λ avulla, jolloin modifioitu komplementaarisen energian lauseke on muotoa

$$\tilde{\Pi}_c = \frac{L}{2G}\int\limits_A \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right] dA + \lambda\left(\bar{M}_v - 2\int\limits_A \phi\, dA\right). \tag{2.254}$$

Varioidaan suureita ϕ ja λ siten, että

$$\phi \to \phi + \epsilon\hat{\phi}, \quad \lambda \to \lambda + \alpha\hat{\lambda}. \tag{2.255}$$

Komplementaarienergian lausekkeeksi tulee sijoituksen jälkeen

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_c = \frac{L}{2G}\int\limits_A &\left[\left(\frac{\partial(\phi+\epsilon\hat{\phi})}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\phi+\epsilon\hat{\phi})}{\partial x}\right)^2\right] dA \\ &+ (\lambda+\alpha\hat{\lambda})\left(\bar{M}_v - 2\int\limits_A (\phi+\epsilon\hat{\phi})\, dA\right).\end{aligned} \tag{2.256}$$

Funktionaalin $\tilde{\Pi}_c$ ensimmäinen variaatio on

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\Pi}_c =& \epsilon\frac{\partial\tilde{\Pi}_c}{\partial\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} + \alpha\frac{\partial\tilde{\Pi}_c}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0} \\ =& \frac{L}{G}\int\limits_A\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\epsilon\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\epsilon\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial y}\right) dA - 2\lambda\int\limits_A \epsilon\hat{\phi}\, dA + \alpha\hat{\lambda}\left(\bar{M}_v - 2\int\limits_A \phi\, dA\right).\end{aligned} \tag{2.257}$$

Soveltamalla jälleen tulon derivointikaavaa ja Gaussin lausetta saadaan

$$\begin{aligned}\int\limits_A\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\epsilon\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\epsilon\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial y}\right) dA =& \oint\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}n_y\right)\epsilon\hat{\phi}\, ds - \int\limits_A\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\epsilon\hat{\phi}\, dA \\ =& -\int\limits_A\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\epsilon\hat{\phi}\, dA,\end{aligned} \tag{2.258}$$

koska $\hat{\phi} = 0$ reunalla. Funktionaalin $\tilde{\Pi}_c$ ensimmäinen variaatio on

$$\delta\tilde{\Pi}_c = -\frac{L}{G}\int\limits_A\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + 2G\frac{\lambda}{L}\right)\epsilon\hat{\phi}\, dA + \alpha\hat{\lambda}\left(\bar{M}_v - 2\int\limits_A \phi\, dA\right). \tag{2.259}$$

Todetaan, että funktionaalin $\tilde{\Pi}_c$ ensimmäinen variaatio häviää, jos voimamenetelmän kenttäyhtälö ja vääntömomentin määrittelykaava toteutuvat. Lagrangen kertojan λ ja vääntymän θ välillä on yhteys

$$\theta = \lambda/L. \tag{2.260}$$

Likiratkaisumenetelmässä jännitysfunktioksi valitaan kehitelmä

$$\phi^{**}(x,y) = \frac{\lambda}{L}\sum_{i=1}^{n} b_i\phi_i(x,y), \tag{2.261}$$

missä kantafunktiot ϕ_i häviävät poikkileikkauksen reunalla. Ehdosta

$$\delta\tilde{\Pi}_c(b_i) = 0 \tag{2.262}$$

seuraa lineaarinen yhtälöryhmä

$$\sum_{j=1}^{n} D_{ij}b_j - 2GE_i = 0, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{2.263}$$

missä (yhteensopivuusehtojen) yhtälöryhmän kertoimet $D_{ij},\ i,j = 1,\ldots,n$ ovat

$$D_{ij} = \int\limits_A \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_j}{\partial x} + \frac{\partial\phi_i}{\partial y}\frac{\partial\phi_j}{\partial y}\right) dA, \tag{2.264}$$

ja vakiot $E_i,\ i = 1,\ldots,n$ ovat

$$E_i = \int\limits_A \phi_i dA. \tag{2.265}$$

Vääntömomentti on kertoimien E_i avulla lausuttuna

$$\bar{M}_v = \left(\frac{2\lambda}{L}\right)\sum_{i=1}^{n} b_iE_i = GI_v^{**}\theta^{**}. \tag{2.266}$$

Suhde $\dfrac{\lambda}{L}$ on vääntymän likiarvo θ^{**}, ja vääntöjäyhyydeksi saadaan

$$I_v^{**} = \frac{\bar{M}_v}{G\theta^{**}} = \frac{2}{G}\sum_{i=1}^{n} b_iE_i. \tag{2.267}$$

I_v^{**} on vääntöjäyhyyden alalikiarvo. Tarkkaa ratkaisua vastaa

$$\tilde{\Pi}_c = \frac{1}{2}\frac{\bar{M}_v^2}{GI_v}L, \tag{2.268}$$

ja likiratkaisua vastaa

$$\tilde{\Pi}_c^{**} = \frac{L}{2G}\left(\frac{\lambda}{L}\right)^2\sum_{i,j=1}^{n} b_ib_jD_{ij} = L\left(\frac{\lambda}{L}\right)^2\sum_{j=1}^{n} b_jE_j = \frac{L\bar{M}_v^2}{4\sum\limits_{i=1}^{n} b_iE_i} \geq \tilde{\Pi}_c, \tag{2.269}$$

joten

$$I_v^{**} \leq I_v. \tag{2.270}$$

Ottamalla huomioon kaava (2.245) saadaan arviot

$$I_v^{**} \leq I_v \leq I_v^{*}. \tag{2.271}$$

Esimerkki 2.10 *Määritetään neliöpoikkileikkauksen vääntöjäyhyys komplementaarisen energian minimin periaatteella.*

Otetaan sivun pituudeksi a. Valitaan jännitysfunktiolle yksiterminen esitys, jossa ainut kantafunktio on

$$\phi_1 = a^2 \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{a^2}{4} \right). \tag{2.272}$$

Kantafunktion ϕ_1 derivaatat ovat

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = a^2 2x \left(y^2 - \frac{a^2}{4} \right), \tag{2.273}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = a^2 2y \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right), \tag{2.274}$$

joiden avulla lasketaan yhtälöryhmän ainoa kerroin

$$D_{11} = 4 \cdot \left(2a^2\right)^2 \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{a}{2}} \left[x^2 \left(y^2 - \frac{a^2}{4} \right)^2 + y^2 \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right)^2 \right] dx\, dy = \frac{a^{12}}{45} \tag{2.275}$$

ja oikean puolen vektorin komponentti

$$E_1 = 4a^2 \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{a}{2}} \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{a^2}{4} \right) dx\, dy = \frac{a^8}{36}. \tag{2.276}$$

Muodostetaan sitten yhtälöryhmä (nyt vain yksi yhtälö)

$$D_{11} b_1 - 2\, G\, E_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = \frac{2\, G\, E_1}{D_{11}} = \frac{5\, G}{2\, a^4}. \tag{2.277}$$

Vääntöjäyhyyden likiarvo on

$$I_v^{**} = \frac{2}{G} b_1 E_1 = \frac{5}{36}\, a^4 \approx 0.1388\, a^4 < I_v. \tag{2.278}$$

Tarkempi arvio saadaan valitsemalla korkeamman asteen kehitelmä, esimerkiksi

$$\phi^{**} = b_1 \phi_1(x, y) + b_2 \phi_2(x, y), \tag{2.279}$$

missä

$$\phi_1(x, y) = a^2 \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{a^2}{4} \right), \tag{2.280}$$

$$\phi_2(x, y) = \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(x^2 + y^2 \right). \tag{2.281}$$

Yhtälöryhmäksi

$$\sum_j D_{ij} b_j = 2\, G E_i, \quad i = 1, \ldots, 2 \tag{2.282}$$

tulee nyt

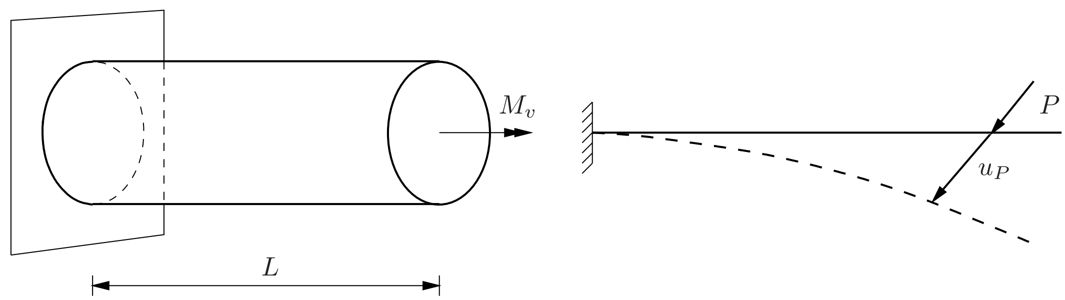
$$a^{12} \begin{bmatrix} \frac{1}{45} & \frac{1}{525} \\ \frac{1}{525} & \frac{11}{18900} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = 2\, G\, a^8 \begin{Bmatrix} \frac{1}{36} \\ \frac{1}{360} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \frac{2\, G}{a^4} \begin{Bmatrix} \frac{1295}{4 \cdot 277} \\ \frac{1050}{4 \cdot 277} \end{Bmatrix}. \tag{2.283}$$

Vääntöjäyhyyden likiarvo on

$$I_v^{**} = \frac{2}{G} \frac{2G}{a^4} \cdot a^8 \left(\frac{1295}{4 \cdot 277} \cdot \frac{1}{36} + \frac{1050}{4 \cdot 277} \cdot \frac{1}{360} \right) = \frac{350}{2493} \cdot a^4 \approx 0.1404\, a^4. \tag{2.284}$$

Siirtymämenetelmän tulos huomioonotettuna on saatu arvio

$$0.1404\, a^4 \leq I_v \leq 0.1407\, a^4. \tag{2.285}$$



Kuva 2.23 Ulokesauvan taivutus ja vääntö.

2.9 Rakenteiden jäykkyys

Kuvan 2.23 taivutetun ulokepalkin jäykkyydeksi voidaan määritellä

$$D = \frac{P}{u_P}, \tag{2.286}$$

missä u_P on siirtymä pistekuorman P suuntaan. Vastaavasti vääntömomentin kuormittaman ulokesauvan tapauksessa vääntöjäykkyys on (kuva 2.23)

$$GI_v = \frac{M_v}{\theta}, \tag{2.287}$$

missä M_v on vääntömomentti ja θ on vääntymä.

Laventamalla vääntymällä kaavasta (2.287) seuraa

$$GI_v = \frac{M_v \theta}{\theta^2} = \frac{2U(\theta)}{\theta^2}, \tag{2.288}$$

missä

$$U = \frac{1}{2} GI_v \theta^2 \tag{2.289}$$

on muodonmuutosenergia. Laventamalla kaavaa (2.287) vaihtoehtoisesti vääntömomentilla tulee

$$GI_v = \frac{M_v}{\theta} = \frac{M_v^2}{M_v \theta} = \frac{M_v^2}{2U_c(M_v)}, \tag{2.290}$$

missä

$$U_c = \frac{1}{2} \frac{M_v^2}{GI_v} \tag{2.291}$$

on komplementaarinen energia.

Koska $M_v = 2 \int\limits_A \phi \, dA$, saadaan kaava (2.252) huomioon ottaen vääntöjäykkyyden lausekkeeksi

$$GI_v = \frac{\left(2 \int\limits_A \phi \, dA) \right)^2}{\int\limits_A \frac{1}{G} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dA}. \tag{2.292}$$

Valitsemalla yrite

$$\phi = \sum_i^n a_i \phi_i(x, y), \tag{2.293}$$

ja sijoittamalla se kaavaan (2.292) tulee integrointien jälkeen

$$GI_v = GI_v(a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{2.294}$$

Kertoimet a_i ratkaistaan hakemalla GI_v:n lausekkeen minimi, jonka välttämättömät ehdot ovat

$$\frac{\partial GI_v(a_i)}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.295}$$

Tuloksena on samanlainen yhtälöryhmä kuin kaavassa (2.263).

Laskelmia voidaan olennaisesti helpottaa, jos voidaan valita ortogonaaliset jännityskentät, jotka toteuttavat yhtälöt

$$\frac{1}{2G}\int\limits_A \left(\tau^i_{zx}\tau^j_{zx} + \tau^i_{zy}\tau^j_{zy}\right) dA = \begin{cases} U_c(\phi_i), \text{ jos } i = j, \\ 0, \text{ jos } i \neq j \end{cases} \tag{2.296}$$

ja lisäksi ehdot

$$M_{vi} = 2\int\limits_A \phi_i \, dA \neq 0. \tag{2.297}$$

Tällöin jännitysfunktiota ϕ_i vastaa vääntöjäyhyys

$$I_{vi} = \frac{\left(2\int\limits_A \phi_i \, dA\right)^2}{\int\limits_A \left[\left(\dfrac{\partial \phi_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \phi_i}{\partial y}\right)^2\right] dA}. \tag{2.298}$$

Ortogonaalisuuden perusteella komplementaarisen energian lauseke yksinkertaistuu muotoon

$$U_c(\sum_i a_i\phi_i) = \sum_i a_i^2 \, U_c(\phi_i). \tag{2.299}$$

Muodostetaan komplementaarisen potentiaalienergian lauseke

$$\begin{aligned} \Pi_c =& U_c - \theta \, \bar{M}_v \\ =& \sum_i a_i^2 \, U_c(\phi_i) - \theta \, 2\int\limits_A \sum_i (a_i \, \phi_i) \, dA. \end{aligned} \tag{2.300}$$

Minimin välttämätön ehto on

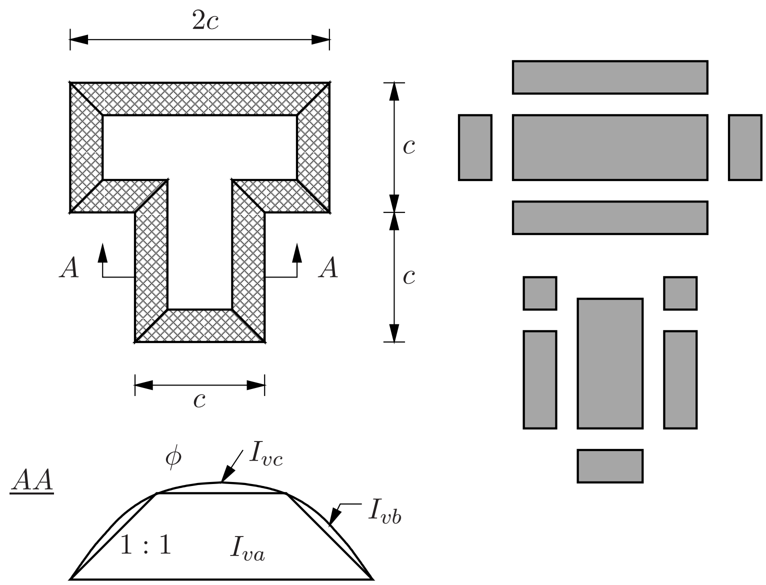
$$\frac{\partial \Pi_c}{\partial a_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\, a_k U_c(\phi_k) - 2\theta \int\limits_A \phi_k \, dA = 0, \tag{2.301}$$

josta seuraa

$$a_k = \frac{\theta \int\limits_A \phi_k \, dA}{U_c(\phi_k)}. \tag{2.302}$$

Vääntömomentin lausekkeeksi tulee

$$M_v = 2\sum_i a_i \int\limits_A \phi_i \, dA = \theta \sum_i \frac{(2\int\limits_A \phi_i \, dA)^2}{2\, U_c(\phi_i)}. \tag{2.303}$$



Kuva 2.24 T-poikkileikkaus.

Ottamalla huomioon kaava (2.298) saadaan

$$\max I_v = \sum_i I_{vi}, \tag{2.304}$$

eli vääntöjäyhyys on luvallisten ϕ_i funktioiden avulla laskettujen jäyhyyksien summa, kun niitä vastaavat jännityskentät toteuttavat ortogonaalisuusehdot (2.296).

Jäyhyyden karkea alaraja-arvio saadaan jakamalla poikkileikkaus suorakaiteisiin ja laskemalla jäyhyys osien summana. Tarkempi tulos saadaan valitsemalla osasuorakaiteisiin jännitysfunktio, jonka kaltevuuskulma on 45° reunavyöhykkeillä, joiden leveys on $t/4$, missä t on suorakaiteen lyhemmän sivun pituus.

Esimerkki 2.11 *Määritetään T-poikkileikkauksen vääntöjäyhyyden likiarvo.*

Jaetaan poikkileikkaus osiin kuvan 2.24 esittämällä tavalla.

Varjostetulla $c/4$:n levyisellä vyöhykkeellä ϕ-funktion kaltevuus on $1:1$ ja $\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = 1$. Tällöin kaavasta (2.298) seuraa

$$I_{va} = \frac{(2V_a)^2}{A_a}, \tag{2.305}$$

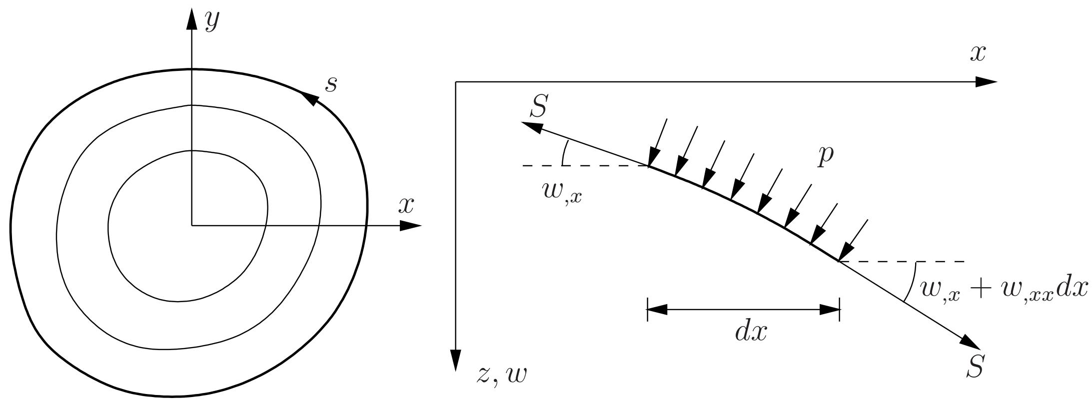
missä A_a on varjostetun osan pinta-ala ja V_a on poikkileikkaukseltaan murtoviivanmuotoisen ϕ-kumpareen tilavuus. Tasanteiden (valkoisten alueiden) osuudet ovat I_{vc}. Varjostetulle alueelle niihin kohtiin, joissa leikkausjännitysten suunta on muuttumaton, sijoitetaan suorakaiteen jännityskenttä, ja vastaavaa jäyhyyttä merkitään symbolilla I_{vb}.

Osapoikkileikkausten jännityskentät ovat ortogonaaliset, joten

$$\max I_v = \sum I_{va} + \sum I_{vb} + \sum I_{vc}. \tag{2.306}$$

Suurin leikkausjännitys saavutetaan poikkileikkauksen reunalla ja

$$\tau_{\max} = \frac{M_a}{W_{va}} + \frac{M_b}{W_{vb}} = \frac{M_v}{I_v}\left(\frac{I_{va}}{W_{va}} + \frac{I_{vb}}{W_{vb}}\right), \tag{2.307}$$



Kuva 2.25 Kalvon taipuma.

missä

$$M_a = \frac{I_{va}}{I_v} M_v, \quad M_b = \frac{I_{vb}}{I_v} M_v \tag{2.308}$$

ja

$$W_{va} = \frac{M_a}{\tau_a} = 2V_a. \tag{2.309}$$

Koko poikkileikkauksen vääntövastus W_v on siten

$$W_v \approx \frac{M_v}{\tau_{\max}} = \frac{I_v}{\dfrac{I_{va}}{W_{va}} + \dfrac{I_{vb}}{W_{vb}}} = \frac{I_v}{\dfrac{2V_a}{A_a} + \dfrac{k}{k_1} t_b}, \tag{2.310}$$

missä

$$\frac{I_{vb}}{W_{vb}} = \frac{k}{k_1}\, t_b, \tag{2.311}$$

ja t_b on varjostetun vyöhykkeen suurin leveys.

2.10 Kalvoanalogia

Paineen alaisen kalvon taipuman differentiaaliyhtölö on

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{p}{S}, \tag{2.312}$$

missä p on paine ja S on kalvovoima. Tasapainoyhtälön reunaehdot ovat

$$w(s) = 0, \quad \frac{dw(s)}{ds} = 0. \tag{2.313}$$

Yhtälö (2.312) on samaa muotoa kuin vääntöprobleeman voimamenetelmän yhtälö

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \tag{2.314}$$

reunaehdoin

$$\phi(s) = 0, \quad \frac{d\phi}{ds} = 0. \tag{2.315}$$

Taulukko 2.1 Kalvoanalogia.

kalvo	vääntö
w	ϕ
$\dfrac{p}{S}$	$G\theta$
$2\int\limits_A w\,dA$	M_v
$\dfrac{4\,S}{p}\int\limits_A w\,dA$	I_v

Yhtälöiden (2.312) ja (2.314) samankaltaisuuden nojalla havaitaan taulukossa 2.1 esitetty analogia.

Käyrillä, joilla $w =$ vakio, eli $\dfrac{dw}{ds} = 0$, on myös $\dfrac{d\phi}{ds} = 0$, josta seuraa

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{ds} =& \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds}\\ =& \frac{\partial\phi}{\partial x}(-\cos\beta) + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\alpha\\ =& -\tau_{zy}(-\cos\beta) + \tau_{zx}\cos\alpha\\ =& \tau_n = 0.\end{aligned} \tag{2.316}$$

Resultoiva leikkausjännitys τ_r, joka määritellään kaavalla

$$\begin{aligned}\tau_r =& \tau_{zy}\cos\alpha - \tau_{zx}\cos\beta\\ =& -\frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\beta\\ =& -\frac{d\phi}{dn},\end{aligned} \tag{2.317}$$

on korkeuskäyrän tangentin suuntainen, eli τ_r on verrannollinen kalvon suurimpaan kaltevuuteen.

Esimerkki 2.12 *Määritetään kapean suorakaidepoikkileikkauksen suurin leikkausjännitys ja vääntöjäyhyys kalvoanalogian avulla.*

Ratkaistaan suorakaiteessa kalvon differentiaaliyhtälö

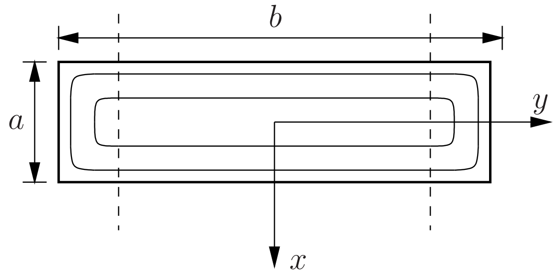
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{p}{S}. \tag{2.318}$$

Kalvon jyrkkyys on suurin pitkän sivun keskellä, jossa

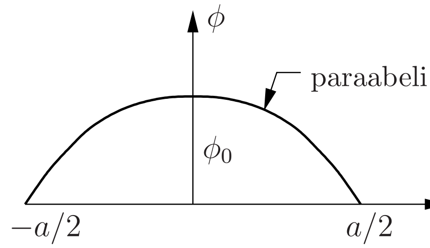
$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{p}{S}, \tag{2.319}$$

ja kalvon degeneroituneen differentiaaliyhtälön reunaehdot ovat

$$w\left(\pm\frac{a}{2}, y\right) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0, y) = 0. \tag{2.320}$$



Kuva 2.26 Kapea suorakaidepoikkileikkaus.



Kuva 2.27 Kapean suorakaidepoikkileikkauksen jännitysfunktion leikkaus.

Sijoitetaan

$$\phi \to w \quad \text{ja} \quad 2G\theta \to \frac{p}{S}. \tag{2.321}$$

Integroimalla saadaan jännitysfunktio

$$\phi = -G\theta \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]. \tag{2.322}$$

Suurin leikkausjännitys on

$$(\tau_{zy})_{\max} = \max \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \max (2G\theta x) = G\theta a = \frac{M_v}{I_v} a. \tag{2.323}$$

Kapean suorakaidepoikkileikkauksen vääntöjäyhyys on

$$I_v = \left(\frac{2}{G\theta} \right) \int_A \phi \, dA \approx \frac{1}{3} a^3 b. \tag{2.324}$$

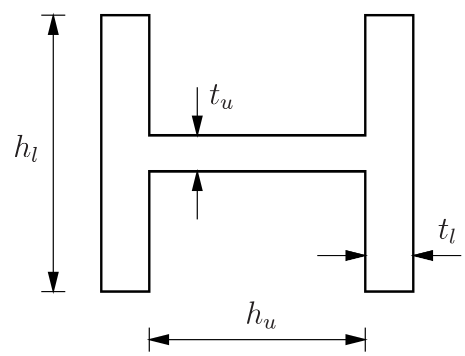
Jos poikkileikkaus koostuu useasta kapeasta suorakaiteesta, niin vääntöjäyhyydellä I_v on likiarvo

$$I_v = \frac{1}{3} \sum_i \left(ht^3 \right)_i . \tag{2.325}$$

Todellisuudessa vääntöjäyhyys on liitosalueiden ansiosta

$$I_v = \eta \frac{1}{3} \sum_i \left(ht^3 \right)_i , \quad \eta \in (1, 1.3), \tag{2.326}$$

missä η on korjauskerroin.



Kuva 2.28 Suorakaideosista koostuva I-poikkileikkaus.

Luku 3

Kotelosauvojen vapaa vääntö

Tarkastellaan ohutseinäistä kotelosauvaa. Jännitysfunktiolle voidaan otaksua kalvoanalogian perusteella seinämän paksuuden yli parabolinen lauseke

$$\phi = \phi_0 \left[1 - \left(\frac{2e}{t} \right)^2 \right] + \frac{H}{2} \left(1 - \frac{2e}{t} \right). \tag{3.1}$$

Prandtlin jännitysfunktion määrittelyn perusteella leikkausjännitykset ovat [1]

$$\begin{aligned} \tau_{zs} &= -\frac{\partial \phi}{\partial e} = \phi_0 \frac{8e}{t^2} + \frac{H}{t}, \\ \tau_{ze} &= \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Voimamenetelmän differentiaaliyhtälöstä $\nabla^2 \phi = -2G\theta$ seuraa kuvan 3.1 tapauksessa, kun kotelon seinän kaarevuussäde R on suuri,

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial e^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial e} \approx \frac{\partial^2 \phi}{\partial e^2} = -2G\theta. \tag{3.3}$$

Sijoittamalla jännitysfunktion differentiaaliyhtälöön otaksuttu jännitysfunktion lauseke (3.1) saadaan ratkaistua vakio

$$\phi_0 = G\theta \frac{t^2}{4}. \tag{3.4}$$

Akselin z suuntainen siirtymä w on yksikäsitteinen koordinaatin s funktio $w = w(s)$ siten, että

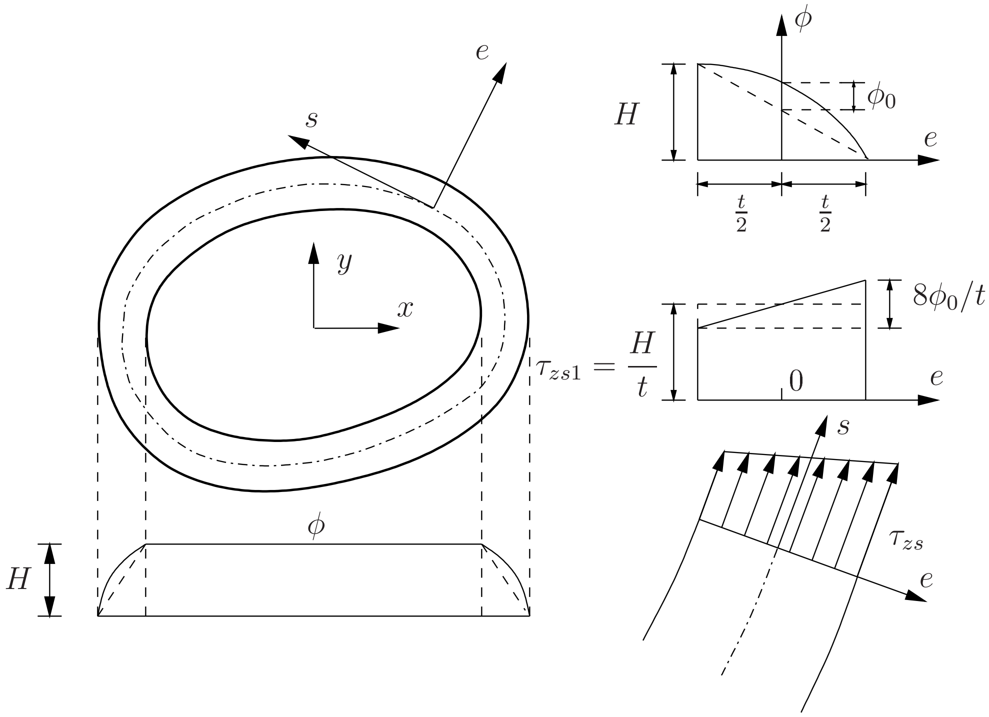
$$\oint \frac{\partial w}{\partial s} \, ds = 0, \tag{3.5}$$

missä integroidaan kotelon ympäri seinän keskiviivaa ($e = 0$) pitkin.

Koordinaattiakseleiden suuntaiset siirtymät ovat

$$\begin{aligned} u &= -\varphi \left(y - y_v \right), \\ v &= \varphi \left(x - x_v \right), \\ w &= \theta \psi(e, s), \end{aligned} \tag{3.6}$$

[1] Koordinaatti s on todellisuudessa käyräviivainen eikä suoraviivainen. Tästä aiheutuva korjaustermi on on kertaluokaa $O(t/R)$, ja se voidaan jättää pienenä suureena pois.



Kuva 3.1 Ontelopoikkileikkauksen jännitysfunktio.

missä (x_v, y_v) ovat vääntökeskiön koordinaatit.

Koordinaattien (x, y) ja (e, s) välinen yhteys on

$$\begin{Bmatrix} e \\ s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \tag{3.7}$$

ja siirtymien (u, v) ja (v_e, v_s) välillä on samanlainen yhteys

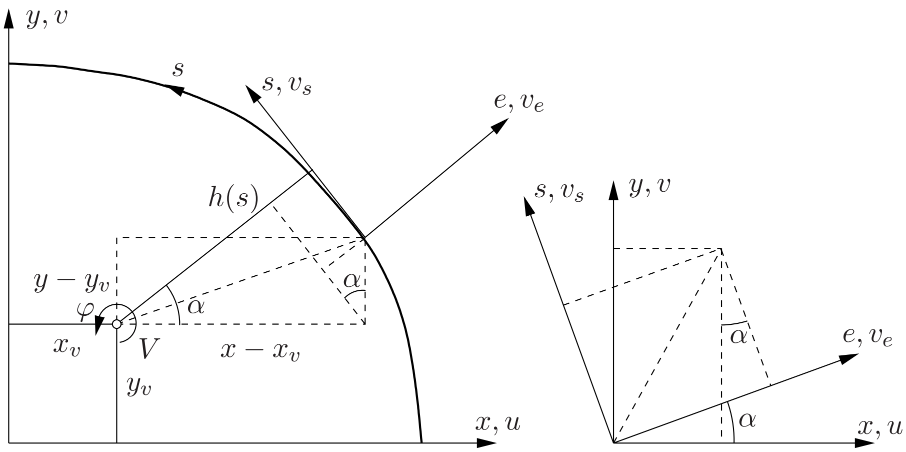
$$\begin{Bmatrix} v_e \\ v_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}. \tag{3.8}$$

Kotelon seinämän leikkausmuodonmuutos γ_{zs} on

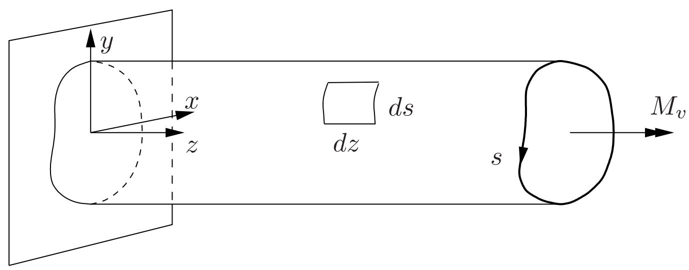
$$\gamma_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial z}. \tag{3.9}$$

Liukuman ja leikkausjännityksen kimmoisen yhteyden ja siirtymäkomponenttien muunnoskaavan perusteella saadaan ratkaistua

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= \gamma_{zs} - \frac{\partial v_s}{\partial z} \\ &= \frac{\tau_{zs}}{G} - [u'(-\sin\alpha) + v'(\cos\alpha)] \\ &= \frac{\tau_{zs}}{G} - \varphi' \left[(y - y_v)\sin\alpha + (x - x_v)\cos\alpha\right] \\ &= \frac{\tau_{zs}}{G} - \varphi' h(s), \end{aligned} \tag{3.10}$$



Kuva 3.2 Seinämän keskiviivan tangentin suuntainen siirtymä v_s.



Kuva 3.3 Väännetty kotelosauva.

missä

$$h(s) = (y - y_v)\sin\alpha + (x - x_v)\cos\alpha \tag{3.11}$$

on kohtisuora etäisyys vääntökeskiöistä (x_v, y_v) seinämän keskiviivan tangentille ja

$$(\bullet)' \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial z}. \tag{3.12}$$

Yhtälön (3.5)

$$\oint \frac{\partial w}{\partial s}\, ds = 0 \tag{3.13}$$

mukaan

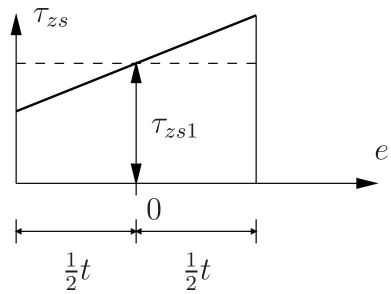
$$\oint \frac{\tau_{zs}}{G}\, ds - \theta \oint h\, ds = \oint \frac{\tau_{zs}}{G}\, ds - 2A\theta = 0, \tag{3.14}$$

missä A on kotelon seinämän keskiviivan rajoittama pinta-ala. Jos liukumoduuli G on vakio, niin

$$\frac{H}{G} \oint \frac{ds}{t} - 2A\theta = 0. \tag{3.15}$$

Vakiolle H saadaan nyt yhteensopivuusehdon perusteella ratkaistua arvo

$$H = \frac{2AG\theta}{\oint \frac{ds}{t}}. \tag{3.16}$$



Kuva 3.4 Leikkausjännitys kotelon seinässä.

Edellä $\oint(\bullet)\,ds$ on integraali kotelon seinämän keskiviivaa ($e=0$) pitkin.

Leikkausjännitykselle τ_{zs} on saatu lauseke

$$\tau_{zs} = \phi_0 \frac{8e}{t^2} + \frac{H}{t} = 2G\theta \left(e + \frac{A}{t \oint \frac{ds}{t}} \right), \tag{3.17}$$

ja toinen leikkausjännitys on likimäärin nolla eli

$$\tau_{ze} \approx 0. \tag{3.18}$$

Merkitään, että koordinaatin e suhteen vakio leikkausjännitys on

$$\tau_{zs1} = \frac{H}{t} = \frac{2AG\theta}{t \oint \frac{ds}{t}}. \tag{3.19}$$

Ohutseinäisen kotelon tapauksessa τ_{sz1} on merkittävämpi kuin koordinaatista e lineaarisesti riippuva osa leikkausjännityksestä.

Vääntömomentti on jännitysfunktiokukkulan tilavuus kaksinkertaisena eli

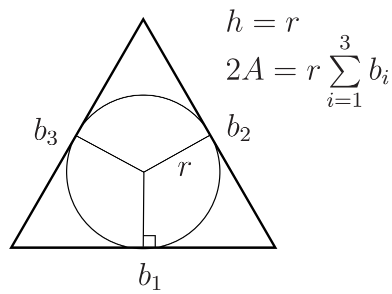
$$\begin{aligned} M_v =& 2 \int_A \phi dA \\ =& 2HA + 2 \oint ds \int \phi_0 \left(1 - \frac{4e^2}{t^2}\right) de \\ =& 2HA + 2 \oint \phi_0 \frac{2t}{3}\, ds = \frac{4A^2 G\theta}{\oint \frac{ds}{t}} + \frac{G\theta}{3} \oint t^3\, ds. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Poikkileikkauksen vääntöjäyhyys on

$$I_v = \frac{M_v}{G\theta} = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}} + \frac{1}{3} \oint t^3\, ds. \tag{3.21}$$

Ottamalla huomioon vain ensimmäinen termi vääntöjäyhyyden ja leikkausjännityksen kaavoissa saadaan Bredtin kaavat (Bredt 1896)

$$I_v = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}}, \tag{3.22}$$



Kuva 3.5 Kolmiopoikkileikkaus.

$$\tau_{zs1} = \frac{M_v}{2tA}. \tag{3.23}$$

Leikkausvuo kotelon seinässä on

$$q = \tau_{zs1} t = H = \frac{2AG\theta}{\oint \frac{ds}{t}} \approx \frac{M_v}{2A}. \tag{3.24}$$

Poikkipinnan käyristymä määritetään integroimalla siirtymän w derivaatan lausekkeesta:

$$w = \int_0^s \frac{\partial w}{\partial s}\, ds + w_0(z) = \int_0^s \frac{\tau_{zs}}{G}\, ds - \theta \int_0^s h(s)\, ds + w_0(z). \tag{3.25}$$

Ottamalla huomioon, että seinämän keskiviivalla ($e = 0$)

$$\tau_{zs} = \frac{2AG\theta}{t \oint \frac{ds}{t}}, \tag{3.26}$$

saadaan

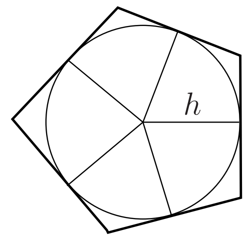
$$w = \theta \int_0^s \frac{1}{t}\left(-ht + \frac{2A}{\oint \frac{ds}{t}}\right) ds + w_0(z). \tag{3.27}$$

Vääntösauvan poikkileikkauksen poikkipinta ei käyristy, jos

$$ht = \frac{2A}{\oint \frac{ds}{t}}. \tag{3.28}$$

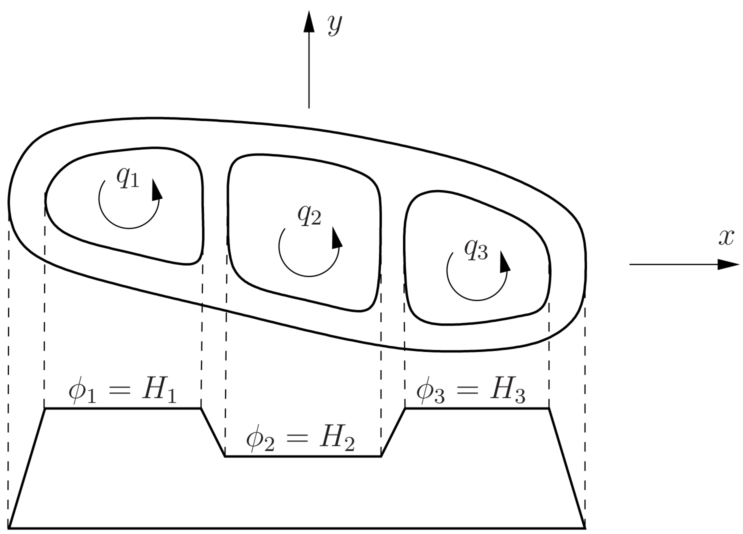
Jos t on vakio, niin tällaisia poikkipintoja ovat

- ympyrä,
- kolmiopoikkileikkaus,
- monikulmiot, joiden sisään voidaan piirtää ympyrä.



$$h = r$$
$$2A = r \sum_{i=1}^{5} b_i$$

Kuva 3.6 Monikulmiopoikkileikkaus.



Kuva 3.7 Moniontelоinen poikkileikkaus.

3.1 Moniontelоiset sauvat

Leikkausvuo osassa i (osakotelossa tai ontelossa i) on

$$q_i = H_i \quad (= t\tau_{zs1}). \tag{3.29}$$

Merkitään

$$q_{ik} = q_i - q_k = H_i - H_k. \tag{3.30}$$

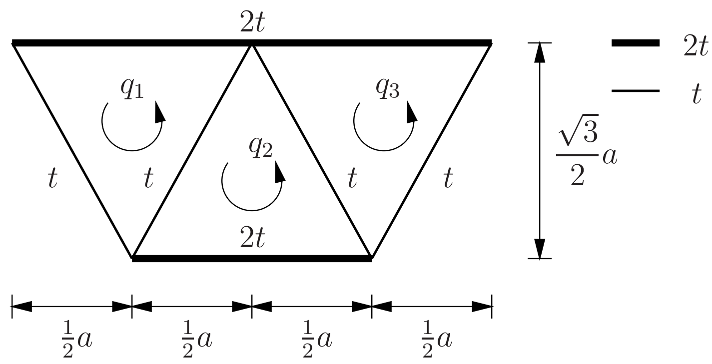
Otaksutaan yksinkertaisuuden vuoksi, että liukumoduuli G on sama kaikissa poikkileikkauksen osissa. Yleistys paloittain muuttuvalle liukumoduulille (esim. kotelon kansi betonia ja muut osat terästä) on helppo. Jokaiselle osakotelolle on voimassa yhteensopivuusyhtälö

$$\oint_i \frac{\tau_{zs}}{G}\, ds - 2A_i\theta = 0, \tag{3.31}$$

josta seuraa

$$q_i \oint_i \frac{ds}{t} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{m} q_k \int_{s_{ik}} \frac{ds}{t} = 2A_i G\theta, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.32}$$

missä s_{ik} tarkoittaa seinän osaa, joka on yhteinen osakoteloilla i ja k.



Kuva 3.8 Kolmionteloinen poikkileikkaus.

Merkitsemällä

$$\eta_{ii} = \oint_i \frac{ds}{t}, \quad \eta_{ik} = \int_{s_{ik}} \frac{ds}{t}, \quad \tilde{q}_i = \frac{q_i}{G\theta} \tag{3.33}$$

saadaan yhteensopivuusehto muotoon

$$\eta_{ii}\tilde{q}_i - \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m} \eta_{ik}\tilde{q}_k = 2A_i. \tag{3.34}$$

Kotelopoikkileikkauksen vääntömomentti on

$$M_v = 2\int_A \phi dA = 2\sum_i H_i A_i = 2\sum_i q_i A_i = 2G\theta \sum_i \tilde{q}_i A_i. \tag{3.35}$$

Vääntöjäykkyyden kaava on

$$GI_v = \frac{M_v}{\theta} = 2G\sum_i \tilde{q}_i A_i, \tag{3.36}$$

ja leikkausvuo ontelossa i on

$$q_i = G\theta\tilde{q}_i = \frac{M_v}{I_v}\tilde{q}_i. \tag{3.37}$$

Esimerkki 3.1 *Määritetään kuvan 3.8 kolmionteloisen poikkileikkauksen leikkausvuon jakauma ja vääntöjäykkyys.*

Osakoteloiden (onteloiden seinämien keskiviivan sisäänjäävät) pinta-alat ovat

$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2. \tag{3.38}$$

Yhteensopivuusehtoyhtälöryhmän kertoimet ovat

$$\oint_{s_1} \frac{ds}{t} = \frac{a}{t} + \frac{a}{t} + \frac{a}{2t} = \frac{5}{2}\frac{a}{t}, \tag{3.39}$$

$$\oint_{s_2} \frac{ds}{t} = \frac{5}{2}\frac{a}{t}, \quad \oint_{s_3} \frac{ds}{t} = \frac{5}{2}\frac{a}{t}. \tag{3.40}$$

Yhteisissä seinissä

$$\int_{s_{12}} \frac{ds}{t} = \frac{a}{t}, \quad \int_{s_{23}} \frac{ds}{t} = \frac{a}{t}. \tag{3.41}$$

Yhteensopivuusehdoista seuraa yhtälöryhmä

$$\frac{a}{t} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 & 0 \\ -1 & \frac{5}{2} & -1 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 G\theta \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \tag{3.42}$$

ja sen ratkaisuna saadaan leikkausvuot

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = G\theta a t \begin{Bmatrix} \frac{7\sqrt{3}}{17} \\ \frac{9\sqrt{3}}{17} \\ \frac{7\sqrt{3}}{17} \end{Bmatrix}. \tag{3.43}$$

Onteloiden 1 ja 2 ja 2 ja 3 välisissä seinissä leikkausvuot ovat

$$q_{12} = q_1 - q_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{17}, \quad q_{23} = q_2 - q_3 = \frac{2\sqrt{3}}{17}. \tag{3.44}$$

Esimerkin kotelopoikkileikkauksen vääntöjäyhyys on

$$I_v = \frac{M_v}{G\theta} = 2\sum_i \tilde{q}_i A_i = \frac{2}{G\theta}\sum_i q_i A_i = \frac{69}{34} a^3 t, \tag{3.45}$$

ja kotelopoikkileikkauksen vääntöjäykkyys on GI_v.

Luku 4

Avoimien ohutseinämäisten sauvojen vääntö

4.1 Siirtymätila

Poikkileikkaukseltaan avoimien ohutseinämäisten sauvojen taivutuksen ja väännön teoria perustuu seuraaviin otaksumiin:

1. Poikkileikkaus ei muuta muotoaan.

2. Leikkausmuodonmuutos eli liukuma palkin seinämän keskipinnalla jätetään huomioon ottamatta.

Merkitään, että pisteen A (vääntökeskiö) akseleiden suuntaiset siirtymät ovat $u \equiv u_A$ ja $v \equiv v_A$ ja kiertymä A:n ympäri on $\varphi \equiv \varphi_A$. Seinämän keskipinnan ja poikkileikkaustason leikkauskäyrän mielivaltaisen pisteen P siirtymät u_P ja v_P ovat tällöin otaksuman 1 perusteella

$$\begin{aligned} u_P &= u - \varphi(y - y_A), \\ v_P &= v + \varphi(x - x_A). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pisteen P tangentin suuntainen siirtymä on

$$u_s = -u_P \sin\alpha + v_P \cos\alpha \tag{4.2}$$

eli

$$u_s = -u \sin\alpha + v \cos\alpha + h_A\varphi, \tag{4.3}$$

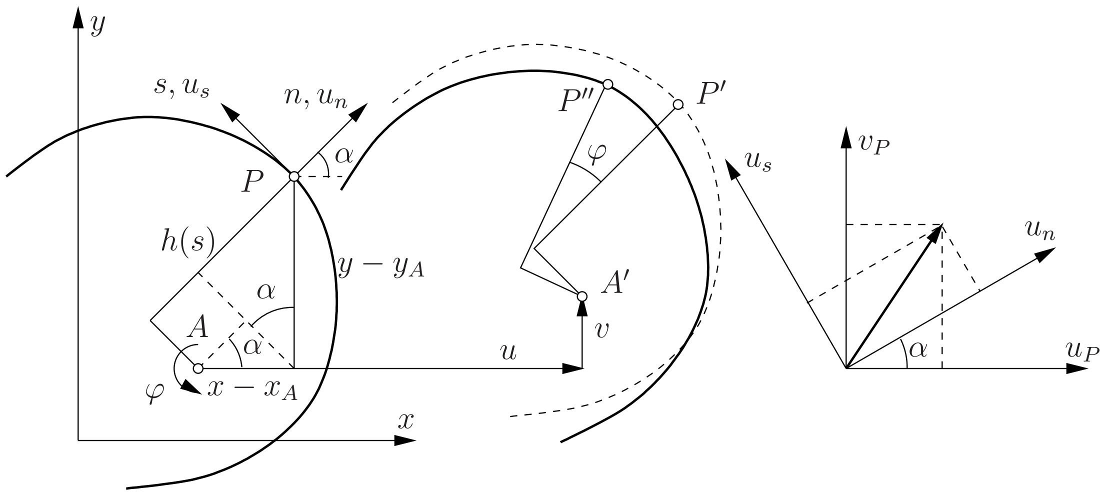
missä

$$h_A(s) = (x - x_A)\cos\alpha + (y - y_A)\sin\alpha \tag{4.4}$$

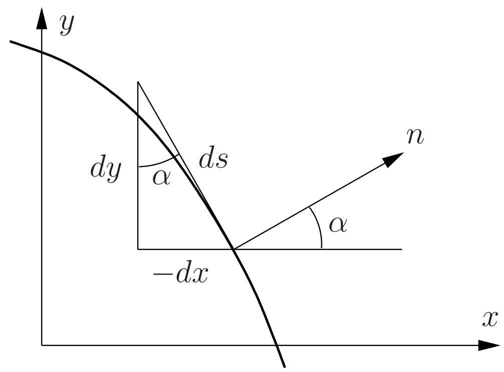
on kohtisuora etäisyys pisteestä A pisteen P kautta kulkevalle tangentille.

Poikkileikkauksen seinämän keskiviivan geometristen ehtojen

$$\sin\alpha = -\frac{dx}{ds}, \quad \cos\alpha = \frac{dy}{ds} \tag{4.5}$$



Kuva 4.1 Poikkileikkauksen pisteen P siirtymät.



Kuva 4.2 Poikkileikkauksen seinämän tangentti ja normaali.

avulla saadaan (4.3) muotoon

$$u_s(s,z) = u(z)\frac{dx(s)}{ds} + v(z)\frac{dy(s)}{ds} + \varphi(z)h_A(s). \tag{4.6}$$

Ortogonaalisessa käyräviivaisessa (z,s)-koordinaatistossa on otaksuman 2 mukaan seinämän keskipinnan liukuma nolla eli

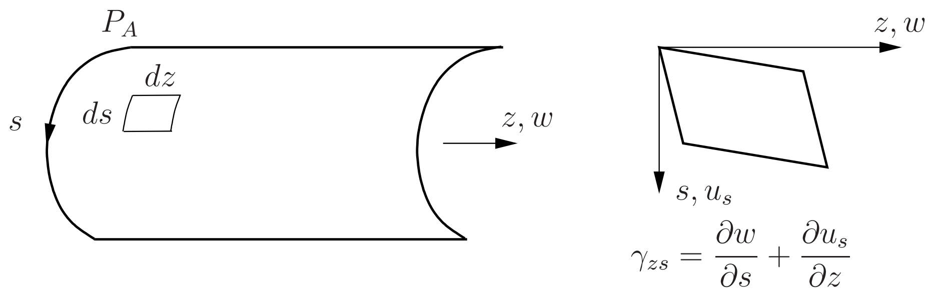
$$\gamma_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial z} = 0. \tag{4.7}$$

Kaavan (4.7) nojalla saadaan

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{\partial u_s}{\partial z} \tag{4.8}$$

ja edelleen kaavan (4.6) avulla tulee

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{du}{dz}\frac{dx}{ds} - \frac{dv}{dz}\frac{dx}{ds} - \frac{d\varphi}{dz}h_A(s). \tag{4.9}$$



Kuva 4.3 Seinämän keskipinnan koordinaatisto (s, z) ja liukuma γ_{sz}.

Poikkileikkauksen keskiviivan mielivaltaisen pisteen P siirtymä $w(z, s)$ (akselin z suuntaan) saadaan integroimalla (4.9) lähtien pisteestä P_A:

$$w(z, s) = w_0(z) - \frac{du(z)}{dz}x(s) - \frac{dv(z)}{dz}y(s) - \frac{d\varphi(z)}{dz}\omega_A(s), \tag{4.10}$$

missä $w_0(z)$ sisältää kaikki koordinaatista s riippumattomat termit ja

$$\omega_A(s) = \int_{P_A}^{P(s)} h_A(\tau)d\tau \tag{4.11}$$

on **sektoriaalinen koordinaatti**. Kaavassa (4.11) integroidaan lähtöpisteestä P_A pisteeseen $P(s)$ seinämän keskiviivaa pitkin.

Sektoriaalisen koordinaatin inkrementti $d\omega_A = |d\boldsymbol{\omega}_A|$ voidaan vektoreiden ristitulon ja sen pinta-alatulkinnan avulla lausua muodossa

$$\begin{aligned} |d\boldsymbol{\omega}_A| =& |\boldsymbol{r}_A \times d\boldsymbol{s}| = | \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x - x_A & y - y_A & 0 \\ dx & dy & 0 \end{bmatrix} | \\ =& (x - x_A)dy - (y - y_A)\,dx \end{aligned} \tag{4.12}$$

eli

$$d\omega_A = (x - x_A)dy - (y - y_A)\,dx. \tag{4.13}$$

Edellä $\boldsymbol{r}_A = (x - x_A)\boldsymbol{i} + (y - y_A)\boldsymbol{j}$ on seinämän mielivaltaisen pisteen (x, y) paikkavektori pisteen A suhteen, $d\boldsymbol{s} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j}$ on seinämän keskiviivan tangentin suuntainen vektori, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ ja $\boldsymbol{k}$ ovat akseleiden x, y ja z suuntaiset yksikkövektorit.

4.2 Normaalijännitys σ_z

Hooken lain mukaan

$$\sigma_z = E\varepsilon_z, \tag{4.14}$$

ja kaavan (4.10) perusteella

$$\sigma_z(s, z) = E\left[\frac{dw_0(z)}{dz} - \frac{d^2u(z)}{dz^2}x(s) - \frac{d^2v(z)}{dz^2}y(s) - \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}\omega_A(s)\right]. \tag{4.15}$$

Määritellään jännitysresultantit

$$N(z) = \int_A \sigma_z(s,z)\,dA, \tag{4.16}$$

$$M_x(z) = \int_A y(s)\sigma_z(s,z)\,dA, \tag{4.17}$$

$$M_y(z) = -\int_A x(s)\sigma_z(s,z)\,dA, \tag{4.18}$$

missä $dA = t(s)ds$ on poikkileikkauksen pinta-alkio, t on seinämän paksuus. N on normaalivoima, M_x on momentti x:n ympäri ja M_y on momentti y:n ympäri. Analogisesti taivutusmomenttien kanssa määritellään **bimomentti**

$$B(z) = \int_A \omega(s)\sigma_z(s,z)\,dA. \tag{4.19}$$

Sijoittamalla normaalijännityksen σ_z kaava (4.15) resultanttien N, M_x, M_y ja B kaavoihin (4.16), ..., (4.19) saadaan differentiaaliyhtälöt

$$N = E\left(A\frac{dw_0}{dz} - S_y\frac{d^2u}{dz^2} - S_x\frac{d^2v}{dz^2} - S_\omega\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \tag{4.20}$$

$$M_y = E\left(-S_y\frac{dw_0}{dz} + I_y\frac{d^2u}{dz^2} + I_{xy}\frac{d^2v}{dz^2} + I_{y\omega}\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \tag{4.21}$$

$$M_x = E\left(S_x\frac{dw_0}{dz} - I_{xy}\frac{d^2u}{dz^2} - I_x\frac{d^2v}{dz^2} - I_{x\omega}\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \tag{4.22}$$

$$B = E\left(S_\omega\frac{dw_0}{dz} - I_{y\omega}\frac{d^2u}{dz^2} - I_{x\omega}\frac{d^2v}{dz^2} - I_\omega\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \tag{4.23}$$

missä pinta-alkio on jälleen $dA = t(s)ds$ ja

$$I_x = \int_A y^2\,dA, \quad I_y = \int_A x^2\,dA, \quad I_{xy} = \int_A xy\,dA, \tag{4.24}$$

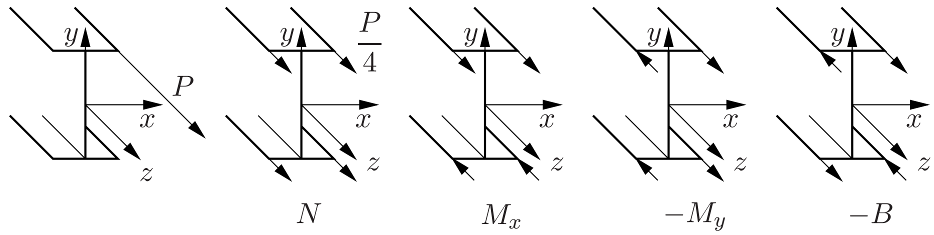
$$I_{x\omega} = \int_A y\omega_A\,dA, \quad I_{y\omega} = \int_A x\omega_A\,dA, \quad I_\omega = \int_A \omega_A^2\,dA, \tag{4.25}$$

$$S_x = \int_A y\,dA, \quad S_y = \int_A x\,dA, \quad S_\omega = \int_A \omega_A\,dA \tag{4.26}$$

ovat geometriset poikkileikkaussuureet. Suure I_ω on nimeltään **käyristymisjäyhyys**, ja S_ω on sektoriaalinen staattinen momentti.

Pääkoordinaatistossa (pääjäyhyys- ja painopistekoordinaatisto)

$$I_{xy} = \int_A xy\,dA = 0, \quad S_x = \int_A y\,dA = 0, \quad S_y = \int_A x\,dA = 0. \tag{4.27}$$



Kuva 4.4 Pistevoiman hajotelma.

Myöhemmin osoitetaan, että piste A ja integroinnin aloituspiste P_A voidaan valita siten, että

$$\begin{aligned} S_{\omega_A} &\equiv S_\omega = \int_A \omega_A(s)\, dA = 0, \\ I_{x\omega_A} &\equiv I_{x\omega} = \int_A y(s)\omega_A(s)\, dA = 0, \\ I_{y\omega_A} &\equiv I_{y\omega} = \int_A x(s)\omega_A(s)\, dA = 0. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Piste A on tällöin vääntökeskiö, ja resultanttien kaavat yksinkertaistuvat (pääkoordinaatistossa) muotoihin

$$N(z) = EA\frac{dw_0(z)}{dz}, \tag{4.29}$$

$$M_x(z) = -EI_x\frac{d^2v(z)}{dz^2}, \tag{4.30}$$

$$M_y(z) = EI_y\frac{d^2u(z)}{dz^2}, \tag{4.31}$$

$$B(z) = -EI_\omega\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}. \tag{4.32}$$

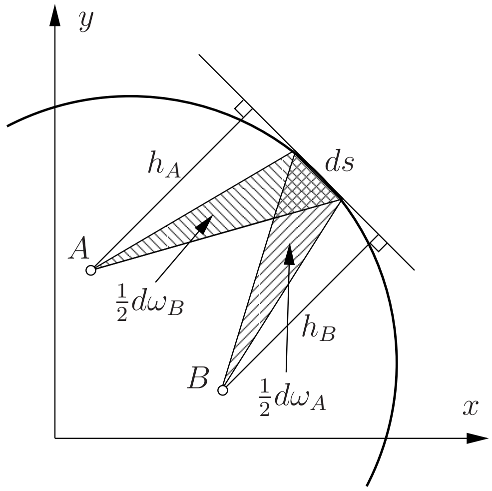
Sijoittamalla resultanttien kaavat (4.29), (4.30), (4.31) ja (4.32) takaisin jännityksen σ_z kaavaan (4.15) seuraa normaalijännitykselle σ_z lauseke

$$\sigma_z(s,z) = \frac{N(z)}{A} + \frac{M_x(z)}{I_x}y(s) - \frac{M_y(z)}{I_y}x(s) + \frac{B(z)}{I_\omega}\omega_A(s). \tag{4.33}$$

Kaavassa (4.33) kolme ensimmäistä termiä ovat vedon (puristuksen) ja puhtaan taivutuksen aiheuttamat normaalijännitykset. Neljäs termi esittää normaalijännitysjakaumaa, jonka resultantti ja momentit ovat nollia.

Esimerkki 4.1 *Jaetaan I-palkin päädyssä laipan kärjessä vaikuttava voima P jännitysresultantteja vastaaviin osiin.*

Kuvassa 4.4 voima P on jaettu $P/4$:n suuruisista pistevoimista koostuviin neljän voiman systeemeihin, jotka vastaavat normaalivoimaa, taivutusmomentteja ja bimomenttia, ja samalla on havainnollistettu bimomentin määrittelyä. Kuvan tapauksessa taivutusmomentti M_y ja bimomentti ovat negatiiviset.



Kuva 4.5 Sektoriaalisen koordinaatin differentiaalit pisteiden A ja B suhteen.

4.3 Vääntökeskiö ja sektoriaalisen koordinaatin alkupiste

Vääntökeskiö A ja sektoriaalisen koordinaatin ω_A alkupiste P_A määritellään siten, että ehdot (4.28) toteutuvat eli

$$S_{\omega_A} = \int_A \omega_A \, dA = 0, \tag{4.34}$$

$$I_{y\omega_A} = \int_A x\omega_A \, dA = 0, \tag{4.35}$$

$$I_{x\omega_A} = \int_A y\omega_A \, dA = 0, \tag{4.36}$$

missä $dA = tds$.

Yhtälöiden (4.28) toteuttamiseksi valitaan ensin apupiste B. Pisteiden A ja B suhteen lausuttujen sektoriaalisten koordinaattien differentiaalit $d\omega_A$ ja $d\omega_B$ ovat

$$d\omega_A = h_A ds, \quad d\omega_B = h_B ds, \tag{4.37}$$

missä kohtisuorat etäisyydet ovat

$$\begin{aligned} h_A &= (x - x_A)\cos\alpha + (y - y_A)\sin\alpha, \\ h_B &= (x - x_B)\cos\alpha + (y - y_B)\sin\alpha. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Sektoriaalisten koordinaattien differentiaalit saadaan muotoon

$$\begin{aligned} d\omega_A &= (x - x_A)dy + (y - y_A)(-dx), \\ d\omega_B &= (x - x_B)dy + (y - y_B)(-dx). \end{aligned} \tag{4.39}$$

Muodostetaan sitten erotus

$$d\omega_A - d\omega_B = -(x_A - x_B)dy + (y_A - y_B)dx, \tag{4.40}$$

joka saadaan integroimalla muotoon

$$\omega_A = \omega_B - (x_A - x_B)y + (y_A - y_B)x + C, \tag{4.41}$$

missä C on integroimisvakio. Kaavoista (4.28b) ja (4.28c) seuraa yhtälöryhmä

$$\int_A x\omega_A \, dA = \int_A x\omega_B \, dA - \int_A x(x_A - x_B)y \, dA + \int_A x(y_A - y_B)x \, dA + \int_A xC \, dA = 0, \tag{4.42}$$

$$\int_A y\omega_A \, dA = \int_A y\omega_B \, dA - \int_A y(x_A - x_B)y \, dA + \int_A y(y_A - y_B)x \, dA + \int_A yC \, dA = 0, \tag{4.43}$$

eli

$$\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int y\omega_B \, dA \\ -\int x\omega_B \, dA \end{Bmatrix} \tag{4.44}$$

josta ratkaistaan

$$y_A - y_B = \frac{\left[I_x(-\int_A x\omega_B \, dA) + I_{xy} \int_A y\omega_B \, dA \right]}{(I_x I_y - I_{xy}^2)}, \tag{4.45}$$

$$x_A - x_B = \frac{\left[-I_{xy} \int_A x\omega_B \, dA + I_y \int_A y\omega_B \, dA \right]}{(I_x I_y - I_{xy}^2)}. \tag{4.46}$$

Pääjäyhyyskoordinaatistossa $I_{xy} = 0$, ja tällöin ratkaisu yksinkertaistuu muotoon

$$y_A - y_B = \frac{-\int_A x\omega_B \, dA}{I_y}, \quad x_A - x_B = \frac{\int_A y\omega_B \, dA}{I_x}. \tag{4.47}$$

Piste (x_A, y_A) on nimeltään vääntökeskiö.

Sektoriaalisen koordinaatin nollakohta valitaan siten, että

$$S_{\omega_A} = \int_A \omega_A \, dA = 0, \tag{4.48}$$

eli

$$\int_A \omega_B \, dA - (x_A - x_B) \int_A y \, dA + (y_A - y_B) \int_A x \, dA + \int_A C \, dA = 0. \tag{4.49}$$

Ehdon toteuttava vakio on

$$C = \frac{-\int_A \omega_B \, dA}{A} = \frac{-S_{\omega B}}{A}, \tag{4.50}$$

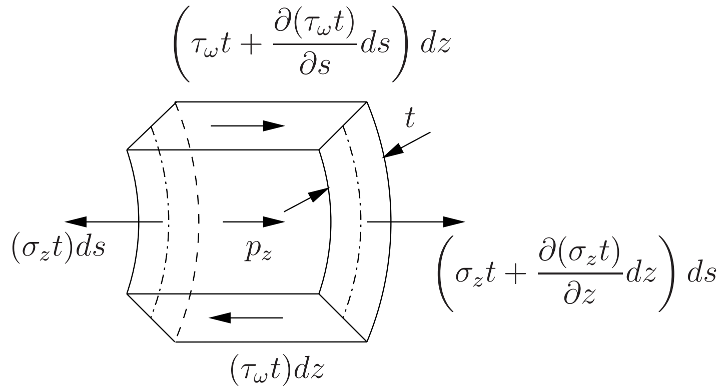
missä A on poikkileikkauksen pinta-ala.

Sektoriaalisen koordinaatin kaava on nyt saatu muotoon

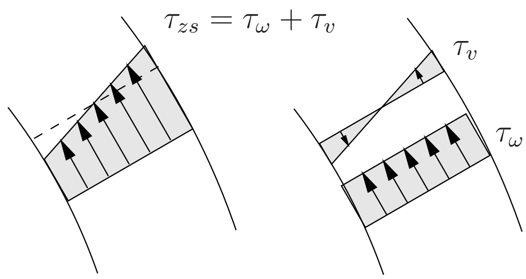
$$\omega_A = \omega_B - (x_A - x_B)y + (y_A - y_B)x - \frac{S_{\omega B}}{A}, \tag{4.51}$$

missä B on itse valittu apunapa. Käyristymisjäyhyys $I_\omega \equiv I_{\omega A}$ lasketaan kaavalla

$$I_\omega = \int_A \omega_A^2 \, dA, \tag{4.52}$$



Kuva 4.6 Seinämän alkion tasapainoehto.



Kuva 4.7 Leikkausjännityksen jako osiin $\tau \equiv \tau_\omega$ ja τ_v.

tai kertomalla ω_A:n kaava ω_B:llä, integroimalla poikkileikkauksen yli ja ottamalla huomioon ehdot (4.34), (4.35) ja (4.34) saadaan muunnoskaavaa

$$I_\omega = I_{\omega B} + (y_A - y_B) I_{y\omega B} - (x_A - x_B) I_{x\omega B} - \frac{S_{\omega B}^2}{A}. \tag{4.53}$$

4.4 Leikkausjännitys

Leikkausjännitys τ_{zs} jaetaan osiin τ_ω ja τ_v, (kuva 4.7)

$$\tau_{zs} = \tau_\omega + \tau_v. \tag{4.54}$$

Akselin z suuntaisen tasapainoehdon mukaan

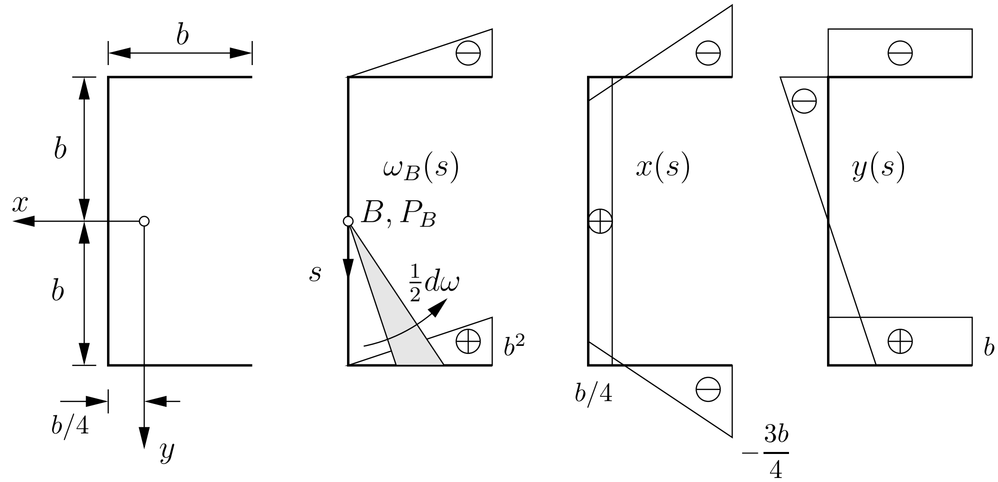
$$\frac{\partial(t\sigma_z)}{\partial z} + \frac{\partial(t\tau_\omega)}{\partial s} + p_z(s, z) = 0, \tag{4.55}$$

missä $p_z(s, z)$ on pinnalle (s, z) jakautunut z-akselin suuntainen kuorma. Integroimalla (4.55) seuraa leikkausvuolle $\tau_\omega t$ kaava

$$t\tau_\omega = C(z) - \int_{s_1}^{s} p_z(z, s)\, ds - \int_{s_1}^{s} \frac{\partial}{\partial z}(t\sigma_z)\, ds, \tag{4.56}$$

missä $C(z)$ esittää reunalla $s = s_1$ vaikuttavaa ulkoista leikkausvuota

$$C(z) = \tau_\omega(s_1, z) t(s_1). \tag{4.57}$$



Kuva 4.8 U-poikkileikkaus, (ω kasvaa säteen kiertäessä vastapäivään).

Tapauksessa $C(z) = 0$ ja $p_z = 0$ saadaan sijoittamalla (4.15) yhtälöön (4.56) kaava

$$t\tau_\omega = -\int_{s_1}^{s} E\left[\frac{d^2w_0(z)}{dz^2} - \frac{d^3u(z)}{dz^3}x(s) - \frac{d^3v(z)}{dz^3}y(s) - \frac{d^3\varphi(z)}{dz^3}\omega_A(s)\right] t(s)\,ds \tag{4.58}$$

eli

$$t\tau_\omega = -EA(s)\frac{d^2w_0}{dz^2} + ES_y(s)\frac{d^3u}{dz^3} + ES_x(s)\frac{d^3v}{dz^3} + ES_\omega(s)\frac{d^3\varphi}{dz^3}, \tag{4.59}$$

missä

$$\begin{aligned} A(s) &= \int_{s_1}^{s} t(s)\,ds, \\ S_y(s) &= \int_{s_1}^{s} x(s)t(s)\,ds, \quad S_x(s) = \int_{s_1}^{s} y(s)t(s)\,ds, \\ S_\omega(s) &= \int_{s_1}^{s} \omega_A(s)t(s)\,ds. \end{aligned} \tag{4.60}$$

S_ω on poikkipinnan sektoriaalinen staattinen momentti. Kaavojen (4.29), (4.30), (4.31) ja (4.32) perusteella tulee leikkausvuon kaava edelleen muotoon

$$t\tau_\omega = -\frac{N'A(s)}{A} + \frac{M'_yS_y(s)}{I_y} - \frac{M'_xS_x(s)}{I_x} - \frac{B'S_\omega(s)}{I_\omega}, \tag{4.61}$$

missä on merkitty

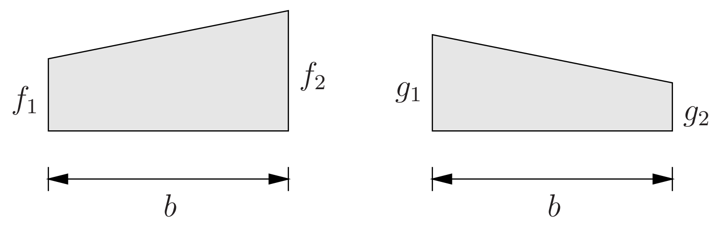
$$(\bullet)' = \frac{d}{dz}(\bullet). \tag{4.62}$$

Esimerkki 4.2 *Määritetään* U*-poikkileikkauksen vääntökeskiö, sektoriaalinen koordinaatti* ω*, käyristymisjäyhyys* I_ω *ja sektoriaalinen staattinen momentti* S_ω*.*

Tarkastellaan U-profiilia, jonka seinämänvahvuus t on paljon pienempi kuin laipan leveys b eli $t \ll b$. Valitaan apupiste B ja integroinnin alkupiste P_B kuvan 4.8 mukaisesti.

Koordinaatin ω alkio $d\omega$ on positiivinen, kun säde h kiertää positiiviseen suuntaan (vastapäivään). Vääntökeskiön paikan määrittävät yhtälöt

$$x_A = x_B + \frac{\left(\int y\omega_B\,dA\right)}{I_x}, \quad y_A = y_B - \frac{\left(\int x\omega_B\,dA\right)}{I_y}, \tag{4.63}$$



Kuva 4.9 Lineaariset funktiot $f(s)$ ja $g(s)$.

joissa $dA = t\,ds$ on pinta-alkio. Taivutusjäyhyydet ovat

$$I_x = \int y^2\,dA = \frac{1}{12}\cdot t\cdot(2b)^3 + 2\cdot bt\cdot b^2 = \frac{32}{12}\cdot b^3 t = \frac{8}{3}\cdot b^3\cdot t, \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned} I_y = \int x^2\,dA &= 2\cdot\frac{bt}{6}\left[\frac{b}{4}\cdot\left(2\frac{b}{4}-\frac{3b}{4}\right)+\left(-\frac{3b}{4}\right)\left(\frac{b}{4}-\frac{6b}{4}\right)\right]+2bt\left(\frac{b}{4}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{14}{16}b^3t+\frac{2}{16}b^3t=\frac{10}{24}\cdot b^3t. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Vääntökeskiön A ja apupisteen B y-koordinaatit ovat samat eli $y_A = y_B$, koska $\int x\omega_B\,dA = 0$, mutta

$$\int_A y\omega_B\,dA = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot bt\cdot(-b^2)\cdot(-b) = b^4 t. \tag{4.66}$$

Vääntökeskiön x-koordinaatti on

$$x_A = \frac{b}{4}+\frac{b^4 t}{\frac{8}{3}b^3 t}=\frac{b}{4}+\frac{3b}{8}=\frac{5b}{8}. \tag{4.67}$$

Kahden lineaarisen funktion $f(s)$ ja $g(s)$ tulon integraali $\int f(s)g(s)\,ds$ voidaan laskea kaavalla

$$\int f(s)g(s)t\,ds = \frac{bt}{6}\left[f_1(2g_1+g_2)+f_2(g_1+2g_2)\right], \tag{4.68}$$

missä b on integrointivälin (seinämän osan) pituus, t on seinämän paksuus, f_i, g_i ovat funktioiden f ja g arvot välin päätepisteissä, kuva 4.9.

Seuraavaksi määritetään ω-kuvio vääntökeskiön suhteen kaavasta

$$\omega_A = \int_0^s h_A\,ds \tag{4.69}$$

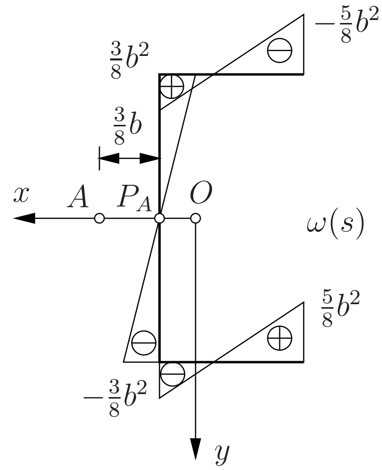
alkupisteenä P_B. Koska nyt (sattumalta) toteutuu ehto

$$\int_A \omega_A\,dA = 0, \tag{4.70}$$

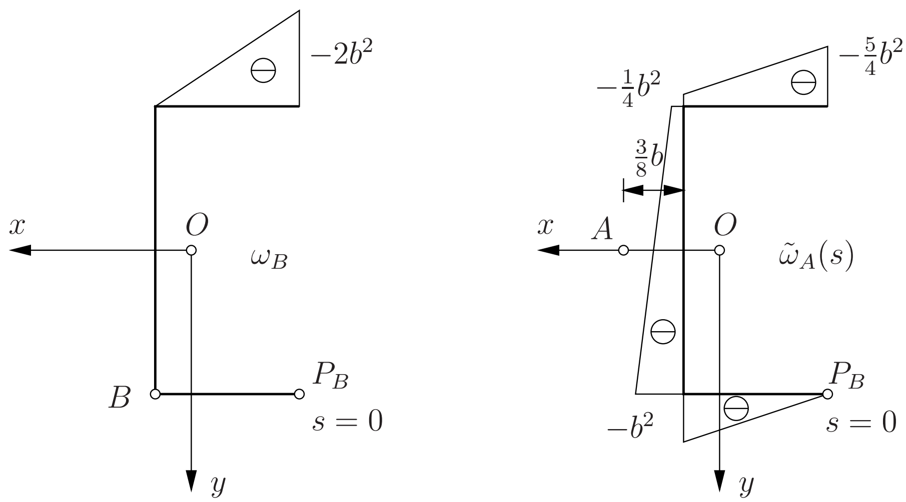
on $P_A = P_B$, ja haettu ω-kuvio on saatu määritetyksi.

Ottamalla apupiste B vasempaan alanurkkaan ja integroinnin alkupiste P_B eli s-koordinaatin 0-kohta alalaipan oikeaan laitaan saadaan kuvan 4.11 ω_B-kuvio. Tässä tapauksessa

$$\int_A y\omega_B\,dA = \frac{1}{2}\cdot bt\cdot(-2b^2)\cdot(-b) = b^4 t \tag{4.71}$$



Kuva 4.10 Vääntökeskiön suhteen määritetty ω-kuvio.



Kuva 4.11 Vaihtoehtoinen ω_B-kuvio ja $\tilde{\omega}_A$-kuvio, jolle $\int\limits_A \tilde{\omega}_A \neq 0$.

on sama kuin edellä, ja

$$\int\limits_A x\omega_B \, dA = \frac{bt}{6}(-2b^2)\left(\frac{b}{4} - 2 \cdot \frac{3}{4}b\right) = \frac{5}{12}b^4 t. \tag{4.72}$$

Vääntökeskiön koordinaatille x_A saadaan sama arvo kuin edellä, ja

$$y_A = y_B + \frac{-\int\limits_A x\omega_B \, dA}{I_y} = y_B - \frac{\frac{5}{12}b^4 t}{\frac{5}{12}b^3 t} = y_B - b. \tag{4.73}$$

Vääntökeskiön suhteen määritetty $\tilde{\omega}_A$-kuvio (integroinnin alkupisteenä P_B alalaipan oikeassa reunassa) on kuvassa 4.11. Nyt

$$\int\limits_A \tilde{\omega}_A \, dA = -\frac{5}{2}b^3 t. \tag{4.74}$$

Ehdosta

$$\int_A \omega_A \, dA = \int_A (\tilde{\omega}_A + C) \, dA = 0 \tag{4.75}$$

seuraa

$$C = -\frac{\int_A \tilde{\omega}_A \, dA}{A} = -\frac{-\frac{5}{2}b^3 t}{4bt} = \frac{5}{8}b^2. \tag{4.76}$$

Lopullinen $\omega \equiv \omega_A$-kuvio on sama kuin aiemmin saatu ja kuvassa 4.10 esitetty kuvio, eli lopputulokseen apunavan B ja alkupisteen P_B valinnalla ei ole vaikutusta, mutta laskelmia voidaan helpottaa sopivilla valinnoilla.

Sektoriaalinen jäyhyysmomentti integroidaan kaavalla (4.68):

$$\begin{aligned} I_\omega &= \int_A \omega_A^2 \, dA \\ &= 2 \cdot \frac{bt}{6} b^4 \left\{ \frac{3}{8} \left(2 \cdot \frac{3}{8} - \frac{5}{8} \right) + \left(-\frac{5}{8} \right) \left[2 \cdot \left(-\frac{5}{8} \right) + \frac{3}{8} \right] \right\} + 2 \cdot bt \cdot b^4 \frac{1}{3} \left(\frac{3}{8} \right)^2 \\ &= \frac{7}{24} b^5 t. \end{aligned} \tag{4.77}$$

Sektoriaalinen staattinen momentti on

$$S_\omega(s) = \int_0^s \omega \, dA. \tag{4.78}$$

Koska poikkileikkauksen reunalla $S_\omega = 0$, aloitetaan integrointi pisteestä 1, kuva 4.12. Valitut integrointisuunnat on merkitty näkyviin nuolilla. Ylälaipassa välillä $1-2$ saadaan ($t =$ vakio)

$$S_\omega(s) = t \int_0^s \left(-\frac{5}{8} b^2 + bs \right) ds = -t \left(\frac{5}{8} b^2 s - \frac{1}{2} b s^2 \right), \tag{4.79}$$

jonka ääriarvo on

$$|S_{\omega \, \max}| = \frac{25}{128} b^3 t \tag{4.80}$$

kohdassa $s = \frac{5}{8} b$. Samalla tavalla jatketaan muillakin väleillä. Leikkausjännityksen

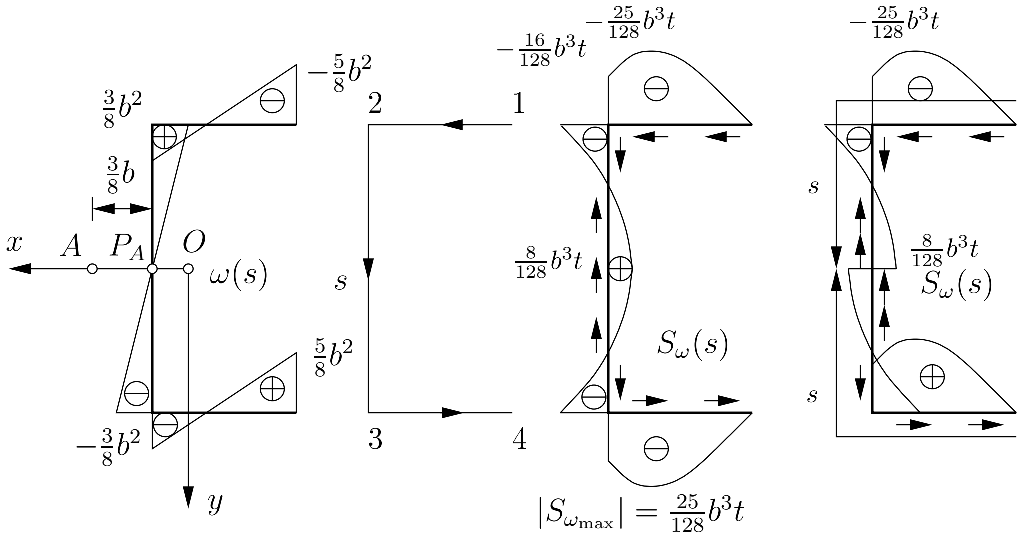
$$\tau_\omega(s) = -\frac{1}{t} \frac{M_\omega S_\omega(s)}{I_\omega} \tag{4.81}$$

suunta on merkitty $S_\omega(s)$:n jakauman kuvaan nuolilla. Kun S_ω on negatiivinen (ja momentti M_ω positiivinen), niin positiivinen leikkausvuo $t\tau_\omega$ momentista M_ω kulkee valitun integrointisuunnan nuolen suuntaan (ja positiivisen S_ω:n alueella päinvastaiseen suuntaan).

Esimerkki 4.3 *Määritetään Z-poikkileikkauksen ω-kuvio ja S_ω-kuvio.*

Z-poikkileikkauksen tapauksessa kuvan 4.13 (x, y)-akselisto ei ole nyt pääjäyhyysakselisto. Vääntökeskiön paikka voidaan kuitenkin päätellä ilman laskelmia symmetrian perusteella. Apupiste B on sama kuin vääntökeskiö A. Määritetään ensin ω_B. Sektoriaalisen koordinaatin tulee toteuttaa ehto

$$S_\omega = \int \omega_A \, dA = 0. \tag{4.82}$$



Kuva 4.12 U-profiilin S_ω-kuvio. Pienet nuolet osoittavat leikkausvuon suunnan positiivisen vääntömomentin tapauksessa.

Lisätään jakaumaan ω_B vakio ω_0 (tai C):

$$\omega_A = \omega_B + \omega_0, \tag{4.83}$$

jolloin seuraa ehto

$$\int \omega_B \, dA + A\omega_0 = 0, \tag{4.84}$$

mistä ratkaistaan

$$\omega_0 = -\frac{\int \omega_B \, dA}{A} = -\frac{1}{2}\frac{b_1^2 b_2 t_1}{2b_1 t_1 + b_2 t_2}. \tag{4.85}$$

Tapauksessa $t_1 = t_2 = t$, $b_1 = b$, $b_2 = 2b$ saadaan ehdon $\int_A \omega \, dA = 0$ toteuttamiseen tarvittavalle, lisättävälle vakiolle $C = \omega_0$ arvoksi $\omega_0 = -b^2/4$.

Seuraavaksi määritetään S_ω integroimalla ω_A-jakauma kuvaan 4.13 merkittyjen nuolien suuntaan. Positiivisen vääntömomentin M_ω aiheuttama leikkausvuo

$$\tau_\omega t = -\frac{S_\omega}{I_\omega} M_\omega \tag{4.86}$$

kulkee integroinnissa määriteltyyn suuntaan negatiivisen S_ω:n alueella.

Esimerkki 4.4 *Määritetään kuvan 4.14 poikkileikkauksen vääntökeskiö ja sektoriaalinen koordinaatti.*

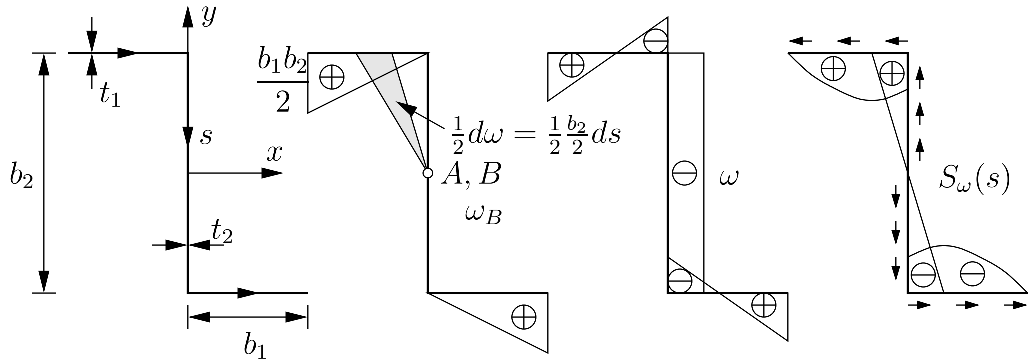
Koordinaatiston $(\bar{x}, \bar{y})$ suhteen poikkileikkauksen painopisteen O asema on

$$(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (1.1b, 1.2b). \tag{4.87}$$

Kuvan 4.14 ω_B-kuvion ja x- ja y-kuvioiden avulla lasketaan

$$\int_A y\omega_B \, dA = -1.2b^4 t, \tag{4.88}$$

$$\int_A x\omega_B \, dA = \frac{1.7}{3} b^4 t \approx 0.5667 b^4 t. \tag{4.89}$$



Kuva 4.13 Z-poikkileikkaus.

Poikkileikkauksen jäyhyydet ovat

$$I_x = 3.467b^3t, \quad I_y = 0.95b^3t, \quad I_{xy} = -0.6b^3t. \tag{4.90}$$

Sijoittamalla poikkileikkausarvot vääntökeskiön kaavoihin saadaan

$$x_A - x_B = \frac{0.6 \cdot 0.5667 + 0.95 \cdot (-1.2)}{2.93365} b = -0.2727b, \tag{4.91}$$

$$y_A - y_B = \frac{3.467 \cdot (-0.5667) + (-0.6) \cdot (-1.2)}{2.93365} b = -0.4243b, \tag{4.92}$$

joten vääntökeskiö A on paikassa

$$(x_A, y_A) = (-0.3727b, 0.3757b) \tag{4.93}$$

painopisteen suhteen. Kun vääntökeskiön paikka on tiedossa, voidaan piirtää (alustava) $\tilde{\omega}_A$-kuvio, jolle (likimäärin)

$$\int_A \tilde{\omega}_A \, dA = -0.3029b^3t. \tag{4.94}$$

Lopullinen ω-kuvio, joka toteuttaa ehdon $\int_A \omega \, dA = 0$ lasketaan kaavalla

$$\omega = \tilde{\omega}_A + C = \tilde{\omega}_A - \frac{-0.3029b^3t}{5bt} = \tilde{\omega}_A + 0.0606b^2, \tag{4.95}$$

missä on otettu huomioon, että poikkileikkauksen pinta-ala on $A = 5bt$.

4.5 Leikkausvoimat Q_x, Q_y ja vääntömomentti M_ω

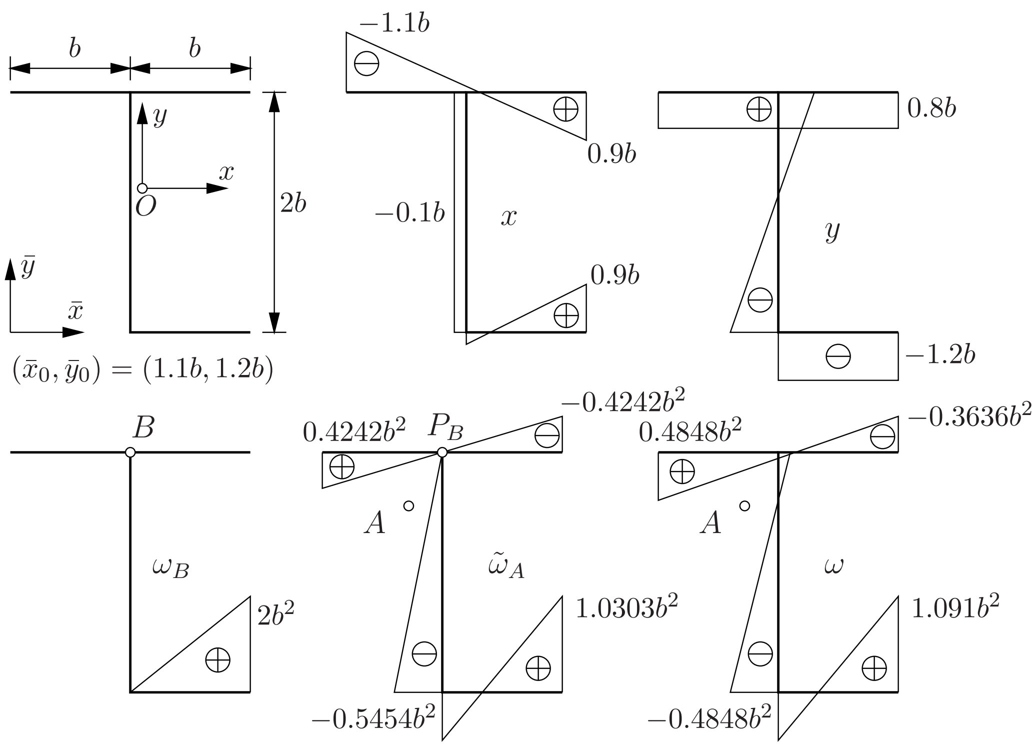
Määritellään jännitysresultantit

$$Q_x = -\int \tau_\omega t \sin\alpha \, ds = \int \tau_\omega t \, dx, \tag{4.96}$$

$$Q_y = \int \tau_\omega t \cos\alpha \, ds = \int \tau_\omega t \, dy \tag{4.97}$$

ja

$$M_\omega = \int \tau_\omega t h_A \, ds = \int \tau_\omega t \, d\omega, \tag{4.98}$$



Kuva 4.14 Monihaarainen poikkileikkaus.

missä on merkitty

$$\int (\bullet)\, ds = \int_{s_1}^{s_2} (\bullet)\, ds. \tag{4.99}$$

Jos palkin akselin suuntainen kuorma $p_z = 0$ ja reunojen leikkausvuo on nolla eli

$$\tau_\omega(s_1) = \tau_\omega(s_2) = 0, \tag{4.100}$$

niin kaavasta (4.96) seuraa osittaisintegroimalla

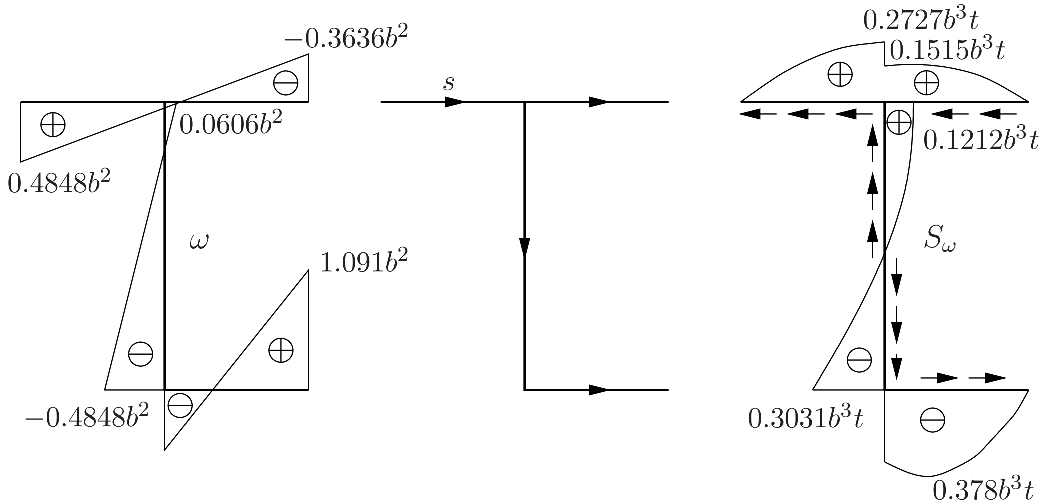
$$\begin{aligned} Q_x &= \int (\tau_\omega t) \frac{dx}{ds}\, ds = -\int x(s) \frac{\partial}{\partial s}(\tau_\omega t)\, ds \\ &= -\int x(s) E \Bigg[-\frac{d^2 w_0(z)}{dz^2} + \frac{d^3 u(z)}{dz^3} x(s) \\ &\qquad + \frac{d^3 v(z)}{dz^3} y(s) + \frac{d^3 \varphi(z)}{dz^3} \omega_A(s) \Bigg] t\, ds. \end{aligned} \tag{4.101}$$

Pääjäyhyyskoordinaatistossa saadaan siten

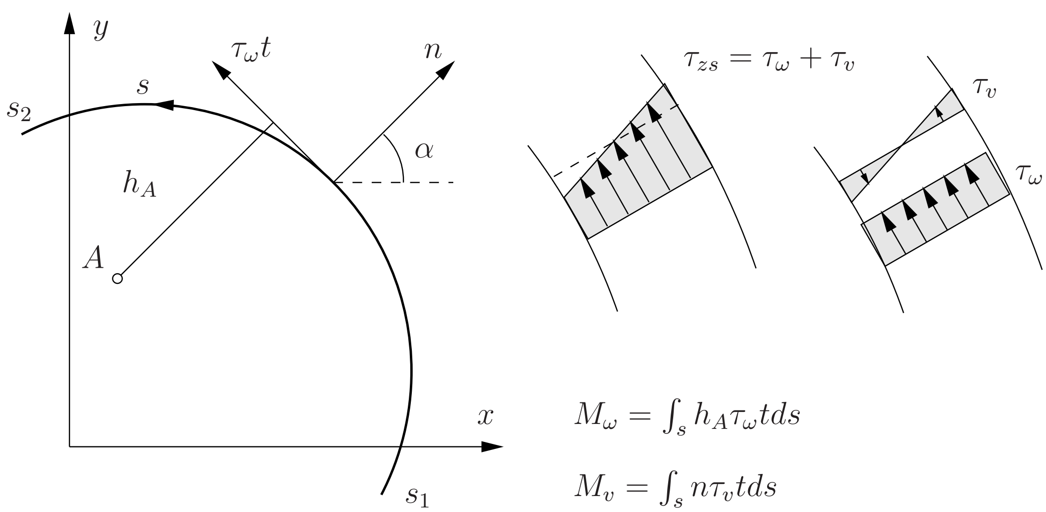
$$Q_x = \int \tau_\omega t dx = -EI_y \frac{d^3 u(z)}{dz^3} = -\frac{dM_y}{dz}, \tag{4.102}$$

ja samalla tavalla tulee

$$Q_y = \int \tau_\omega t dy = -EI_x \frac{d^3 v(z)}{dz^3} = \frac{dM_x}{dz}. \tag{4.103}$$



Kuva 4.15 Kuvan 4.14 poikkileikkauksen S_ω-kuvio.



Kuva 4.16 Leikkausvuo $\tau_\omega t$ ja sen momenttivarsi h_A.

Kaavasta (4.98) seuraa, (kun palkin reunoilla leikkausvuo on nolla)

$$M_\omega = \int \tau_\omega t \, d\omega = -\int \omega \frac{\partial}{\partial s}(\tau_\omega t)\, ds = -EI_\omega \frac{d^3\varphi(z)}{dz^3} = \frac{dB(z)}{dz}. \tag{4.104}$$

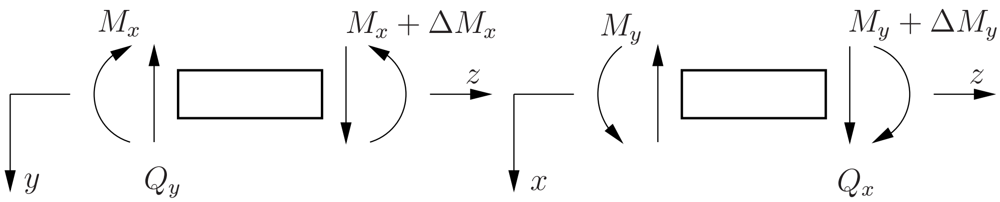
Jos normaalivoima N on vakio (ja derivaatta nolla), niin leikkausvuo on

$$\tau_\omega t = -\frac{S_y(s)}{I_y} Q_x - \frac{S_x(s)}{I_x} Q_y - \frac{S_\omega(s) M_\omega}{I_\omega}. \tag{4.105}$$

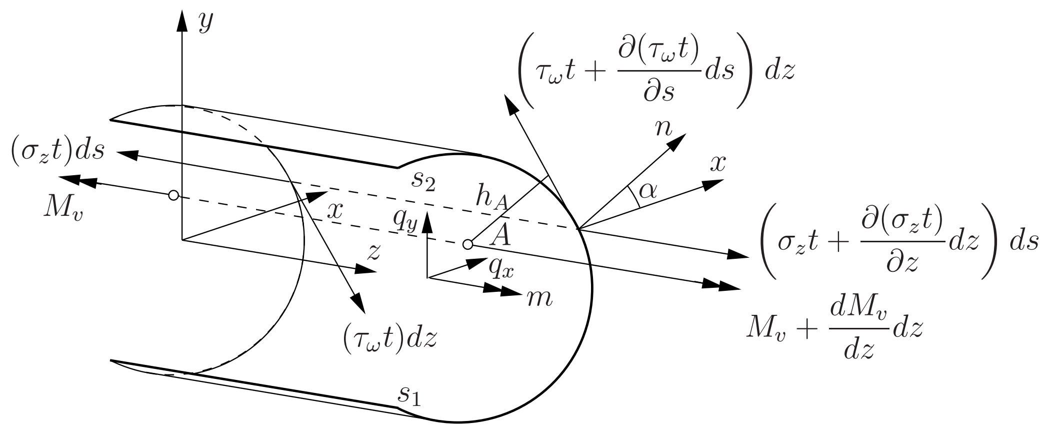
Kokonaisvääntömomentti on

$$M_z = M_v + M_\omega, \tag{4.106}$$

missä M_v on vapaan väännön vääntömomentti ja M_ω on estetyn väännön vääntömomentti. Vääntömomenttien muodostuminen on esitetty kuvassa 4.16. Jos h_A on suuri, niin M_ω voi olla merkittävä, vaikka τ_ω olisikin pieni. Sen sijaan τ_v:n momenttivarsi on pieni ohuessa avoprofiilissa.



Kuva 4.17 Taivutusmomenttien M_x ja M_y merkkisäännöt.



Kuva 4.18 Sauvan alkion dz tasapaino.

4.6 Tasapainoyhtälöt

Kuvan 4.18 perusteella johdetaan sauvan alkion dz tasapainoehdoiksi

$$\int \frac{\partial\,(t\sigma_z)}{\partial z}\, ds = 0, \tag{4.107}$$

$$-\int \frac{\partial\,(t\tau_\omega)}{\partial z} \sin\alpha\, ds + q_x = 0, \tag{4.108}$$

$$\int \frac{\partial\,(t\tau_\omega)}{\partial z} \cos\alpha\, ds + q_y = 0, \tag{4.109}$$

koordinaattiakseleiden z, x ja y suunnissa. Muodostamalla vääntömomentin tasapainoehto pisteen A (vääntökeskiö) suhteen saadaan

$$\int \frac{\partial\,(t\tau_\omega)}{\partial z} h_A(s)\, ds + \frac{dM_v}{dz} + m = 0. \tag{4.110}$$

Osittaisintegroimalla voidaan tasapainoyhtälöt (4.107), (4.108), (4.109) ja (4.110) muuntaa muotoihin

$$\frac{d}{dz} \int \sigma_z\, dA = 0, \tag{4.111}$$

$$\frac{d}{dz}\left[-\int x \frac{\partial(\tau_\omega t)}{\partial s}\, ds + \Big/_{s_1}^{s_2} (\tau_\omega t)x\right] + q_x = 0, \tag{4.112}$$

$$\frac{d}{dz}\left[-\int y \frac{\partial(\tau_\omega t)}{\partial s}\, ds + \Big/_{s_1}^{s_2} (\tau_\omega t)y\right] + q_y = 0, \tag{4.113}$$

$$\frac{d}{dz}\left[-\int \omega_A \frac{\partial(\tau_\omega t)}{\partial s}\,ds + \Big/_{s_1}^{s_2}(\tau_\omega t)\omega_A\right] + \frac{dM_v}{dz} + m = 0, \tag{4.114}$$

joissa sijoitustermi on nolla, jos poikkileikkauksen reunoilla $\tau_\omega(s_1) = \tau_\omega(s_2) = 0$.

Sijoittamalla momentin tasapainoyhtälöön (4.114) tasapainoehto (4.55) ja normaalijännityksen σ_z kaava (4.15) saadaan pääjäyhyyskoordinaatistossa, jossa A on vääntökeskiö, väännön differentiaaliyhtälö

$$-EI_\omega \frac{d^4\varphi}{dz^4} + GI_v \frac{d^2\varphi}{dz^2} + m = 0, \tag{4.115}$$

missä on otettu huomioon, että

$$M_v = GI_v \frac{d\varphi}{dz} \tag{4.116}$$

on vapaan väännön vääntömomentti, joka syntyy jännityksistä τ_v.

4.7 Vääntökulman differentiaaliyhtälön ratkaisu

Jakamalla yhtälö (4.115) jäykkyystermillä EI_ω saadaan

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} - \frac{GI_v}{EI_\omega}\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{m(z)}{EI_\omega} \equiv f(z). \tag{4.117}$$

Merkitsemällä

$$k^2 = \frac{GI_v}{EI_\omega} \tag{4.118}$$

päädytään yhtälöön

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} - k^2\frac{d^2\varphi}{dz^2} = f(z), \tag{4.119}$$

jonka ratkaisu on

$$\varphi(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz + \varphi_0 \tag{4.120}$$

eli

$$\varphi(z) = \varphi_h(z) + \varphi_0(z), \tag{4.121}$$

missä $\varphi_h(z)$ on homogeenisen osan ratkaisu ja $\varphi_0(z)$ on yksityisratkaisu.

Vääntökulman $\varphi(z)$ avulla saadaan resultanttien yhtälöt

$$M_v = GI_v\frac{d\varphi}{dz} = GI_v\left(C_2 + C_3 k\cosh kz + C_4 k \sinh kz + \frac{d\varphi_0}{dz}\right), \tag{4.122}$$

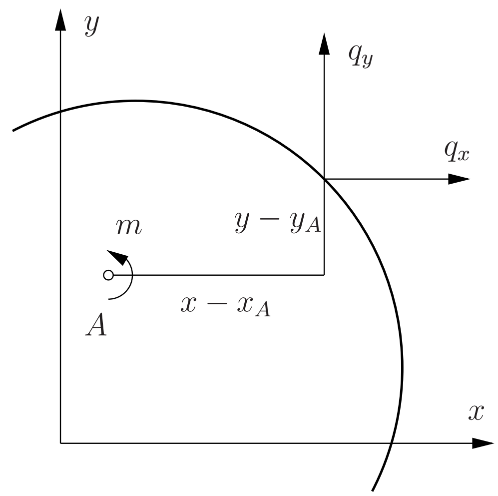
$$B = -EI_\omega\frac{d^2\varphi}{dz^2} = -GI_v\left(C_3 \sinh kz + C_4\cosh kz + \frac{1}{k^2}\frac{d^2\varphi_0}{dz^2}\right) \tag{4.123}$$

ja

$$M_\omega = \frac{dB}{dz} = -GI_v\left(C_3 k\cosh kz + C_4 k\sinh kz + \frac{1}{k^2}\frac{d^3\varphi_0}{dz^3}\right). \tag{4.124}$$

Kokonaisvääntömomentti on

$$M_z = M_v + M_\omega = GI_v\left(C_2 + \frac{d\varphi_0}{dz} - \frac{1}{k^2}\frac{d^3\varphi_0}{dz^3}\right). \tag{4.125}$$



Kuva 4.19 Sauvan jakautuneet kuormat q_x, q_y ja vääntömomentti m

M_v on de Saint Venantin vääntöteorian (vapaan väännön) vääntömomentti ja

$$M_\omega = \int_s (\tau_\omega t) h_A \, ds. \tag{4.126}$$

Leikkausjännitys τ_v vastaa momenttia M_v ja τ_ω vastaa momenttia M_ω. Leikkausjännitys on

$$\tau_{sz} = \tau_v + \tau_\omega. \tag{4.127}$$

Jos poikittaiset kuormat eivät kulje vääntökeskiön A kautta, ne aiheuttavat vääntömomentin

$$m(z) = q_y(x - x_A) - q_x(y - y_A) \tag{4.128}$$

kuvan 4.19 mukaisesti.

4.7.1 Eräitä yksityisratkaisuja

1. Tasaisen kuorman (kuva 4.20a), $m(z) = m_0$, yksityisratkaisu on

$$\varphi_0 = -\frac{m_0}{2} \frac{1}{GI_v} z^2. \tag{4.129}$$

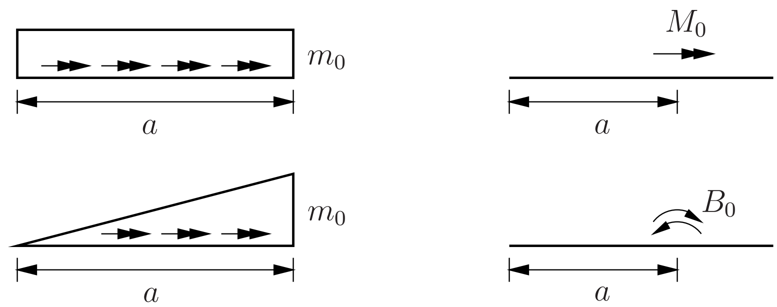
2. Lineaarisesti jakautuneelle kuormalle (kuva 4.20b) $m(z) = m_0 \dfrac{z}{L}$

$$\varphi_0 = -\frac{m_0}{6L} \frac{1}{GI_v} z^3. \tag{4.130}$$

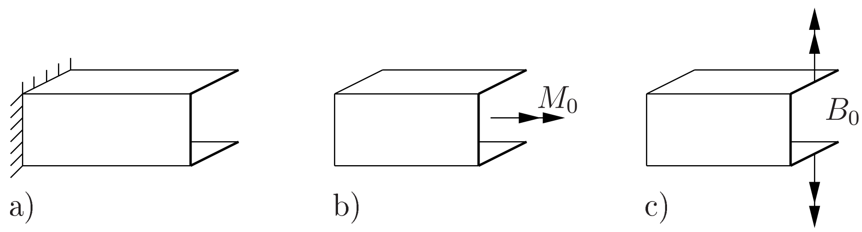
3. Pistemäinen vääntömomentti M_0 kohdassa $z = a$ (kuva 4.20c):

$$\varphi_0 = 0, \text{ kun } \; z < a, \tag{4.131}$$

$$\varphi_0 = \frac{M_0}{kGI_v} \left[\sinh k(z - a) - k(z - a) \right], \text{ kun } \; z > a. \tag{4.132}$$



Kuva 4.20 Kuormitustapauksia.



Kuva 4.21 Kiinnitetty pää ja vapaa pää.

4. Pistemäinen bimomentti kohdassa $z = a$ (kuva 4.20d):

$$\varphi_0 = 0, \text{ kun } \; z < a, \tag{4.133}$$

$$\varphi_0 = \frac{B_0}{GI_v}\left[\cosh k(z-a) - 1\right], \text{ kun } \; z > a. \tag{4.134}$$

4.7.2 Reunaehdot

Integroimisvakiot $C_1, \ldots, C_4$ määritetään reunaehtojen avulla:

1. Jäykkä kiinnitys väännön suhteen (kuva 4.21a):

$$\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dz} = 0. \tag{4.135}$$

2. Bimomentti B ja vääntömomentti M_z annetut sauvan päässä (kuva 4.21b):

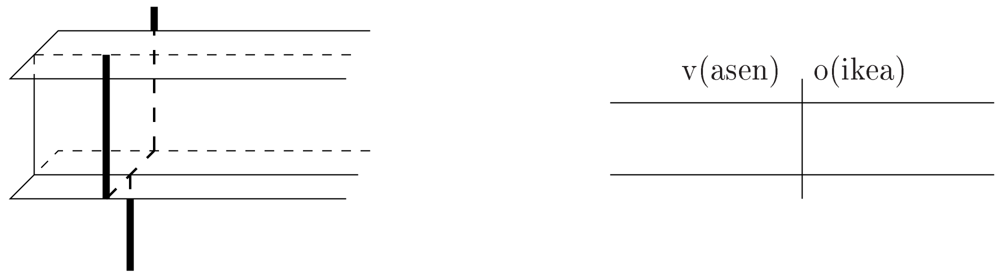
$$B = B_0, \quad M_z = M_0. \tag{4.136}$$

Erikoistapaus on vapaa pää, jossa

$$B = 0, \quad M_z = M_v + M_\omega = 0. \tag{4.137}$$

3. Niveltuenta (kiertymä on estetty, mutta poikkipinta saa käyristyä vapaasti) (kuva 4.22a):

$$\varphi = 0, \quad B = 0. \tag{4.138}$$



Kuva 4.22 Vapaasti tuettu pää ja jatkuva liitos.

4. Jatkuva liitos (kuva 4.22b):

$$\varphi_v = \varphi_o, \quad \frac{d\varphi_v}{dz} = \frac{d\varphi_o}{dz}, \tag{4.139}$$

missä o on oikea reuna ja v on vasen reuna.

4.8 Väännön differentiaaliyhtälön tarkastelua

Väännön differentiaaliyhtälön (4.119) avulla voidaan tehdä päätelmiä siitä, kuinka vapaa vääntö (De Saint Venantin vääntö, vääntömomentti M_v) ja poikkipinnan käyristymisen estämisestä aiheutuva vääntö, estetty vääntö (vääntömomentti M_ω), suhtautuvat toisiinsa.

1. Kun $kL > 10, \ldots, 20$, missä

$$k = \sqrt{\frac{GI_v}{EI_\omega}}, \tag{4.140}$$

voidaan käyttää De Saint Venantin teorian kaavaa

$$-GI_v \frac{d^2\varphi}{dz^2} = m. \tag{4.141}$$

Bimomentin aiheuttamat paikalliset jännityshuiput on otettava huomioon. Esimerkkejä ovat massiiviset poikkileikkaukset ja kotelot.

2. Kun $kL < 0.5$, on kyseessä kokonaan estetty vääntö (leikkausvoimavääntö), ja ratkaisu saadaan yhtälöstä

$$EI_\omega \frac{d^4\varphi}{dz^4} = m. \tag{4.142}$$

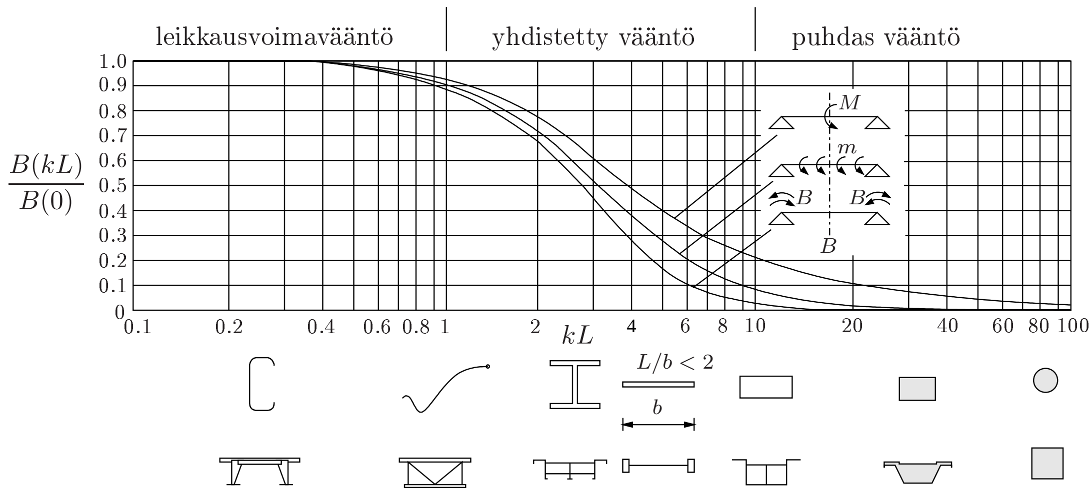
Esimerkkejä ovat kylmämuokatut ohuet profiilit ja avoimet hitsatut poikkileikkaukset. Kaavasta (4.142) havaitaan taulossa 4.1 esitetty analogia taivutetun palkin differentiaaliyhtälön kanssa.

3. Kun parametri kL on alueella $0.5 < kL < 10(20)$, on kyseessä estetty vääntö (yhdistetty tai sekamuotoinen vääntö). Tällöin on ratkaistava yhtälö

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} - k^2\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{m}{EI_\omega} \tag{4.143}$$

Taulukko 4.1 Väännön ja taivutuksen analogia

Vääntö	$EI_\omega \dfrac{d^4\varphi}{dz^4} = m$	$\dfrac{d^2B}{dz^2} = -m$	$M_\omega = \dfrac{dB}{dz}$
Taivutus	$EI \dfrac{d^4v}{dz^4} = q$	$\dfrac{d^2M}{dz^2} = -q$	$Q = \dfrac{dM}{dz}$



Kuva 4.23 Väännön differentiaaliyhtälön ratkaisu.

tai (staattisesti määrätyssä sauvassa)

$$\frac{d^2B}{dz^2} - k^2B = -m. \tag{4.144}$$

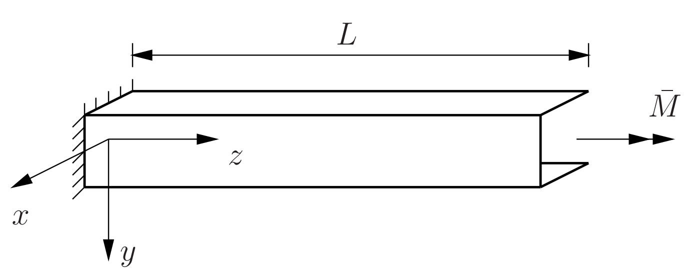
Tämän tapauksen esimerkkejä ovat teräsbetoniset laattapalkit ja ohuet teräsbetonikuoret (lieriökuoret).

Kuvassa 4.23 on esitetty vapaasti tuetun palkin keskileikkauksen bimomentin riippuvuus parametrista kL kolmessa kuormitustapauksessa.

Esimerkki 4.5 *Ratkaistaan väännön differentiaaliyhtälö kuvan 4.24 ulokkeen tapauksessa.*

Differentiaaliyhtälön

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} - k^2\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{m}{EI_\omega}, \quad k^2 = \frac{GI_v}{EI_\omega} \tag{4.145}$$



Kuva 4.24 Ulokepalkki, pistemomentti päässä $z = L$.

ratkaisu on

$$\varphi(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz + \varphi_0(z). \tag{4.146}$$

Integrointivakiot C_i ratkaistaan reunaehdoista:

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \varphi(0) = 0,\\
&\text{b)}\quad \frac{d\varphi(0)}{dz} = 0,\\
&\text{c)}\quad M_z(L) = \bar{M} \ \text{ eli } \quad -EI_\omega \frac{d^3\varphi(L)}{dz^3} + GI_v \frac{d\varphi(L)}{dz} = \bar{M},\\
&\text{d)}\quad B(L) = 0 \ \text{ eli } \quad -EI_\omega \frac{d^2\varphi(L)}{dz^2} = 0.
\end{aligned} \tag{4.147}$$

Yksityisratkaisu $\varphi_0(z) \equiv 0$ tässä tapauksessa, ja vääntökulman derivaatat ovat

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi(z)}{dz} &= C_2 + C_3 k \cosh kz + C_4 k \sinh kz,\\
\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} &= C_3 k^2 \sinh kz + C_4 k^2 \cosh kz,\\
\frac{d^3\varphi(z)}{dz^3} &= C_3 k^3 \cosh kz + C_4 k^3 \sinh kz.
\end{aligned} \tag{4.148}$$

Reunaehdoista seuraa lineaarinen yhtälöryhmä:

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \Rightarrow C_1 + C_4 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_4,\\
&\text{b)} \Rightarrow C_2 + kC_3 = 0,\\
&\text{d)} \Rightarrow C_3 \sinh kL + C_4 \cosh kL = 0,\\
&\text{c)} \Rightarrow (-EI_\omega k^2 + GI_v)(C_3 k \cosh kL + C_4 k \sinh kL) + GI_v C_2 = \bar{M},
\end{aligned} \tag{4.149}$$

jonka ratkaisu on

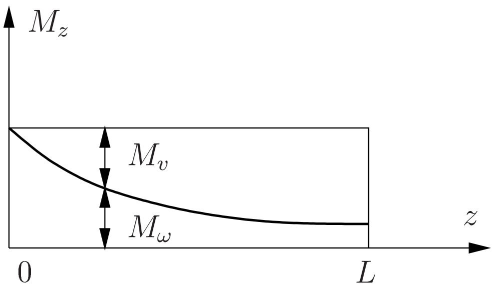
$$\begin{aligned}
&C_2 = \frac{\bar{M}}{GI_v}, \quad C_3 = -\frac{C_2}{k} = -\frac{\bar{M}}{kGI_v},\\
&C_4 = -\tanh kL \cdot C_3 = \tanh kL \frac{\bar{M}}{kGI_v}, \quad C_1 = -C_4.
\end{aligned} \tag{4.150}$$

Vääntökulma $\varphi(z)$ ja sen derivaatat ovat

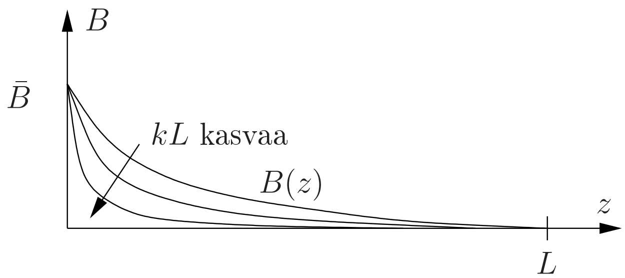
$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \frac{\bar{M}}{kGI_v}(-\tanh kL + kz - \sinh kz + \tanh kL \cosh kz)\\
&= \frac{\bar{M}}{kGI_v}[\tan kL(\cosh kz - 1) - \sinh kz + kz],
\end{aligned} \tag{4.151}$$

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{\bar{M}}{GI_v}(\tanh kL \sinh kz - \cosh kz + 1), \tag{4.152}$$

$$\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} = \frac{\bar{M}}{GI_v} k(\tanh kL \cosh kz - \sinh kz), \tag{4.153}$$



Kuva 4.25 Vääntömomenttien M_v ja M_ω jakaumat.



Kuva 4.26 Bimomentin jakauma, kun $B(0) = \bar{B}$.

$$\frac{d^3\varphi(z)}{dz^3} = \frac{\bar{M}}{GI_v} k^2 (\tanh kL \sinh kz - \cosh kz). \tag{4.154}$$

Momenttien M_v, M_ω ja M_z lausekkeiksi saadaan vääntökulman $\varphi(z)$ avulla

$$M_v = GI_v \frac{d\varphi}{dz} = \bar{M}(\tanh kL \sinh kz - \cosh kz + 1), \tag{4.155}$$

$$M_\omega = -EI_\omega \frac{d^3\varphi}{dz^3} = -\bar{M}(\tanh kL \sinh kz - \cosh kz), \tag{4.156}$$

$$M_z = M_\omega + M_v = \bar{M}. \tag{4.157}$$

Tuella $z = 0$, $M_v(0) = 0$ ja $M_\omega(0) = \bar{M}$. Vääntöjäykkyys on esimerkin tapauksessa

$$\frac{\bar{M}L}{\varphi(L)} = \frac{GI_v kL}{kL - \tanh kL} = \frac{GI_v}{1 - \dfrac{\tanh kL}{kL}} > GI_v, \tag{4.158}$$

joten se on suurempi kuin vapaan väännön vääntöjäykkyys.

Esimerkki 4.6 *Määritetään palkin päässä $z = 0$ vaikuttavasta bimomenttikuormasta aiheutuva bimomentin jakauma $B(z)$.*

Tehtävässä voidaan käyttää differentiaaliyhtälöä

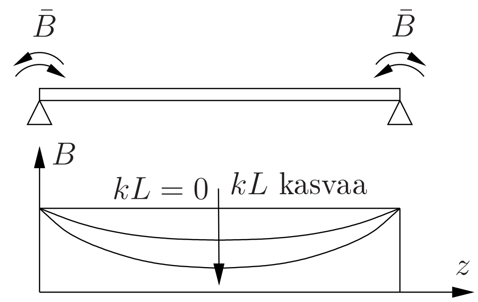
$$\frac{d^2B}{dz^2} - k^2 B = 0, \tag{4.159}$$

jonka ratkaisu on

$$B(z) = C_1 \sinh kz + C_2 \cosh kz. \tag{4.160}$$

Vakiot C_i ratkaistaan reunaehdoista:

$$B(0) = \bar{B}, \quad B(L) = 0. \tag{4.161}$$



Kuva 4.27 Palkin päissä vaikuttavien samansuuruisten bimomenttikuormien aiheuttama bimomentin jakauma.

Ensimmäinen ehto johtaa ratkaisuun

$$C_2 = \bar{B}, \tag{4.162}$$

ja jälkimmäisen ehdon perusteella saadaan

$$C_1 = -\frac{\cosh kL}{\sinh kL}\bar{B}. \tag{4.163}$$

Bimomentin lauseke tulee vakioiden sijoittamisen jälkeen muotoon

$$B(z) = \bar{B}\frac{\sinh[k(L-z)]}{\sinh kL}. \tag{4.164}$$

Kun $kL \to \infty$, niin $B(z) \approx \bar{B}e^{-kz}$.

Jos vaihdetaan bimomenttikuormitus toiseen päähän palkkia, saadaan reunaehdot

$$B(0) = 0, \quad B(L) = \bar{B} \tag{4.165}$$

ja niiden perusteella ratkaistuksi vakiot

$$C_1 = \frac{\bar{B}}{\sinh kL}, \quad C_2 = 0. \tag{4.166}$$

Bimomentin lausekkeeksi tulee nyt

$$B(z) = \bar{B}\frac{\sinh kz}{\sinh kL}. \tag{4.167}$$

Yhdistämällä edellä saadut ratkaisut johdetaan päistään bimomenttikuormitetun yksiaukkoisen palkin bimomentin lausekkeeksi

$$B(z) = \bar{B}\frac{\sinh kz + \sinh[k(L-z)]}{\sinh kL}. \tag{4.168}$$

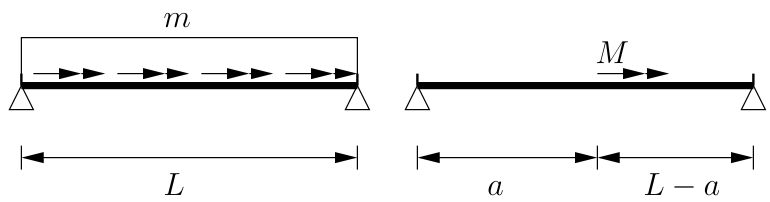
Esimerkki 4.7 *Ratkaistaan väännön differentiaaliyhtälö, kun vapaasti tuetulla palkilla on tasainen vääntömomenttikuorma.*

Haetaan väännön differentiaaliyhtälön erikoisratkaisua muodossa

$$\varphi_0(z) = Cz^2, \tag{4.169}$$

(osa $A + Bz$ sisältyy homogeeniseen ratkaisuun). Sijoittamalla yrite väännön differentiaaliyhtälöön tulee

$$0 - k^2 2C = m/EI_\omega, \tag{4.170}$$



Kuva 4.28 Vapaasti tuettu palkki, tasainen vääntömomentti m tai pistemomentti M kohdassa $z = a$.

josta saadaan $C = -\dfrac{m}{2EI_\omega k^2} = -\dfrac{m}{2GI_v}$, koska $k^2 = GI_v/EI_\omega$. Yksityisratkaisu on tässä tapauksessa

$$\varphi_0 = -\frac{m}{2GI_v}z^2, \tag{4.171}$$

ja kokonaisratkaisu on

$$\varphi(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz - \frac{m}{2GI_v}z^2. \tag{4.172}$$

Vääntökulman 1. ja 2. derivaatta ovat

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(z)}{dz} &= C_2 + C_3 k \cosh kz + C_4 k \sinh kz - \frac{m}{GI_v}z, \\ \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} &= C_3 k^2 \sinh kz + C_4 k^2 \cosh kz - \frac{m}{GI_v}. \end{aligned} \tag{4.173}$$

Vapaasti tuetun sauvan reunaehdot ovat

$$\begin{aligned} &\text{a)} \ \ \varphi(0) = 0, \\ &\text{b)} \ \ B(0) = 0 \ \text{ eli } \ -EI_\omega \frac{d^2\varphi(0)}{dz^2} = 0, \\ &\text{c)} \ \ \varphi(L) = 0, \\ &\text{d)} \ \ B(L) = 0 \ \text{ eli } \ -EI_\omega \frac{d^2\varphi(L)}{dz^2} = 0. \end{aligned} \tag{4.174}$$

Reunaehdoista saadaan nyt yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} &\text{a)} \Rightarrow C_1 + C_4 = 0, \\ &\text{b)} \Rightarrow k^2 C_4 - \frac{m}{GI_v} = 0, \\ &\text{c)} \Rightarrow C_1 + C_2 L + C_3 \sinh kL + C_4 \cosh kL - \frac{mL^2}{2GI_v} = 0, \\ &\text{d)} \Rightarrow C_3 k^2 \sinh kL + C_4 k^2 \cosh kL - \frac{m}{GI_v} = 0, \end{aligned} \tag{4.175}$$

jonka ratkaisu on

$$
\begin{aligned}
C_1 &= -C_4 = -\frac{m}{k^2 GI_v}, \\
C_2 &= \frac{mL}{2GI_v}, \\
C_3 &= \frac{m}{k^2 GI_v}\left(\frac{1-\cosh kL}{\sinh kL}\right).
\end{aligned}
\tag{4.176}
$$

Vääntökulma $\varphi(z)$ ja sen derivaatat ovat

$$
\varphi(z) = -\frac{m}{k^2 GI_v} + \frac{mL}{2GI_v}z + \frac{m}{k^2 GI_v}\left(\frac{1-\cosh kL}{\sinh kL}\right)\sinh kz + \frac{m}{k^2 GI_v}\cosh kz - \frac{m}{2GI_v}z^2,
\tag{4.177}
$$

$$
\frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{mL}{2GI_v} + \frac{m}{kGI_v}\left(\frac{1-\cosh kL}{\sinh kL}\right)\cosh kz + \frac{m}{kGI_v}\sinh kz - \frac{m}{GI_v}z,
\tag{4.178}
$$

$$
\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} = \frac{m}{GI_v}\left(\frac{1-\cosh kL}{\sinh kL}\right)\sinh kz + \frac{m}{GI_v}\cosh kz - \frac{m}{GI_v},
\tag{4.179}
$$

$$
\frac{d^3\varphi(z)}{dz^3} = \frac{mk}{GI_v}\left(\frac{1-\cosh kL}{\sinh kL}\right)\cosh kz + \frac{mk}{GI_v}\sinh kz.
\tag{4.180}
$$

Momenttien M_v, M_ω ja M_z lausekkeiksi saadaan

$$
M_v = GI_v\frac{d\varphi}{dz} = \frac{mL}{2} + \frac{m}{k}\left(\frac{1-\cosh kL}{\sinh kL}\right)\cosh kz + \frac{m}{k}\sinh kz - mz,
\tag{4.181}
$$

$$
B = -EI_\omega\frac{d^2\varphi}{dz^2} = -\frac{m}{k^2}\left(\frac{1-\cosh kL}{\sinh kL}\right)\sinh kz - \frac{m}{k^2}\cosh kz + \frac{m}{k^2},
\tag{4.182}
$$

$$
M_\omega = -EI_\omega\frac{d^3\varphi}{dz^3} = -\frac{m}{k}\left(\frac{1-\cosh kL}{\sinh kL}\right)\cosh kz - \frac{m}{k}\sinh kz,
\tag{4.183}
$$

$$
M_z = M_v + M_\omega = \frac{mL}{2} - mz.
\tag{4.184}
$$

Tuella $z = 0$ vääntymä on

$$
\theta(0) = \frac{d\varphi(0)}{dz} = \frac{mL}{GI_v}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{kL}\left(\frac{1-\cosh kL}{\sinh kL}\right)\right].
\tag{4.185}
$$

Käyttämällä hyväksi yhteyksiä

$$
\begin{aligned}
&\sinh 2u = 2\sinh u\cosh u, \\
&\cosh 2u = \cosh^2 u + \sinh^2 u, \\
&\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1
\end{aligned}
\tag{4.186}
$$

saadaan

$$
\theta(0) = \frac{mL}{GI_v}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{kL}\tanh\frac{kL}{2}\right).
\tag{4.187}
$$

Tuella $z = L \quad \theta(L) = -\theta(0)$.

Esimerkki 4.8 *Ratkaistaan väännön differentiaaliyhtälö, kun vapaasti tuetulla palkilla on pisteväántömomenttikuorma M kohdassa $z = a$.*

Väännön differentiaaliyhtälön yksityisratkaisu voidaan Cauchyn mukaan hakea homogeenisen ratkaisun

$$\bar{\varphi}(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz \tag{4.188}$$

avulla asettamalla ehdot

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad C_1 + C_4 = 0, \\
\bar{\varphi}'(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad C_2 + kC_3 = 0, \\
\bar{\varphi}''(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad C_4 = 0, \\
\bar{\varphi}'''(0) = 1 \quad &\Rightarrow \quad C_3 k^3 = 1,
\end{aligned} \tag{4.189}$$

joista ratkaistaan

$$C_1 = 0, \quad C_3 = \frac{1}{k^3}, \quad C_2 = -\frac{1}{k^2}, \quad C_4 = 0, \tag{4.190}$$

ja saadaan

$$\bar{\varphi}(z) = -\frac{1}{k^2} z + \frac{1}{k^3} \sinh kz. \tag{4.191}$$

Yksityisratkaisu voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$\varphi_0(z) = \int_0^z \bar{\varphi}(z-s) \frac{m(s)}{EI_\omega}\, ds, \tag{4.192}$$

missä $m(s)$ on jakautuneen vääntömomenttikuorman intensiteetti. Esimerkiksi tasaisen kuorman tapauksessa, $m =$ vakio, tulee

$$\begin{aligned}
\varphi_0 =& \int_0^z \left[-\frac{1}{k^2}(z-s) + \frac{1}{k^3} \sinh k(z-s) \right] \frac{m}{EI_\omega}\, ds \\
=& \Big/_0^z \left[-\frac{1}{k^2}(zs - \frac{1}{2}s^2) - \frac{1}{k^4} \cosh k(z-s) \right] \frac{m}{EI_\omega} \\
=& -\frac{1}{2GI_v} z^2 + \frac{1}{k^2 GI_v} (\cosh kz - 1).
\end{aligned} \tag{4.193}$$

Pistevoima tai vääntömomentti, M pisteessä $z = a$, nyt käsiteltävässä tapauksessa voidaan esittää Dirac'in delta-funktion avulla jakautuneen kuorman tapaan muodossa

$$m(z) = M\delta(z-a). \tag{4.194}$$

Delta-funktiolla on ominaisuudet

$$\delta(z) = 0, \quad \text{kun} \quad z \neq 0 \tag{4.195}$$

ja

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(z)\, dz = 1. \tag{4.196}$$

Jälkimmäisen ominaisuuden perusteella saadaan esimerkiksi

$$\int_0^L f(z)\delta(z-a)\,dz = f(a), \tag{4.197}$$

eli integroitaessa delta-funktio poimii funktion $f(z)$ arvon pisteessä a.

Pisteväätömomenttikuorman tapauksessa, $m(z) = M\delta(z-a)$ ja $f(z) = m(z)/EI_\omega$, tulee

$$\varphi_0 = 0, \quad \text{kun} \quad z \le a, \tag{4.198}$$

ja

$$\begin{aligned}
\varphi_0 =& \int_0^z \left[-\frac{1}{k^2}(z-s) + \frac{1}{k^3}\sinh k(z-s)\right]\frac{M\delta(s-a)}{EI_\omega}\,ds \\
=& \left[-\frac{1}{k^2}(z-a) + \frac{1}{k^3}\sinh k(z-a)\right]\frac{M}{EI_\omega} \\
=& \frac{M}{kGI_v}\left[\sinh k(z-a) - k(z-a)\right], \quad \text{kun} \quad z > a.
\end{aligned} \tag{4.199}$$

Vääntökulma on pisteväätömomenttikuorman tapauksessa

$$\varphi(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz \left\langle + \frac{M}{kGI_v}\left[\sinh k(z-a) - k(z-a)\right]\right\rangle, \tag{4.200}$$

missä $\langle \bullet \rangle = 0$, kun $z < a$. Vääntökulman 1. ja 2. derivaatta ovat

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi(z)}{dz} &= C_2 + C_3 k \cosh kz + C_4 k \sinh kz \left\langle + \frac{M}{GI_v}\left[\cosh k(z-a) - 1\right]\right\rangle, \\
\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} &= C_3 k^2 \sinh kz + C_4 k^2 \cosh kz \left\langle + \frac{Mk}{GI_v}\sinh k(z-a)\right\rangle.
\end{aligned} \tag{4.201}$$

Vapaasti tuetun sauvan reunaehdoista

$$\varphi(0) = 0, \quad B(0) = 0, \quad \varphi(L) = 0, \quad B(L) = 0 \tag{4.202}$$

saadaan nyt yhtälöryhmä

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \Rightarrow C_1 + C_4 = 0, \\
&\text{b)} \Rightarrow C_4 = 0, \\
&\text{c)} \Rightarrow C_1 + C_2 L + C_3 \sinh kL + C_4 \cosh kL + \frac{M}{kGI_v}[\sinh k(L-a) - k(L-a)] = 0, \\
&\text{d)} \Rightarrow C_3 k^2 \sinh kL + C_4 k^2 \cosh kL + \frac{M}{kGI_v}[k^2 \sinh k(L-a)] = 0,
\end{aligned} \tag{4.203}$$

jonka ratkaisu on

$$\begin{aligned}
C_1 &= -C_4 = 0, \\
C_2 &= \frac{M}{GI_v}\frac{L-a}{L}, \\
C_3 &= -\frac{M}{kGI_v}\left(\frac{\sinh k(L-a)}{\sinh kL}\right).
\end{aligned} \tag{4.204}$$

Vääntökulma $\varphi(z)$ ja sen derivaatat ovat

$$\varphi(z) = \frac{M}{GI_v}\frac{L-a}{L}z - \frac{M}{kGI_v}\frac{\sinh k(L-a)}{\sinh kL}\sinh kz\left\langle + \frac{M}{kGI_v}[\sinh k(z-a) - k(z-a)]\right\rangle, \tag{4.205}$$

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{M}{GI_v}\frac{L-a}{L} - \frac{M}{GI_v}\frac{\sinh k(L-a)}{\sinh kL}\cosh kz\left\langle + \frac{M}{GI_v}[\cosh k(z-a) - 1]\right\rangle, \tag{4.206}$$

$$\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} = -\frac{Mk}{GI_v}\frac{\sinh k(L-a)}{\sinh kL}\sinh kz\left\langle + \frac{Mk}{GI_v}[\sinh k(z-a)]\right\rangle, \tag{4.207}$$

$$\frac{d^3\varphi(z)}{dz^3} = -\frac{Mk^2}{GI_v}\frac{\sinh k(L-a)}{\sinh kL}\cosh kz\left\langle + \frac{Mk^2}{GI_v}[\cosh k(z-a)]\right\rangle. \tag{4.208}$$

Vääntömomenttien M_v, M_ω ja M_z lausekkeiksi tulee

$$M_v = GI_v\frac{d\varphi}{dz} = M\frac{L-a}{L} - M\frac{\sinh k(L-a)}{\sinh kL}\cosh kz\left\langle + M[\cosh k(z-a) - 1]\right\rangle, \tag{4.209}$$

$$B = -EI_\omega\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{M}{k}\frac{\sinh k(L-a)}{\sinh kL}\sinh kz\left\langle - \frac{M}{k}[\sinh k(z-a)]\right\rangle, \tag{4.210}$$

$$M_\omega = -EI_\omega\frac{d^3\varphi}{dz^3} = M\frac{\sinh k(L-a)}{\sinh kL}\cosh kz\left\langle - M[\cosh k(z-a)]\right\rangle, \tag{4.211}$$

$$M_z = M_v + M_\omega = M\frac{L-a}{L}, \quad \text{kun} \quad z < a, \tag{4.212}$$

ja

$$M_z = -M\frac{a}{L}, \quad \text{kun} \quad z \geq a. \tag{4.213}$$

Tuella $z = 0$ vääntymä on

$$\theta(0) = \frac{d\varphi(0)}{dz} = \frac{M}{GI_v}\frac{L-a}{L} - \frac{M}{GI_v}\frac{\sinh k(L-a)}{\sinh kL} \tag{4.214}$$

tai

$$\theta(0) = \frac{M}{GI_v}\left[\frac{b}{L} - \frac{\sinh k(L-a)}{\sinh kL}\right], \tag{4.215}$$

missä $b = L - a$.

Tuella $z = L$ vääntymä on

$$\theta(L) = \frac{M}{GI_v}\left[-\frac{a}{L} + \frac{\sinh ka}{\sinh kL}\right]. \tag{4.216}$$

Luku 5

Väännön sovellutuksia

5.1 Jatkuva vääntösauva

Tarkastellaan kuvan 5.1 jatkuvaa vääntösauvaa. Staattisesti määrätyksi perusmuodoksi valitaan vapaasti tuettu (haarukkatuettu) sauva. Tuilla vääntökulma $\varphi = 0$. Staattisesti määräämättömiksi voimasuureiksi otetaan bimomentit B_1 ja B_2. Tällöin tukipisteiden 1 ja 2 vääntymien kaavoiksi saadaan

$$\begin{aligned} \theta_1^k =& a_{11}^k B_1 + a_{12}^k B_2 + \alpha_1^k, \\ \theta_2^k =& a_{21}^k B_1 + a_{22}^k B_2 + \alpha_2^k, \end{aligned} \tag{5.1}$$

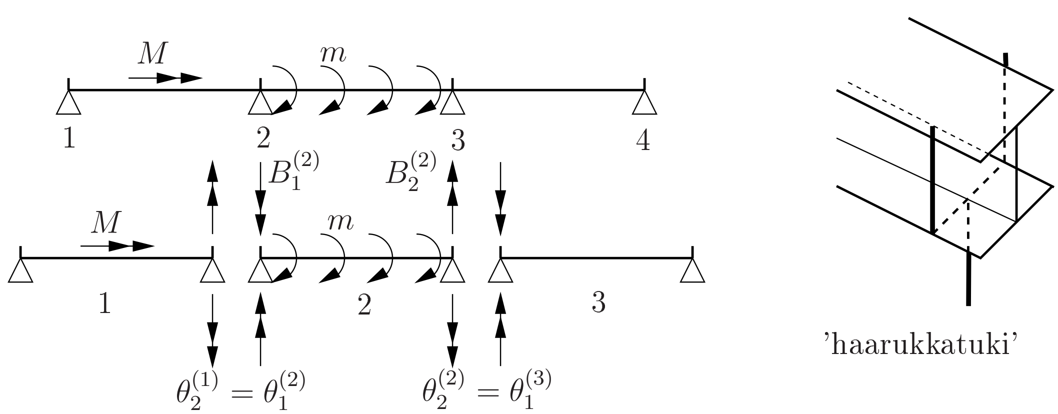
missä yläindeksi k on osasauvan numero.

Kaavoissa (5.1) kertoimet a_{ij} ovat haarukkatuetun sauvan k päiden i vääntymät yksikön suuruisista bimomenteista sauvan päissä j. Termit $\alpha_i,\ i = 1, 2$ ovat kuorman aiheuttamat vääntymät sauvan päissä. Kuormitustapauksessa $B_1 = B(0) = 1$ väännön differentiaaliyhtälön ratkaisu on

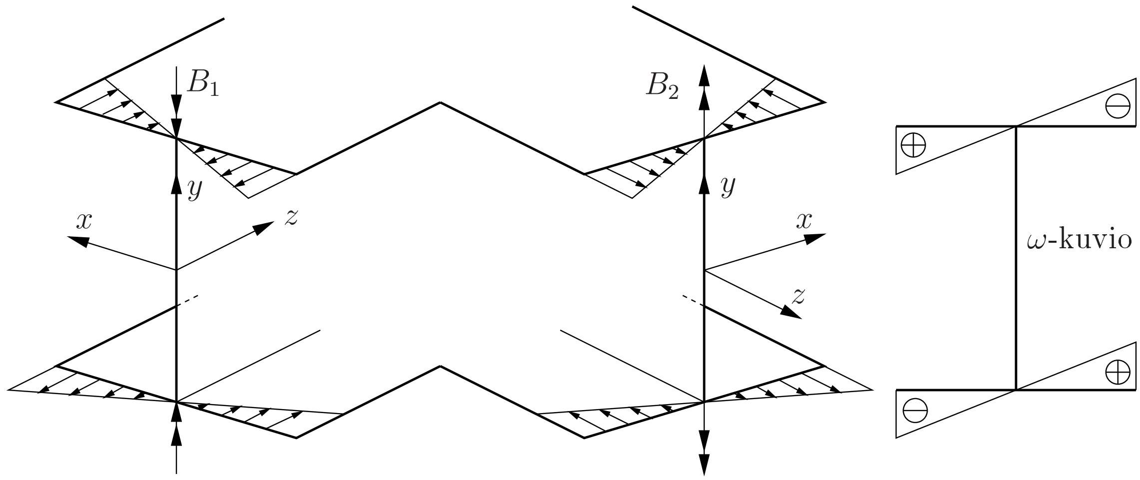
$$\varphi(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz, \tag{5.2}$$

ja sen perusteella saadaan bimomentin $B = -EI_\omega \varphi''$ lauseke

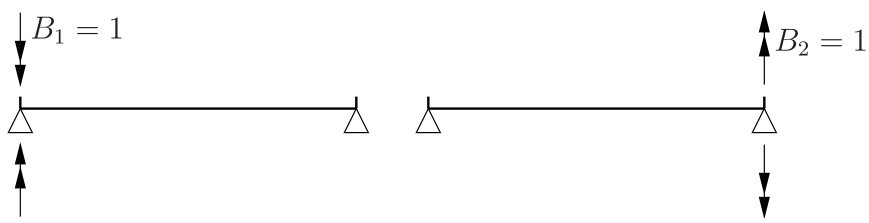
$$B(z) = -GI_v(C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz). \tag{5.3}$$



Kuva 5.1 Jatkuva sauva.



Kuva 5.2 Bimomentteja vastaavat jännitysjakaumat sauvan päissä.



Kuva 5.3 Bimomentit B_1 ja B_2 sauvan päissä $z = 0$ ja $z = L$.

Reunaehtojen

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \varphi(0) = 0, \\ &\text{b)} \quad \varphi(L) = 0, \\ &\text{c)} \quad B(0) = 1, \\ &\text{d)} \quad B(L) = 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

perusteella saadaan lineaarinen yhtälöryhmä

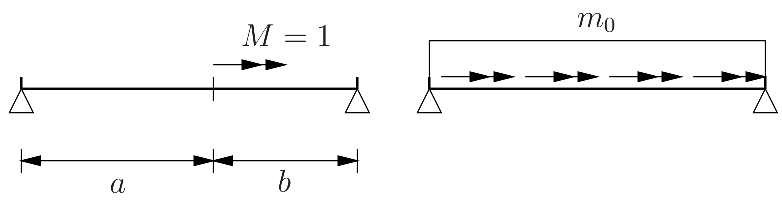
$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad C_1 + C_4 = 0, \\ &\text{b)} \quad C_1 + C_2 L + C_3 \sinh kL + C_4 \cosh kL = 0, \\ &\text{c)} \quad -GI_v C_4 = 1, \\ &\text{d)} \quad C_3 \sinh kL + C_4 \cosh kL = 0, \end{aligned} \tag{5.5}$$

jonka ratkaisu on

$$C_1 = \frac{1}{GI_v}, \quad C_2 = -\frac{1}{GI_v L}, \quad C_3 = \frac{1}{GI_v \tanh kL}, \quad C_4 = -\frac{1}{GI_v}. \tag{5.6}$$

Vääntymä

$$\theta \equiv \frac{d\varphi(z)}{dz} = C_2 + kC_3 \cosh kz + kC_4 \sinh kz \tag{5.7}$$



Kuva 5.4 Pistekuorma ja tasainen kuorma.

sauvan päissä $z = 0$ ja $z = L$ on

$$\begin{aligned} a_{11} =& \theta(0) = \frac{1}{GI_v L}\left[\frac{kL}{\tanh kL} - 1\right], \\ a_{21} =& \theta(L) = \frac{1}{GI_v L}\left[\frac{kL}{\sinh kL} - 1\right], \end{aligned} \tag{5.8}$$

missä a_{ij} on vääntymä sauvan päässä i bimomentista $B_j = 1$ päässä j.

Kuormitustapauksessa $B_2 = B(L) = 1$ reunaehtojen

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \ \varphi(0) = 0, \\ &\text{b)}\ \ \varphi(L) = 0, \\ &\text{c)}\ \ B(0) = 0, \\ &\text{d)}\ \ B(L) = 1 \end{aligned} \tag{5.9}$$

perusteella saadaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \ C_1 + C_4 = 0, \\ &\text{b)}\ \ C_1 + C_2 L + C_3 \sinh kL + C_4 \cosh kL = 0, \\ &\text{c)}\ \ C_4 = 0, \\ &\text{d)}\ \ -GI_v[C_3 \sinh kL + C_4 \cosh kL] = 1, \end{aligned} \tag{5.10}$$

jonka ratkaisu on

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{GI_v L}, \quad C_3 = -\frac{1}{GI_v \sinh kL}, \quad C_4 = 0. \tag{5.11}$$

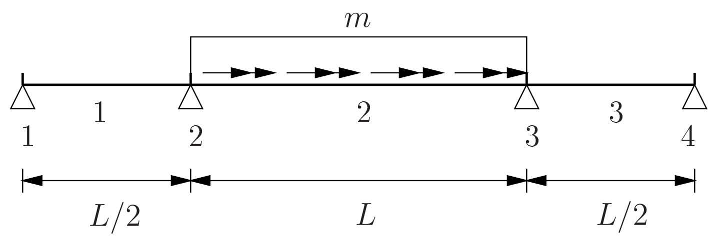
Vääntymät sauvan päissä $z = 0$ ja $z = L$ ovat tässä tapauksessa

$$\begin{aligned} a_{12} =& \theta(0) = -\frac{1}{GI_v L}\left[\frac{kL}{\sinh kL} - 1\right], \\ a_{22} =& \theta(L) = -\frac{1}{GI_v L}\left[\frac{kL}{\tanh kL} - 1\right]. \end{aligned} \tag{5.12}$$

5.1.1 Kuormitustermit α

Jos pisteessä $z = a$ on pistemäinen vääntömomentti M, niin kuormitustermit ovat

$$\begin{aligned} \alpha_1 =& \theta(0) = \frac{M}{GI_v}\left[\frac{b}{L} - \frac{\sinh kb}{\sinh kL}\right], \\ \alpha_2 =& \theta(L) = -\frac{M}{GI_v}\left[\frac{a}{L} - \frac{\sinh ka}{\sinh kL}\right]. \end{aligned} \tag{5.13}$$



Kuva 5.5 Symmetrinen kolmiaukkoinen vääntösauva.

Tasaisesti jakautuneen vääntömomenttikuorman tapauksessa

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 =& \theta(0) = \frac{m_0 L}{GI_v}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{kL}\tanh\frac{kL}{2}\right], \\
\alpha_2 =& \theta(L) = -\frac{m_0 L}{GI_v}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{kL}\tanh\frac{kL}{2}\right].
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

Tuntemattomat bimomentit tuilla ratkaistaan yhteensopivuusehdoista. Yhteensopivuusehto tuella k osavälien (osasauvojen) $k-1$ ja k liitoksessa on

$$
\theta_k^{(k-1)} = \theta_k^{(k)}. \tag{5.15}
$$

Esimerkki 5.1 *Symmetrisen kolmiaukkoisen palkin keskimmäisessä aukossa on tasainen vääntömomenttikuorma. Määritetään tukien bimomentit ja vääntökulma.*

Reunaehtojen ja symmetrian perusteella saadaan yhtälöt

$$
B_1 = B_4 = 0, \quad B_2 = B_3. \tag{5.16}
$$

Kuvan 5.5 tapauksessa tarvitaan yksi yhteensopivuusehto

$$
\theta_2^{(1)} = \theta_2^{(2)}, \tag{5.17}
$$

josta seuraa bimomenttien avulla yhtälö

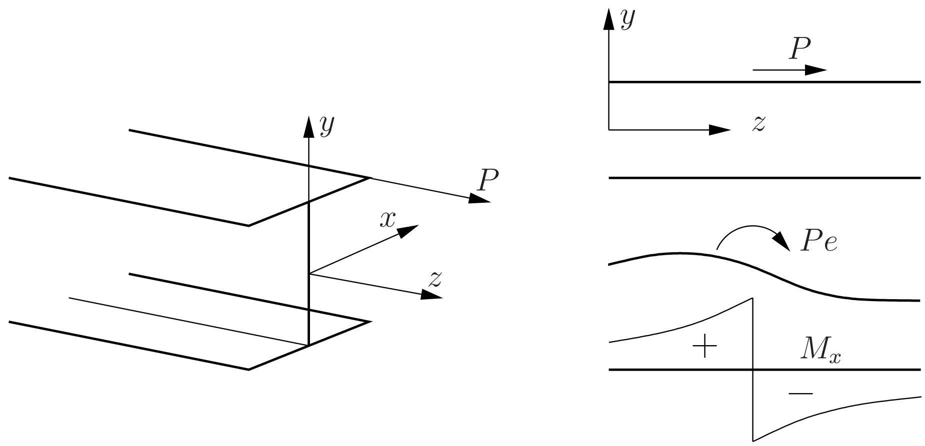
$$
a_{22}^{(1)} B_2 = a_{11}^{(2)} B_2 + a_{12}^{(2)} B_3 + \alpha_1^{(2)} \tag{5.18}
$$

ja sen ratkaisuna

$$
\begin{aligned}
B_2 =& \frac{\alpha_1^{(2)}}{a_{22}^{(1)} - a_{11}^{(2)} - a_{12}^{(2)}} \\
=& \frac{\dfrac{mL}{GI_v}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{kL}\tanh\dfrac{kL}{2}\right)}{-\dfrac{2}{GI_v L}\left(\dfrac{\frac{kL}{2}}{\tanh\frac{kL}{2}} - 1\right) - \dfrac{1}{GI_v L}\left(\dfrac{kL}{\tanh kL} - 1\right) + \dfrac{1}{GI_v L}\left(\dfrac{kL}{\sinh kL} - 1\right)}
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

eli

$$
B_2 = -mL^2 \frac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{kL}\tanh\dfrac{kL}{2}}{kL\coth\dfrac{kL}{2} - 2 + kL\tanh\dfrac{kL}{2}}. \tag{5.20}
$$



Kuva 5.6 Akselinsa suunnassa kuormitettu sauva.

Jos $kL = 3$, niin $B_2 = -0.0492mL^2$.

Vääntökulma sauvan osassa $1 - 2$ on

$$\begin{aligned}\varphi(z) =& \frac{B_1}{GI_v}\left(1 - \frac{z}{L} + \frac{1}{\tanh kL}\sinh kz - \cosh kz\right) \\ &+ \frac{B_2}{GI_v}\left(\frac{z}{L} - \frac{1}{\sinh kL}\sinh kz\right) + \varphi_0(z),\end{aligned} \tag{5.21}$$

missä φ_0 on tarkasteltavan välin kuormituksesta aiheutuva yksityisratkaisu. Vääntökulman kaavan avulla voidaan määrittää kullekin osavälille voimasuureet

$$B(z) = -EI_\omega \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}, \quad M_\omega = \frac{dB}{dz} = -EI_\omega \frac{d^3\varphi}{dz^3}. \tag{5.22}$$

5.2 Sauvan akselin suuntaiset kuormat

Edellä määriteltiin jännitysresultantit

$$\begin{aligned} N =& \int_A \sigma_z \, dA, \\ M_x =& \int_A y\sigma_z \, dA, \\ M_y =& -\int_A x\sigma_z \, dA, \\ B =& \int_A \omega\sigma_z \, dA. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Jännitysresultanttien määritelmien mukaisesti päätypoikkileikkauksessa vaikuttavista sauvan akselin suuntaisista pistevoimista aiheutuvat resultantit

$$\begin{aligned} N =& \sum_i P_i, \\ M_x =& \sum_i y_i P_i, \\ M_y =& -\sum_i x_i P_i, \\ B =& \sum_i \omega_i P_i, \end{aligned} \tag{5.24}$$

joita vastaava normaalijännitys on

$$\begin{aligned} \sigma_z =& \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{B}{I_\omega} \omega \\ =& \frac{\sum P_i}{A} + \frac{(\sum y_i P_i) y}{I_x} + \frac{(\sum x_i P_i) x}{I_y} + \frac{(\sum \omega_i P_i) \omega}{I_\omega}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Sauvan poikkileikkaukseen z vaikuttavat akselin suuntaiset voimat P_i aiheuttavat voimasuureiden epäjatkuvuudet

$$\begin{aligned} \Delta N =& -\sum_i P_i, \\ \Delta M_x =& -\sum_i y_i P_i, \\ \Delta M_y =& \sum_i x_i P_i, \\ \Delta B =& -\sum_i \omega_i P_i. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Sauvan poikkileikkauksen mielivaltaiseen pisteeseen $C(s)$ poikkileikkauksen tasossa vaikuttava pistemäinen momentti $\boldsymbol{M}(s)$ aiheuttaa bimomentin muutoksen

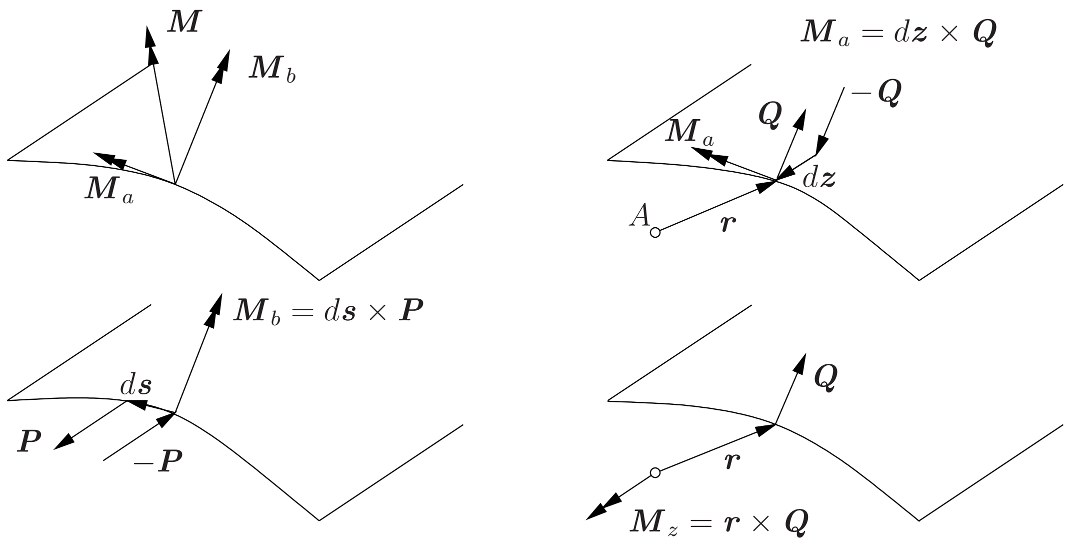
$$\Delta B = -\boldsymbol{r}(s) \cdot \boldsymbol{M}(s). \tag{5.27}$$

Jaetaan momentti osiin

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} =& \boldsymbol{M}_a + \boldsymbol{M}_b \\ =& d\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{Q} + d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{P}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Momentti $\boldsymbol{M}_b$ voidaan esittää kahden voiman voimaparina, joten se aiheuttaa edellisen kohdan perusteella bimomentin muutoksen (hypyn)

$$\Delta B_b = -\boldsymbol{P} \cdot (\boldsymbol{\omega} + d\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{\omega}. \tag{5.29}$$



Kuva 5.7 Pistemomentti poikkileikkauksen tasossa.

Koska

$$d\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{s}, \tag{5.30}$$

saadaan

$$\Delta B_b = -\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{s} = -\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{M}_b. \tag{5.31}$$

Vastaavasti

$$\Delta B_a = -\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{M}_a \tag{5.32}$$

ja yhteensä

$$\Delta B = -\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{M}_a + \boldsymbol{M}_b) = -\boldsymbol{r}(s) \cdot \boldsymbol{M}(s). \tag{5.33}$$

Tarkastellaan bimomentin epäjatkuvuuden jälkimmäistä osaa kuvan 5.8 esimerkin avulla. Jälleen momentti $\boldsymbol{M}_a$ voidaan esittää kahden pistevoiman avulla. Tasapainoehdosta

$$\frac{dB}{dz} + GI_v \frac{d\varphi}{dz} = M_z \tag{5.34}$$

seuraa

$$\Delta B + GI_v \Delta\varphi = \int_{a-\Delta z}^{a} M_z dz \approx \boldsymbol{M}_z \cdot \Delta\boldsymbol{z}. \tag{5.35}$$

Bimomenttihyppy lähestyy raja-arvoa

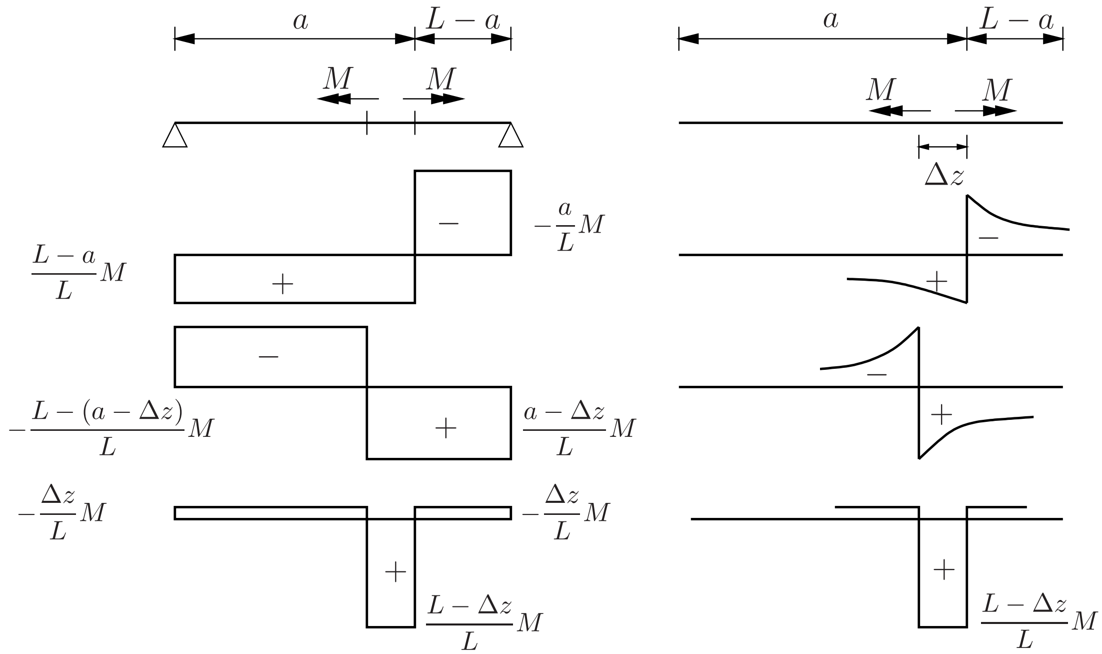
$$\Delta B \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M}_z \cdot d\boldsymbol{z}, \tag{5.36}$$

koska kuvassa 5.8a

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{L - \Delta z}{L} M = M \tag{5.37}$$

ja vääntökulma φ on jatkuva z:n funktio. Pistevoimasta aiheutuva vääntömomentti on

$$\boldsymbol{M}_z = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{Q} \tag{5.38}$$



Kuva 5.8 Lähekkäiset pistemomentit.

ja

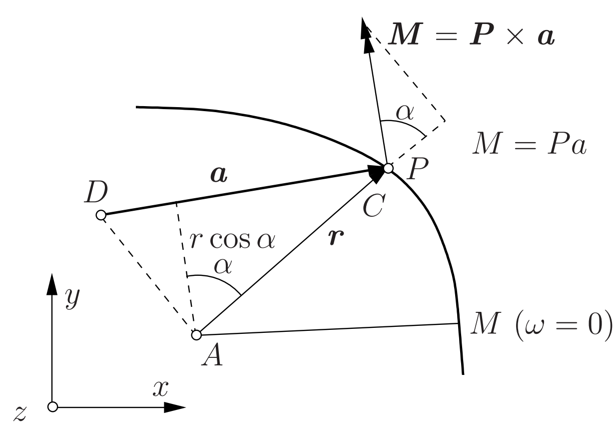
$$\Delta B_a = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{Q} \cdot d\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{Q} \times d\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{M}_a. \tag{5.39}$$

Kuvassa 5.8b on hahmoteltu edellisestä esimerkistä yleistetty tapaus.

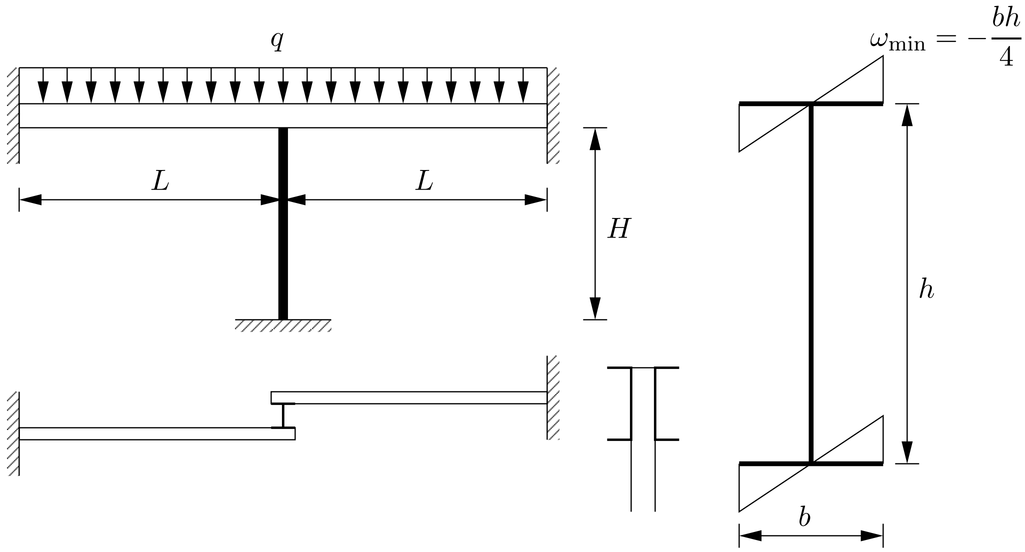
Jos akselin suuntainen voima P vaikuttaa ulokkeen CD (kuvassa 5.9) välityksellä, niin siitä aiheutuu bimomentin epäjatkuvuus

$$\Delta B = -2P\Omega_{AMCD}, \tag{5.40}$$

missä Ω_{AMCD} on alueen $AMCD$ pinta-ala. Siirretään voima P pisteeseen C. Ottamalla huomioon voima P ja syntyvä voimapari saadaan edellä käsiteltyjen tapausten perusteella



Kuva 5.9 Sauvan akselin suuntainen pistevoima ulokkeen päässä.



Kuva 5.10 Palkin epäkeskeinen liitos.

bimomentin epäjatkuvuudet

$$\Delta B_P = -P\omega_C = -P2\Omega_{ACM} \tag{5.41}$$

ja

$$\begin{aligned} \Delta B_M =& -\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{M} \\ =& -rM\cos\alpha \\ =& -rPa\cos\alpha \\ =& -P2\Omega_{ADC}. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Yhteensä

$$\Delta B = \Delta B_P + \Delta B_M \tag{5.43}$$

eli

$$\Delta B = -2P\Omega_{AMCD}. \tag{5.44}$$

Esimerkki 5.2 *Määritetään pilarin bimomenttikuormasta aiheutuva jännitys pilarin yläpäässä.*

Tarkastellaan kuvan 5.10 kehärakennetta, joka koostuu pilarista ja kahdesta palkista. Pilarin I-poikkileikkauksen, jonka leveys on b ja korkeus on h, sektoriaalisen koordinaatin suurin arvo, nurkassa, on

$$\omega_{\max} = \frac{bh}{4}. \tag{5.45}$$

I-poikkileikkauksen sektoriaalinen käyristymisjäyhyys on

$$I_\omega = 4\frac{1}{3}\frac{b}{2}\frac{bh}{4}\frac{bh}{4} = \frac{1}{24}b^3h^2t, \tag{5.46}$$

missä t on laipan paksuus.

Esimerkin palkkien pituus on $L = 5$ m ja pilarin korkeus on $H = 3$ m. Palkilla olevan tasaisen viivakuorman intensiteetti on $q = 6$ kN/m.

Valitaan pilarin I-poikkileikkauksen mitat: uuman korkeus $h = 340$ mm, laipan leveys $b = 137$ mm, uuman paksuus $d = 12.2$ mm ja laipan paksuus $t = 18.3$ mm. Pilarin poikkileikkausala on $A = 0.00872$ m^2, ja pilarin poikkileikkauksen käyristymisjäyhyys on $I_\omega = \dfrac{1}{24} b^3 (h-t)^2 t = 202.9 \times 10^{-9}$ m^6.

Palkin U-poikkileikkauksen korkeus on $h = 400$ mm ja leveys on $b = 110$ mm, uuman paksuus on 14 mm ja laipan paksuus on 18 mm.

Pilarin normaalivoima on

$$N = -qL = -30 \text{ kN}, \tag{5.47}$$

ja siitä aiheutuva normaalijännitys on

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = -\frac{30}{0.00872} = -3440 \text{ kN/m}^2. \tag{5.48}$$

Sektoriaalisen koordinaatin ω suurin arvo I:n kulmassa on

$$\omega_{\max} = \frac{b}{2}\frac{(h-t)}{2} = \frac{0.137}{2}\frac{0.3217}{2} = 0.011018 \text{ m}^2. \tag{5.49}$$

Momentti palkin päissä on

$$M = q\frac{L^2}{12} = 6\frac{5^2}{12} = 12.5 \text{ kNm}. \tag{5.50}$$

Palkin päiden momenteista aiheutuu pilarin päähän bimomentti, edellä johdetulla kaavalla $B = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{r}$,

$$B = 2M\frac{(h-t)}{2} = 12.5 \cdot 0.3217 = 4.021 \text{ kNm}^2. \tag{5.51}$$

Bimomentista tuleva suurin jännitys on, I:n kulmassa,

$$\sigma_{\omega,\max} = B\frac{\omega_{\max}}{I_\omega} = 4.021\frac{0.011018}{202.9 \times 10^{-9}} = 218.4 \times 10^3 \ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \tag{5.52}$$

joka on paljon suurempi kuin normaalivoiman aiheuttama jännitys. (Esimerkin liitos ei ole optimaalinen, ja pilarin yläpäähän tarvitaan joka tapauksessa jäykisteitä.)

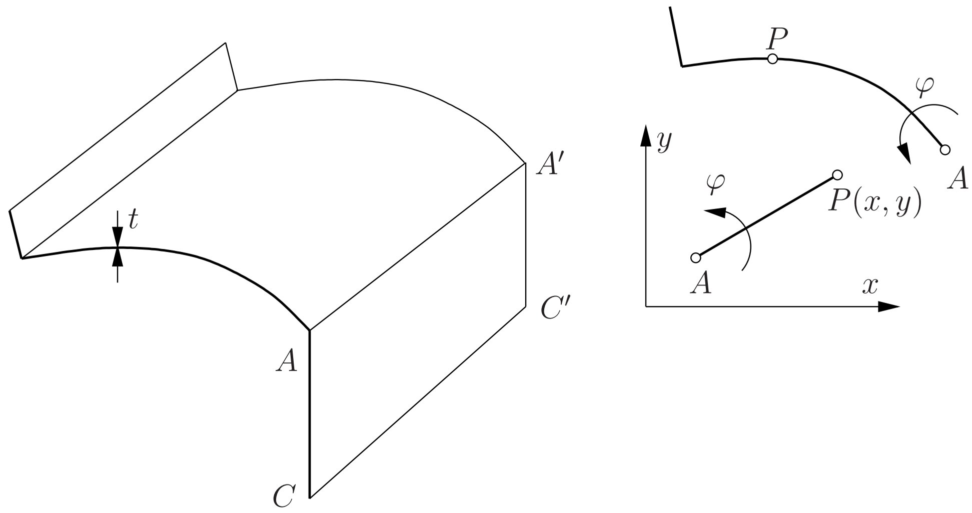
Lasketaan reunajännitys I-poikkileikkauksen laipalle, jota kuormittaa momentti M:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6M}{tb^2} = \frac{12.5}{57.245 \times 10^{-6}} = 218.4 \ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \tag{5.53}$$

missä on otettu huomioon, että laipan taivutusvastus on $W = tb^2/6$, kun laipan paksuus on t ja sen leveys on b. Bimomenttikuormasta aiheutuva laipan reunan jännitys puolestaan on

$$\sigma = B\frac{\omega_{\max}}{I_\omega} = Mh\frac{\frac{1}{4}bh}{\frac{1}{24}b^3h^2t} = \frac{6M}{b^2t}, \tag{5.54}$$

eli saatiin sama tulos kuin tarkastelemalla yksittäisen laipan taivutusta.



Kuva 5.11 Tasossaan jäykän levyn tukema katos, jonka reunat ovat nivelelliset.

5.3 Ohjattu taivutusvääntö

5.3.1 Vääntökeskiö annettu

Otaksutaan, että poikkileikkaukseltaan avoin ja ohutseinämäinen sauva on tuettu nivelellisesti tasossaan jäykkään seinään $ACC'A'$. Tällöin AA' on kiertoakseli, ja sen suhteen määritetty sektoriaalinen koordinaatti on

$$\omega_A(s) = \int_0^s h_A(\tau) d\tau. \tag{5.55}$$

Vääntöakseli on kuvan 5.11 tapauksessa annettu, ja sen (vääntöakselin) siirtymät ovat nollia eli

$$u_A = v_A = 0. \tag{5.56}$$

Poikkileikkauksen seinämän keskipinnalla sijaitsevan mielivaltaisen pisteen P siirtymät ovat

$$\begin{aligned} u =& -\varphi(y - y_A), \\ v =& \varphi(x - x_A), \\ w =& w_A - \omega_A \frac{d\varphi}{dz}. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Sauvan muodonmuutos on

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = \frac{dw_A}{dz} - \omega_A(s) \frac{d^2\varphi}{dz^2}. \tag{5.58}$$

Venymän eli muodonmuutoksen avulla lasketaan sauvan aksiaalinen jännitys

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E\left(\frac{dw_A}{dz} - \omega_A(s) \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) \tag{5.59}$$

ja jännitysresultantit

$$N = \int_A \sigma_z \, dA = E\left(A\frac{dw_A}{dz} - S_{\omega_A}\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \tag{5.60}$$

$$B = \int_A \omega_A \sigma_z \, dA = E\left(S_{\omega_A}\frac{dw_A}{dz} - I_{\omega_A}\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \tag{5.61}$$

missä on otettu käyttöön poikkipintasuureet

$$S_{\omega_A} = \int_A \omega_A t \, ds, \quad I_{\omega_A} = \int_A \omega_A^2 t \, ds. \tag{5.62}$$

Jos sauvaan vaikuttaa vain poikittaisia kuormia, niin voidaan erottaa kaksi tapausta: a) kitkallinen liitos ja b) kitkaton liitos.

a) Kitkallinen liitos

Tässä tapauksessa liukuminen liitoksessa AA' on estetty ja

$$w_A = \frac{dw_A}{dz} = 0, \tag{5.63}$$

joten

$$N = -ES_{\omega_A}\frac{d^2\varphi}{dz^2} \tag{5.64}$$

ja

$$B = -EI_{\omega_A}\frac{d^2\varphi}{dz^2}. \tag{5.65}$$

Jälkimmäisestä resultantin kaavasta ratkaistaan

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = -\frac{B}{EI_{\omega_A}}, \tag{5.66}$$

ja saadaan jännityksen kaava muotoon

$$\sigma_z = -E\frac{d^2\varphi}{dz^2}\omega_A = \frac{B}{I_{\omega_A}}\omega_A. \tag{5.67}$$

Sektoriaalisen koordinaatin nollakohta on pisteessä A, koska $\omega_A(A) = 0$.

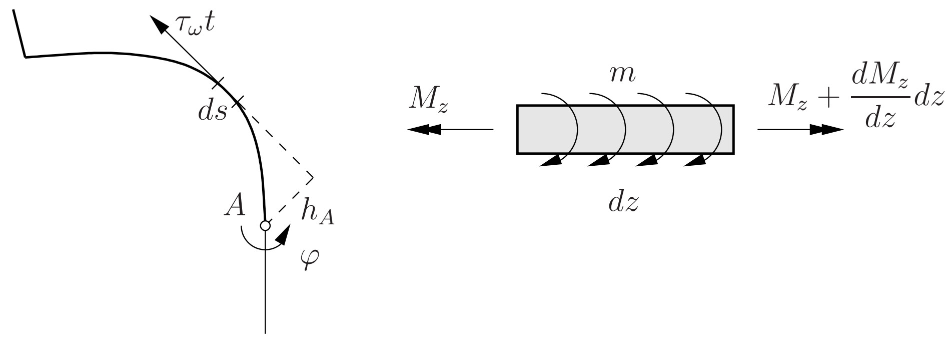
b) Kitkaton liitos

Kitkattoman liitoksen tapauksessa ei synny sauvan akselin suuntaista reaktiota, ja normaalivoima on nolla eli

$$N = EA\frac{dw_A}{dz} - ES_{\omega_A}\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0, \tag{5.68}$$

josta ratkaistaan

$$\frac{dw_A}{dz} = \frac{S_{\omega_A}}{A}\frac{d^2\varphi}{dz^2} \tag{5.69}$$



Kuva 5.12 Vääntömomentti ja sauvan alkion dz tasapaino.

ja saadaan normaalijännityksen kaava

$$\sigma_z = E\left(\frac{S_{\omega_A}}{A} - \omega_A\right)\frac{d^2\varphi}{dz^2} = -E\omega_b\frac{d^2\varphi}{dz^2}. \tag{5.70}$$

Edellä on määritelty

$$\omega_b(s) = \omega_A(s) - \frac{S_{\omega_A}}{A}. \tag{5.71}$$

Määritellään vastaavalla tavalla

$$I_{\omega_b} = \int_A \omega_b^2 t\, ds \tag{5.72}$$

ja

$$B = \int_A \omega_b \sigma_z t\, ds, \tag{5.73}$$

missä pinta-ala-alkio on $dA = t\, ds$. Bimomentin lausekkeeksi tulee nyt

$$\begin{aligned} B =& E\left(S_{\omega_A}\frac{dw_A}{dz} - I_{\omega_A}\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) \\ =& E\left(\frac{S_{\omega_A}^2}{A} - I_{\omega_A}\right)\frac{d^2\varphi}{dz^2} \equiv -EI_{\omega_b}\frac{d^2\varphi}{dz^2}. \end{aligned} \tag{5.74}$$

Vaihtoehtoisesti voidaan laskea

$$\begin{aligned} B =& \int_A \omega_b \sigma_z t\, ds \\ =& \int_A \left(\omega_A(s) - \frac{S_{\omega_A}}{A}\right) E\left(\frac{S_{\omega_A}}{A} - \omega_A(s)\right) t\, ds \frac{d^2\varphi}{dz^2} \\ =& E\left(\frac{S_{\omega_A}^2}{A} - I_{\omega_A}\right)\frac{d^2\varphi}{dz^2}, \end{aligned} \tag{5.75}$$

eli saatiin sama tulos kuin edellä.

Väännön tasapainoyhtälö on

$$\frac{dM_z}{dz} + m = 0. \tag{5.76}$$

Vääntömomentti on

$$M_z = M_v + M_\omega, \tag{5.77}$$

jossa vapaan väännön vääntömomentti on

$$M_v = GI_v \frac{d\varphi}{dz} \tag{5.78}$$

ja ns. estetyn väännön vääntömomentti on

$$\begin{aligned} M_\omega =& \int_A h_A \tau_\omega t \, ds = \int_A \tau_\omega \, t \, d\omega_A \\ =& \Big/_1^2 \tau_\omega t \omega_A - \int_A \frac{\partial}{\partial s}(t\tau_\omega)\omega_A \, ds \\ =& 0 + \int_A Et \left(\frac{d^2 w_A}{dz^2} - \omega_A \frac{d^3\varphi}{dz^3} \right) \omega_A \, ds \\ =& ES_{\omega_A} \frac{d^2 w_A}{dz^2} - EI_{\omega_A} \frac{d^3\varphi}{dz^3}. \end{aligned} \tag{5.79}$$

Sijoitustermi häviää, jos palkin reunoilla ei ole akselin z suuntaista kuormitusta.

Kitkallisen sauman tapauksessa (a-kohta) $w_A = 0$, ja väännön tasapainoehtoon sijoitetaan

$$\frac{dM_\omega}{dz} = -EI_{\omega_A} \frac{d^4\varphi}{dz^4}. \tag{5.80}$$

Kitkattoman sauman tapauksessa (b-kohta)

$$\frac{dw_A}{dz} = \frac{S_{\omega_A}}{A} \frac{d^2\varphi}{dz^2}, \tag{5.81}$$

ja

$$\frac{dM_\omega}{dz} = -E\left(I_{\omega_A} - \frac{S_{\omega_A}^2}{A} \right) \frac{d^4\varphi}{dz^4} = -EI_{\omega_b} \frac{d^4\varphi}{dz^4}. \tag{5.82}$$

5.3.2 Yhden vapausasteen ohjattu vääntö

Tarkastellaan nivelöidyllä levyllä tai jatkuvalla pendelituella tuettua sauvaa. Aiemmin on johdettu poikkileikkaukseltaan avoimelle, ohutseinämäiselle sauvalle venymän kaava

$$\varepsilon_z(s,z) = \frac{dw_0(z)}{dz} - x(s)\frac{d^2u(z)}{dz^2} - y(s)\frac{d^2v(z)}{dz^2} - \omega(s)\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}, \tag{5.83}$$

jonka avulla lausutaan sauvan akselin suuntainen normaalijännitys

$$\sigma_z(s,z) = E\varepsilon_z(s,z). \tag{5.84}$$

Sijoittamalla jännityksen kaava jännitysresultanttien lausekkeisiin

$$
\begin{aligned}
N &= \int_A \sigma_z \, dA, \\
M_y &= -\int_A x\sigma_z \, dA, \\
M_x &= \int_A y\sigma_z \, dA, \\
B &= \int_A \omega\sigma_z \, dA
\end{aligned}
\tag{5.85}
$$

saadaan differentiaaliyhtälöt

$$
N = E\left(A\frac{dw_0}{dz} - S_y\frac{d^2u}{dz^2} - S_x\frac{d^2v}{dz^2} - S_\omega\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \tag{5.86}
$$

$$
M_y = E\left(-S_y\frac{dw_0}{dz} + I_y\frac{d^2u}{dz^2} + I_{xy}\frac{d^2v}{dz^2} + I_{\omega y}\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \tag{5.87}
$$

$$
M_x = E\left(S_x\frac{dw_0}{dz} - I_{xy}\frac{d^2u}{dz^2} - I_x\frac{d^2v}{dz^2} - I_{\omega x}\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \tag{5.88}
$$

$$
B = E\left(S_\omega\frac{dw_0}{dz} - I_{\omega y}\frac{d^2u}{dz^2} - I_{\omega x}\frac{d^2v}{dz^2} - I_\omega\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \tag{5.89}
$$

missä

$$
I_x = \int_A y^2 \, dA, \quad I_y = \int_A x^2 \, dA, \quad I_{xy} = \int_A xy \, dA, \quad dA = t\, ds, \tag{5.90}
$$

$$
I_{\omega x} = \int_A y\omega \, dA, \quad I_{\omega y} = \int_A x\omega \, dA, \quad I_\omega = \int_A \omega^2 \, dA, \tag{5.91}
$$

$$
S_x = \int_A y \, dA, \quad S_y = \int_A x \, dA, \quad S_\omega = \int_A \omega \, dA \tag{5.92}
$$

ovat geometriset poikkileikkaussuureet.

Sauvan tasapainoyhtälöt taivutuksessa (y, z)-tasossa ovat

$$
\frac{dM_x}{dz} - Q_y = 0, \quad \frac{dQ_y}{dz} + p_y = 0, \tag{5.93}
$$

ja niistä seuraa

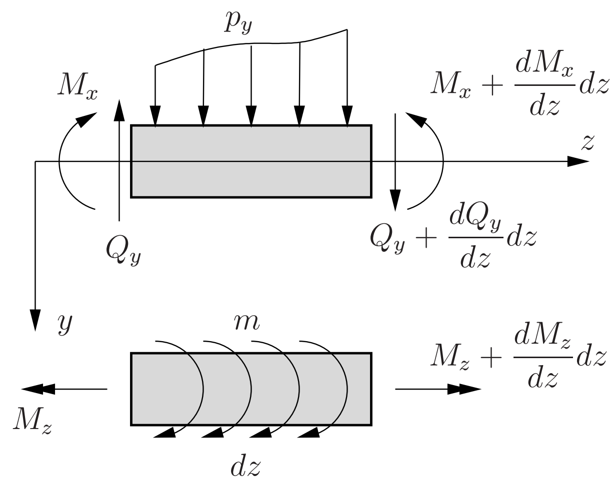
$$
\frac{d^2M_x}{dz^2} = -p_y. \tag{5.94}
$$

Vastaavasti (x, z)-tasossa

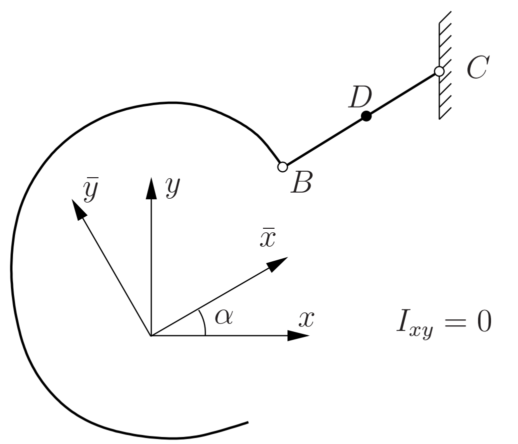
$$
\frac{dM_y}{dz} + Q_x = 0, \quad \frac{dQ_x}{dz} + p_x = 0, \tag{5.95}
$$

ja

$$
\frac{d^2M_y}{dz^2} = p_x. \tag{5.96}
$$



Kuva 5.13 Sauvan alkion dz tasapainotarkastelu taivutuksessa (y, z)-tasossa ja väännössä.



Kuva 5.14 Pendelituettu sauva.

Väännön tasapainoehto on

$$\frac{dM_z}{dz} + m = 0 \quad \text{eli} \quad \frac{d^2B}{dz^2} + \frac{dM_v}{dz} + m = 0. \tag{5.97}$$

Jos $w_0(z) \equiv 0$, niin taivutuksen tasapainoyhtälöstä (y, z)-tasossa seuraa

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EI_{xy}\frac{d^2u}{dz^2} + EI_x\frac{d^2v}{dz^2} + EI_{\omega x}\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) = p_y, \tag{5.98}$$

ja väännön tasapainoyhtälöstä saadaan

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EI_{\omega y}\frac{d^2u}{dz^2} + EI_{\omega x}\frac{d^2v}{dz^2} + EI_{\omega}\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) - GI_v\frac{d^2\varphi}{dz^2} = m. \tag{5.99}$$

Kuvan 5.14 viivallisessa koordinaatistossa, jossa $\bar{x}$-akseli on pendelituen suuntainen,

$$\bar{u} = 0, \tag{5.100}$$

taivutuksen tasapainoyhtälöksi tulee

$$EI_{\bar{x}}\frac{d^4\bar{v}}{dz^4} + EI_{\bar{\omega}\bar{x}}\frac{d^4\varphi}{dz^4} = p_{\bar{y}} \tag{5.101}$$

ja väännön tasapainoyhtälöksi saadaan

$$EI_{\bar{\omega}\bar{x}}\frac{d^4\bar{v}}{dz^4} + EI_{\bar{\omega}}\frac{d^4\varphi}{dz^4} - GI_v\frac{d^2\varphi}{dz^2} = m. \tag{5.102}$$

Viivallisen ja viivattoman koordinaatiston koordinaattien välillä on muunnoskaava

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \tag{5.103}$$

missä α on x-akseleiden välinen kulma. Siirtymäkomponenttien välillä on samanlainen muunnoskaava

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \tag{5.104}$$

Vääntökeskiö D on pendelituen tasossa BC, joten

$$\bar{y}_D - \bar{y}_B = 0, \tag{5.105}$$

ja koordinaattien jälkimmäisen muunnoskaavan avulla saadaan

$$\bar{y}_D - \bar{y}_B = -\sin\alpha(x_D - x_B) + \cos\alpha(y_D - y_B) = 0, \tag{5.106}$$

mistä ratkaistaan

$$x_D - x_B = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(y_D - y_B) \text{ tai } \; y_D - y_B = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x_D - x_B). \tag{5.107}$$

Toinen ohjatun väännön vääntökeskiön määrittämisessä tarvittava ehto saadaan vaatimuksesta, että taivutus ja vääntö eivät kytkeydy toisiinsa eli

$$I_{\bar{\omega}\bar{x}} = \int_A \bar{y}\bar{\omega}_D \, dA = 0. \tag{5.108}$$

Sektoriaalisen koordinaatin (vektorisuure) inkrementti on

$$\begin{aligned} |d\bar{\boldsymbol{\omega}}_D| =& |\boldsymbol{r}_D \times d\boldsymbol{s}| = | \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x - x_D & y - y_D & 0 \\ dx & dy & 0 \end{bmatrix} | \\ =& (x - x_D)dy - (y - y_D)dx \end{aligned} \tag{5.109}$$

eli

$$d\bar{\omega}_D = (x - x_D)dy - (y - y_D)dx. \tag{5.110}$$

Samalla tavalla muodostetaan inkrementti

$$d\bar{\omega}_B = (x - x_B)dy - (y - y_B)dx. \tag{5.111}$$

Vähentämällä inkrementit toisistaan ja integroimalla tulee

$$\bar{\omega}_D = \bar{\omega}_B - (x_D - x_B)y + (y_D - y_B)x + C, \tag{5.112}$$

missä C on integrointivakio. Vääntökeskiön paikan määräävästä toisesta ehdosta saadaan nyt yhtälö

$$\int_A (-x \sin\alpha + y \cos\alpha)[\omega_B - (x_D - x_B)y + (y_D - y_B)x + C]\, dA = 0. \tag{5.113}$$

Suorittamalla kertolaskut ehto (5.113) saadaan muotoon

$$\begin{aligned} &-\int x\omega_B\, dA \sin\alpha + \int y\omega_B\, dA \cos\alpha \\ &+ (I_{xy}\sin\alpha - I_x\cos\alpha)(x_D - x_B) + (-I_y \sin\alpha + I_{xy}\cos\alpha)(y_D - y_B) = 0. \end{aligned} \tag{5.114}$$

Yhtälöistä (5.107) ja (5.114) ratkaistaan vääntökeskiön D etäisyydet pisteestä B

$$x_D - x_B = \frac{\int y\omega_B\, dA \cos^2\alpha - \int x\omega_B\, dA \sin\alpha\cos\alpha}{I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha}, \tag{5.115}$$

$$y_D - y_B = \frac{\int y\omega_B\, dA \sin\alpha\cos\alpha - \int x\omega_B\, dA \sin^2\alpha}{I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha}. \tag{5.116}$$

Jos (x, y) on pääkoordinaatisto, niin $I_{xy} = 0$.

Esimerkki 5.3 *Määritetään jatkuvalla pendelituella tuetun* U*-profiilin vääntökeskiön paikka.*

Poikkileikkauksen geometriset suureet ovat

$$I_x = \frac{8}{3}b^3 t, \quad I_y = \frac{5}{12}b^3 t, \tag{5.117}$$

$$I_{\omega_B x} = \int_A y\omega_B t\, ds = -b^4 t, \tag{5.118}$$

$$I_{\omega_B y} = \int_A x\omega_B t\, ds = \frac{5}{12}b^4 t. \tag{5.119}$$

Kuvan 5.15 pendelituen tapauksessa

$$\alpha = \pi, \quad \sin\alpha = 0, \quad \cos\alpha = -1 \tag{5.120}$$

ja

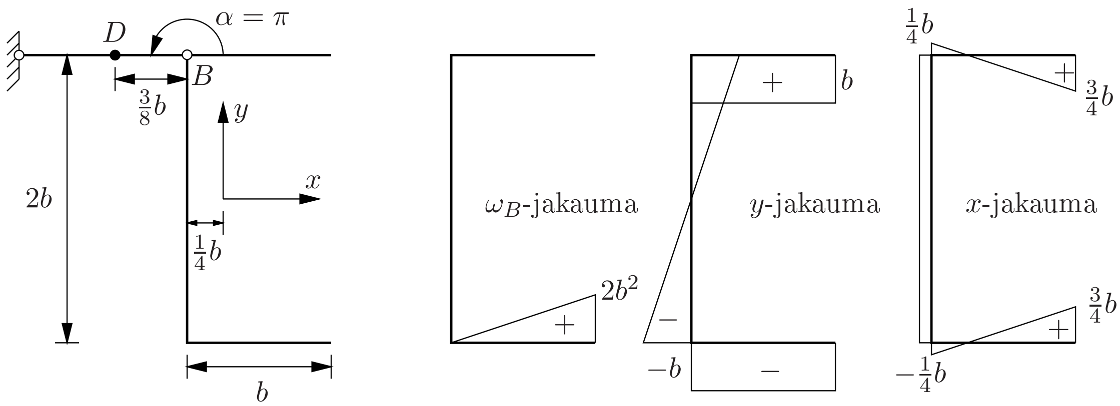
$$x_D - x_B = \frac{I_{\omega_B x}}{I_x} = \frac{-b^4 t}{\frac{8}{3}b^3 t} = -\frac{3}{8}b. \tag{5.121}$$

Kuvan 5.16 tapauksessa vastaavasti

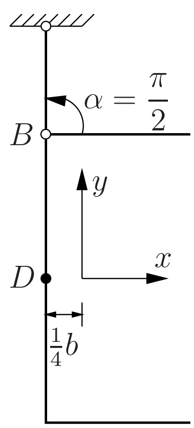
$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \sin\alpha = 1, \quad \cos\alpha = 0 \tag{5.122}$$

ja

$$y_D - y_B = -\frac{I_{\omega_B y}}{I_y} = -\frac{\frac{5}{12}b^4 t}{\frac{5}{12}b^3 t} = -b. \tag{5.123}$$



Kuva 5.15 Pendelituettu U-profiili.



Kuva 5.16 Pendelituettu U-profiili, tapaus b.

Luku 6

Kotelosauvan vääntö

6.1 Leikkauskeskiö

Tehdään kotelopoikkileikkaus staattisesti määrätyksi aukileikkauksilla. Kotelon seinämän leikkausvuo on

$$q = q^a + \bar{q} + q^v, \tag{6.1}$$

missä ensimmäinen osa leikkausvuosta on avoimen poikkileikkauksen vuo, (joka osataan edellä esitetyn perusteella laskea), toinen osa on aukileikkauskohdassa vaikuttava vuo ja kolmas osa on vapaan väännön leikkausvuo.

Jokaisessa osakotelossa täytyy toteutua yhteensopivuusehto

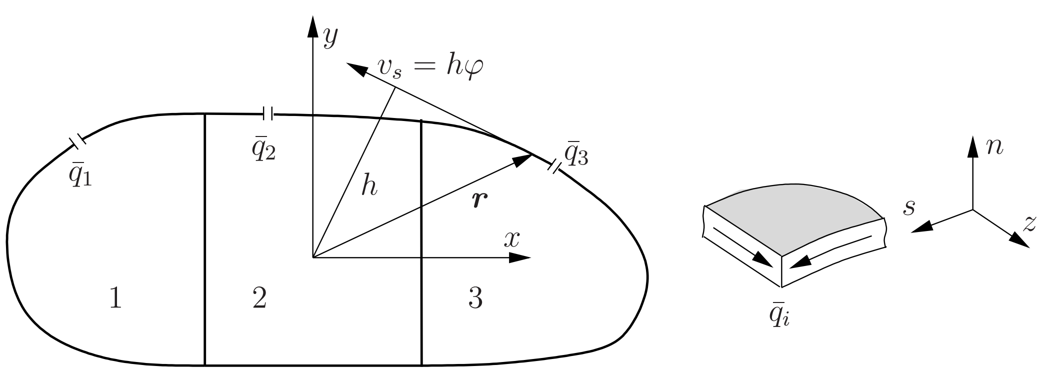
$$\oint \frac{\partial w}{\partial s}\, ds = 0. \tag{6.2}$$

Kotelon seinämän keskipinnalla liukuma on

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial z}, \tag{6.3}$$

ja Hooken lain perusteella

$$\gamma_{zs} = \frac{1}{G}\tau_{zs}. \tag{6.4}$$



Kuva 6.1 Kotelopoikkileikkaus.

Vääntökulmasta aiheutuva tangentiaalinen siirtymä v_s on

$$v_s(s,z) = h(s)\varphi(z), \tag{6.5}$$

joten

$$\frac{\partial v_s}{\partial z} = h(s)\frac{d\varphi(z)}{dz}, \tag{6.6}$$

ja aksiaalisen siirtymän derivaatta tangentiaalisen koordinaatin suhteen (seinämän keskipinnalla) on

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \gamma_{zs} - \frac{\partial v_s}{\partial z} = \frac{\tau_{zs}}{G} - h(s)\frac{d\varphi}{dz} \\ &= \frac{1}{G}\frac{q}{t} - h\frac{d\varphi}{dz}.\end{aligned} \tag{6.7}$$

Sijoittamalla siirtymän w derivaatta yhteensopivuusehtoon tulee

$$\begin{aligned}\oint \frac{\partial w}{\partial s}\, ds &= \oint G\frac{q}{t}\, ds - \frac{d\varphi}{dz}\oint h(s)\, ds \\ &= \oint \frac{q}{G}\frac{ds}{t} - \frac{d\varphi}{dz}2\Omega = 0,\end{aligned} \tag{6.8}$$

koska

$$\oint h(s)\, ds = 2\Omega \tag{6.9}$$

on kotelon seinämän keskipinnan ja poikkileikkaustason leikkauskäyrän sisään jäävä pinta-ala kaksinkertaisena. Yhteensopivuusehdosta saadaan ns. sirkulaatiokaava

$$\oint \frac{q}{G}\frac{ds}{t} = 2\Omega\frac{d\varphi}{dz}. \tag{6.10}$$

Jos liukumoduuli G on vakio, niin

$$\frac{q}{G}\oint \frac{ds}{t} = 2\Omega\frac{d\varphi}{dz}. \tag{6.11}$$

Otaksumalla, että kokonaisvuo q ja vapaan väännön vuo q^v toteuttavat sirkulaatiokaavan (yhteensopivuusehdon), päätellään, että kahden muun leikkausvuo-osuuden tulee toteuttaa ehto

$$\oint \frac{q_a + \bar{q}}{G}\frac{ds}{t} = 0. \tag{6.12}$$

Jos liukumoduuli G on vakio, niin viimeisin ehto voidaan kirjoittaa muodossa

$$\bar{q}\oint \frac{ds}{t} = -\oint q^a\frac{ds}{t}, \tag{6.13}$$

koska aukileikkauksessa vaikuttava vuo kiertää kotelon vakiona ja se voidaan siten ottaa integraalin ulkopuolelle.

Avoimen ohutseinämäisen poikkileikkauksen leikkausvuolle on aikaisemmin johdettu kaava

$$q^a(s) = -\frac{\frac{dN}{dz}}{A}A(s) - \frac{Q_x}{I_y}S_y(s) - \frac{Q_y}{I_x}S_x(s) - \frac{M_\omega}{I_\omega}S_\omega(s) \tag{6.14}$$

leikkauksessa s pääjäyhyyskoordinaatistossa, missä $I_{xy} = 0$. Jos vain $Q_y \neq 0$, niin avoimen poikkileikkauksen vuo on

$$q^a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(s), \tag{6.15}$$

missä

$$S_x(s) = \int_0^s y(s)t(s)\, ds \tag{6.16}$$

on poikkileikkauksen osan staattinen momentti. Sijoittamalla leikkausvuon q^a kaava ehtoon (6.13) se saadaan muotoon

$$\left(\oint \frac{ds}{t(s)} \right) \bar{q} = \frac{Q_y}{I_x} \oint \frac{S_x(s)}{t(s)}\, ds \tag{6.17}$$

yksikoteloisen poikkileikkauksen tapauksessa. Seinämän vahvuus t on usein ainakin paloittain vakio.

Monikoteloisen poikkileikkauksen tapauksessa yhteensopivuusehdon täytyy toteutua jokaisessa osakotelossa $i = 1, \ldots, n$, ja tällöin saadaan yhteensopivuusehdoista yhtälöryhmä

$$\left(\oint_i \frac{ds}{t} \right) \bar{q}_i - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} \left(\int_{s_{ik}} \frac{ds}{t} \right) \bar{q}_k = \oint_i \frac{S_x}{t}\, ds, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6.18}$$

missä n on koteloiden lukumäärä ja m on koteloon i liittyvien muiden koteloiden lukumäärä. Kaavassa on asetettu $Q_y/I_x = 1$.

Esimerkki 6.1 *Määritetään kaksikoteloisen poikkileikkauksen leikkauskeskiö (vääntökeskiö). Koordinaatisto (x, y) on pääjäyhyyskoordinaatisto, jossa $I_{xy} = 0$.*

Tarkastellaan kuvan 6.2 poikkileikkausta. Lasketaan ensin yhteensopivuusyhtälöryhmän kertoimet

$$\oint_1 \frac{ds}{t} = 800, \quad \oint_2 \frac{ds}{t} = 1200, \quad \int_{12} \frac{ds}{t} = 200. \tag{6.19}$$

Esimerkin tapauksessa kotelopoikkileikkaus koostuu suorista osista, ja integraalit voidaan laskea summaamalla s/t arvoja, jotka on laskettu valmiiksi ja merkitty kuvaan. Seinämän keskiviivan sisään jäävät pinta-alat ovat

$$\Omega_1 = 400, \quad \Omega_2 = 800. \tag{6.20}$$

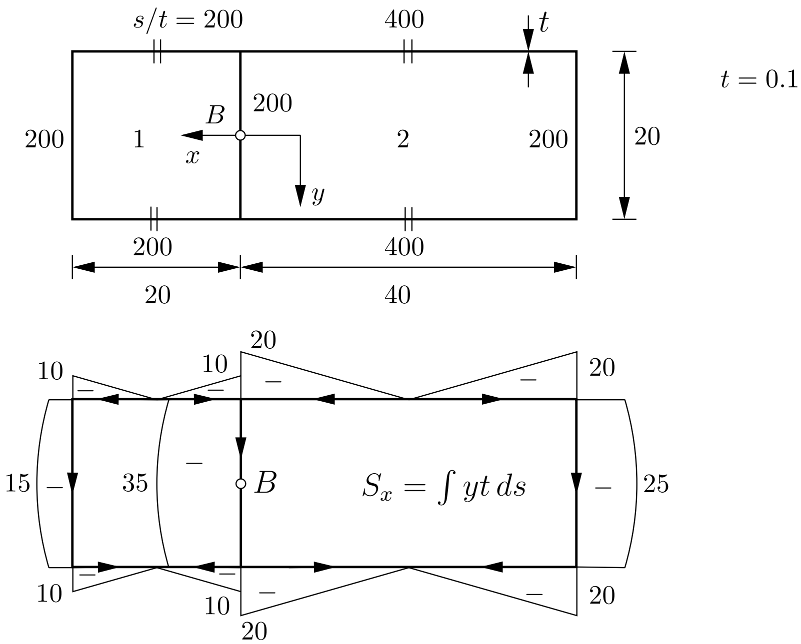
Näillä tiedoilla voidaan jo laskea vapaan väännön vuo q^v, (ei kuitenkaan tarvita vääntökeskiön määrittämiseen), yhtälöryhmästä

$$\begin{bmatrix} 800 & -200 \\ -200 & 1200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^v \\ q_2^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ 1600 \end{bmatrix}, \tag{6.21}$$

jonka ratkaisu on

$$q_1^v \approx 1.391, \quad q_2^v \approx 1.565. \tag{6.22}$$

Kuvan 6.2 kotelopoikkileikkaus tehdään staattisesti määrätyksi kahdella aukileikkauksella, joiden paikat voidaan valita mielivaltaisesti. Tehdään aukileikkaus nyt symmetrisesti kuvan 6.2 esittämällä tavalla. Seuraavaksi valitaan integrointisuunnat staattisen



Kuva 6.2 Kaksikoteloinen poikkileikkaus.

momentin S_x integrointia varten. Suunnat on merkitty kuvaan nuolilla. Staattisen momentin integrointi aloitetaan vapaalta reunalta. Kolmen seinän risteyksestä voidaan jatkaa integrointia (uumaa pitkin), kun ensin on integroitu kaksi haaraa vapailta reunoilta alkaen. Kuvan 6.2 esittämässä tapauksessa staattinen momentti S_x tulee joka kohdassa negatiiviseksi (sattumalta).

Lasketaan seuraavaksi staattisesti määräämättömät aukileikkauksen leikkausvuot määrittävän yhtälöryhmän oikean puolen vakiot

$$\oint_1 S_x(s)\frac{ds}{t} = -(10 + \frac{2}{3}\cdot 5)200 + (30 + \frac{2}{3}\cdot 5)200 = 20 \cdot 200 = 4000 \qquad (6.23)$$

ja

$$\oint_2 S_x(s)\frac{ds}{t} = -(30 + \frac{2}{3}\cdot 5)200 + (20 + \frac{2}{3}\cdot 5)200 = -10 \cdot 200 = -2000. \qquad (6.24)$$

Kertoimien laskussa on käytetty tietoa, että paraabelin integraali on välinpituus kertaa kaksikolmasosaa huippuarvosta. Kertoimia laskettaessa (integroitaessa) kierretään kukin osakotelo i vastapäivään. Integroinnin aloituskohdan voi valita vapaasti. Jos kotelon ympäri kierrettäessä mennään jollakin osuudella staattisen momentin laskussa valitun (nuolen) suunnan vastakkaiseen suuntaan, niin integraaliin tuleva osuus kyseisellä välillä kerrotaan luvulla -1. Esim. kuvan 6.2 tapauksessa kotelon 1 ympäri (vastapäivään) kierrettäessä mennään oikean pystyseinän (uuman) matkalla po. nuolen vastakkaiseen suuntaan, ja sillä osalla integroinnin tulos on positiivinen, (koska integroitava S_x on negatiivinen). Yläseinien osuudet kumoavat samasta syystä toisensa, samoin alaseinien.

Yhtälöryhmän kertoimet ovat samat kuin vapaan väännön laskussa. Yhteensopivuusehtoryhmän

$$\begin{bmatrix} 800 & -200 \\ -200 & 1200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 \\ -2000 \end{bmatrix} \tag{6.25}$$

ratkaisuna saadaan aukileikkauskohtien staattisesti määräämättömät leikkausvuot

$$\bar{q}_1 \approx 4.783, \quad \bar{q}_2 \approx -0.8696. \tag{6.26}$$

Osakotelon 2 vuo on negatiivinen, joten se kiertääkin todellisuudessa myötäpäivään kotelon 2 ympäri (negatiiviseen suuntaan).

Lasketaan seuraavaksi leikkausvuon momentti tarkoitusta varten valitun pisteen B suhteen

$$\begin{aligned} M_B =& \int h_B q \, ds = \int h_B(q^a + \bar{q}) \, ds \\ =& \int h_B q^a \, ds + \oint h_B \bar{q} \, ds \\ =& M_B^a + \bar{M}, \end{aligned} \tag{6.27}$$

missä avoimen poikkileikkauksen vuo on

$$q^a = -S_x, \quad \text{kun} \quad \frac{Q_y}{I_x} = 1, \tag{6.28}$$

ja h_B on pisteestä B mitattu kohtisuora etäisyys seinän keskiviivaan. Avoimen poikkileikkauksen vuon osuudeksi momenttiin B:n ympäri tulee

$$M_B^a = (10 + \frac{2}{3} \cdot 5)20 \cdot 20 - (20 + \frac{2}{3} \cdot 5)20 \cdot 40 \approx -13333.33, \tag{6.29}$$

staattisesti määräämättömien leikkausvuosuureiden osuus on

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^{2} 2\Omega_i \bar{q}_i = 4.783 \cdot 800 - 0.8696 \cdot 1600 \approx 2435.04 \tag{6.30}$$

ja yhteensä

$$M_B = M_B^a + \bar{M} = -10898.3. \tag{6.31}$$

Leikkausvoima Q_y on

$$Q_y = (10 + \frac{2}{3} \cdot 5 + 30 + \frac{2}{3} \cdot 5 + 20 + \frac{2}{3} \cdot 5)20 = 70 \cdot 20 = 1400. \tag{6.32}$$

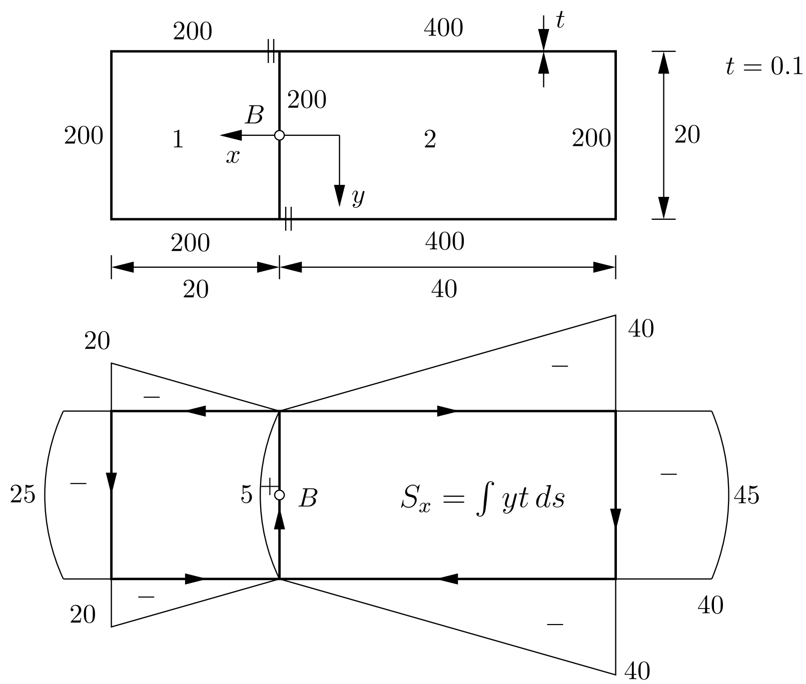
Leikkausvoimaa Q_y kertyy nyt pystyseinien q^a-vuosta.

Vääntökeskiön kautta kulkeva akselin y suuntainen voima ei aiheuta vääntömomenttia, joten vääntökeskiön etäisyys pisteestä B on

$$e_B = \frac{M_B}{Q_y} = -7.7845, \tag{6.33}$$

eli vääntökeskiö on etäisyydellä 7.7845 pisteestä B negatiiviseen suuntaan akselia x pitkin mitattuna. Symmetrian vuoksi vääntökeskiö on x-akselilla.

Esimerkki 6.2 *Määritetään edellisen esimerkin kaksikoteloisen poikkileikkauksen leikkauskeskiö valitsemalla staattisesti määrätty perusmuoto toisella tavalla eli laittamalla leikkaukset eri kohtiin, kuva 6.3.*



Kuva 6.3 Kaksikoteloinen poikkileikkaus, vaihtoehtoinen staattisesti määrätty perusmuoto.

Yhteensopivuusyhtälöryhmän kertoimet ovat samat kuin edellä eli

$$\oint_1 \frac{ds}{t} = 800, \quad \oint_2 \frac{ds}{t} = 1200, \quad \int_{12} \frac{ds}{t} = 200. \tag{6.34}$$

Arvot s/t on merkitty jälleen kuvaan. Seinämän keskiviivan sisään jäävät pinta-alat ovat niinikään samat kuin edellisessä esimerkissä (sama poikkileikkaus)

$$\Omega_1 = 400, \quad \Omega_2 = 800. \tag{6.35}$$

Vapaan väännön vuo q^v, jota siis ei tarvita vääntökeskiön määrittämiseen, ratkaistaan yhtälöryhmästä

$$\begin{bmatrix} 800 & -200 \\ -200 & 1200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^v \\ q_2^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ 1600 \end{bmatrix}, \tag{6.36}$$

jonka ratkaisu on kuten edellä

$$q_1^v \approx 1.391, \quad q_2^v \approx 1.565. \tag{6.37}$$

Kaksikoteloinen poikkileikkaus tehdään staattisesti määrätyksi kahdella aukileikkauksella kuvan 6.3 esittämällä tavalla. Seuraavaksi valitaan integrointisuunnat staattisen momentin S_x integrointia varten, kuva 6.3. Staattisen momentin integrointi aloitetaan jälleen vapaalta reunalta. Valitulla aukileikkaustavalla ei nyt kohdata kolmen seinän risteystä, vaan päästään kulkemaan kaiken aikaa samaa tietä eteenpäin.

Staattinen momentti S_x on nyt positiivinen keskimmäisessä pystyseinässä. Saatiin erilainen staattisen momentin jakauma, koska avoin poikkileikkauskin on erilainen kuin edellisessä esimerkissä. Aukileikkauskohdan leikkausvuot määrittävän yhtälöryhmän oikean puolen vakiot ovat nyt

$$\oint_1 S_x(s)\frac{ds}{t} = \frac{1}{2}(-20)200 - (20 + \frac{2}{3}\cdot 5)200 + \frac{1}{2}(-20)200 + \frac{2}{3}\cdot 5 \cdot 200 = -8000, \tag{6.38}$$

$$\oint_2 S_x(s)\frac{ds}{t} = \frac{1}{2}\cdot 40 \cdot 400 + (40 + \frac{2}{3}\cdot 5)200 + \frac{1}{2}\cdot 40\cdot 400 - \frac{2}{3}\cdot 5\cdot 200 = 24000. \tag{6.39}$$

Integroitaessa kierretään jälleen kukin osakotelo i vastapäivään. Jos kotelon ympäri kierrettäessä mennään jollakin osuudella staattisen momentin laskussa valitun (nuolen) suunnan vastakkaiseen suuntaan, niin integraaliin tuleva osuus kyseisellä välillä kerrotaan luvulla -1. Kotelon 1 ympäri vastapäivään kierrettäessä mennään aina nuolen suuntaan, ja integroitava S_x on negatiivinen paitsi keskiseinässä positiivinen. Kotelossa 2 mennään aina nuolen vastakkaiseen suuntaan.

Yhteensopivuusyhtälöryhmäksi tulee nyt

$$\begin{bmatrix} 800 & -200 \\ -200 & 1200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8000 \\ 24000 \end{bmatrix}, \tag{6.40}$$

ja sen ratkaisu on

$$\bar{q}_1 \approx -5.217, \quad \bar{q}_2 \approx 19.13. \tag{6.41}$$

Kotelon 1 vuo on negatiivinen ja kiertää myötäpäivään.

Leikkausvuon momentti pisteen B suhteen on

$$\begin{aligned} M_B =& \int h_B(q^a + \bar{q})\, ds \\ =& -\int h_B S_x\, ds + \oint h_B \bar{q}\, ds \\ =& M_B^a + \bar{M}. \end{aligned} \tag{6.42}$$

Avoimen poikkileikkauksen vuon momentti B:n ympäri on

$$\begin{aligned} M_B^a &= (20 + \frac{2}{3}\cdot 5)20\cdot 20 + 20\cdot 20\cdot 10 - 40\cdot 40\cdot 10 - (40 + \frac{2}{3}\cdot 5)20\cdot 40 \\ &\approx -37333.33. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Staattisesti määräämättömien leikkausvoiden osuus on

$$\bar{M} = 2\sum_i \Omega_i \bar{q}_i = -5.217\cdot 800 + 19.13\cdot 1600 \approx 26434.4 \tag{6.44}$$

ja yhteensä

$$M_B = M_B^a + \bar{M} = -10898.3. \tag{6.45}$$

Leikkausvoima Q_y on

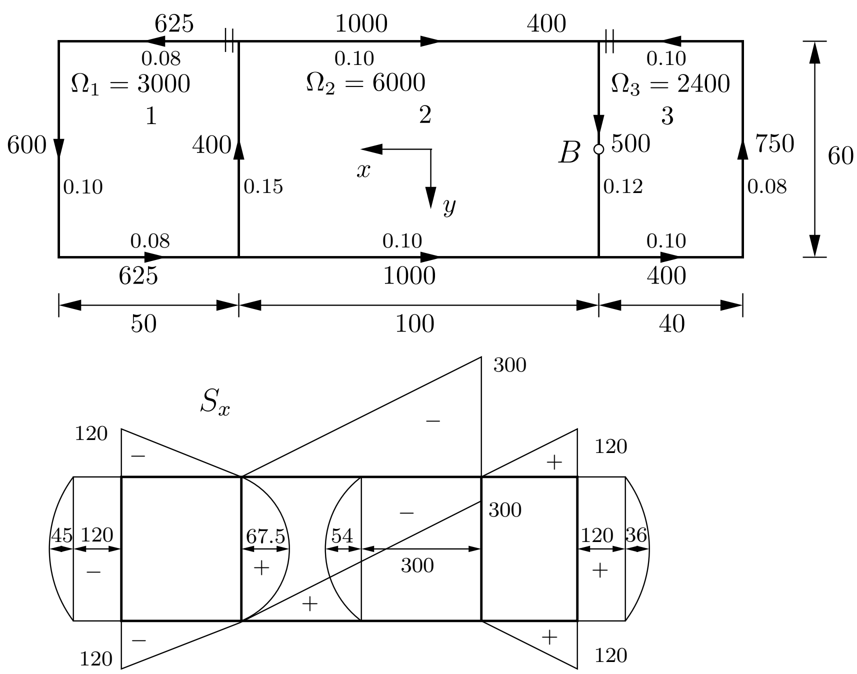
$$Q_y = (20 + \frac{2}{3}\cdot 5 + \frac{2}{3}\cdot 5 + 40 + \frac{2}{3}\cdot 5)20 = 1400. \tag{6.46}$$

Keskiseinässä leikkausvuo on negatiivinen, joten se vaikuttaa koordinaatin s vastakkaiseen suuntaan ja keskiseinän osuus leikkausvoimaan Q_y on lopulta positiivinen (leikkausvoima on positiivinen akselin y suuntaan).

Vääntökeskiön etäisyys pisteestä B on

$$e_B = \frac{M_B}{Q_y} = -7.7845, \tag{6.47}$$

eli vääntökeskiö on etäisyydellä 7.7845 pisteestä B negatiiviseen suuntaan akselia x pitkin.



Kuva 6.4 Kolmikoteloinen poikkileikkaus.

Esimerkki 6.3 *Lasketaan kolmikoteloisen poikkileikkauksen vääntökeskiön paikka.* Tehdään aukileikkaukset kuvan 6.4 esittämällä tavalla. Yhtälöryhmän kertoimet ovat

$$\oint_1 \frac{ds}{t} = 2250, \quad \oint_2 \frac{ds}{t} = 2900, \quad \oint_3 \frac{ds}{t} = 2050, \tag{6.48}$$

$$\int_{12} \frac{ds}{t} = 400, \quad \int_{23} \frac{ds}{t} = 500. \tag{6.49}$$

Yhtälöryhmän oikean puolen vakiot ovat

$$\oint_1 S_x \frac{ds}{t} = -(120 + \frac{2}{3} \cdot 45)600 + \frac{2}{3} \cdot 67.5 \cdot 400 - 120 \cdot 625 = -147000, \tag{6.50}$$

$$\oint_2 S_x \frac{ds}{t} = -45 \cdot 400 + 300 \cdot 1000 + (300 + \frac{2}{3} \cdot 54)500 = 450000, \tag{6.51}$$

$$\oint_3 S_x \frac{ds}{t} = -336 \cdot 500 + 120 \cdot 400 + (120 + \frac{2}{3} \cdot 36)750 = -12000. \tag{6.52}$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} 2250 & -400 & 0 \\ -400 & 2900 & -500 \\ 0 & -500 & 2050 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -147000 \\ 45000 \\ -12000 \end{bmatrix} \tag{6.53}$$

ja sen ratkaisuna

$$\begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -37.7 \\ 155.5 \\ 32.1 \end{bmatrix}. \tag{6.54}$$

Momentti pisteen B suhteen on

$$M_B = M_B^a + \bar{M}, \tag{6.55}$$

missä

$$\begin{aligned} M_B^a =&(120+30)60 \cdot 150 + 60 \cdot 50 \cdot 60 + 45 \cdot 60 \cdot 100 \\ &-150 \cdot 100 \cdot 60 - 60 \cdot 40 \cdot 60 - (120+24)60 \cdot 40 \\ =&410400 \end{aligned} \tag{6.56}$$

ja

$$\bar{M} = -37.7 \cdot 60000 + 155.5 \cdot 12000 + 32.1 \cdot 4800 = 1793880. \tag{6.57}$$

Yhteensä

$$M_B = M_B^a + \bar{M} = 2204280. \tag{6.58}$$

Leikkausvoima y-akselin suuntaan on

$$Q_y = (150 + 45 + 336 + 144) \cdot 60 = 40500. \tag{6.59}$$

Vääntökeskiön etäisyys pisteestä B on

$$e_B = \frac{M_B}{Q_y} = \frac{2204280}{40500} = 54.4 \tag{6.60}$$

(vasemmalle pisteestä B). Symmetrian vuoksi vääntökeskiö on x-akselilla.

6.2 Kotelon deplanaatio

Liukuma kotelopalkin seinämän keskipinnalla on

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial z}. \tag{6.61}$$

Poikkileikkauksen jäykän kappaleen kiertymästä aiheutuu seinämän keskipinnan ja poikkileikkaustason leikkauskäyrän tangentin suuntainen siirtymä

$$v_s(s, z) = h(s)\varphi(z). \tag{6.62}$$

Hooken lain perusteella

$$\gamma_{sz} = \frac{\tau_{sz}}{G}, \tag{6.63}$$

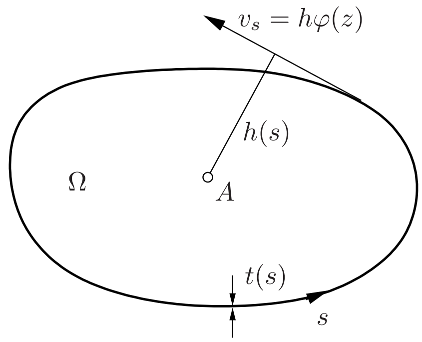
ja palkin akselin suuntaisen siirtymän derivaatta voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\tau_{sz}}{G} - h(s)\theta(z), \tag{6.64}$$

missä $\theta = d\varphi/dz$ on vääntymä.

Yhteensopivuusehdosta $\oint \frac{\partial w}{\partial s} ds = 0$ saadaan

$$\oint \left(\frac{\tau_{sz}}{G} - h(s)\theta(z) \right) ds = \oint \frac{q}{Gt} ds - 2\Omega\theta = 0, \tag{6.65}$$



Kuva 6.5 Seinämän keskiviivan tangentin suuntainen siirtymä v_s.

missä on määritelty leikkausvuo $q = t(s)\tau_{sz}(s)$, τ_{sz} on seinämän keskipinnan leikkausjännitys ja Ω on kotelon seinän keskiviivan sisään jäävä pinta-ala. Normeerattu leikkausvuo on

$$\tilde{q} \equiv \frac{q}{G\theta} = \frac{2\Omega}{\oint \frac{ds}{t}}. \tag{6.66}$$

Jos osakoteloita on n kappaletta, niin saadaan n yhteensopivuusehtoa

$$\left(\oint_i \frac{ds}{t}\right)\tilde{q}_i - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} \left(\int_{s_{ik}} \frac{ds}{t}\right)\tilde{q}_k = 2\Omega_i, \;\; i = 1, \ldots, n. \tag{6.67}$$

Aksiaalisiirtymän w s-derivaatan avulla määritetään myös kotelon deplanaatio:

$$\int_0^s \frac{\partial w}{\partial s} ds = -\frac{d\varphi}{dz}\left(\int_0^s h(s)ds - \int_0^s \tilde{q}(s)\frac{ds}{t}\right) = -\frac{d\varphi}{dz}\hat{\omega}(s), \tag{6.68}$$

missä on määritelty kotelopoikkileikkaukselle deplanaatio

$$\hat{\omega}(s) = \int_0^s h(s)\, ds - \int_0^s \tilde{q}(s)\frac{ds}{t}. \tag{6.69}$$

Vääntökeskiön asema määrätään samoista ehdoista kuin avoimelle poikkileikkaukselle eli vaaditaan, että

$$\int \hat{\omega}(s)x(s)t(s)\, ds = 0, \quad \int \hat{\omega}(s)y(s)t(s)\, ds = 0, \quad \int \hat{\omega}(s)t(s)\, ds = 0. \tag{6.70}$$

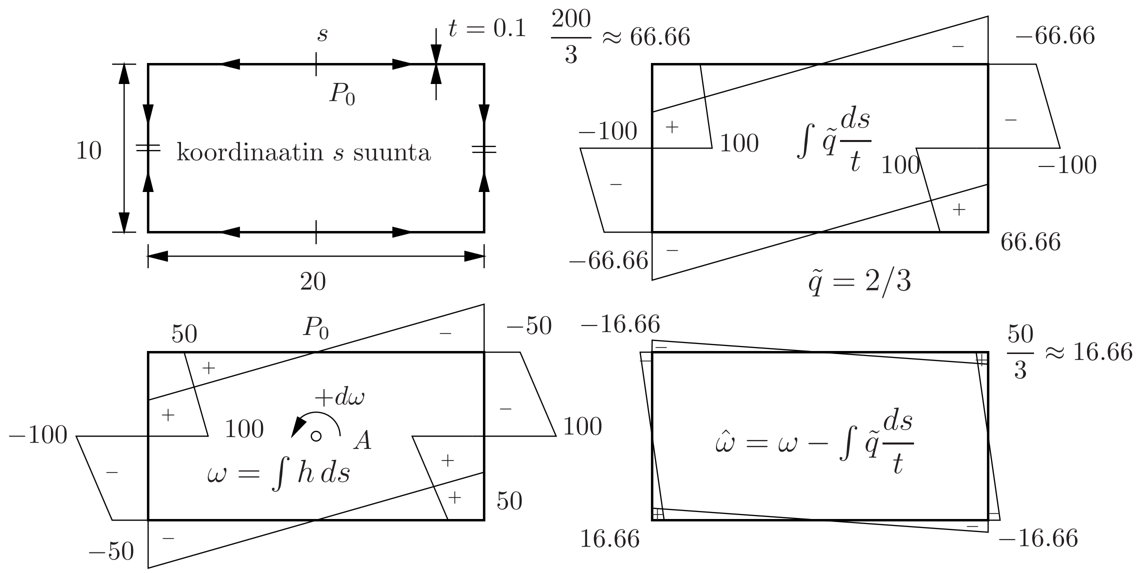
Tässä yhteydessä käsiteltävässä yksinkertaisessa kotelosauvan teoriassa vääntökulma ratkaistaan tasapainoehdosta

$$EI_{\hat{\omega}}\frac{d^4\varphi}{dz^4} - GI_v\frac{d^2\varphi}{dz^2} = m(z), \tag{6.71}$$

missä

$$I_{\hat{\omega}} = \int \hat{\omega}^2(s)t(s)\, ds \tag{6.72}$$

on käyristymisjäyhyys. Tässä koteloteoriassa väännön kaavat ovat siten samanlaiset kuin avoimen poikkileikkauksen tapauksessa.



Kuva 6.6 Suorakaiteen muotoisen kotelon deplanaatio.

Esimerkki 6.4 *Tutkitaan kuvan 6.6 suorakaiteen muotoisen kotelopoikkileikkauksen deplanaatiota.*

Tehdään kotelopoikkileikkaus ensin staattisesti määrätyksi (vapaasti valitulla) leikkauksella (symmetrian vuoksi kaksi) ja määritellään koordinaatin s kulkusuunta nuolilla kuvan mukaisesti. Määritetään seuraavaksi deplanaatio

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}_a + \hat{\omega}_b, \tag{6.73}$$

jonka osuudet a ja b ovat

$$\hat{\omega}_a = \int h\,ds, \quad \hat{\omega}_b = -\int \tilde{q}\frac{ds}{t}. \tag{6.74}$$

Integroinnin alkupiste P_0 on valittu siten, että $\omega_0 = 0$. Yhteensopivuusehdosta saadaan osan b laskussa tarvittava leikkausvuo

$$\tilde{q} = \frac{2\Omega}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{400}{600} = \frac{2}{3}. \tag{6.75}$$

Määritetään avoimen poikkileikkauksen leikkausvuo otaksuen, että ainoa nollasta eriävä leikkausjännitystä aiheuttava jännitysresultantti on M_ω, jolloin

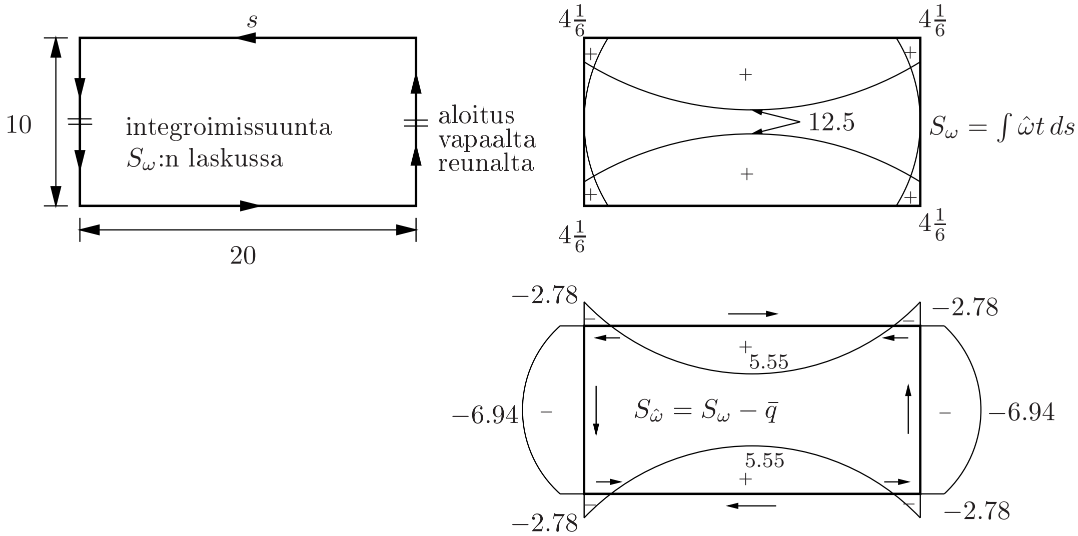
$$q^a = (\tau t)^a = -\frac{M_\omega}{I_\omega} S_\omega, \tag{6.76}$$

missä indeksi a viittaa avoimeen poikkileikkaukseen, (hetki sitten aukileikattuun).

Määritellään sektoriaalisen staattisen momentin laskua varten uudelleen s-koordinaatti. Koska vapaalla reunalla leikkausjännitys on (tavallisesti) nolla, aloitetaan integrointi sieltä.

Kuvassa 6.7b on piirretty laskettu sektoriaalinen staattinen momentti

$$S_\omega = \int \hat{\omega} t\,ds. \tag{6.77}$$



Kuva 6.7 Suorakaiteen muotoinen kotelo, sektoriaalinen staattinen momentti.

Aukileikkauskohdan tuntematon leikkausvuo ratkaistaan yhteensopivuusehdosta

$$\oint (\bar{q} + q^a) \frac{ds}{t} = 0, \tag{6.78}$$

eli

$$\bar{q} \oint \frac{ds}{t} = \oint \frac{S_\omega}{t} \, ds. \tag{6.79}$$

Esimerkin tapauksessa

$$\begin{aligned} \oint \frac{S_\omega}{t} \, ds &= 2 \left\{ \frac{1}{6} \left(4\tfrac{1}{6} + 4\tfrac{1}{6} \right) \frac{1}{0.1} \cdot 10 + \frac{1}{6} \left(4\tfrac{1}{6} + 4 \cdot 12.5 + 4\tfrac{1}{6} \right) \frac{1}{0.1} \cdot 20 \right\} \\ &= 4166.66. \end{aligned} \tag{6.80}$$

Aukileikkauskohdan vuo on siten

$$\bar{q} = \frac{\oint S_\omega \dfrac{ds}{t}}{\oint \dfrac{ds}{t}} = \frac{4166.66}{600} = 6.944. \tag{6.81}$$

Kuvassa 6.7c on esitetty

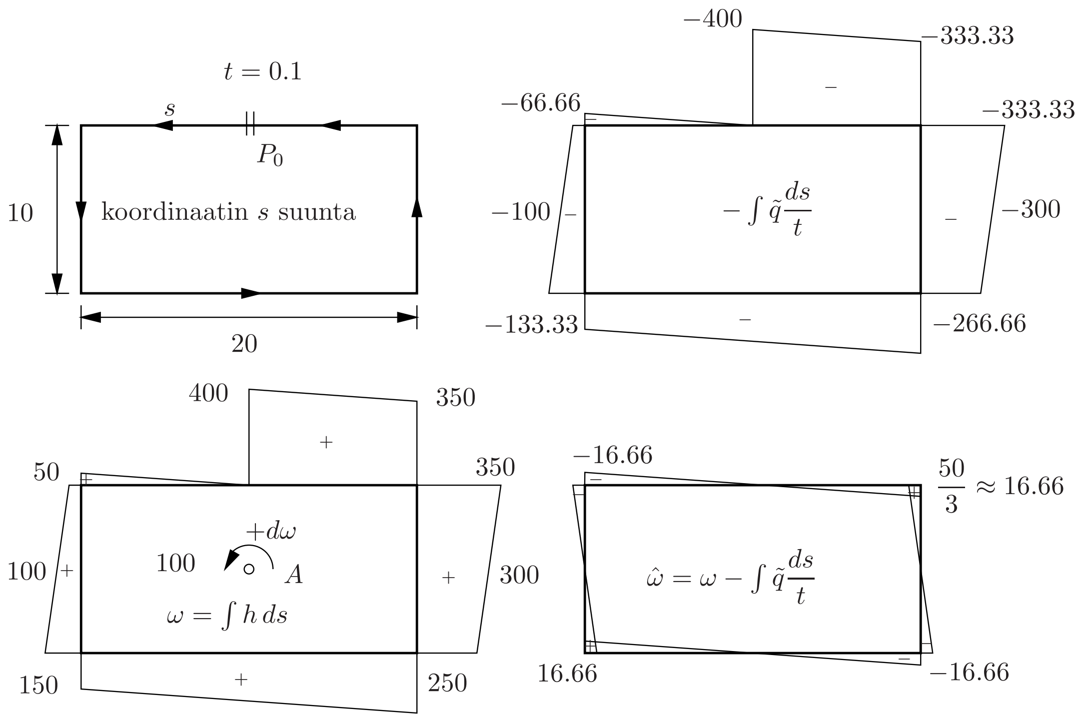
$$S_{\hat{\omega}} = S_\omega - \bar{q} = -(q^a + \bar{q}), \tag{6.82}$$

joka on leikkausvuon jakauma kotelon seinässä vääntömomentista M_ω, kun suhde $M_\omega / I_\omega = 1$. Leikkausvuon suunta on esitetty kuvassa nuolella.

Esimerkki 6.5 *Lasketaan sama esimerkki kuin edellä, mutta tehdään aukileikkaus eri tavalla kuvan 6.8a mukaisesti.*

Ominaisdeplanaation jakauma ei riipu aukileikkaustavasta. Määritetään sektoriaalinen staattinen momentti avoimelle poikkileikkaukselle. Aukileikkauskohdan tuntematon leikkausvuo ratkaistaan jälleen yhteensopivuusehdosta

$$\bar{q} \oint \frac{ds}{t} = \oint \frac{S_\omega}{t} \, ds. \tag{6.83}$$



Kuva 6.8 Suorakaiteen muotoinen kotelo, vaihtoehtoinen staattisesti määrätty perusmuoto.

Yhteensopivuusehdon oikean puolen termi on nyt

$$\begin{aligned}\oint \frac{S_\omega}{t}\, ds &= -2\left\{\frac{1}{6}\left(8\tfrac{1}{3} + 0 + 8\tfrac{1}{3}\right)\frac{20}{0.1} + \frac{1}{6}\left(8\tfrac{1}{3} + 4\cdot 12.5 + 8\tfrac{1}{3}\right)\frac{10}{0.1}\right\} \\ &= -3333.33, \end{aligned} \tag{6.84}$$

ja aukileikkauskohdan vuoksi tulee

$$\bar{q} = \frac{\oint S_\omega \dfrac{ds}{t}}{\oint \dfrac{ds}{t}} = \frac{-3333.33}{600} = -5.555. \tag{6.85}$$

Kuvassa 6.9c on esitetty leikkausvuon jakauma

$$S_{\hat{\omega}} = S_\omega - \bar{q} = -(q^a + \bar{q}) \tag{6.86}$$

kotelon seinämässä vääntömomentista M_ω, kun suhde $M_\omega/I_\omega = 1$.

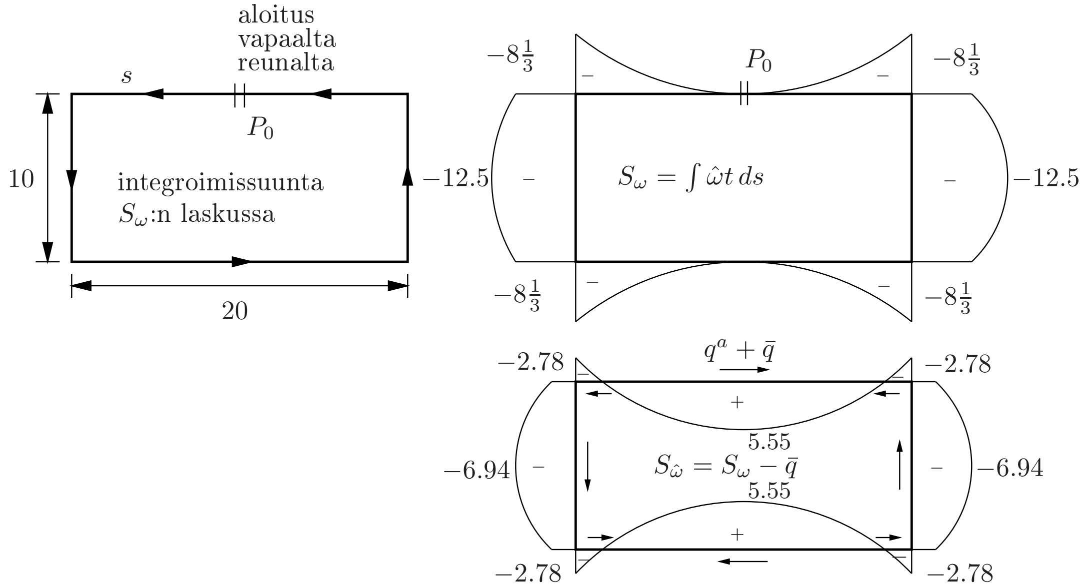
Esimerkki 6.6 *Määritetään kuvan 6.10 kaksikoteloisen poikkileikkauksen vääntökeskiön asema ja leikkausvuon jakauma vääntömomentista.*

Poikkileikkauksen painopisteen etäisyys vasemmasta reunasta on

$$e_x = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{10\cdot 4 + 40\cdot 8 + 20\cdot 2 + 60\cdot 2}{4 + 8 + 2 + 2 + 2} = \frac{520}{18} = 28.88. \tag{6.87}$$

Tehdään aukileikkaukset symmetrisesti. Kuvassa 6.10b on määritetty avonaisen poikkileikkauksen ominaisdeplanaation jakauma pisteen B suhteen. Vapaan väännön normeerattu leikkausvuo ($G\theta = 1$) määritetään yhtälöryhmästä (6.67)

$$\begin{bmatrix} 800 & -200 \\ -200 & 1200 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ 1600 \end{bmatrix}, \tag{6.88}$$



Kuva 6.9 Suorakaiteen muotoinen kotelo, vaihtoehtoisen ratkaisun sektoriaalinen staattinen momentti.

jonka ratkaisu on

$$\tilde{q}_1 = \frac{32}{23} \approx 1.391, \quad \tilde{q}_2 = \frac{36}{23} \approx 1.565. \tag{6.89}$$

Väliseinässä

$$\tilde{q}_{21} = \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1 = \frac{4}{23} \approx 0.17391. \tag{6.90}$$

Kuvassa 6.11a on esitetty jakauma

$$-\hat{\omega}_b = \int \tilde{q}\frac{ds}{t}, \tag{6.91}$$

ja kuvassa 6.11b on yhdistetty jakauma

$$\hat{\omega}_B = \omega_B + \hat{\omega}_b, \tag{6.92}$$

joka riippuu valitusta pisteen B asemasta.

Vääntökeskiön määrittämistä varten lasketaan poikkipintasuureet

$$I_x = \int_A y^2 t\, ds = \frac{7}{4} b^3 t = 1400, \tag{6.93}$$

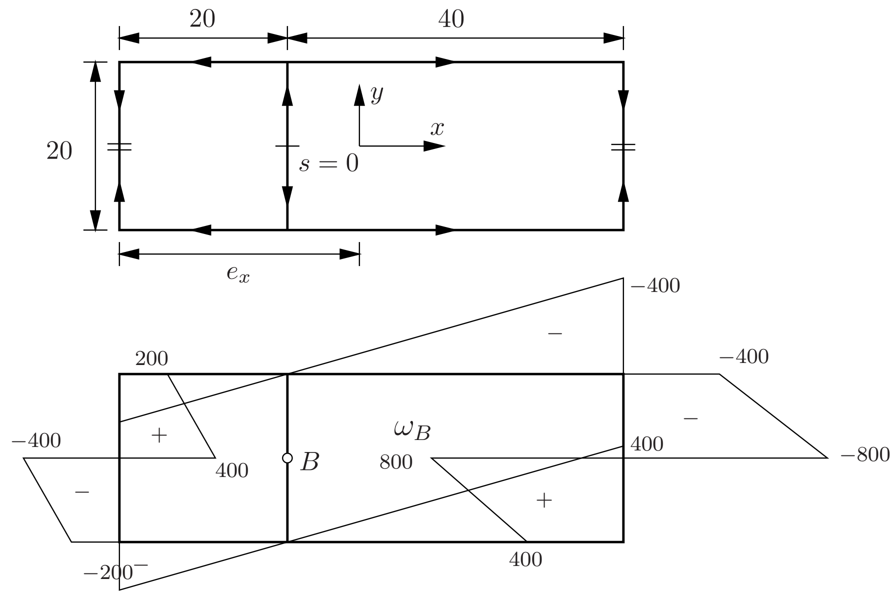
$$\int_A y \hat{\omega}_B t\, ds = 0.1090 \cdot 10^5 \tag{6.94}$$

kuvan 6.12a y-jakauman avulla. Vääntökeskiön x-koordinaatti on

$$x_A = x_B + \frac{\int y \hat{\omega}_B dA}{I_x} = x_B + 7.785. \tag{6.95}$$

Symmetrian vuoksi vääntökeskiö on x-akselilla. Lopullinen ominaisdeplanaation jakauma määritetään kaavalla

$$\hat{\omega}_A = \hat{\omega}_B - (x_A - x_B)y + (y_A - y_B)x + \omega_0. \tag{6.96}$$



Kuva 6.10 Kaksikoteloinen suorakaiteen muotoinen poikkileikkaus.

Esimerkin tapauksessa $\omega_0 = 0$ ja jakauma

$$\hat{\omega}_A = \hat{\omega}_B - 7.785y \tag{6.97}$$

on esitetty kuvassa 6.12b.

Seuraavaksi määritellään koordinaatin s kulkusuunta sektoriaalisen staattisen momentin S_ω laskua varten (kuva 6.13a). Kuvassa 6.13b on kuvan 6.12b sektoriaalisen koordinaatin avulla integroitu jakauma

$$S_\omega(s) = \int_0^s \hat{\omega}_A(s) t\, ds. \tag{6.98}$$

Yhteensopivuusehtojen

$$\left(\oint_i \frac{ds}{t} \right) \bar{q}_i - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} \left(\int_{s_{ik}} \frac{ds}{t} \right) \bar{q}_k = - \oint_i \frac{q^a}{t}\, ds, \quad i = 1, \ldots, n \tag{6.99}$$

oikean puolen vakiot tapauksessa

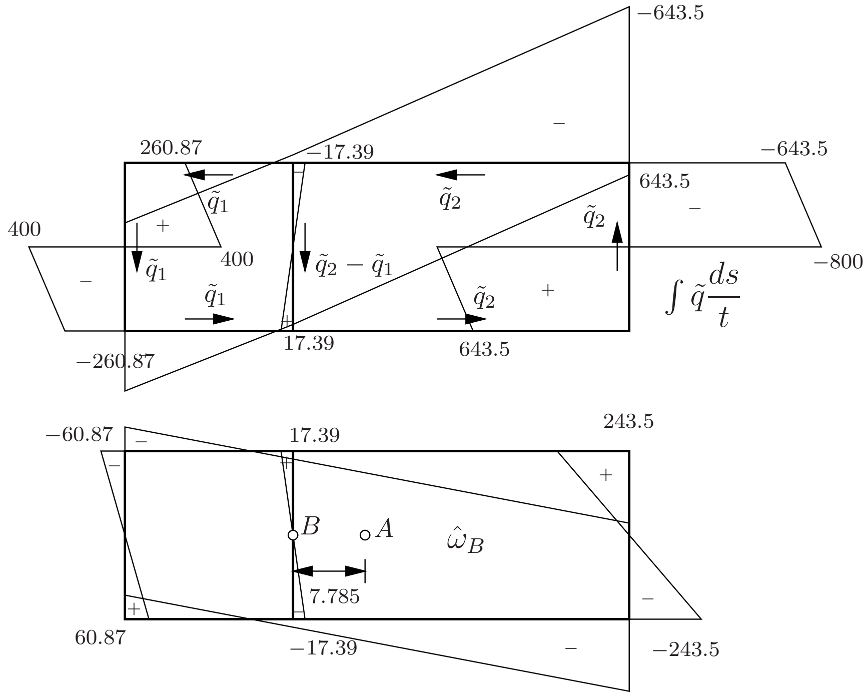
$$q^a = -\frac{M_\omega}{I_\omega} S_\omega = -S_\omega, \tag{6.100}$$

(eli $M_\omega / I_\omega = 1$) ovat

$$\oint_1 S_\omega \frac{ds}{t} = 76522, \quad \oint_2 S_\omega \frac{ds}{t} = 217100. \tag{6.101}$$

Yhteensopivuusehtoryhmän kertoimet on laskettu jo edellä, ja yhtälöryhmäksi saadaan nyt

$$\begin{bmatrix} 800 & -200 \\ -200 & 1200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76522 \\ 217100 \end{bmatrix}, \tag{6.102}$$



Kuva 6.11 Kaksikoteloinen suorakaiteen muotoinen poikkileikkaus, deplanaatio $\hat{\omega}_B$.

jonka ratkaisu on

$$\bar{q}_1 \approx 147.01, \quad \bar{q}_2 \approx 205.42. \tag{6.103}$$

Väliseinän leikkausvuoksi tulee

$$\bar{q}_{21} = \bar{q}_2 - \bar{q}_1 \approx 58.41. \tag{6.104}$$

Leikkausvuon jakauma on esitetty kuvassa 6.14a. Sektoriaalisen staattisen momentin

$$S_{\hat{\omega}} = S_\omega - \bar{q} \tag{6.105}$$

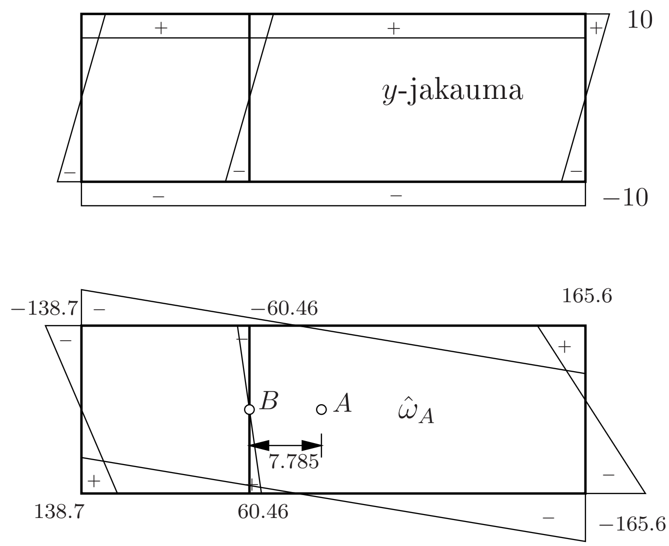
jakauma on esitetty kuvassa 6.14b. Kun $M_\omega / I_\omega = 1$, niin $S_\omega - \bar{q} = -(q^a + \bar{q}) \equiv q^r$. Kuvaan 6.14 on merkitty nuolilla myös leikkausvuon

$$q^r \equiv q^a + \bar{q} \tag{6.106}$$

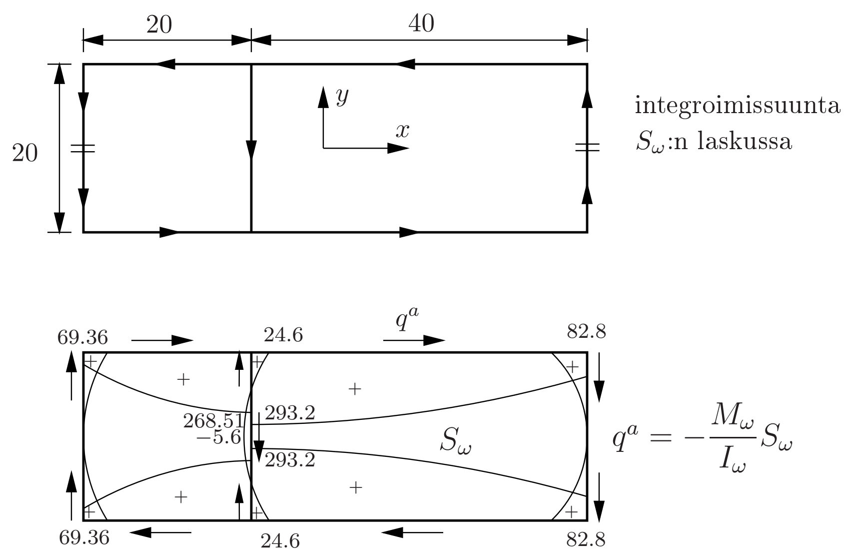
kulkusuunta, joka vastaa positiivista vääntömomenttia. Kokonaisleikkausvuo on

$$q = q^v + q^a + \bar{q}, \tag{6.107}$$

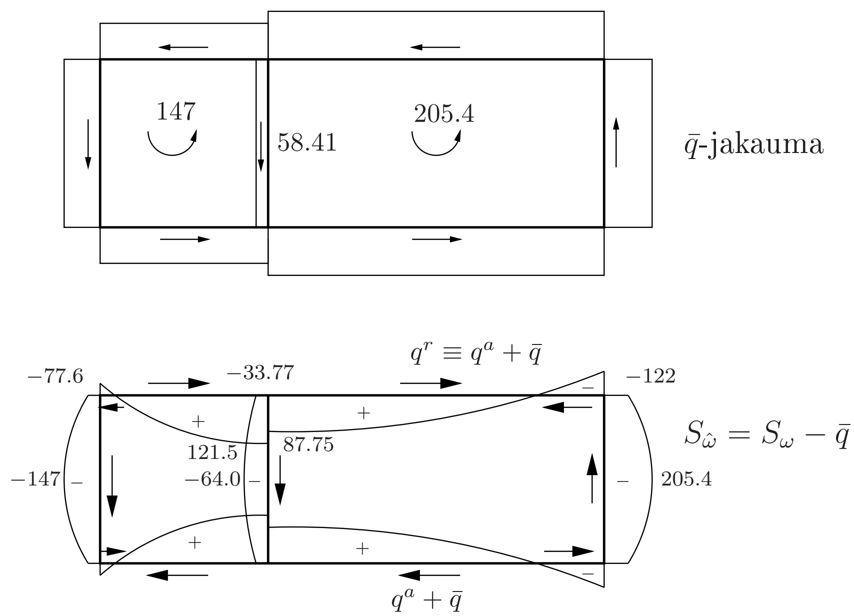
missä ensimmäinen osa liittyy vapaan väännön vääntömomenttiin ja kahden jälkimmäisen osan summa liittyy vääntömomenttiin M_ω.



Kuva 6.12 Kaksikoteloinen suorakaiteen muotoinen poikkileikkaus, deplanaatio $\hat{\omega}_A$.



Kuva 6.13 Kaksikoteloinen suorakaiteen muotoinen poikkileikkaus, sektoriaalinen staattinen momentti S_ω.



Kuva 6.14 Kaksikoteloinen suorakaiteen muotoinen poikkileikkaus, sektoriaalinen staattinen momentti $S_{\hat{\omega}}$ ja leikkausvuo $\bar{q}$.

Luku 7

Kimmoisen laatan perusyhtälöt

Tarkastellaan ohuen laatan teoriaa, jota usein myös Kirchhoffin laattateoriaksi nimitetään. Ohuen laatan tapauksessa voidaan laatan poikittaiset leikkausmuodonmuutokset jättää huomioonottamatta. Homogeenisen ohuen laatan tapauksessa tästä aiheutuva virhe on yleensä merkityksetön. Sensijaan nykyajan rakennetekniikassa tärkeiden kerroksellisten laattojen analysoinnissa ei laatan poikittaisia liukumia voi jättää pois tarkasteluista.

7.1 Laatan kinemaattiset yhtälöt

Ohuen laatan (Kirchhoffin) teorian johtamisessa tehdään otaksumat:

- Laatan taipuma w on pieni eli $w \ll h$ (h on laatan paksuus).
- Laatan keskipinta ei veny.
- Keskitason normaalit säilyvät suorina ja keskitason normaaleina deformoituneessa tilassa (Kirchhoffin otaksuma).

Kirchhoffin otaksuman perusteella ja kuvan 7.1 avulla johdetaan x-akselin suuntaiselle siirtymälle kaava

$$u = -zw_{,x} \equiv -z\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{7.1}$$

Vastaavasti akselin y suunnassa siirtymä on

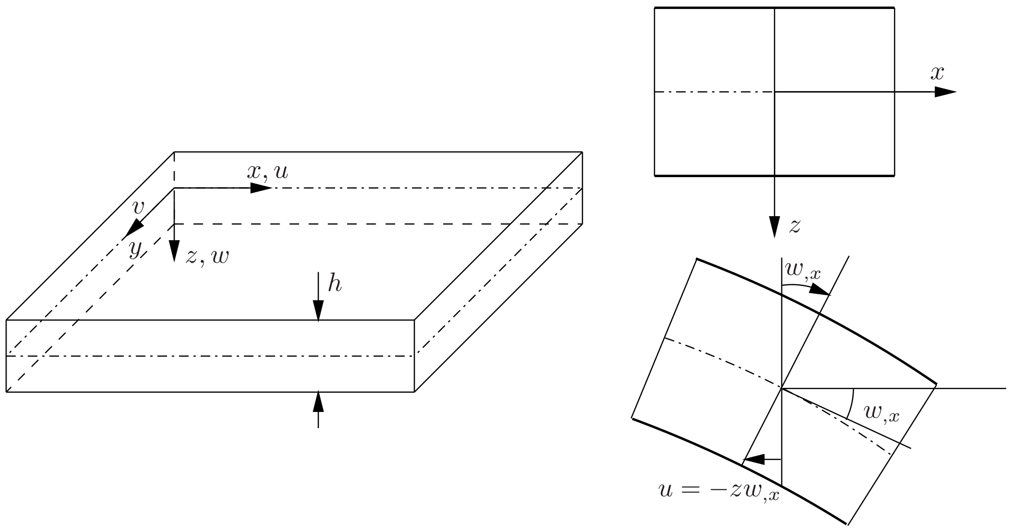
$$v = -zw_{,y} \equiv -z\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{7.2}$$

Kaavojen (7.1) ja (7.2) avulla johdetaan muodonmuutoskomponentit

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -zw_{,xx}, \tag{7.3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -zw_{,yy}, \tag{7.4}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2zw_{,xy}. \tag{7.5}$$



Kuva 7.1 Laatan koordinaatisto ja siirtymä x:n suuuntaan.

Loput muodonmuutoskomponentit ovat nollia ohuen laatan teoriassa, eli

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0. \tag{7.6}$$

Laatan käyristymät määritellään kaavoilla

$$\kappa_x = -w_{,xx}, \quad \kappa_y = -w_{,yy}, \quad \kappa_{xy} = -w_{,xy}. \tag{7.7}$$

7.2 Tasapainoyhtälöt

Laatan jännitysresultantit ovat taivutusmomentit M_x, M_y ja vääntömomentti M_{xy}, jotka määritellään kaavoilla

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_x dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_y dz \text{ ja } M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{xy} dz, \tag{7.8}$$

ja leikkausvoimat

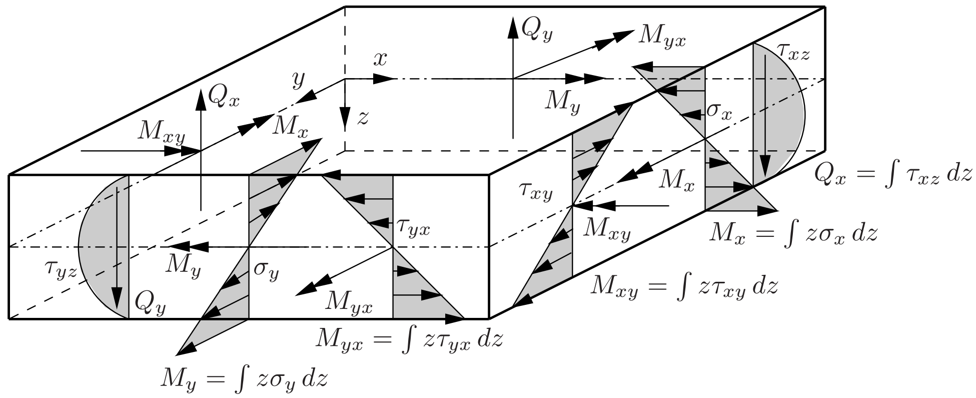
$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \text{ ja } Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz. \tag{7.9}$$

Kuvan 7.3 perusteella johdetaan laatan alkiolle $dx \times dy \times h$ tasapainoyhtälöt

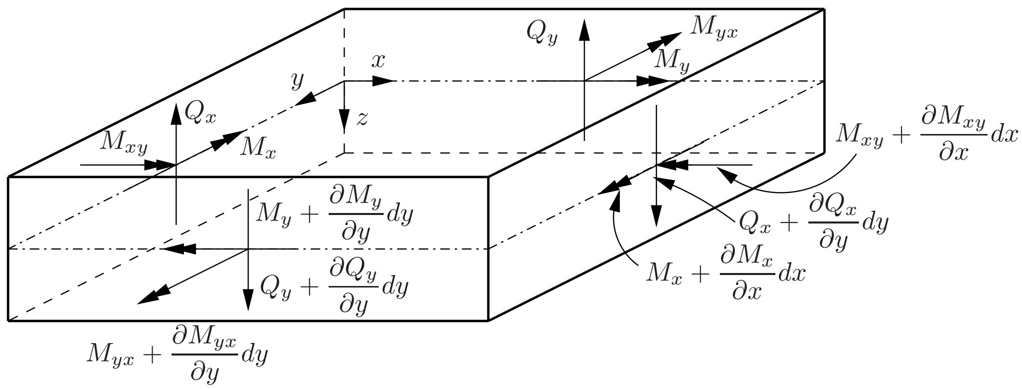
$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0, \tag{7.10}$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \tag{7.11}$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \tag{7.12}$$



Kuva 7.2 Jännitysresultantit.



Kuva 7.3 Laatan differentiaalisen alkion tasapaino.

Kaava (7.10) on akselin z suuntaisten voimien tasapainoehto, jossa $p(x, y)$ on jakautuneen kuorman intensiteetti. Kaavat (7.11) ja (7.12) ovat puolestaan momenttien tasapainoehdot akseleiden x ja y ympäri. Sijoittamalla kaavat (7.11) ja (7.12) laatan pystysuoraan tasapainoehtoon (7.10) tulee

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0. \tag{7.13}$$

7.3 Momenttien ja käyristymien väliset yhtälöt

Etäisyydellä z keskitasosta sijaitsevassa alkiossa $dx \times dy \times dz$ vallitsee tasojännitystila. Isotrooppisen kimmoisen aineen konstitutiiviset yhtälöt, (ns. yleistetty Hooken laki), tulevat tasojännitystilassa muotoon

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \tag{7.14}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \tag{7.15}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \tag{7.16}$$

missä G on liukumoduuli

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{7.17}$$

Sijoittamalla yleistettyyn Hooken lakiin muodonmuutokset

$$\varepsilon_x = z\kappa_x, \quad \varepsilon_y = z\kappa_y, \quad \gamma_{xy} = 2z\kappa_{xy} \tag{7.18}$$

lausuttuina käyristymien avulla saadaan

$$\sigma_x = z\frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_x + \nu\kappa_y) = -z\frac{E}{1-\nu^2}(w_{,xx} + \nu w_{,yy}), \tag{7.19}$$

$$\sigma_y = z\frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_y + \nu\kappa_x) = -z\frac{E}{1-\nu^2}(w_{,yy} + \nu w_{,xx}), \tag{7.20}$$

$$\tau_{xy} = z2G\kappa_{xy} = -z2Gw_{,xy}. \tag{7.21}$$

Sijoittamalla jännityskomponenttien σ_x, σ_y ja τ_{xy} kaavat (7.19), (7.20) ja (7.21) taivutusmomenttien M_x, M_y ja vääntömomentin M_{xy} määrittelykaavoihin (7.8) tulee

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_x dz = \frac{E}{1-\nu^2}(\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz)(\kappa_x + \nu\kappa_y), \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_y dz = \frac{E}{1-\nu^2}(\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz)(\kappa_y + \nu\kappa_x), \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{xy} dz = \frac{E}{1+\nu}(\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz)\kappa_{xy}. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Merkitsemällä, että

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{7.23}$$

on laatan taivutusjäykkyys, saadaan laatan konstitutiiviset yhtälöt (7.22) muotoon

$$M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_y), \tag{7.24}$$

$$M_y = D(\nu\kappa_x + \kappa_y), \tag{7.25}$$

$$M_{xy} = D(1-\nu)\kappa_{xy}. \tag{7.26}$$

Sijoittamalla laatan käyristymien kaavat (7.7) konstitutiivisiin yhtälöihin (7.24), (7.25) ja (7.26) tulee

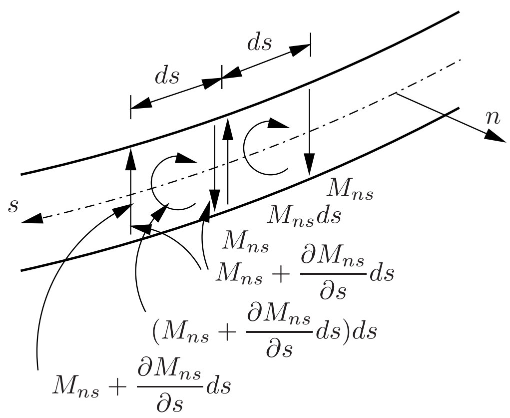
$$M_x = -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}), \tag{7.27}$$

$$M_y = -D(\nu w_{,xx} + w_{,yy}), \tag{7.28}$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu)w_{,xy}. \tag{7.29}$$

Jännityskomponentit momenttien avulla lausuttuina ovat puolestaan

$$\sigma_x = z\frac{12}{h^3}M_x, \quad \sigma_y = z\frac{12}{h^3}M_y, \quad \tau_{xy} = z\frac{12}{h^3}M_{xy}. \tag{7.30}$$



Kuva 7.4 Korvikeleikkausvoima reunalla, jonka normaali on n.

7.4 Leikkausvoimat taipuman avulla

Sijoittamalla konstitutiiviset yhtälöt (7.27), (7.28) ja (7.29) tasapainoehtoihin (7.11) ja (7.12) saadaan leikkausvoimat Q_x ja Q_y lausuttua laatan taipuman w avulla kaavoilla

$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 w), \tag{7.31}$$

$$Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 w), \tag{7.32}$$

missä

$$\nabla^2(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial y^2} \tag{7.33}$$

on Laplacen operaattori.

Otaksumalla laatan poikittaiset leikkausjännitykset τ_{xz} ja τ_{yz} parabolisesti jakautuneiksi laatan paksuuden suunnassa leikkausjännitysten maksimiarvot ovat

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q_x}{h}, \quad (\tau_{yz})_{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{h}. \tag{7.34}$$

7.4.1 Korvikeleikkausvoima

Tarkastellaan kuvan 7.4 laatan kaarevaa reunaa, jota pitkin kulkee koordinaatti s. Reunan normaalin suuntainen koordinaatti on n. Kirchhoffin laattateoriassa määritellään ns. korvikeleikkausvoima

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}. \tag{7.35}$$

Korvikeleikkausvoiman muodostamista on selvitetty kuvassa 7.4. Leikkausvoima Q_n yhdistetään kuvan 7.4 esittämällä tavalla vääntömomenttiin M_{ns} ja saadaan kaava

$$V_n ds = Q_n ds + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} ds. \tag{7.36}$$

M_{ns} on vääntömomentin jakauma, ja $M_{ns}ds$ on matkalla ds kertynyt vääntömomentti, joka voidaan esittää kahden etäisyydellä ds vaikuttavan voiman M_{ns} avulla muodossa

$M_{ns}ds$. Laatan ratkaisu ei muutu tästä korvauksesta kuin paikallisesti reunan välittömässä läheisyydessä. Koska Q_n on yksikköpituutta kohti laskettu leikkausvoima, siihen yhdistetään kahden vierekkäisen voimaparin voimista tuleva netto-osa $\dfrac{\partial M_{ns}}{\partial s}ds$.

Reunalla x = vakio vaikuttavan leikkausvoiman Q_x kaavan (7.11) avulla päätellään, että koordinaatistossa (n, s) leikkausvoima Q_n reunalla n = vakio on

$$Q_n = \frac{\partial M_n}{\partial n} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}, \tag{7.37}$$

ja korvikeleikkausvoima reunalla n = vakio saadaan muotoon

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \frac{\partial M_n}{\partial n} + 2\frac{\partial M_{ns}}{\partial s}. \tag{7.38}$$

Reunalla x = vakio korvikeleikkausvoima on

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\ &= -D\left\{\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right\}, \end{aligned} \tag{7.39}$$

ja vastaavasti reunalla y on vakio

$$\begin{aligned} V_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \\ &= -D\left\{\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right\}. \end{aligned} \tag{7.40}$$

Laatan suorakulmaiseen nurkkaan syntyy kuvan 7.5b mukaisesti voima

$$2M_{xy} = -2D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{7.41}$$

Vääntömomentin epäjatkuvuuskohtiin syntyy samanlainen voima.

7.5 Laatan tasapainoyhtälö taipuman avulla ja reunaehdot

Sijoittamalla momenttien ja taipuman väliset laatan konstitutiiviset yhtälöt (7.27), (7.28) ja (7.29) momenttien avulla lausuttuun tasapainoyhtälöön (7.13) tulee

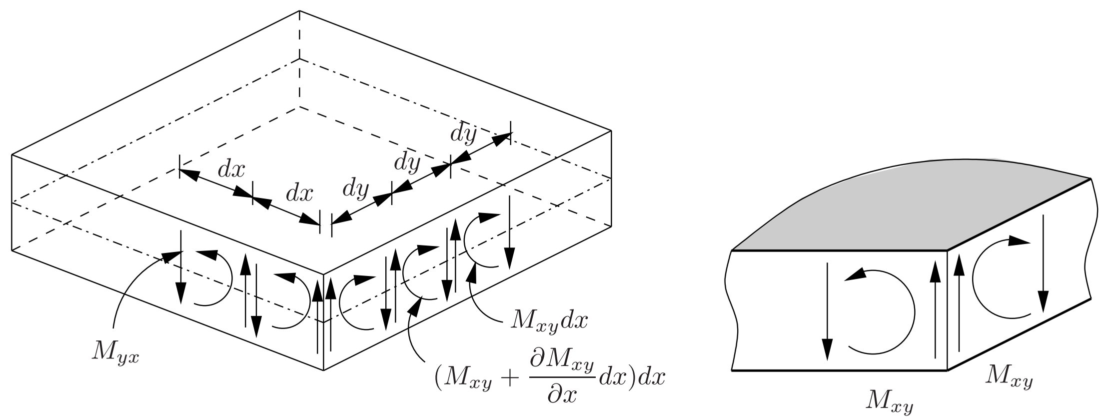
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D}. \tag{7.42}$$

7.5.1 Reunaehdot

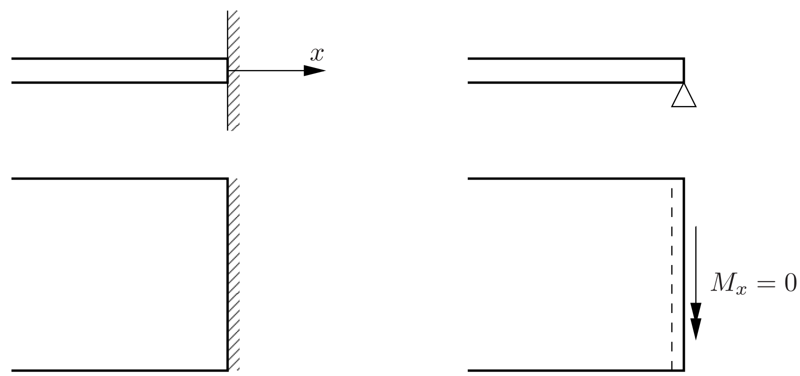
Tarkastellaan suorakaiteenmuotoisen laatan reunaehtoja. Tavanomaiset reunaehtotapaukset ovat:

1. Jäykästi kiinnitetyllä reunalla $(x = a)$

$$w(a, y) = 0, \quad w_{,x}(a, y) = 0. \tag{7.43}$$



Kuva 7.5 a) Korvikeleikkausvoiman muodostaminen reunalla x = vakio, b) nurkkavoima.



Kuva 7.6 a) Jäykästi tuettu reuna, b) vapaasti tuettu reuna.

2. Vapaasti tuetulla reunalla ($x = a$)

$$w(a, y) = 0, \tag{7.44}$$

$$M_x(a, y) = -D[w_{,xx}(a, y) + \nu w_{,yy}(a, y)] = 0. \tag{7.45}$$

Jos vapaasti tuettu reuna pysyy suorana, niin

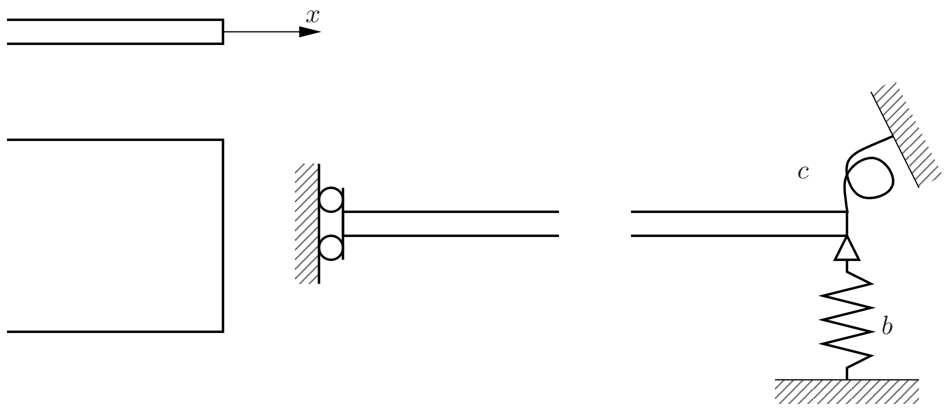
$$w_{,y}(a, y) = 0, \quad w_{,yy}(a, y) = 0, \tag{7.46}$$

ja reunaehdot voidaan antaa muodossa

$$w(a, y) = 0 \text{ ja } \ w_{,xx}(a, y) = 0. \tag{7.47}$$

3. Vapaalla reunalla ei voi syntyä tukireaktioita, joten taivutusmomentin ja korvikeleikkausvoiman on hävittävä, eli

$$M_x(a, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \ \ \text{kun} \ \ x = a, \tag{7.48}$$



Kuva 7.7 a) Vapaa reuna, b) liukutuki, c) kimmoinen kiinnitys.

$$V_x(a,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad \text{kun} \quad x = a. \tag{7.49}$$

4. Liukutuella kiertymä on estetty ja pystysuora tukireaktio on nolla, eli

$$\frac{\partial w(a,y)}{\partial x} = 0, \tag{7.50}$$

$$V_x(a,y) = 0. \tag{7.51}$$

5. Laatan reunan kiinnitys voi olla myös joustava eli kimmoinen. Jos kiinnitys voidaan idealisoida translaatio- ja kierrejousella, niin reunaehdot ovat

$$M_x = c\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \text{kun} \quad x = a, \tag{7.52}$$

$$V_x = -bw, \quad \text{kun} \quad x = a, \tag{7.53}$$

missä c ja b ovat jousivakiot.

6. Laatta voi olla kiinnitetty reunapalkkiin, kuva 7.8.

Reunapalkin taipuman ja väännön differentiaaliyhtälöt ovat

$$EI\frac{d^4 v}{dy^4} = q, \tag{7.54}$$

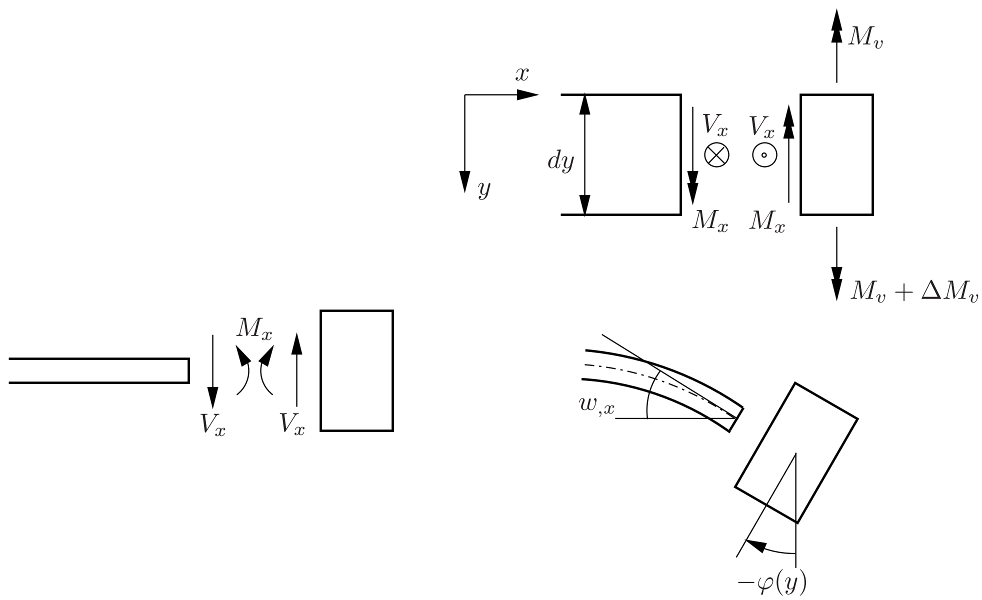
$$GI_v\frac{d^2\varphi}{dy^2} + m = 0, \tag{7.55}$$

missä EI on taivutusjäykkyys ja GI_v on vapaan väännön vääntöjäykkyys. Reunan tasapainotarkastelun perusteella reunapalkin kuormat ovat nyt

$$q(y) = -V_x(a,y) \quad \text{ja} \quad m(y) = -M_x(a,y). \tag{7.56}$$

Reunan $x = a$ yhteensopivuusvaatimuksen mukaan laatan ja palkin taipumat ovat samat reunalla eli

$$w(a,y) = v(y). \tag{7.57}$$



Kuva 7.8 Kiinnitys reunapalkkiin.

Taipuman differentiaaliyhtälön (tasapainoehdon) perusteella

$$EI\frac{d^4w(a,y)}{dy^4} = -V_x(a,y). \tag{7.58}$$

Vastaavasti väännön yhtälöstä seuraa

$$GI_v\frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{\partial w(a,y)}{\partial x}\right) = -M_x(a,y), \tag{7.59}$$

missä

$$\frac{\partial w(a,y)}{\partial x} = -\varphi(y). \tag{7.60}$$

7. Tarkastellaan vielä suorakulmaisen laatan nurkkaa. Esimerkiksi vapaasti tuetun ja tasaisen kuorman kuormittaman neliölaatan nurkassa $x = a$, $y = a$ laatan taipumapinnan kaltevuuskulma $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ on negatiivinen, ja sen itseisarvo pienenee koordinaatin y suuntaan mentäessä. Tästä päätellään, että tarkasteltavassa vapaasti tuetun laatan nurkassa vääntymä $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ on positiivinen ja tukireaktio

$$R = -2M_{xy} = 2D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{7.61}$$

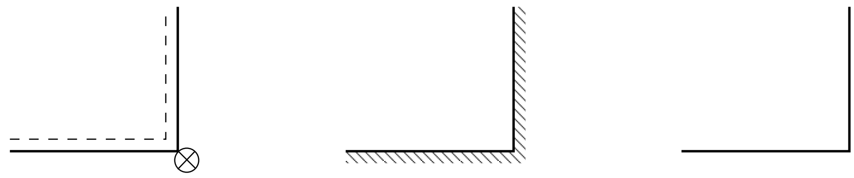
vaikuttaa alaspäin koordinaatin z suuntaan, kuva 7.9a.

Jäykästi tuetun laatan nurkassa tukireaktio R on nolla, koska reunalla ja nurkassa

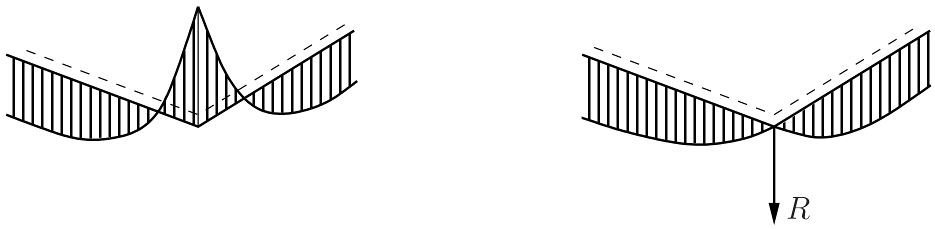
$$w_{,xy} = 0 \quad \text{ja} \quad M_{xy} = -D(1-\nu)w_{,xy} = 0. \tag{7.62}$$

Laatan vapaassa nurkassa

$$R = 0 \quad \Rightarrow \quad w_{,xy} = 0. \tag{7.63}$$



Kuva 7.9 a) Vapaasti tuettu, b) kiinnitetty ja c) vapaa laatan nurkka.



Kuva 7.10 Vapaasti tuetun laatan tukireaktion jakauma. a) Reissnerin-Mindlinin teoria, b) Kirchhoffin teoria.

Kuvaan 7.10 on hahmoteltu tukireaktion jakauma vapaasti tuetun laatan tapauksessa ohuen laatan teorian (Kirchhoffin teoria) ja poikittaiset leikkausmuodonmuutokset huomioonottavan Reissnerin-Mindlinin paksun laatan teorian (kuva 7.10a) mukaan määritettyinä.

7.6 Momenttien muunnoskaavat

Kuvan 7.11 perusteella kirjoitetaan momentin tasapainoehto

$$M_n \Delta s - M_x \Delta y \cos\varphi - M_{xy} \Delta y \sin\varphi - M_y \Delta x \sin\varphi - M_{yx} \Delta x \cos\varphi = 0. \tag{7.64}$$

Koska

$$M_{yx} = M_{xy} \quad \text{ja} \quad \Delta x = \Delta s \sin\varphi, \quad \Delta y = \Delta s \cos\varphi, \tag{7.65}$$

saadaan tasapainoehto muotoon

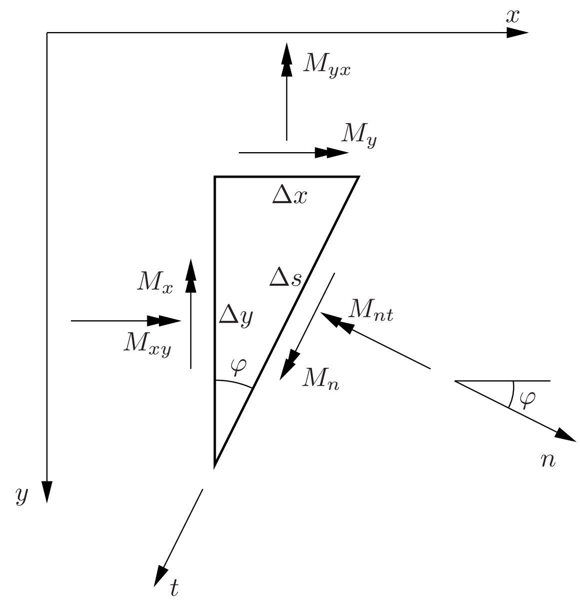
$$\begin{aligned} M_n =& M_x \cos^2\varphi + M_y \sin^2\varphi + 2M_{xy} \sin\varphi\cos\varphi \\ =& \frac{M_x + M_y}{2} + \frac{M_x - M_y}{2} \cos 2\varphi + M_{xy} \sin 2\varphi. \end{aligned} \tag{7.66}$$

Vääntömomentille määritetään vastaavanlainen tasapainoehto kuvan 7.11 avulla ja momentille M_t, joka vaikuttaa koordinaatin n suuntaisessa leikkauksessa, johdetaan tasapainoehto tekemällä leikkaus koordinaatin n suuntaan. Kootaan tulokset matriisimuotoon

$$\begin{Bmatrix} M_n \\ M_t \\ M_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & 2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ -\sin\varphi\cos\varphi & \sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{7.67}$$

Laskemalla yhtälöryhmän (7.67) kaksi ensimmäistä yhtälöä yhteen saadaan

$$M_n + M_t = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)(M_x + M_y) = M_x + M_y, \tag{7.68}$$



Kuva 7.11 Taivutusmomentti ja vääntömomentti leikkauksessa φ.

mikä todistaa sen, että momenttien summa on invariantti eli koordinaatistosta riippumaton.

Taivutusmomentin ääriarvot eli päämomentit määritetään asettamalla

$$\frac{dM_n}{d\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan 2\varphi = \frac{2M_{xy}}{M_x - M_y}, \tag{7.69}$$

josta saadaan päämomentin suunta.

Päämomentit voidaan myös määrittää lineaarialgebran keinoin momenttimatriisin ominaisarvoina eli vaatimalla

$$\begin{vmatrix} M_x - M & M_{xy} \\ M_{xy} & M_y - M \end{vmatrix} = 0, \tag{7.70}$$

mistä seuraa tuntemattomalle M toisen asteen yhtälö

$$M_x M_y - (M_x + M_y)M + M^2 - M_{xy}^2 = 0, \tag{7.71}$$

josta saadaan juuret eli päämomentit

$$M_{1,2} = \frac{M_x + M_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4M_{xy}^2}. \tag{7.72}$$

Kun päämomentti M_1 on ratkaistu, niin pääsuunta ratkeaa yhtälöryhmästä

$$\begin{bmatrix} M_x - M_1 & M_{xy} \\ M_{xy} & M_y - M_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.73}$$

Ensimmäisen yhtälön perusteella tulee

$$(M_x - M_1)a_x + M_{xy}a_y = 0 \tag{7.74}$$

eli

$$\tan\varphi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{M_1 - M_x}{M_{xy}} = \frac{M_{xy}}{M_1 - M_y}, \tag{7.75}$$

joka määrittää päämomentin suunnan.

7.7 Momenttisumma

Taivutusmomenttien summa

$$M_x + M_y = -D(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D(1+\nu)\nabla^2 w \tag{7.76}$$

on invariantti eli koordinaatistosta riippumaton. Määritellään **momenttisumma**

$$M = \frac{M_x + M_y}{1+\nu} = -D\nabla^2 w. \tag{7.77}$$

Leikkausvoimat voidaan nyt lausua suureen M avulla muodossa

$$Q_x = \frac{\partial M}{\partial x}, \quad Q_y = \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{7.78}$$

Laatan taipuman differentiaaliyhtälö

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad \text{eli} \quad \nabla^2(\nabla^2 w) = \frac{p}{D} \tag{7.79}$$

voidaan suureen M avulla jakaa kahdeksi toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöksi

$$\nabla^2\left(-\frac{M}{D}\right) = \frac{p}{D} \quad \text{eli} \quad \nabla^2 M = -p \tag{7.80}$$

ja

$$\nabla^2 w = -\frac{M}{D}. \tag{7.81}$$

Neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \tag{7.82}$$

on näin saatu jaetuksi kahdeksi toisen kertaluvun yhtälöksi

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D}. \tag{7.83}$$

Jos ensimmäisestä yhtälöstä saadaan ratkaistua momenttisumma M, niin toisesta yhtälöstä voidaan määrittää laatan taipuma. Näin voidaan menetellä esim. ratkaistaessa differenssimenetelmällä vapaasti tuetun suorakaidelaatan taipumia. Sen sijaan, jos reunaehto on annettava taipuman avulla, menettely ei onnistu.

Luku 8

Navierin ratkaisu vapaasti tuetulle suorakaidelaatalle

Suorakaiteen muotoiselle laatalle voidaan löytää differentiaaliyhtälön $\nabla^4 w = p/D$ ratkaisu sarjakehitelmän avulla kehittämällä sekä taipuma w että jakautuneen kuorman intensiteetti p Fourier-sarjoiksi. Jos laatan kaikki reunat ovat vapaasti tuetut, niin laatan taipuman ratkaisu voidaan Navierin mukaan esittää Fourier-sarjana koordinaattien x ja y suunnissa (kaksoissarjana). Kun laatan taipuman lauseke on saatu selville, niin taivutusmomenttien, vääntömomentin ja leikkausvoimien lausekkeet ja jakaumat saadaan derivoimalla ja kombinoimalla taipuman kaavasta.

Kuvan 8.1 vapaasti tuetun suorakaidelaatan reunaehdot

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{kun} \quad x = 0 \quad \text{ja} \quad x = a, \tag{8.1}$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \text{kun} \quad y = 0 \quad \text{ja} \quad y = b, \tag{8.2}$$

toteutuvat valitsemalla taipumalle kaksoissinisarjakehitelmä

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \tag{8.3}$$

missä on merkitty

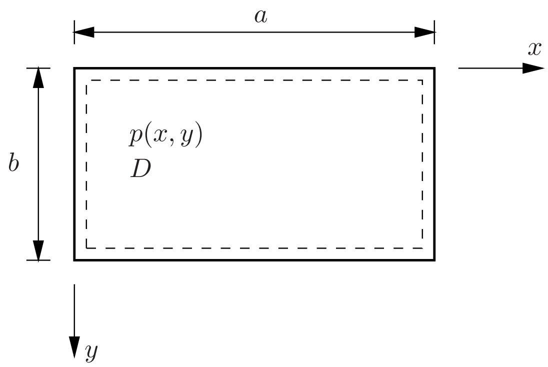
$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a} \quad \text{ja} \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}. \tag{8.4}$$

Taipuman lisäksi myös kuormitus on kehitettävä sarjaksi. Tietyllä välillä $(0, a)$ määritelty funktio $f(x)$ voidaan jatkaa jaksollisesti parillisesti tai parittomasti. Pariton funktio

$$f(x) = -f(-x) \tag{8.5}$$

kehitetään Fourier-sinisarjaksi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \tag{8.6}$$



Kuva 8.1 Vapaasti tuettu suorakaidelaatta.

missä kertoimet lasketaan kaavalla

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} \, dx. \tag{8.7}$$

Vastaavasti (x, y)-tasossa määritelty pariton funktio $f(x, y)$ kehitetään kaksoissinisarjaksi

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \tag{8.8}$$

kertoimin

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dx \, dy. \tag{8.9}$$

Jakautunut kuorma $p(x, y)$ kehitetään Fourier-sarjaksi

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \tag{8.10}$$

jonka kertoimet ovat

$$b_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dx \, dy. \tag{8.11}$$

Sijoittamalla taipuman ja kuorman sarjakehitelmät laatan differentiaaliyhtälöön

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \tag{8.12}$$

saadaan

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [a_{mn}(\alpha_m^4 + 2\alpha_m^2 \beta_n^2 + \beta_n^4) - \frac{b_{mn}}{D}] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y = 0. \tag{8.13}$$

Jotta yhtälö (8.13) toteutuisi kaikilla arvoilla x ja y, on hakasuluissa olevan lausekkeen oltava nolla, ja tällöin

$$a_{mn} = \frac{b_{mn}}{D\pi^4 \left(\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad , \quad m, n = 1, 2, \ldots . \tag{8.14}$$

8.1 Tasaisesti kuormitettu vapaasti tuettu laatta

Tasaisen kuorman tapauksessa merkitään $p(x,y) = p_0$. Kuorman Fourier-sarjan kertoimet ovat nyt

$$
\begin{aligned}
b_{mn} =& \frac{4p_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin\alpha_m x \sin\beta_n y \, dx \, dy \\
=& \frac{4p_0}{ab} \Big/_0^a -\frac{1}{\alpha_m}\cos\alpha_m x \Big/_0^b -\frac{1}{\beta_n}\cos\beta_n y \\
=& \frac{4p_0}{ab}\frac{ab}{\pi^2 mn}(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi) \\
=& \frac{4p_0}{\pi^2 mn}[1-(-1)^m][1-(-1)^n]
\end{aligned} \tag{8.15}
$$

eli

$$
b_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn}, \quad \text{kun} \quad m,n = 1,3,5,\ldots \tag{8.16}
$$

ja

$$
b_{mn} = 0, \quad \text{kun} \quad m,n = 2,4,6,\ldots\ . \tag{8.17}
$$

Edellä olevissa kaavoissa on jälleen merkitty

$$
\alpha_m = \frac{m\pi}{a} \quad \text{ja} \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}. \tag{8.18}
$$

Taipuman lausekkeeksi on näin saatu

$$
w(x,y) = \frac{16p_0}{\pi^6 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}}{mn\left[\left(\dfrac{m}{a}\right)^2+\left(\dfrac{n}{b}\right)^2\right]^2}. \tag{8.19}
$$

Taivutusmomenttien ja vääntömomentin lausekkeet saadaan derivoimalla ja kombinoimalla taipuman lausekkeesta. Sijoittamalla taipuman sarjakehitelmä (8.19) momenttien kaavoihin

$$
M_x = -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}), \tag{8.20}
$$

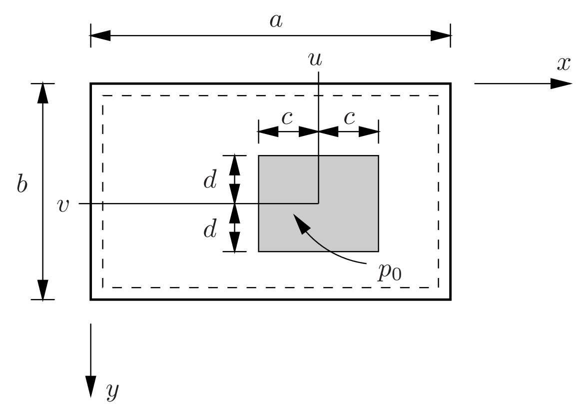
$$
M_y = -D(w_{,yy} + \nu w_{,xx}), \tag{8.21}
$$

$$
M_{xy} = -D(1-\nu)w_{,xy}, \tag{8.22}
$$

tulee

$$
M_x = \frac{16p_0}{\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{m}{a}\right)^2+\nu\left(\dfrac{n}{b}\right)^2}{mn\left[\left(\dfrac{m}{a}\right)^2+\left(\dfrac{n}{b}\right)^2\right]^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{8.23}
$$

$$
M_y = \frac{16p_0}{\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu\left(\dfrac{m}{a}\right)^2+\left(\dfrac{n}{b}\right)^2}{mn\left[\left(\dfrac{m}{a}\right)^2+\left(\dfrac{n}{b}\right)^2\right]^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{8.24}
$$



Kuva 8.2 Vapaasti tuettu laatta, palakuorma.

$$M_{xy} = -\frac{16p_0(1-\nu)}{\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{m}{a}\frac{n}{b}}{mn\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}. \tag{8.25}$$

8.1.1 Palakuorma p_0 suorakaidealueessa

Kuvan 8.2 palakuorman tapauksessa kuorman Fourier-sarjan kertoimet ovat

$$\begin{aligned} b_{mn} =& \frac{4p_0}{ab}\int_{v-d}^{v+d}\int_{u-c}^{u+c}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy \\ =& \frac{4p_0}{ab}\left(-\frac{a}{m\pi}\right)\left[\cos\frac{m\pi(u+c)}{a}-\cos\frac{m\pi(u-c)}{a}\right]\cdot \\ &\cdot\left(-\frac{b}{n\pi}\right)\left[\cos\frac{n\pi(v+d)}{b}-\cos\frac{n\pi(v-d)}{b}\right] \\ =& \frac{16p_0}{\pi^2 mn}\sin\frac{m\pi u}{a}\sin\frac{m\pi c}{a}\sin\frac{n\pi v}{b}\sin\frac{n\pi d}{b}. \end{aligned} \tag{8.26}$$

Kaavan (8.26) kehittelyssä on käytetty hyväksi yhtälöä

$$\cos(a-b)-\cos(a+b) = 2\sin a\sin b. \tag{8.27}$$

Erikoistapaus 1. Tasainen kuorma koko laatalla

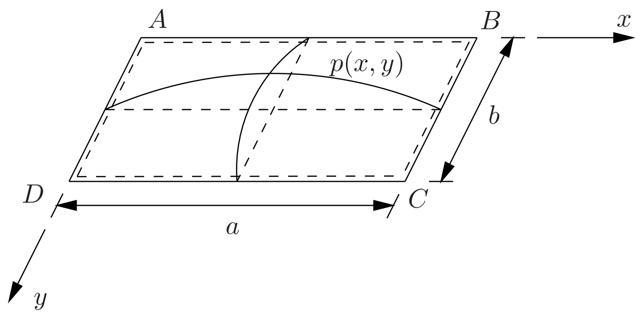
Kaavasta (8.26) saadaan erikoistapauksena tasaisesti kuormitetun laatan kuorman sarjakehitelmän kertoimet ja ratkaisu asettamalla

$$u=\frac{a}{2},\quad v=\frac{b}{2},\quad c=\frac{a}{2},\quad d=\frac{b}{2}. \tag{8.28}$$

Erikoistapaus 2. Pistekuorma kohdassa $x = u$ ja $y = v$

Palakuorman resultantti on

$$P = 4cdp_0, \tag{8.29}$$



Kuva 8.3 Sinifunktion muotoinen jakautunut kuorma suorakaidelaatalla.

ja resultantin avulla lausuttuna kuorman sarjakehitelmän kertoimet ovat

$$b_{mn} = \frac{4P}{\pi^2 mncd} \sin\frac{m\pi u}{a} \sin\frac{n\pi v}{b} \sin\frac{m\pi c}{a} \sin\frac{n\pi d}{b}. \tag{8.30}$$

Käytetään hyväksi sinifunktion ominaisuutta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{8.31}$$

jonka perusteella saadaan

$$b_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin\frac{m\pi u}{a} \sin\frac{n\pi v}{b}, \quad \text{kun} \quad m, n = 1, 2, \ldots. \tag{8.32}$$

Taipuman kaavaksi tulee

$$w(x,y) = \frac{4P}{\pi^4 Dab} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{m\pi u}{a}\sin\dfrac{n\pi v}{b}}{\left[\left(\dfrac{m}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{n}{b}\right)^2\right]^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{8.33}$$

Esimerkki 8.1 *Vapaasti tuetulla suorakaidelaatalla on sinifunktion muotoisesti jakautunut kuorma. Määritetään laatan taipuma ja voimasuureet.*

Vapaasti tuetun laatan sinifunktion muotoisesti jakautuneen kuorman kaava on

$$p(x,y) = p_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), \tag{8.34}$$

missä p_0 on kuorman intensiteetti laatan keskellä.

Kuorma on nyt jo valmiiksi Fourierin sarjan muodossa, jossa on yksi termi. Taipuman sarjakehitelmään tulee myös vain yksi termi

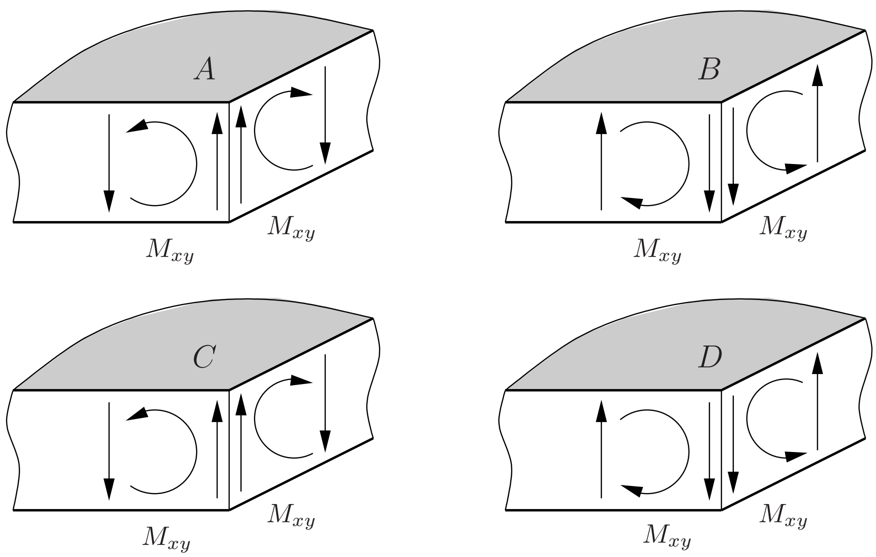
$$w(x,y) = A \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right). \tag{8.35}$$

Sijoittamalla reunaehdot toteuttava taipuman lauseke laatan differentiaaliyhtälöön

$$\nabla^4 w(x,y) = \frac{p(x,y)}{D} \tag{8.36}$$

saadaan ratkaistua kerroin A ja tehtävän tarkka taipuman lauseke

$$w(x,y) = \frac{1}{D} \frac{p_0}{\left\{\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi}{b}\right)^2\right\}^2} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}. \tag{8.37}$$



Kuva 8.4 Nurkkavoimat R.

Taipuman lausekkeesta määritetään vääntömomentti

$$M_{xy} = -D(1-\nu)w_{,xy} = -\frac{(1-\nu)p_0}{\left\{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right\}^2}\frac{\pi}{a}\frac{\pi}{b}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}. \tag{8.38}$$

Laatan nurkassa $(x, y) = (0, 0)$

$$M_{xy}(0,0) = -\frac{(1-\nu)p_0}{\pi^2 ab\left\{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right\}^2} \equiv -H. \tag{8.39}$$

Vastaavasti muissa laatan nurkissa saadaan vääntömomenteiksi

$$M_{xy}(a,0) = H, \tag{8.40}$$

$$M_{xy}(a,b) = -H, \tag{8.41}$$

$$M_{xy}(0,b) = H. \tag{8.42}$$

Vapaasti tuetun laatan nurkkiin A, B, C ja D syntyvät vääntömomentin vaikutuksesta voimat

$$|R| = 2|M_{xy}|. \tag{8.43}$$

Nurkissa A, B, C ja D

$$R_A = -2M_{xy_A}, \quad R_B = 2M_{xy_B}, \tag{8.44}$$

$$R_C = -2M_{xy_C}, \quad R_D = 2M_{xy_D}, \tag{8.45}$$

eli

$$R_A = R_B = R_C = R_D = 2H. \tag{8.46}$$

Leikkausvoimiksi saadaan

$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) = \frac{p_0}{\pi a\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}\sin\frac{\pi y}{b}\cos\frac{\pi x}{a}, \tag{8.47}$$

$$Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) = \frac{p_0}{\pi b\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}. \tag{8.48}$$

Leikkausvoimat laatan reunoilla ovat:

$$BC: \quad Q_x = -\frac{p_0}{\pi a\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)}\sin\frac{\pi y}{b}, \tag{8.49}$$

$$AD: \quad Q_x = \frac{p_0}{\pi a\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)}\sin\frac{\pi y}{b}, \tag{8.50}$$

$$DC: \quad Q_y = -\frac{p_0}{\pi b\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)}\sin\frac{\pi x}{a}, \tag{8.51}$$

$$AB: \quad Q_y = \frac{p_0}{\pi b\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)}\sin\frac{\pi x}{a}. \tag{8.52}$$

- Reunalla AB $Q_n = -Q_y$,
- reunalla BC $Q_n = Q_x$,
- reunalla CD $Q_n = Q_y$ ja
- reunalla DA $Q_n = -Q_x$.

Laketaan reunaa pitkin integraali $\oint Q_n\,dn$. Sen laskussa tarvittavat integraalit ovat

$$\int_0^a \sin\frac{\pi x}{a}\,dx = \frac{2a}{\pi} \quad \text{ja} \quad \int_0^b \sin\frac{\pi y}{b}\,dy = \frac{2b}{\pi}. \tag{8.53}$$

Leikkausvoiman integraali reunaa pitkin on

$$\oint Q_n\,dn = -\frac{p_0}{\pi\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)}2\left(\frac{2a}{\pi b}+\frac{2b}{\pi a}\right) = -\frac{4p_0 ab}{\pi^2}. \tag{8.54}$$

Integroimalla jakautunut kuorma laatan pinnan yli saadaan

$$\int_0^a\int_0^b p_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,dx\,dy = \frac{4ab}{\pi^2}p_0 \tag{8.55}$$

ja huomataan, että sinikuplan muotoisen kuorman resultantti on yhtä suuri kuin reunan leikkausvoimien integraalin itseisarvo.

Korvikeleikkausvoimat ovat

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad V_y = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, \tag{8.56}$$

ja niiden jälkimmäiset termit ovat puolestaan

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D(1-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2} = \frac{(1-\nu)p_0}{\pi ab^2\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)^2}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}, \tag{8.57}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D(1-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = \frac{(1-\nu)p_0}{\pi a^2 b\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)^2}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}. \tag{8.58}$$

Vääntömomenttien derivaatat laatan reunoilla ovat

$$BC: \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -\frac{(1-\nu)p_0}{\pi a b^2\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)^2}\sin\frac{\pi y}{b} \equiv -\Gamma\sin\frac{\pi y}{b}, \tag{8.59}$$

$$AD: \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \frac{(1-\nu)p_0}{\pi a b^2\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)^2}\sin\frac{\pi y}{b} \equiv \Gamma\sin\frac{\pi y}{b}, \tag{8.60}$$

$$DC: \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -\frac{(1-\nu)p_0}{\pi a^2 b\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)^2}\sin\frac{\pi x}{a} \equiv -\Psi\sin\frac{\pi x}{a}, \tag{8.61}$$

$$AB: \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \frac{(1-\nu)p_0}{\pi a^2 b\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)^2}\sin\frac{\pi x}{a} \equiv \Psi\sin\frac{\pi x}{a}. \tag{8.62}$$

- Sivulla AB $ds = dx$, $M_{ns} = -M_{xy}$, $M_{ns,s} = -M_{xy,x}$,
- sivulla BC $ds = dy$, $M_{ns} = M_{xy}$, $M_{ns,s} = M_{xy,y}$,
- sivulla CD $ds = -dx$, $M_{ns} = -M_{xy}$, $M_{ns,s} = M_{xy,x}$ ja
- sivulla DA $ds = -dy$, $M_{ns} = M_{xy}$, $M_{ns,s} = -M_{xy,y}$.

Vääntömomentin s-derivaatan integraali reunaa pitkin on

$$\oint \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}\,ds = -\left(2\Gamma\frac{2b}{\pi} + 2\Psi\frac{2a}{\pi}\right) = -\frac{8(1-\nu)p_0}{\pi^2 ab\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)^2}. \tag{8.63}$$

Nurkkavoimien summaksi tulee

$$\sum R_i = \frac{8(1-\nu)p_0}{\pi^2 ab\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)^2} \tag{8.64}$$

eli nurkkavoimien summa on sama kuin vääntömomentin s-derivaatan integraalin itseisarvo reunan ympäri.

Sovellutus. Valitaan laatalle mitat $a = 3$, $b = 2$ ja $\nu = 0.3$. Tällöin nurkkavoimat ovat

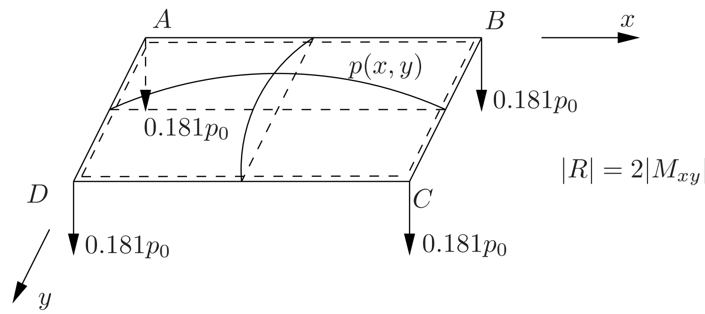
$$2H \approx 0.181p_0. \tag{8.65}$$

Reunan leikkausvoimien maksimiarvot ovat

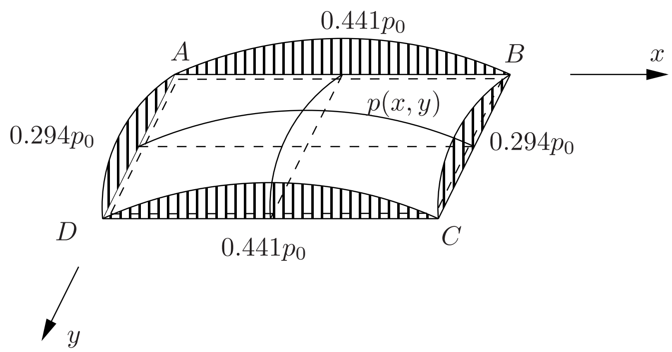
$$|Q_x|_{\max} \approx 0.294p_0, \quad |Q_y|_{\max} \approx 0.441p_0. \tag{8.66}$$

Vääntömomentin derivaattojen maksimiarvot laatan reunoilla ovat esimerkin tapauksessa

$$|M_{xy,x}|_{\max} \approx 0.095p_0, \quad |M_{xy,y}|_{\max} \approx 0.142p_0. \tag{8.67}$$



Kuva 8.5 Nurkkavoimat.



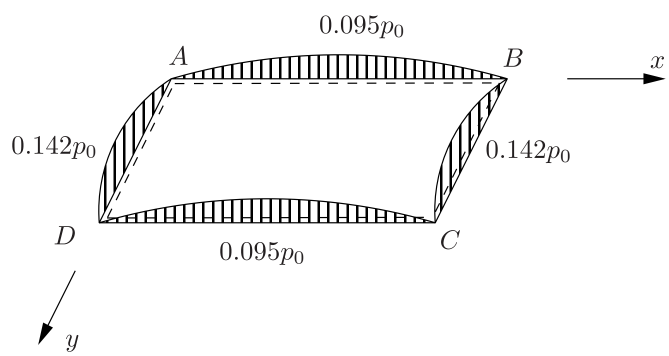
Kuva 8.6 Leikkausvoima Q_n.

Vapaasti tuetun laatan reunalla vaikuttava voimasuureen jakauma $M_{ns,s}$ (vääntömomentin derivaatta) on tasapainossa nurkkavoimien kanssa. Sen jakaumat laatan eri reunoilla ovat muotoa

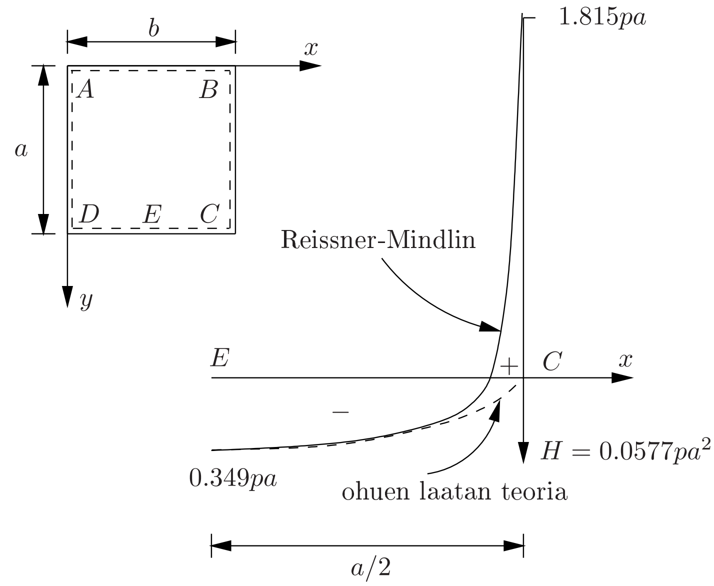
$$f \sin \frac{\pi x}{a} \quad \text{ja} \quad g \sin \frac{\pi y}{b}, \tag{8.68}$$

ja niiden resultantit ovat

$$\int_0^a f \sin \frac{\pi x}{a} \, dx = \frac{2af}{\pi} \quad \text{ja} \quad \int_0^b g \sin \frac{\pi y}{b} \, dy = \frac{2bg}{\pi}. \tag{8.69}$$



Kuva 8.7 Vääntömomentin derivaatta $M_{ns,s}$.



Kuva 8.8 Tukireaktio reunalla EC.

Sovellusesimerkin tapauksessa saadaan

$$\oint \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}\, ds = 2 \cdot \frac{1}{\pi}(2 \cdot 3 \cdot 0.095 + 2 \cdot 2 \cdot 0.142)p_0 \approx 0.72447 p_0, \tag{8.70}$$

ja nurkkavoimien summaksi tulee

$$4 \cdot H = 4 \cdot 0.181 p_0 = 0.724 p_0. \tag{8.71}$$

Reunoilla vaikuttava leikkausvoima Q_n on tasapainossa kuorman $p(x, y)$ kanssa:

$$\int_A p(x,y) dA = \oint Q_n(s)\, ds, \tag{8.72}$$

$$\int_0^a \int_0^b p_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}\, dx\, dy = \frac{4ab}{\pi^2} p_0 = \frac{4 \cdot 6}{\pi^2} p_0 \approx 2.4317 p_0, \tag{8.73}$$

$$\oint Q_n\, ds = 2 \cdot \frac{1}{\pi}(2 \cdot 3 \cdot 0.441 + 2 \cdot 2 \cdot 0.294)p_0 \approx 2.43 p_0. \tag{8.74}$$

Antamalla vapaasti tuetun neliölaatan kuormaksi tasaisen painekuorman sarjakehitelmän ensimmäinen termi

$$p(x,y) = \frac{16 p_0}{\pi^2} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \tag{8.75}$$

saadaan kuvassa 8.8 esitetty tukireaktion jakauma reunan osalla EC. Kuvassa on vertailun vuoksi esitetty myös Reissnerin-Mindlinin laattateorian antama tukireaktiojakauma, kun laatan jänteen ja paksuuden suhde on $a/h = 20$.

Luku 9

Lévyn ratkaisumenetelmä

Lévyn ratkaisumenetelmä soveltuu tapauksiin, joissa suorakaidelaatan kaksi vastakkaista reunaa ovat vapaasti tuetut. Taipuma voidaan esittää Lévyn mukaan muodossa

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \alpha_n x, \tag{9.1}$$

missä on merkitty

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}. \tag{9.2}$$

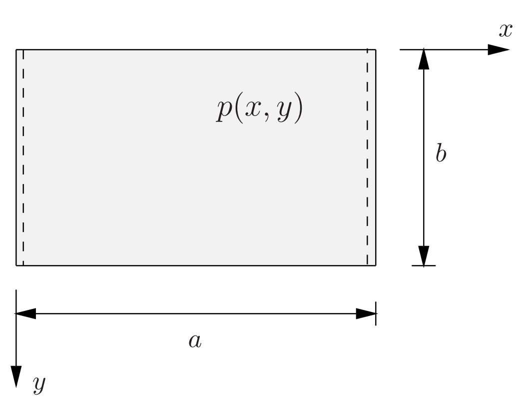
Kehitelmä toteuttaa laatan reunoilla $x = 0$ ja $x = a$ reunaehdot

$$w(0,y) = w(a,y) = 0, \tag{9.3}$$

$$\frac{\partial^2 w(0,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(a,y)}{\partial x^2} = 0. \tag{9.4}$$

Kuorma $p(x,y)$ kehitetään niinikään sarjaksi

$$p(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(y) \sin \alpha_n x \tag{9.5}$$



Kuva 9.1 Reunoilta $x = 0$ ja $x = a$ vapaasti tuettu suorakaidelaatta.

kertoimin

$$p_n(y) = \frac{2}{a}\int_0^a p(x,y)\sin\alpha_n x\,dx. \tag{9.6}$$

Sijoittamalla kuorman ja taipuman sarjakehitelmät laatan taipuman differentiaaliyhtälöön

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D} \tag{9.7}$$

saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\alpha^4 Y_n(y) - 2\alpha_n\frac{d^2Y_n(y)}{dy^2} + \frac{d^4Y_n(y)}{dy^4} - \frac{p_n(y)}{D}\right\}\sin\alpha_n x = 0. \tag{9.8}$$

Yhtälön täytyy toteutua kaikilla x:n arvoilla, joten sulkulausekkeen on hävittävä, eli

$$\alpha^4 Y_n(y) - 2\alpha_n\frac{d^2Y_n(y)}{dy^2} + \frac{d^4Y_n(y)}{dy^4} = \frac{p_n(y)}{D}, \quad n = 1,2,3,\ldots\ . \tag{9.9}$$

Laatan osittaisdifferentiaaliyhtälö on näin saatu muunnetuksi tavalliseksi differentiaaliyhtälöksi. Yhtälön homogeenisen osan ratkaisu johdetaan tekemällä yrite

$$Y_n(y) = e^{ry} \tag{9.10}$$

ja sijoittamalla yrite homogeeniseen differentiaaliyhtälöön, jolloin saadaan karakteristinen neljännen asteen polynomiyhtälö, jonka neljää juurta vastaava ratkaisu on

$$Y_n(y) = \sum_{k=1}^{4} C_k e^{r_k y}. \tag{9.11}$$

Eulerin kaavojen avulla ratkaisu muunnetaan muotoon

$$Y_n(y) = (A_n + B_n\alpha_n y)\cosh\alpha_n y + (C_n + D_n\alpha_n y)\sinh\alpha_n y. \tag{9.12}$$

Reunaehtojen muodostamisessa tarvitaan funktion Y_n derivaatat kolmanteen kertalukuun asti, joten lasketaan ne samantien valmiiksi:

$$\frac{dY_n(y)}{dy} = \alpha_n[(A_n + D_n + B_n\alpha_n y)\sinh\alpha_n y + (C_n + B_n + D_n\alpha_n y)\cosh\alpha_n y], \tag{9.13}$$

$$\frac{d^2Y_n(y)}{dy^2} = \alpha_n^2[(A_n + 2D_n + B_n\alpha_n y)\cosh\alpha_n y + (C_n + 2B_n + D_n\alpha_n y)\sinh\alpha_n y], \tag{9.14}$$

$$\frac{d^3Y_n(y)}{dy^3} = \alpha_n^3[(A_n + 3D_n + B_n\alpha_n y)\sinh\alpha_n y + (C_n + 3B_n + D_n\alpha_n y)\cosh\alpha_n y]. \tag{9.15}$$

9.1 Yksityisratkaisu

Kuormatermiä $p_n(y)$ vastaava yksityisratkaisu muodostetaan homogeenisen osan ratkaisun $Y_n(y)$ avulla asettamalla reunaehdot

$$\begin{aligned}\bar{Y}_n(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad A_n = 0,\\ \frac{d\bar{Y}_n(0)}{dy} = 0 \quad &\Rightarrow \quad C_n + B_n = 0,\\ \frac{d^2\bar{Y}_n(0)}{dy^2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad A_n + 2D_n = 0,\\ \frac{d^3\bar{Y}_n(0)}{dy^3} = 1 \quad &\Rightarrow \quad C_n + 3B_n = \frac{1}{\alpha_n^3}.\end{aligned} \tag{9.16}$$

Yhtälöryhmän (9.16) ratkaisu on

$$A_n = D_n = 0, \quad B_n = -C_n = \frac{1}{2\alpha_n^3}. \tag{9.17}$$

Reunaehdot toteuttava funktio on siten

$$\bar{Y}_n(y) = \frac{1}{2\alpha_n^3}(\alpha_n y \cosh \alpha_n y - \sinh \alpha_n y). \tag{9.18}$$

Yksityisratkaisu $Q_n(y)$ muodostetaan nyt kaavalla

$$\begin{aligned}Q_n(y) =& \frac{1}{D}\int_0^y \bar{Y}_n(y-t)p_n(t)dt\\ =& \frac{1}{2\alpha_n^3 D}\int_0^y [\alpha_n(y-t)\cosh \alpha_n(y-t) - \sinh \alpha_n(y-t)]p_n(t)dt.\end{aligned} \tag{9.19}$$

Kokonaisratkaisu on homogeenisen osan ratkaisun ja yksityisratkaisun summa

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(Y_n(y) + Q_n(y))\sin \alpha_n x. \tag{9.20}$$

Homogeenisen osan ratkaisun sisältämät integroimisvakiot A_n, B_n, C_n ja D_n ratkaistaan reunaehdoista.

9.2 Lévyn ratkaisu tapauksessa $p(x,y) = p(x)$

Yksityisratkaisun muodostaminen helpottuu huomattavasti, kun jakautunut kuorma ei riipu koordinaatista y (tai riippuu siitä vain lineaarisesti). Ratkaisua haetaan muodossa

$$\begin{aligned}w(x,y) =& w_h(x,y) + w_p(x,y)\\ =& \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\sin \alpha_n x + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(y)\sin \alpha_n x.\end{aligned} \tag{9.21}$$

Homogeenisen osan ratkaisussa w_h funktio $Y_n(y)$ on kuten edellä

$$Y_n(y) = (A_n + B_n\alpha_n y)\cosh\alpha_n y + (C_n + D_n\alpha_n y)\sinh\alpha_n y. \tag{9.22}$$

Kehitetään kuorma $p(x,y) = p(x)$ sinisarjaksi

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin\alpha_n x \tag{9.23}$$

kertoimin

$$p_n = \frac{2}{a}\int_0^a p(x)\sin\alpha_n x. \tag{9.24}$$

Tasaisen kuorman tapauksessa

$$p_n = \frac{2p_0}{n\pi}[1-(-1)^n] = \begin{cases} \dfrac{4p_0}{n\pi}, & \text{kun} \quad n = 1,3,5,\dots\ , \\ \\ 0, & \text{kun} \quad n = 2,4,6,\dots\ . \end{cases} \tag{9.25}$$

Sijoittamalla $p_n(y)$ yhtälöön

$$\alpha^4 Q_n(y) - 2\alpha_n \frac{d^2Q_n(y)}{dy^2} + \frac{d^4Q_n(y)}{dy^4} = \frac{p_n(y)}{D}, \quad n = 1,2,3,\dots \tag{9.26}$$

tulee

$$Q_n = \frac{p_n}{\alpha_n^4 D} = \frac{4p_0a^4}{n^5\pi^5 D}, \tag{9.27}$$

ja yksityisratkaisu on

$$w_p(x,y) = \frac{4p_0a^4}{\pi^5 D}\sum_{1,3,\dots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\sin\frac{n\pi}{a}x. \tag{9.28}$$

Voidaan osoittaa, että

$$w_p = \frac{4p_0a^4}{\pi^5 D}\sum_{1,3,\dots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\sin\alpha_n x = \frac{p_0}{24D}(x^4 - 2ax^3 + a^3x). \tag{9.29}$$

Yksityisratkaisu w_p on sama kuin vapaasti tuetun palkin taipuman lauseke, kun laatan taivutusjäykkyys D korvataan palkin taivutusjäykkyydellä EI.

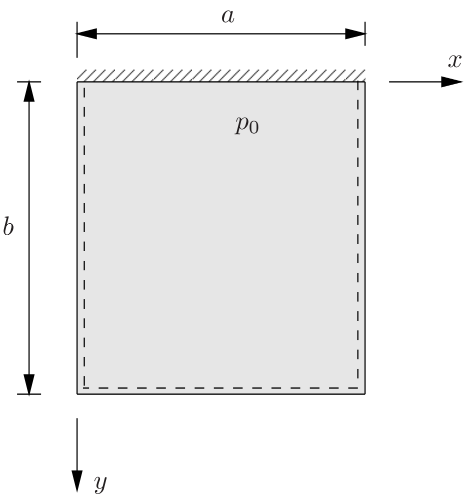
Esimerkki 9.1 *Kolmelta reunalta vapaasti tuetulla ja yhdeltä reunalta kiinnitetyllä laatalla on tasainen kuorma. Määritetään laatan taipuman lauseke.*

Symmetrian vuoksi tulevat nyt mukaan vain paritonta arvoa n vastaavat termit ja

$$w = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}[(A_n + B_n\alpha_n y)\cosh\alpha_n y + (C_n + D_n\alpha_n y)\sinh\alpha_n y + Q_n]\sin\alpha_n x, \tag{9.30}$$

missä

$$Q_n = \begin{cases} \dfrac{4p_0a^4}{n^5\pi^5 D}, & \text{kun } n = 1,3,5,\dots\ , \\ \\ 0, & \text{kun} \quad n = 2,4,6,\dots\ . \end{cases} \tag{9.31}$$



Kuva 9.2 Kolmelta reunalta vapaasti tuettu ja yhdeltä reunalta kiinnitetty suorakaidelaatta.

Reunaehdot ovat kuvan 9.2 laatan tapauksessa

$$\text{(a)}\quad w(x,0) = 0, \quad \text{(b)}\quad w_{,y}(x,0) = 0, \tag{9.32}$$

$$\text{(c)}\quad w(x,b) = 0, \quad \text{(d)}\quad w_{,yy}(x,b) = 0. \tag{9.33}$$

Reunaehdosta (a) seuraa

$$A_n + Q_n = 0 \quad \Rightarrow \quad A_n = -Q_n = -\frac{4p_0 a^4}{n^5\pi^5 D}. \tag{9.34}$$

Reunaehdosta (b) seuraa

$$C_n + B_n = 0 \quad \Rightarrow \quad C_n = -B_n. \tag{9.35}$$

Reunaehdon (c) perusteella

$$(A_n + B_n\alpha_n b)\cosh\alpha_n b + (C_n + D_n\alpha_n b)\sinh\alpha_n b + Q_n = 0. \tag{9.36}$$

Reunaehdosta (d) saadaan yhtälö

$$(A_n + 2D_n + B_n\alpha_n b)\cosh\alpha_n b + (C_n + 2B_n + D_n\alpha_n b)\sinh\alpha_n b = 0. \tag{9.37}$$

Merkitään

$$\beta_n = \alpha_n b, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}. \tag{9.38}$$

Yhtälöistä (a) ja (b) saadaan eliminoitua A_n ja C_n. Muodostamalla sitten yhtälöpari (c) ja (d)-(c) saadaan ratkaisu

$$B_n = Q_n\frac{\cosh^2\beta_n - \cosh\beta_n - \frac{1}{2}\beta_n\sinh\beta_n}{\beta_n - \sinh\beta_n\cosh\beta_n}, \tag{9.39}$$

$$D_n = Q_n\frac{-2\sinh\beta_n\cosh\beta_n + \sinh\beta_n + \beta_n\cosh\beta_n}{2(\beta_n - \sinh\beta_n\cosh\beta_n)}. \tag{9.40}$$

Laatan keskipisteen taipuma ja suurin taivutusmomentti tapauksessa $a = b$ ovat

$$w(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) \approx 0.0028 \frac{p_0 a^4}{D}, \tag{9.41}$$

$$|M_y(\frac{a}{2}, 0)| \approx 0.08 p_0 a^2 = M_{\max}. \tag{9.42}$$

Esimerkki 9.2 *Laatalla on tasainen kuorma, reuna $y = 0$ kiinnitetty, reuna $y = b$ vapaa, ja muut reunat ovat vapaasti tuetut. Määritetään taipuman lauseke.*

Reunaehdot ovat nyt

$$\text{(a)} \quad w(x, 0) = 0, \quad \text{(b)} \quad w_{,y}(x, 0) = 0, \tag{9.43}$$

$$\text{(c)} \quad M_y(x, b) = 0, \quad \text{(d)} \quad V_y(x, b) = 0. \tag{9.44}$$

Reunaehto (c) voidaan momentin M_y kaavan perusteella kirjoittaa muodossa

$$w_{,yy}(x, b) + \nu w_{,xx}(x, b) = 0, \tag{9.45}$$

ja korvikeleikkausvoiman V_y kaavan perusteella ehdosta (d) saadaan

$$w_{,yyy}(x, b) + (2 - \nu) w_{,xxy}(x, b) = 0. \tag{9.46}$$

Yksityisratkaisu on sama kuin edellisessä esimerkissä. Homogeenisen ratkaisun osan integroimisvakiot määritetään reunaehtojen perusteella kuten edellisessä esimerkissä.

Esimerkki 9.3 *Vapaasti tuetulla suorakaidelaatalla on jakautunut kuorma $p(x) = p_0 \frac{x}{a}$. Määritetään taipuman lauseke.*

Valitaan koordinaattiakselit kuvan 9.3 esittämällä tavalla. Symmetrian vuoksi homogeenisen osan ratkaisuun otetaan mukaan koordinaatin y suhteen parilliset funktiot.

Yksityisratkaisu on

$$w_p = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin \alpha_n x, \tag{9.47}$$

missä

$$Q_n = \frac{1}{\alpha_n^4} \frac{p_n}{D}, \tag{9.48}$$

ja ratkaisu on

$$w(x, y) = \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} [A_n \cosh \alpha_n y + D_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y + \frac{p_n}{\alpha_n^4 D}] \sin \alpha_n x, \tag{9.49}$$

missä on merkitty $\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$.

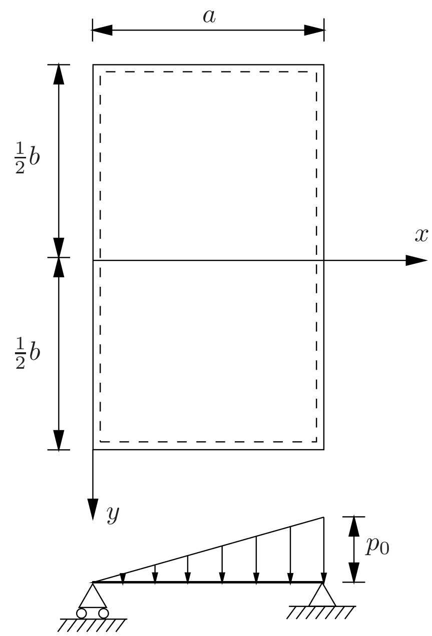
Kahden integroimisvakion ratkaisemiseen tarvitaan reunaehdot

$$w(x, \pm\frac{b}{2}) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_n \cosh \beta_n + D_n \beta_n \sinh \beta_n + \frac{p_n}{\alpha_n^4 D} = 0, \tag{9.50}$$

$$w_{,yy}(x, \pm\frac{b}{2}) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_n \cosh \beta_n + D_n(2 \cosh \beta_n + \beta_n \sinh \beta_n) = 0, \tag{9.51}$$

joissa on merkitty lyhyesti

$$\beta_n = \frac{b}{2} \alpha_n. \tag{9.52}$$



Kuva 9.3 Lineaarisesti jakautunut kuorma vapaasti tuetulla suorakaidelaatalla.

Vähentämällä alemmasta yhtälösta ylempi saadaan ratkaistua

$$D_n = \frac{p_n}{2 \cosh \beta_n \alpha_n^4 D}, \tag{9.53}$$

ja senjälkeen alemman yhtälön avulla tulee

$$A_n = -D_n(2 + \beta_n \tanh \beta_n) = -\frac{p_n}{\alpha_n^4 D} \frac{(2 + \beta_n \tanh \beta_n)}{2 \cosh \beta_n}. \tag{9.54}$$

Yhdistämällä tehdyt laskelmat saadaan taipuman lauseke

$$w(x, y) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left\{ -\frac{(2 + \beta_n \tanh \beta_n)}{2 \cosh \beta_n} \cosh \alpha_n y + \alpha_n y \frac{\sinh \alpha_n y}{2 \cosh \beta_n} + 1 \right\} \frac{p_n}{\alpha_n^4 D} \sin \alpha_n x. \tag{9.55}$$

Kun jakautuneen kuorman intensiteetti on $p(x, y) = p_0 \dfrac{x}{a}$, niin sen sarjakehitelmän kertoimet ovat

$$p_n = \frac{2}{a} \int_0^a p_0 \frac{x}{a} \sin \alpha_n x \, dx = \frac{2p_0}{n\pi} (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{9.56}$$

Integraalin laskemisessa on sovellettu osittaisderivointikaavaa

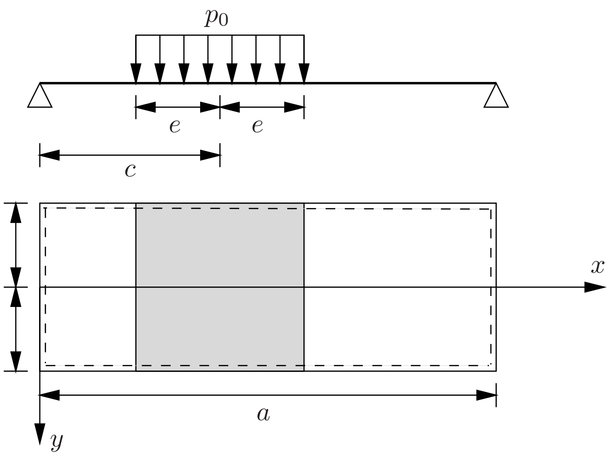
$$u \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) - \frac{du}{dx} v, \tag{9.57}$$

ja sijoitettu

$$u = x \quad \text{ja} \quad \frac{dv}{dx} = \sin \alpha_n x. \tag{9.58}$$

Neliölaatan tapauksessa keskipisteen taipuma on

$$w(\frac{a}{2}, 0) \approx 0.00203 p_0 \frac{a^4}{D}. \tag{9.59}$$



Kuva 9.4 Leveyden yli ulottuva palakuorma vapaasti tuetulla suorakaidelaatalla.

Esimerkki 9.4 *Vapaasti tuetulla suorakaidelaatalla on palakuorma* $p(x) = p_0$*, kun* $c - e < x < c + e$*, kuva 9.4. Määritetään taipuman lauseke.*

Kuorman sarjakehitelmän kertoimet ovat

$$p_n = \frac{4p_0}{n\pi} \sin \alpha_n c \sin \alpha_n e, \quad n = 1, 2, \dots \,. \tag{9.60}$$

Palakuormasta saadaan viivakuoma kohdassa $x = c$ merkitsemällä

$$P_0 = 2ep_0 = \text{vakio}. \tag{9.61}$$

Tällöin tulee

$$p_n = \frac{2P_0}{n\pi} \frac{\alpha_n}{e\alpha_n} \sin \alpha_n c \sin \alpha_n e. \tag{9.62}$$

Käyttämällä jälleen hyväksi sinifunktion ominaisuutta

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 0 \tag{9.63}$$

saadaan

$$p_n = \frac{2P_0}{a} \sin \alpha_n c, \quad n = 1, 2, \dots \tag{9.64}$$

viivakuorman tapauksessa.

9.3 Reunamomentin kuormittama laatta

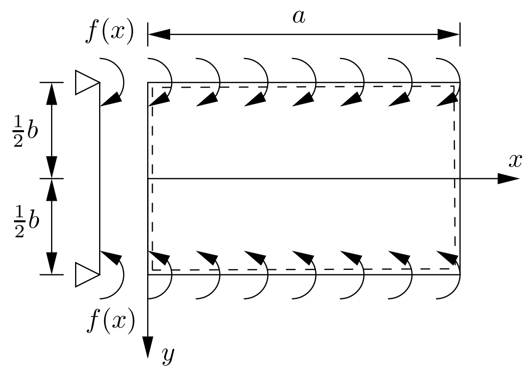
9.3.1 Reunamomentin symmetrisesti kuormittama laatta

Laatan reunoilla vaikuttaa kuormana momentti

$$M_y(x, \pm\frac{b}{2}) = f(x). \tag{9.65}$$

Kehitetään reunakuorma $f(x)$ Fourier-sinisarjaksi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a} \tag{9.66}$$



Kuva 9.5 Vapaasti tuetun laatan akselin x suhteen symmetrinen reunamomenttikuorma.

kertoimin

$$M_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\alpha_n x\,dx. \tag{9.67}$$

Vapaasti tuetun laatan tapauksessa reunaehdot ovat

$$\text{(a)}\quad w(x, \pm\frac{b}{2}) = 0, \tag{9.68}$$

$$\text{(b)}\quad -Dw_{,yy}(x, \pm\frac{b}{2}) = f(x). \tag{9.69}$$

Kuvan 9.5 akseliston valinnalla ja symmetrian perusteella otetaan taipuman lausekkeeseen koordinaatin y suhteen parilliset funktiot eli

$$w(x,y) = \sum_{n=1,2,...}^{\infty}(A_n\cosh\alpha_n y + D_n\alpha_n y\sinh\alpha_n y)\sin\alpha_n x. \tag{9.70}$$

Reunaehdosta (a) seuraa

$$A_n\cosh\beta_n + D_n\beta_n\sinh\beta_n = 0 \quad\Rightarrow\quad A_n = -D_n\beta_n\tanh\beta_n, \tag{9.71}$$

missä on merkitty $\beta_n = \dfrac{b}{2}\alpha_n$. Reunaehdon (a) perusteella taipuman lauseke on saatu muotoon

$$w(x,y) = \sum_{n=1,2,...}^{\infty} D_n(\alpha_n y\sinh\alpha_n y - \beta_n\tanh\beta_n\cosh\alpha_n y)\sin\alpha_n x. \tag{9.72}$$

Reunaehdon (b) perusteella tulee

$$-D\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2 2D_n\cosh\beta_n\sin\alpha_n x = \sum_{n=1}^{\infty}M_n\sin\alpha_n x, \tag{9.73}$$

mistä seuraa

$$D_n = -\frac{M_n}{2\alpha_n^2 D\cosh\beta_n}, \quad n = 1, 2, \ldots\ . \tag{9.74}$$

Taipuman lauseke on lopuksi

$$w(x,y) = \sum_{n=1,2,...}^{\infty}\frac{M_n}{2D\alpha_n^2\cosh\beta_n}(\beta_n\tanh\beta_n\cosh\alpha_n y - \alpha_n y\sinh\alpha_n y)\sin\alpha_n x. \tag{9.75}$$

Erikoistapaus. Tasaisesti jakautunut reunamomentti

Reunamomentti on nyt

$$M(x, \pm\frac{b}{2}) = M_0 = \text{vakio}, \tag{9.76}$$

ja reunamomentin sinisarjan kertoimet ovat

$$M_n = \frac{2}{a}\int_0^a M_0 \sin\alpha_n x\, dx = \frac{4M_0}{n\pi}, \quad \text{kun} \quad n = 1, 3, \dots\ . \tag{9.77}$$

Neliölaatan tapauksessa $a = b$ ja Poissonin luvun arvolla $\nu = 0.3$ keskipisteen taipuma on

$$w(\frac{a}{2}, 0) \approx 0.0368\frac{M_0 a^2}{D}, \tag{9.78}$$

ja laatan keskipisteen $(x, y) = (a/2, 0)$ momentit ovat

$$M_x \approx 0.394 M_0, \quad M_y \approx 0.256 M_0. \tag{9.79}$$

Taipuma x-akselilla on

$$w(x, 0) = \frac{M_0 ab}{\pi^2 D}\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{\tanh\beta_n}{\cosh\beta_n}\sin\alpha_n x. \tag{9.80}$$

Kun $a \gg b$, niin

$$\tanh\beta_n \approx \beta_n \quad \text{ja} \quad \cosh\beta_n \approx 1, \tag{9.81}$$

ja tällöin

$$w(x, 0) = \frac{M_0 b^2}{2\pi D}\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\alpha_n x = \frac{1}{8}\frac{M_0 b^2}{D}. \tag{9.82}$$

9.3.2 Antisymmetriset reunamomentit

Laatan reunoilla vaikuttavat nyt reunamomenttikuormat

$$M_y(x, \frac{b}{2}) = -M_y(x, -\frac{b}{2}) = f(x). \tag{9.83}$$

Taipuman lauseke on

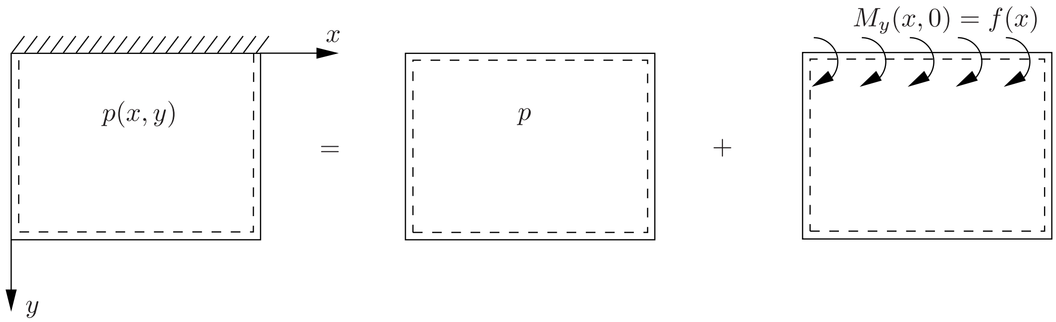
$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}[(A_n + B_n\alpha_n y)\cosh\alpha_n y + (C_n + D_n\alpha_n y)\sinh\alpha_n y]\sin\alpha_n x. \tag{9.84}$$

Integroimisvakiot ratkaistaan reunaehdoista

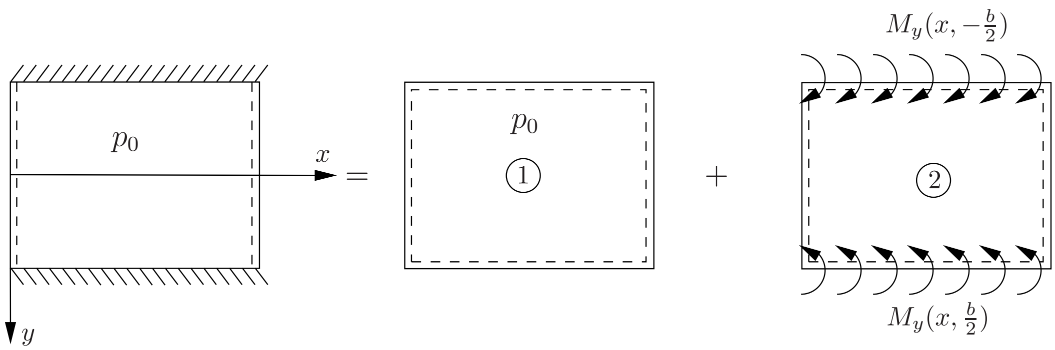
$$w(x, \pm\frac{b}{2}) = 0, \tag{9.85}$$

$$-Dw_{,yy}(x, \frac{b}{2}) = f(x), \tag{9.86}$$

$$-Dw_{,yy}(x, -\frac{b}{2}) = -f(x). \tag{9.87}$$



Kuva 9.6 Suorakaidelaatan ratkaisun superponointi.



Kuva 9.7 Akselin x suuntaisilta reunoilta kiinnitetty laatta.

Yleinen tapaus

$$M_y(x,\frac{b}{2})=f(x),\quad M_y(x,-\frac{b}{2})=g(x) \tag{9.88}$$

voidaan jakaa symmetriseen ja antisymmetriseen kuormitustapaukseen

$$p(x)=\frac{1}{2}(f(x)+g(x)),\quad q(x)=\frac{1}{2}(f(x)-g(x)), \tag{9.89}$$

ja ratkaisu superponoidaan edellä käsitellyistä tapauksista.

9.4 Superposition hyväksikäyttö

Kuvan 9.6 tapauksessa vasemmanpuoleisen laatan ratkaisu superponoidaan aiemmin käsitellyistä laattaratkaisuista. Reunamomentin $M_y(x,0)=f(x)$ jakauma määritetään yhteensopivuusehdosta

$$w_{,y}(x,0)=0. \tag{9.90}$$

Esimerkki 9.5 *Laatalla on tasainen kuorma, reunat $y=b/2$ ja $y=-b/2$ ovat kiinnitetyt ja muut reunat ovat vapaasti tuetut. Määritetään laatan taipuma superponoimalla aiemmin lasketuista ratkaisuista.*

Tasaisen kuorman $p(x,y)=p_0$ Fourier-sarjan kertoimet ovat

$$p_n=\frac{4p_0}{n\pi},\quad n=1,3,5,\dots\ . \tag{9.91}$$

Merkitään

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{b}{2}\alpha_n. \tag{9.92}$$

Kuvan 9.7 laatan 1 taipuma on ratkaistu aikaisemmin, ja se on

$$w_1(x,y) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left\{ -\frac{(2+\beta_n \tanh\beta_n)}{2\cosh\beta_n}\cosh\alpha_n y + \alpha_n y \frac{\sinh\alpha_n y}{2\cosh\beta_n} + 1 \right\} \frac{p_n}{\alpha_n^4 D}\sin\alpha_n x. \tag{9.93}$$

Laatan 1 sivun $y = b/2$ kiertymä on

$$\frac{\partial w_1(x,\frac{b}{2})}{\partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{2\alpha_n^3 D}\left\{\beta_n - \tanh\beta_n(1+\beta_n\tanh\beta_n)\right\}\sin\alpha_n x. \tag{9.94}$$

Laatan 1 ratkaisuun superponoidaan laatan 2 ratkaisu. Laatan 2 reunoilla on momenttikuorma

$$M_y(x, \pm\frac{b}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin\alpha_n x. \tag{9.95}$$

Tästä kuormasta aiheutuva aiemmin ratkaistu taipuma on

$$w_2(x,y) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{M_n}{2D\alpha_n^2\cosh\beta_n}(\beta_n\tanh\beta_n\cosh\alpha_n y - \alpha_n y\sinh\alpha_n y)\sin\alpha_n x, \tag{9.96}$$

mistä puolestaan derivoidaan laatan 2 reunan kiertymän kaava

$$\frac{\partial w_2(x,\frac{b}{2})}{\partial y} = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{M_n}{2D\alpha_n}[\tanh\beta_n(\beta_n\tanh\beta_n - 1) - \beta_n]\sin\alpha_n x. \tag{9.97}$$

Kertoimet M_n määritetään yhteensopivuusehdosta

$$\frac{\partial w_1(x,\frac{b}{2})}{\partial y} = -\frac{\partial w_2(x,\frac{b}{2})}{\partial y}. \tag{9.98}$$

Yhteensopivuusehdon perusteella seuraa kertoimille M_n lauseke

$$M_n = \frac{p_n}{\alpha_n^2}\frac{\beta_n - \tanh\beta_n(1+\beta_n\tanh\beta_n)}{\beta_n - \tanh\beta_n(\beta_n\tanh\beta_n - 1)}, \quad n = 1,2,\dots \tag{9.99}$$

yleisen muotoa $p(x,y) = p(x)$ olevan kuorman tapauksessa. Tasaisen kuorman tapauksessa kertoimet ovat

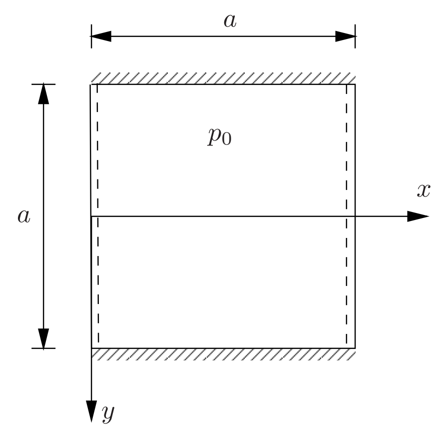
$$M_n = \frac{4p_0a^2}{n^3\pi^3}\frac{\beta_n - \tanh\beta_n(1+\beta_n\tanh\beta_n)}{\beta_n - \tanh\beta_n(\beta_n\tanh\beta_n - 1)}, \quad n = 1,3,5,\dots\,. \tag{9.100}$$

Neliölaatan $a = b$ ja tasaisen kuorman tapauksessa laatan keskipisteen taipuma on

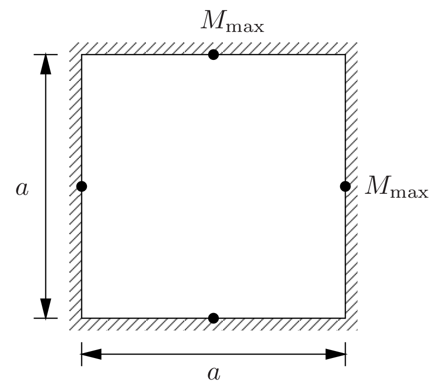
$$w_2(\frac{a}{2},0) \approx -0.00214\frac{p_0a^4}{D}. \tag{9.101}$$

Vapaasti tuetun neliölaatan taipuma tasaisesta kuormasta puolestaan on

$$w_1(\frac{a}{2},0) \approx 0.00406\frac{p_0a^4}{D}. \tag{9.102}$$



Kuva 9.8 Akselin x suuntaisilta reunoilta kiinnitetty neliölaatta.



Kuva 9.9 Reunoilta kiinnitetty neliölaatta.

Kuvan 9.8 neliölaatan taipuma on siten

$$w = w_1 + w_2 \approx 0.00192 \frac{p_0 a^4}{D}. \tag{9.103}$$

Suurin taivutusmomentti syntyy jäykästi kiinnitettyjen sivujen keskelle ja

$$M_y\left(\frac{a}{2}, \pm\frac{a}{2}\right) \approx -0.0697 p_0 a^2. \tag{9.104}$$

Samalla periaatteella ratkaistaan kuvan 9.9 jäykästi tuettu laatta. Neliölaatan tapauksessa suurin taipuma on

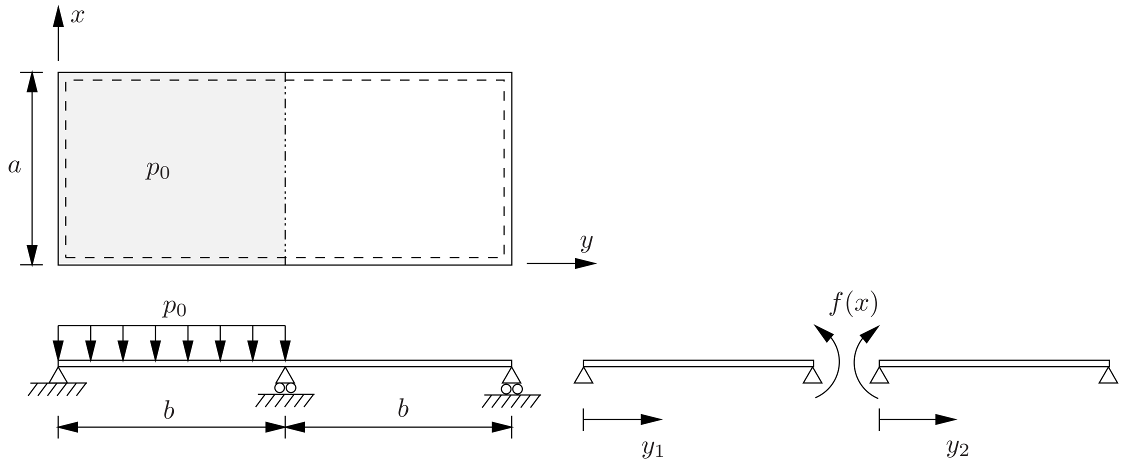
$$w_{\max} \approx 0.00126 \frac{p_0 a^4}{D}. \tag{9.105}$$

Laatan sivujen keskipisteiden momentit ovat

$$M_{\max} = M_x = M_y \approx 0.0513 p_0 a^2. \tag{9.106}$$

9.5 Lévyn menetelmän soveltaminen erilaisille tuenta- ja kuormitustapauksille

Lévyn ratkaisumenetelmää voidaan soveltaa edellä käsiteltyjä suorakaidelaattoja monimutkaisempiin tapauksiin. Seuraavissa esimerkeissä tarkastellaan jatkuvaa laattaa, pilarilaat-



Kuva 9.10 Jatkuva suorakaidelaatta.

taa, reunapalkin tukemaa laattaa ja vapaalla reunalla olevalla pistekuormalla kuormitettua laattaa.

Esimerkki 9.6 *Määritetään vapaasti tuetun jatkuvan suorakaidelaatan taipuma, kun vasemmassa kentässä on tasainen kuorma.*

Vapaasti tuettua jatkuvaa suorakaidelaattaa kuormittaa tasainen kuorma $p(x,y) = p_0$, kun $0 \leq y \leq b$ ja $p(x,y) = 0$, kun $b \leq y \leq 2b$. Leikataan laatat irti painumattoman tuen kohdalta. Numeroidaan osat 1 ja 2 ja määritellään koordinaatti $y_1 = y$ ja $y_2 = y - b$. Osan 1 tasaisen kuorman sarjakehitelmän kertoimet ovat

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{4p_0}{n\pi}, & \text{kun} \quad n = 1, 3, 5, \ldots, \\ \\ 0, & \text{kun} \quad n = 2, 4, 6, \ldots, \end{cases} \tag{9.107}$$

ja osan 1 taipuman lauseke on

$$\begin{aligned} w_1(x, y_1) = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} & [(A_n + B_n \alpha_n y_1) \cosh \alpha_n y_1 + (C_n + D_n \alpha_n y_1) \sinh \alpha_n y_1 \\ & + \frac{4p_0 a^4}{n^5 \pi^5 D}] \sin \alpha_n x, \end{aligned} \tag{9.108}$$

missä $\alpha_n = \dfrac{n\pi}{a}$.
Osan 2 taipuman lauseke on

$$w_2(x, y_2) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} [(E_n + F_n \alpha_n y_2) \cosh \alpha_n y_2 + (G_n + H_n \alpha_n y_2) \sinh \alpha_n y_2] \sin \alpha_n x. \tag{9.109}$$

Tuntemattoman tukimomentin jakauma on

$$f(x) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} M_n \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}. \tag{9.110}$$

Yllä olevissa yhtälöissä on yhdeksän tuntematonta: A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n, H_n ja M_n, jotka ratkaistaan kahdeksan reunaehdon ja yhden jatkuvuusehdon perusteella.

Reunaehdot ovat:

$$w_1(x,0)=0, \quad \frac{\partial^2 w_1(x,0)}{\partial y_1^2}=0, \tag{9.111}$$

$$w_1(x,b)=0, \quad -D\frac{\partial^2 w_1(x,b)}{\partial y_1^2}=\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} M_n \sin\alpha_n x, \tag{9.112}$$

$$w_2(x,0)=0, \quad -D\frac{\partial^2 w_2(x,0)}{\partial y_2^2}=\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} M_n \sin\alpha_n x, \tag{9.113}$$

$$w_2(x,b)=0, \quad \frac{\partial^2 w_2(x,b)}{\partial y_2^2}=0. \tag{9.114}$$

Jatkuvuusehto (yhteensopivuusehto) on

$$\frac{\partial w_1(x,b)}{\partial y_1}=\frac{\partial w_2(x,0)}{\partial y_2}. \tag{9.115}$$

Jatkuvuusehdosta seuraa

$$(A_n+D_n+B_n\beta_n)\sinh\beta_n+(C_n+B_n+D_n\beta_n)\cosh\beta_n=G_n+F_n, \tag{9.116}$$

missä

$$\beta_n=b\alpha_n. \tag{9.117}$$

Reunaehdoista seuraa laatan osalla 1

$$A_n=-\frac{4p_0}{\alpha_n^5 Da}, \quad D_n=\frac{2p_0}{\alpha_n^5 Da}, \tag{9.118}$$

$$B_n=-\frac{1}{D\sinh\beta_n}\left[\frac{M_n}{2\alpha_n^2}+\frac{2p_0}{\alpha_n^5 a}(-1+\cosh\beta_n)\right], \tag{9.119}$$

$$\begin{aligned} C_n=&\frac{1}{D}\left\{b\frac{\cosh\beta_n}{\sinh^2\beta_n}\left[\frac{M_n}{2\alpha_n}+\frac{2p_0}{\alpha_n^4 a}(-1+\cosh\beta_n)\right]\right.\\ &\left.+\frac{4p_0}{\alpha_n^5 a}\left(\coth\beta_n-\frac{\beta_n}{2}-\frac{1}{\sinh\beta_n}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{9.120}$$

ja laatan osan 2 integroimisvakiot ovat

$$E_n=0, \quad H_n=-\frac{M_n}{2\alpha_n^2 D}, \tag{9.121}$$

$$F_n=\frac{M_n}{2\alpha_n^2 D}\coth\beta_n, \tag{9.122}$$

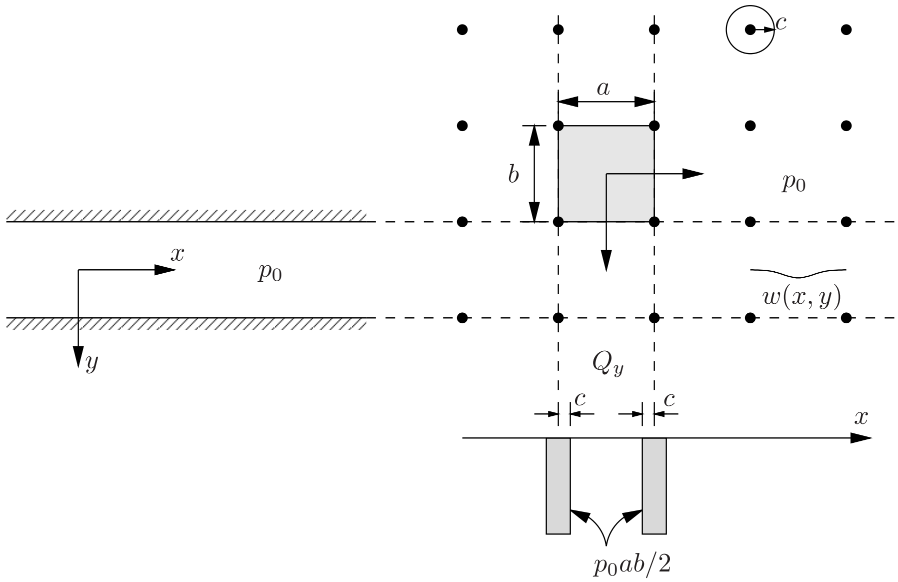
$$G_n=\frac{M_n b}{2\alpha_n D}(1-\coth^2\beta_n). \tag{9.123}$$

Kertoimet M_n ratkaistaan jatkuvuusehdosta.

Esimerkki 9.7 *Pilarilaatalla on tasainen kuorma. Määritetään taipuman lauseke.*

Tarkastellaan tasaisen kuorman kuormittamaa pilarilaatta, jonka pilariväli on a x:n suunnassa ja b y:n suunnassa. Laatan taipuma voidaan kirjoittaa muodossa

$$w=w_p+w_h \tag{9.124}$$



Kuva 9.11 Pilarilaatta.

missä w_p on tasaisesti kuormitetun ja reunoiltaan kiinnitetyn äärettömän pitkän laattakaistan taipuma

$$w_p = \frac{p_0 b^4}{384D}\left[1 - \left(\frac{y}{b/2}\right)^2\right]^2 \tag{9.125}$$

ja w_h on suorakaidelaatan, jonka sivumitat ovat a ja b, homogeeninen ratkaisu

$$w_h = A_0 + \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} (A_n \cosh \alpha_n y + D_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y) \cos \alpha_n x, \tag{9.126}$$

missä on jälleen merkitty

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}. \tag{9.127}$$

Ratkaisu toteuttaa reunaehdot sivuilla $x = \pm a/2$ eli

$$w_{,x}(\pm\frac{a}{2}, y) = 0, \tag{9.128}$$

$$Q_x(\pm\frac{a}{2}, y) = -D[w_{,xxx}(\pm\frac{a}{2}, y) + w_{,xyy}(\pm\frac{a}{2}, y)] = 0. \tag{9.129}$$

Vakiot A_0, A_n ja D_n määritetään ehdoista reunalla $y = b/2$. Reunaehdosta

$$w_{,y}(x, \frac{b}{2}) = 0 \tag{9.130}$$

seuraa

$$D_n = -A_n \frac{\tanh \beta_n}{\beta_n + \tanh \beta_n}, \tag{9.131}$$

missä

$$\beta_n = \frac{b}{2}\alpha_n. \tag{9.132}$$

Leikkausvoima Q_y linjan $y = b/2$ läheisyydessä on nolla lukuunottamatta pilarin infinitesimaalisen pientä ympäristöä, jossa Q_y:n jakauman resultantti infinitesimaalisella välillä $x \in [a/2 - c, a/2 + c]$ on $\frac{1}{2} p_0 ab$. Tällöin

$$Q_y(x, \frac{b}{2}) = 0, \quad \text{kun} \quad 0 < x < \frac{a}{2} - c, \tag{9.133}$$

$$\int\limits_{a/2-c}^{a/2} Q_y \, dx = -\frac{p_0 ab}{4}. \tag{9.134}$$

Leikkausvoima Q_y esitetään sarjana

$$Q_y = C_0 + \sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty} C_n \cos \alpha_n x. \tag{9.135}$$

Leikkausvoiman sarjan kertoimet ovat

$$C_0 = -\frac{p_o b}{2}, \tag{9.136}$$

$$C_n = \frac{4}{a} \int\limits_0^{a/2} Q_y \cos \alpha_n x \, dx = -p_0 b (-1)^{\frac{n}{2}} \tag{9.137}$$

Reunoilla $y = b/2$

$$\begin{aligned} Q_y(x, \frac{b}{2}) &= -D[w_{,yyy}(x, \frac{b}{2}) + w_{,xxy}(x, \frac{b}{2})] \\ &= -p_0 b \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \cos \alpha_n x \right], \end{aligned} \tag{9.138}$$

missä

$$w_{,xxy}(x, \frac{b}{2}) = 0, \quad \text{koska} \quad w_{,y}(x, \frac{b}{2}) = 0. \tag{9.139}$$

Sijoittamalla taipuman $w = w_h + w_p$ lauseke leikkausvoiman kaavaan tulee

$$-D \frac{\partial^3 w_h(x, \frac{b}{2})}{\partial y^3} = -p_0 b \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \cos \alpha_n x \tag{9.140}$$

eli

$$D\alpha_n^3 [(A_n + 3D_n) \sinh \beta_n + D_n \beta_n \cosh \beta_n] = p_0 b (-1)^{\frac{n}{2}}. \tag{9.141}$$

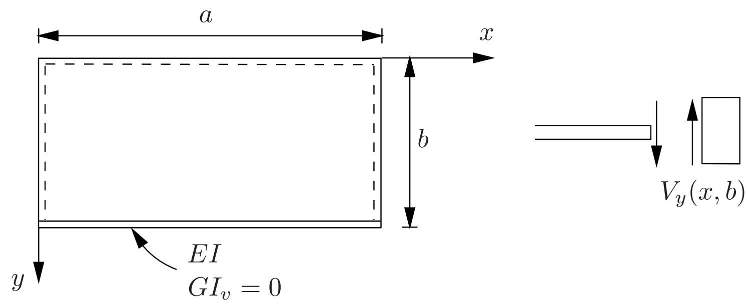
Kertoimille A_n ja D_n saadaan edellä olevien yhtälöiden avulla kaavat

$$A_n = -\frac{p_0 b}{2D} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\alpha_n^3} \frac{\beta_n + \tanh \beta_n}{\sinh \beta_n \tanh \beta_n}, \tag{9.142}$$

$$D_n = \frac{p_o b}{2D} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\alpha_n^3} \frac{1}{\sinh \beta_n}. \tag{9.143}$$

Pilarilaatan taipuma on siten

$$\begin{aligned} w = &\frac{p_0 b^4}{384 D} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right)^2 + A_0 + \frac{p_0 b}{2D} \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\sinh \beta_n \tanh \beta_n} \cos \alpha_n x \cdot \\ &\cdot [\tanh \beta_n \cdot \alpha_n y \sinh \alpha_n y - (\beta_n + \tanh \beta_n) \cosh \alpha_n y]. \end{aligned} \tag{9.144}$$



Kuva 9.12 Reunapalkin tukema laatta.

Vakio A_0 ratkaistaan ehdosta

$$w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right) = 0, \tag{9.145}$$

josta seuraa

$$A_0 = -\frac{p_0 b}{2D}\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^3}\left(\beta_n - \frac{\beta_n + \tanh\beta_n}{\tanh^2\beta_n}\right). \tag{9.146}$$

Suurin taipuma saavutetaan keskipisteessä $x = y = 0$, jossa

$$\begin{aligned} w(0,0) =& \frac{p_0 b^4}{384D} - \frac{p_0 b}{2D}\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^3}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\beta_n + \tanh\beta_n}{\sinh\beta_n\tanh\beta_n} \\ & -\frac{p_0 b}{2D}\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^3}\left(\beta_n - \frac{\beta_n + \tanh\beta_n}{\tanh^2\beta_n}\right). \end{aligned} \tag{9.147}$$

Tapauksessa $a = b$ $w(0,0) = 0.00581 p_0 b^4/D$ ja $M_x(0,0) = 0.0331 p_0 b^2 = M_y(0,0)$.

Esimerkki 9.8 *Suorakaidelaatan yksi reuna on tuettu palkilla, ja muut reunat ovat vapaasti tuetut. Määritetään laatan taipuma tasaisesta kuormasta.*

Suorakaidelaatan kolme reunaa on tuettu vapaasti, ja reunalla $y = b$ on vahvistuspalkki. Reunapalkin taivutusjäykkyys on EI, ja vääntöjäykkyys otaksutaan nollaksi. Laatalla on tasainen kuorma. Taipuman lauseke on

$$\begin{aligned} w(x,y) =& w_h(x,y) + w_p(x,y) \\ =& \sum_{n=1}^{\infty}[Y_n(y) + Q_n(y)]\sin\alpha_n x \\ =& \sum_{n=1}^{\infty}[(A_n + B_n\alpha_n y)\cosh\alpha_n y + (C_n + D_n\alpha_n y)\sinh\alpha_n y + \frac{p_n}{\alpha_n^4 D}]\sin\alpha_n x. \end{aligned} \tag{9.148}$$

Tasaisen kuorman Fourier-sarja on

$$p(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin\alpha_n x, \tag{9.149}$$

missä

$$
\begin{aligned}
p_n =& \frac{2}{a} p_0 \int_0^a \sin\alpha_n x \, dx = \frac{2}{a} p_0 \Big/_0^a \left(-\frac{1}{\alpha_n}\right) \cos\alpha_n x \\
=& -\frac{2p_0}{a\alpha_n}(\cos n\pi - 1) \\
=& \begin{cases} \dfrac{4p_0}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \ldots, \\ 0, & n = 2, 4, 6, \ldots. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{9.150}
$$

Laatan reunaehdot ovat

$$M_y(x, b) = 0, \tag{9.151}$$

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -V_y(x, b), \quad \text{kun} \quad y = b, \tag{9.152}$$

$$w(x, 0) = 0, \tag{9.153}$$

$$M_y(x, 0) = 0. \tag{9.154}$$

Kahden jälkimmäisen ehdon perusteella saadaan

$$A_n + \frac{p_n}{\alpha_n^4 D} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_n = -\frac{p_n}{\alpha_n^4 D}, \tag{9.155}$$

$$A_n + 2D_n = 0 \quad \Rightarrow \quad D_n = \frac{p_n}{2\alpha_n^4 D}, \tag{9.156}$$

ja kahden ensimmäisen reunaehdon perusteella saadaan vähän mutkikkaampi yhtälöryhmä kertoimien C_n ja B_n ratkaisemiseksi.

Alareunan momentin reunaehto on, kun palkin vääntöjäykkyys on otaksuttu nollaksi,

$$M_y(x, b) = -D[w_{,yy}(x, b) + \nu w_{,xx}(x, b)] = 0, \tag{9.157}$$

josta seuraa

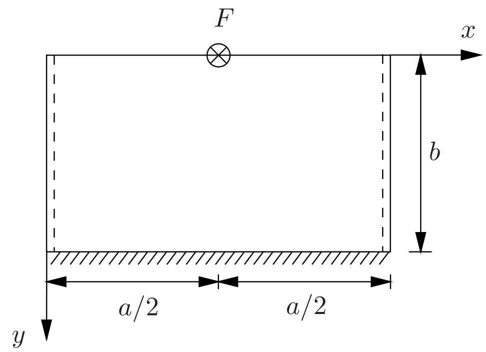
$$
\begin{aligned}
&-D\sum_{n=1}^{\infty}\{\alpha_n^2[(A_n + 2D_n + B_n\beta_n)\cosh\beta_n + (C_n + 2B_n + D_n\beta_n)\sinh\beta_n] \\
&+\nu(-\alpha_n^2)[(A_n + B_n\beta_n)\cosh\beta_n + (C_n + D_n\beta_n)\sinh\beta_n + Q_n]\}\sin\alpha_n x = 0.
\end{aligned}
\tag{9.158}
$$

Alareunan leikkausvoiman reunaehto on

$$-V_y(x, b) = EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, b) \tag{9.159}$$

josta seuraa

$$
\begin{aligned}
&D\sum_{n=1}^{\infty}\{\alpha_n^3[(A_n + 3D_n + B_n\beta_n)\sinh\beta_n + (C_n + 3B_n + D_n\beta_n)\cosh\beta_n] \\
&+(2-\nu)(-\alpha_n^3)[(A_n + D_n + B_n\beta_n)\sinh\beta_n + (C_n + B_n + D_n\beta_n)\cosh\beta_n]\}\sin\alpha_n x \\
&= EI\sum_{n=1}^{\infty}\{\alpha_n^4[(A_n + B_n\beta_n)\cosh\beta_n + (C_n + D_n\beta_n)\sinh\beta_n + Q_n]\sin\alpha_n x.
\end{aligned}
$$



Kuva 9.13 Pistekuorma suorakaidelaatan vapaan reunan keskellä.

Esimerkki 9.9 *Suorakaidelaatan vapaalla reunalla on pistekuorma. Määritetään laatan taipuman lauseke.*

Suorakaidelaatan vapaalla reunalla on keskellä pistekuorma F. Toinen x:n suuntainen reuna on jäykästi kiinnitetty. Otaksutaan, että Poissonin vakio $\nu = 0$. Lévyn menetelmän mukaan taipuma on

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \alpha_n x, \tag{9.160}$$

missä

$$Y_n(y) = (A_n + B_n \alpha_n y) \cosh \alpha_n y + (C_n + D_n \alpha_n y) \sin h \alpha_n y. \tag{9.161}$$

Pistekuorma F esitetään viivakuormana

$$f(x) = F\delta(x - \frac{a}{2}), \tag{9.162}$$

missä esiintyvä Dirac'in delta-funktio määritellään kaavoilla

$$\delta(x) = 0, \quad \text{jos} \quad x \neq 0, \tag{9.163}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1. \tag{9.164}$$

'Jakauma' eli distribuutio $f(x)$ voidaan muodollisesti esittää sarjana

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \alpha_n x, \quad f_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \alpha_n x\, dx = \frac{2F}{a} \sin \frac{n\pi}{2}. \tag{9.165}$$

Vaihtoehtoisesti voidaan laskea palakuorman sarjan kertoimet ja edelleen niiden avulla pistevoiman sarjakehitelmän kertoimet. Kun viivamainen palakuorma p_0 on välillä $[u - c, u + c]$, palakuorman sarjakehitelmän kertoimet ovat

$$p_n = \frac{2}{a} \int_{u-c}^{u+c} p_0 \sin \alpha_n x\, dx = \frac{4p_0}{n\pi} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c. \tag{9.166}$$

Asettamalla $F = 2cp_0$ ja laventamalla tekijällä α_n saadaan

$$f_n = \frac{4}{n\pi} \frac{F}{2} \alpha_n \frac{\sin \alpha_n c}{\alpha_n c} \sin \alpha_n u. \tag{9.167}$$

Kun $c \to 0$ ja $u = a/2$, tulee lopuksi

$$f_n = \frac{2F}{a} \sin \alpha_n u = \frac{2F}{a} \sin \frac{n\pi}{2}. \tag{9.168}$$

Laatan reunaehdot ovat

$$w(x,b) = 0, \quad w_{,y}(x,b) = 0, \tag{9.169}$$

$$M_y(x,0) = 0, \quad V_y(x,0) + f(x) = 0. \tag{9.170}$$

Korvikeleikkausvoima on

$$\begin{aligned} V_y =& -D[w_{,yyy} + (2-\nu)w_{,xxy}] \\ =& -D\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{d^3Y_n}{dy^3} - (2-\nu)\alpha_n^2\frac{dY_n}{dy}\right]\sin\alpha_n x. \end{aligned} \tag{9.171}$$

Momentin reunaehdosta

$$M_y(x,0) = 0 \tag{9.172}$$

seuraa

$$\frac{d^2Y_n(0)}{dy^2} - \nu\alpha_n^2 Y_n(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2Y_n(0)}{dy^2} = 0, \quad \text{kun} \quad \nu = 0. \tag{9.173}$$

Reunaehtojen perusteella saadaan yhtälöt

$$(A_n + B_n\beta_n)\cosh\beta_n + (C_n + D_n\beta_n)\sinh\beta_n = 0, \tag{9.174}$$

$$(C_n + B_n + D_n\beta_n)\cosh\beta_n + (A_n + D_n + B_n\beta_n)\sinh\beta_n = 0, \tag{9.175}$$

$$A_n + 2D_n = 0 \quad \Rightarrow \quad A_n = -2D_n, \tag{9.176}$$

$$\begin{aligned} &-D[\alpha_n^3(C_n + 3B_n) - 2\alpha_n^2\alpha_n(C_n + B_n)] + f_n = 0 \\ \Rightarrow \quad & -C_n + B_n = \frac{f_n}{\alpha_n^3 D}, \end{aligned} \tag{9.177}$$

joissa on merkitty

$$\beta_n = \alpha_n b. \tag{9.178}$$

Reunaehtojen tuottamista yhtälöistä ratkaistaan integroimisvakiot A_n, B_n, C_n ja D_n ja sijoitetaan ne lopuksi taipuman kaavaan (9.160).

Luku 10

Laattakaista

10.1 Vapaasti tuettu ääretön laattakaista

10.1.1 Viivakuorma $p(x)$ $x-$akselilla

Kuvan 10.1 vapaasti tuetulla laattakaistalla, jonka leveys on a, on x-akselilla viivakuorma. Tarkastellaan erikoistapauksena tasaista viivakuormaa, jonka vaikutuspituus on $2c$ ja keskipiste etäisyydellä u y-akselista, eli

$$p(x) = p_0, \quad x \in [u - c, u + c]. \tag{10.1}$$

Taipuma lausutaan Lévyn ratkaisun tapaan muodossa

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}. \tag{10.2}$$

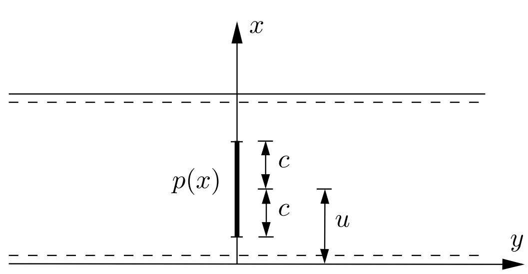
Laattakaistan tapauksessa funktio $Y_n(y)$ kannattaa lausua eksponenttifunktion avulla muodossa

$$Y_n(y) = (A_n + B_n\alpha_n y)e^{-\alpha_n y} + (C_n + D_n\alpha_n y)e^{\alpha_n y}. \tag{10.3}$$

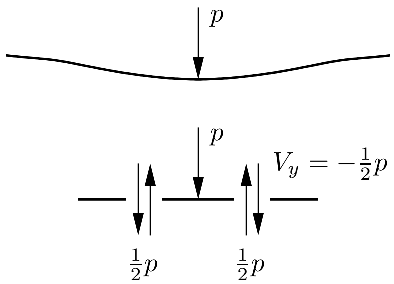
Fysikaalisin perustein ratkaisun täytyy kaistan tapauksessa, kun kuorma on x-akselilla tai joka tapauksessa rajatulla alueella kaistan keskellä, hävitä äärettömyyteen mentäessä, ja kertoimien C_n ja D_n täytyy olla nollia.

Funktion Y_n tarvittavat derivaatat ovat

$$\frac{dY_n(y)}{dy} = -\alpha_n(A_n - B_n + B_n\alpha_n y)e^{-\alpha_n y}, \tag{10.4}$$



Kuva 10.1 Vapaasti tuettu laattakaista, viivakuorma x-akselilla.



Kuva 10.2 Vapaasti tuetun laattakaistan tasapaino viivakuorman kohdalla.

$$\frac{d^2Y_n(y)}{dy^2} = {\alpha_n}^2(A_n - 2B_n + B_n\alpha_n y)e^{-\alpha_n y}, \tag{10.5}$$

$$\frac{d^3Y_n(y)}{dy^3} = -{\alpha_n}^3(A_n - 3B_n + B_n\alpha_n y)e^{-\alpha_n y}. \tag{10.6}$$

Symmetrian vuoksi x-akselilla on voimassa ehto

$$w_{,y}(x,0) = 0. \tag{10.7}$$

Samoin symmetrian nojalla kirjoitetaan akselin z suuntainen tasapainoehto

$$V_y(x,0) = -\frac{1}{2}p(x), \tag{10.8}$$

missä

$$V_y = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D[w_{,yyy} + (2-\nu)w_{,xxy}]. \tag{10.9}$$

Symmetriaehdosta (10.7) seuraa

$$w_{,yxx}(x,0) = 0, \tag{10.10}$$

jonka perusteella

$$V_y(x,0) = -Dw_{,yyy}(x,0). \tag{10.11}$$

Kehitetään viivakuorma

$$p(x) = p_0, \quad \text{kun} \quad x \in [u-c, u+c] \tag{10.12}$$

sinisarjaksi kertoimin

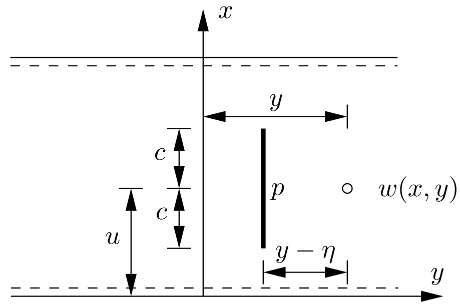
$$p_n = \frac{2}{a}\int_{u-c}^{u+c} p_0 \sin\alpha_n x\, dx = \frac{4p_0}{n\pi}\sin\alpha_n u \sin\alpha_n c. \tag{10.13}$$

Symmetriaehdosta (10.7) saadaan yhtälö

$$w_{,y}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}(-\alpha_n)(A_n + B_n\alpha_n \cdot 0 - B_n)e^{-\alpha_n \cdot 0}\sin\alpha_n x = 0, \tag{10.14}$$

josta seuraa

$$A_n - B_n = 0. \tag{10.15}$$



Kuva 10.3 Viivakuorma kohdassa $y = \eta$.

Tasapainoehdon perusteella tulee

$$\begin{aligned} V_y(x,0) =& -D \sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha_n^3)(A_n - 3B_n + B_n\alpha_n \cdot 0)e^{-\alpha_n \cdot 0} \sin \alpha_n x \\ =& -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \alpha_n x, \end{aligned} \tag{10.16}$$

mistä saadaan

$$-D(-\alpha_n^3)(A_n - 3B_n) = -\frac{1}{2} p_n. \tag{10.17}$$

Koska symmetriaehdon perusteella $A_n = B_n$, tasapainoehdosta seuraa

$$A_n = \frac{p_n}{4D\alpha_n^3}. \tag{10.18}$$

Funktio $Y_n(y)$ on siten y:n positiivisilla arvoilla

$$Y_n(y) = \frac{p_n}{4D\alpha_n^3}(1 + \alpha_n y)e^{-\alpha_n y}, \quad \text{kun} \quad y \geq 0. \tag{10.19}$$

Taipuman lauseke on

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{4D\alpha_n^3}(1 + \alpha_n y)e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \text{kun} \quad y \geq 0. \tag{10.20}$$

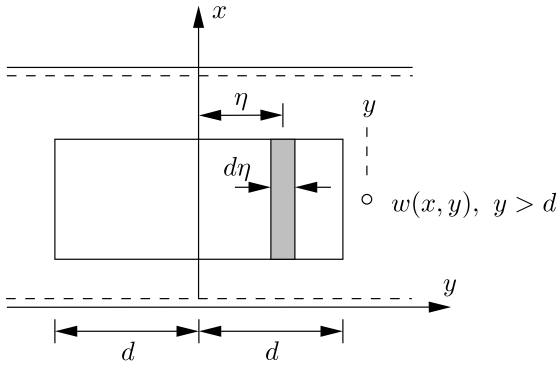
10.1.2 Tasainen kuorma alueessa $u - c \leq x \leq u + c$ ja $|y| \leq d$, (palakuorma)

Jos edellisen ratkaisun viivakuorma onkin etäisyydellä η x-akselista, niin saadaan vastaavasti

$$Y_n(y - \eta) = \frac{p_n}{4D\alpha_n^3}[1 + \alpha_n(y - \eta)]e^{-\alpha_n(y-\eta)}, \quad \text{kun} \quad y \geq \eta. \tag{10.21}$$

Korvaamalla etäisyydellä η oleva viivakuorma suikalekuormalla $p\,d\eta$ ja summaamalla eli integroimalla suikalekuormien osuudet yhteen saadaan palakuorman

$$p(x,y) = p_0, \quad \text{kun} \quad u - c \leq x \leq u + c \quad \text{ja} \quad |y| \leq d \tag{10.22}$$



Kuva 10.4 Palakuorma viivakuorman avulla.

aiheuttama taipuma, kun $y \geq d$, muodossa

$$w(x,y) = \int_{-d}^{d} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y-\eta)\, d\eta \sin \alpha_n x, \quad y \geq d. \tag{10.23}$$

Lasketaan taipuman kaavassa oleva integraali

$$\begin{aligned}
&\int_{-d}^{d} [1+\alpha_n(y-\eta)] e^{-\alpha_n(y-\eta)}\, d\eta \\
&= \frac{1}{\alpha_n} \Big/_{-d}^{d} [2+\alpha_n(y-\eta)] e^{-\alpha_n(y-\eta)} \\
&= \frac{1}{\alpha_n} \left\{ [2+\alpha_n(y-d)] e^{-\alpha_n(y-d)} - [2+\alpha_n(y+d)] e^{-\alpha_n(y+d)} \right\}, \quad y \geq d.
\end{aligned} \tag{10.24}$$

Taipuman lauseke d:tä suuremmilla y:n arvoilla on siten

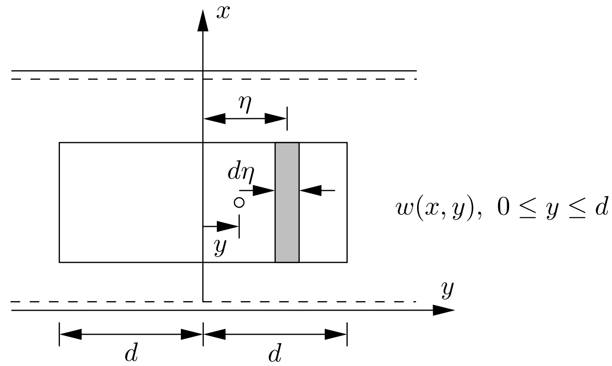
$$\begin{aligned}
w(x,y) &= \frac{p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c \sin \alpha_n x \cdot \\
&\cdot \frac{1}{\alpha_n} \left\{ [2+\alpha_n(y-d)] e^{-\alpha_n(y-d)} - [2+\alpha_n(y+d)] e^{-\alpha_n(y+d)} \right\}, \quad y \geq d.
\end{aligned} \tag{10.25}$$

Koordinaatin y negatiivisilla arvoilla funktio $Y_n(y)$ on

$$Y_n(y) = \frac{p_n}{4D\alpha_n^3}(1+\alpha_n|y|) e^{-\alpha_n|y|}, \quad y \leq 0. \tag{10.26}$$

Taipuman lauseke y:n arvoilla $0 \leq y \leq d$ on

$$\begin{aligned}
w(x,y) &= \int_{-d}^{y} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y-\eta)\, d\eta \sin \alpha_n x \\
&+ \int_{y}^{d} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\eta-y)\, d\eta \sin \alpha_n x, \quad 0 \leq y \leq d.
\end{aligned} \tag{10.27}$$



Kuva 10.5 Palakuorman ratkaisu alueessa $0 \leq y \leq d$.

Taipuman lausekkeen (10.27) ensimmäisessä osassa tarvitaan integraali

$$\begin{aligned}
&\int_{-d}^{y} [1 + \alpha_n(y-\eta)]e^{-\alpha_n(y-\eta)}\, d\eta \\
=&\frac{1}{\alpha_n} \Big/_{-d}^{y} [2 + \alpha_n(y-\eta)]e^{-\alpha_n(y-\eta)} \\
=&\frac{1}{\alpha_n}\left\{[2+\alpha_n(y-y)]e^{-\alpha_n(y-y)} - [2+\alpha_n(y+d)]e^{-\alpha_n(y+d)}\right\}, \quad 0 \leq y \leq d,
\end{aligned} \tag{10.28}$$

ja toisessa osassa vastaavasti

$$\begin{aligned}
&\int_{y}^{d} [1 + \alpha_n(\eta-y)]e^{-\alpha_n(\eta-y)}\, d\eta \\
=&-\frac{1}{\alpha_n} \Big/_{y}^{d} [2 + \alpha_n(\eta-y)]e^{-\alpha_n(\eta-y)} \\
=&-\frac{1}{\alpha_n}\left\{[2+\alpha_n(d-y)]e^{-\alpha_n(d-y)} - [2+\alpha_n(y-y)]e^{-\alpha_n(y-y)}\right\}, \quad 0 \leq y \leq d.
\end{aligned} \tag{10.29}$$

Taipuman lauseke, kun $0 \leq y \leq d$, saadaan yllä olevien kaavojen avulla muotoon

$$\begin{aligned}
w(x,y) = &\frac{p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c \sin \alpha_n x \cdot \\
&\cdot \left\{4 - [2+\alpha_n(y+d)]e^{-\alpha_n(y+d)} - [2+\alpha_n(d-y)]e^{-\alpha_n(d-y)}\right\}, \quad 0 \leq y \leq d.
\end{aligned} \tag{10.30}$$

10.1.3 Antisymmetrinen palakuorma

Kuvan 10.11 esittämän antisymmetrisen palakuorman ratkaisu on

$$
\begin{aligned}
w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \{ & \int_{-d}^{0} -[1+\alpha_n(y-\eta)]e^{-\alpha_n(y-\eta)}\, d\eta \\
& + \int_{0}^{d} [1+\alpha_n(y-\eta)]e^{-\alpha_n(y-\eta)}\, d\eta \} \sin\alpha_n x, \quad \text{kun} \quad y \geq d,
\end{aligned}
\tag{10.31}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \{ & \int_{-d}^{0} -[1+\alpha_n(y-\eta)]e^{-\alpha_n(y-\eta)}\, d\eta \\
& + \int_{0}^{y} [1+\alpha_n(y-\eta)]e^{-\alpha_n(y-\eta)}\, d\eta \\
& + \int_{y}^{d} [1+\alpha_n(\eta-y)]e^{-\alpha_n(\eta-y)}\, d\eta \} \sin\alpha_n x, \quad \text{kun} \quad 0 \leq y \leq d,
\end{aligned}
\tag{10.32}
$$

missä on merkitty lyhyesti

$$
P_n = \frac{p_n}{4D\alpha_n^3}. \tag{10.33}
$$

Taipuman lausekkeeksi y:n arvoilla $y > d$ tulee

$$
\begin{aligned}
w(x,y) = & \frac{p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin\alpha_n u \sin\alpha_n c \sin\alpha_n x \cdot \\
& \cdot \frac{1}{\alpha_n} \left\{ -4 + [2+\alpha_n(y+d)]e^{-\alpha_n(y+d)} + [2+\alpha_n(y-d)]e^{-\alpha_n(y-d)} \right\}, \quad \text{kun} \quad y \geq d.
\end{aligned}
\tag{10.34}
$$

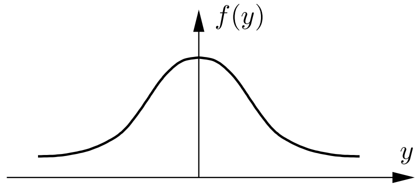
Taipuman lauseke alueessa $0 \leq y \leq d$ saadaan integrointien jälkeen muotoon

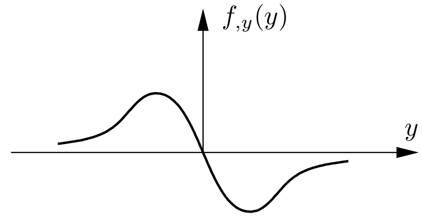
$$
\begin{aligned}
w(x,y) = & \frac{p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin\alpha_n u \sin\alpha_n c \sin\alpha_n x \cdot \\
& \cdot \{ 4 - 2[2+\alpha_n y]e^{-\alpha_n y} \\
& + [2+\alpha_n(y+d)]e^{-\alpha_n(y+d)} - [2+\alpha_n(d-y)]e^{-\alpha_n(d-y)} \}, \quad \text{kun} \quad 0 \leq y \leq d.
\end{aligned}
\tag{10.35}
$$

10.2 Ratkaisu Fourier-muunnoksella

Pariton funktio $f(x) = -f(-x)$ voidaan tietyin edellytyksin esittää Fourier-muunnoksen muodossa, liite B,

$$
f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(\xi) \sin\alpha\xi\, d\xi \right) \sin\alpha x\, d\alpha. \tag{10.36}
$$





Kuva 10.6 Symmetrinen funktio.

Kaava (10.36) voidaan jakaa kahteen osaan

$$\begin{aligned} \bar{f}(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(\xi) \sin \alpha\xi \, d\xi, \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{f}(\alpha) \sin \alpha x \, d\alpha, \end{aligned} \tag{10.37}$$

jotka ovat Fourier-sinimuunnos ja takaisinmuunnos.

Parillisen funktion $f(-x) = f(x)$ kosinimuunnos ja takaisinmuunnos ovat vastaavasti

$$\begin{aligned} \bar{f}(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(\xi) \cos \alpha\xi \, d\xi, \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{f}(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha. \end{aligned} \tag{10.38}$$

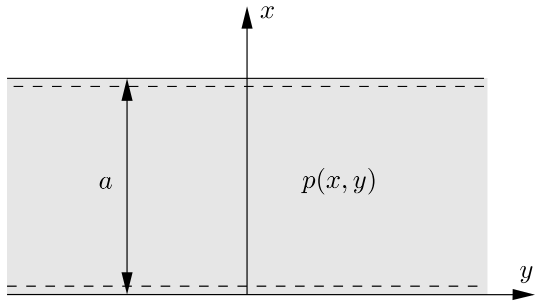
Kaksiulotteisessa tapauksessa (x-akselin suhteen symmetrisen) funktion $f(x, y)$ kosinimuunnos on

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, \beta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x, y) \cos \beta y \, dy, \\ f(x, y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{f}(x, \beta) \cos \beta y \, d\beta, \end{aligned} \tag{10.39}$$

missä muunnosparametria on nyt merkitty β:lla.

Otaksutaan funktio $f(x, y)$ symmetriseksi x-akselin suhteen. Funktion f toisen derivaatan muunnos on

$$\begin{aligned} \bar{f}_{,yy}(x, \beta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_{,yy}(x, y) \cos \beta y \, dy \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\Big/_0^\infty f_{,y} \cos \beta y - \int_0^\infty f_{,y} (-\beta \sin \beta y) \, dy \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\Big/_0^\infty \beta f \sin \beta y - \beta \int_0^\infty f \beta \cos \beta y \, dy \right] \\ &= -\beta^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f \cos \beta y \, dy = -\beta^2 \bar{f}(x, \beta) \end{aligned} \tag{10.40}$$



Kuva 10.7 Vapaasti tuettu laattakaista.

eli

$$\bar{f}_{,yy}(x,\beta) = -\beta^2 \bar{f}(x,\beta). \tag{10.41}$$

Kaavassa (10.40) sijoitustermit häviävät, koska funktio f derivaattoineen menee nollaksi äärettömyydessä, $f_{,y}(0) = 0$ ja $\sin 0 = 0$.

Soveltamalla toisen derivaatan muunnoskaavaa kahteen kertaan tulee

$$\bar{f}_{,yyyy} = (-\beta^2)(-\beta^2)\bar{f} = \beta^4 \bar{f}. \tag{10.42}$$

10.3 Vapaasti tuettu laattakaista

Vapaasti tuetun laattakaistan reunaehdot

$$w(0,y) = w(a,y) = 0, \tag{10.43}$$

$$w_{,xx}(0,y) = w_{,xx}(a,y) = 0 \tag{10.44}$$

toteutuvat valitsemalla taipumalle kehitelmä

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}. \tag{10.45}$$

Kaistan kuormitus $p(x,y)$ kehitetään myös sinisarjaksi

$$p(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(y) \sin \alpha_n x \tag{10.46}$$

kertoimin

$$p_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p(x,y) \sin \alpha_n x \, dx. \tag{10.47}$$

10.3.1 Akselin x suhteen symmetrinen kuormitus

Jos kuorma $p(x,y)$ on x-akselin suhteen symmetrinen funktio, niin laatan differentiaaliyhtälöön

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D} \tag{10.48}$$

tehdään laattakaistan tapauksessa kosinimuunnos ja osittaisdifferentiaaliyhtälöstä tulee tavallinen differentiaaliyhtälö. Kuorman tulee olla sellainen, että muunnos voidaan tehdä.

Kosinimuunnnettu laatan differentiaaliyhtälö on

$$\frac{d^4\bar{w}}{dx^4} - 2\beta^2\frac{d^2\bar{w}}{dx^2} + \beta^4\bar{w} = \frac{\bar{p}(x,y)}{D}, \tag{10.49}$$

missä on otettu huomioon, että w on x-akselin suhteen symmetrinen ja on sovellettu parillisen derivaatan muunnoskaavaa. Tällöin

$$\begin{aligned}\bar{w}(x,\beta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\left(\sum_{n=1}^\infty Y_n(y)\sin\alpha_n x\right)\cos\beta y\,dy\\ &= \sum_{n=1}^\infty\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty Y_n(y)\cos\beta y\,dy\right)\sin\alpha_n x\\ &= \sum_{n=1}^\infty \bar{Y}_n(\beta)\sin\alpha_n x,\end{aligned} \tag{10.50}$$

ja kuorman $p(x,y)$ kosinimuunnos on

$$\bar{p}(x,\beta) = \sum_{n=1}^\infty \bar{p}_n(\beta)\sin\alpha_n x, \tag{10.51}$$

missä kertoimet ovat

$$\bar{p}_n(\beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty p_n(y)\cos\beta y\,dy. \tag{10.52}$$

Sijoittamalla taipuman ja kuorman muunnokset kosinimuunnettuun kaistan differentiaaliyhtälöön tuloksena on algebrallinen yhtälö

$$(\alpha_n^4 + 2\beta^2\alpha_n^2 + \beta^4)\bar{Y}_n(\beta) = \frac{\bar{p}_n}{D}, \quad n = 1, 2, \dots\ , \tag{10.53}$$

josta ratkaistaan

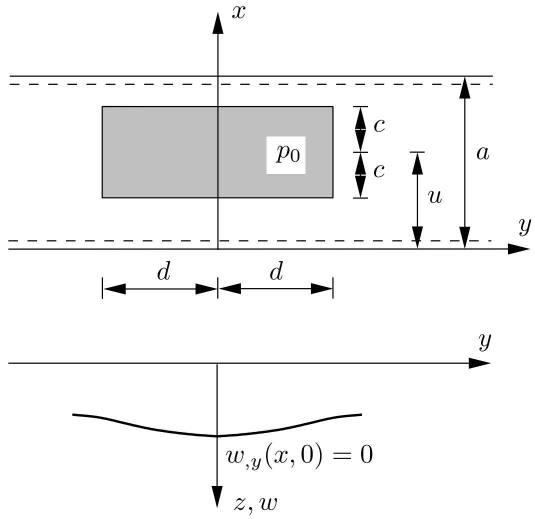
$$\bar{Y}_n(\beta) = \frac{\bar{p}_n(\beta)}{D(\alpha_n^2+\beta^2)^2}, \quad n = 1, 2, \dots\ . \tag{10.54}$$

Muunnettu laattakaistan taipuman kaava on siten

$$\bar{w}(x,\beta) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\bar{p}_n(\beta)}{D(\alpha_n^2+\beta^2)^2}\sin\alpha_n x. \tag{10.55}$$

Taipuman lauseke saadaan suorittamalla käänteismuunnos kaavalla

$$w(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\sum_{n=1}^\infty \frac{\bar{p}_n(\beta)}{D(\alpha_n^2+\beta^2)^2}\cos\beta y\,d\beta\sin\alpha_n x. \tag{10.56}$$



Kuva 10.8 Symmetrinen palakuorma.

Erikoistapaus 1. Symmetrinen palakuorma

Määritellään tasainen kuorma p_0 suorakaiteeseen $u-c \leq x \leq u+c$, $|y| \leq d$. Kuorman sinisarjan

$$p(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(y) \sin \alpha_n x \tag{10.57}$$

kertoimet ovat nyt

$$\begin{aligned} p_n(y) =& \frac{2}{a} \int_{u-c}^{u+c} p_0 \sin \alpha_n \, dx \\ =& \frac{2}{a} p_0 \left(-\frac{1}{\alpha_n} \right) [\cos \alpha_n (u+c) - \cos \alpha_n (u-c)] \\ =& \frac{4}{a} \frac{p_0}{\alpha_n} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c, \quad \text{kun} \quad |y| \leq d \end{aligned} \tag{10.58}$$

ja

$$p_n(y) = 0, \quad \text{kun} \quad |y| \geq d. \tag{10.59}$$

Kertoimien $p_n(y)$ kosinimuunnos on

$$\begin{aligned} \bar{p}_n(\beta) =& \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^d p_n(y) \cos \beta y \, dy \\ =& \frac{4p_0}{n\pi} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c \, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^d \cos \beta y \, dy \\ =& \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{4p_0}{n\pi} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c \, \frac{\sin \beta d}{\beta}, \end{aligned} \tag{10.60}$$

jonka avulla voidaan kirjoittaa taipuman amplitudin $Y_n(y)$ lauseke muunnosmuodossa

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{Y}_n(\beta) \cos \beta y \, d\beta \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\bar{p}_n(\beta)}{D(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \cos \beta y \, d\beta \\ &= \frac{8p_0}{\pi^2 D n} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c \int_0^\infty \frac{\sin \beta d}{\beta(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \cos \beta y \, d\beta. \end{aligned} \tag{10.61}$$

Ratkaisu on nyt periaatteessa selvillä Fourier-muunnoksen muodossa. Käyttökelpoinen ratkaisu saadaan suorittamalla käänteismuunnos eli laskemalla $Y_n(y)$:n kaavassa oleva integraali. Fourier-muunnokseen liittyviä integraaleja löytyy valmiina matematiikan kaavakokoelmista. Sijoittamalla

$$\sin \beta d \cos \beta y = \frac{1}{2}[\sin \beta(y+d) - \sin \beta(y-d)] \tag{10.62}$$

funktion $Y_n(y)$ kaavassa (10.61) olevaan olevaan integraaliin tulee

$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta d \cos \beta y}{\beta(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \, d\beta = \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{\sin \beta(y+d) - \sin \beta(y-d)}{\beta(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \, d\beta. \tag{10.63}$$

Viimeisimmän integraalin laskentaan soveltuu liitteen B taulukon B.1 toiseksi alin kaava

$$\int_0^\infty \frac{\sin r\beta}{\beta(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \, d\beta = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\alpha_n^4} [2 - (2 + \alpha_n r) e^{-\alpha_n r}], \tag{10.64}$$

missä nyt kyseessä olevassa tapauksessa sijoitetaan $r = y + d$ tai $r = y - d$ ja $r > d$. Soveltamalla yllä olevaa integraalikaavaa saadaan funktion $Y_n(y)$ lauseke, joka on hieman erilainen siitä riippuen, onko $0 \le y \le d$ vai $y \ge d$, ja sen perusteella tulee taipuman lausekkeeksi

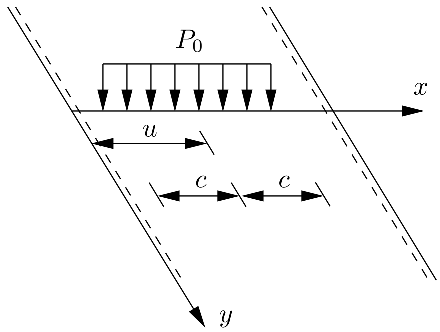
$$\begin{aligned} w(x,y) &= \frac{p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^5} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c \sin \alpha_n x \cdot \\ &\cdot \left\{ 4 - [2 + \alpha_n(y+d)] e^{-\alpha_n(y+d)} - [2 + \alpha_n(d-y)] e^{-\alpha_n(d-y)} \right\}, \quad 0 \le y \le d \end{aligned} \tag{10.65}$$

ja

$$\begin{aligned} w(x,y) &= \frac{p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^5} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c \sin \alpha_n x \cdot \\ &\cdot \left\{ [2 + \alpha_n(y-d)] e^{-\alpha_n(y-d)} - [2 + \alpha_n(y+d)] e^{-\alpha_n(y+d)} \right\}, \quad y \ge d. \end{aligned} \tag{10.66}$$

Soveltamalla kaavoja

$$\sinh a = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a}), \quad \cosh a = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a}) \tag{10.67}$$



Kuva 10.9 Viivakuorma.

taipuman lauseke, kun $0 \le y \le d$, muuntuu muotoon

$$w(x,y) = \frac{2p_0a^4}{\pi^5 D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}\sin\alpha_n u\sin\alpha_n c\sin\alpha_n x\cdot$$
$$\cdot\left\{2-[(2+\alpha_n d)\cosh\alpha_n y-\alpha_n y\sinh\alpha_n y]e^{-\alpha_n d}\right\},\quad 0\le y\le d, \tag{10.68}$$

ja kun $y \ge d$, niin taipuman lauseke on

$$w(x,y) = \frac{2p_0a^4}{\pi^5 D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}\sin\alpha_n u\sin\alpha_n c\sin\alpha_n x\cdot$$
$$\cdot\{[(2+\alpha_n y)\sinh\alpha_n d-\alpha_n d\cosh\alpha_n d]e^{-\alpha_n y}\},\quad y\ge d. \tag{10.69}$$

Erikoistapaukset 2 ja 3. Viivakuorma ja pistekuorma

Palakuorman ratkaisusta, kun $y \ge d$, saadaan viivakuorman ratkaisu rajankäynnillä pitämällä resultantti

$$P_0 = 2p_0 d \tag{10.70}$$

vakiona, kun $d \to 0$. Tällöin saadaan ensin

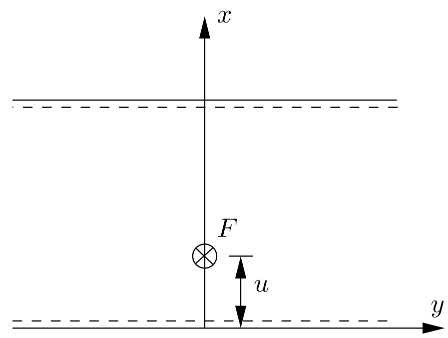
$$w(x,y) = \frac{P_0a^3}{\pi^4 D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin\alpha_n u\sin\alpha_n c\sin\alpha_n x\cdot$$
$$\cdot\left\{[(2+\alpha_n y)\frac{\sinh\alpha_n d}{\alpha_n d}-\cosh\alpha_n d]e^{-\alpha_n y}\right\},\quad y\ge d \tag{10.71}$$

ja sitten rajankäynnillä

$$w(x,y) = \frac{P_0a^3}{\pi^4 D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin\alpha_n u\sin\alpha_n c\sin\alpha_n x\cdot$$
$$\cdot\{[2+\alpha_n y-1]e^{-\alpha_n y}\},\quad y\ge 0. \tag{10.72}$$

Pistekuorman ratkaisu saadaan puolestaan viivakuorman ratkaisusta rajankäynnillä pitämällä resultantti

$$F = 2P_0 c \tag{10.73}$$



Kuva 10.10 Pistekuorma.

vakiona ja antamalla c:n lähestyä nollaa. Tällöin tulee

$$w(x,y) = \frac{Fa^2}{2\pi^3 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n x \cdot \\ \cdot \{(1+\alpha_n y)e^{-\alpha_n y}\}, \quad y \geq 0. \tag{10.74}$$

10.3.2 Akselin x suhteen antisymmetrinen kuorma

Akselin x suhteen antisymmetrisen kuorman tapauksessa taipumafunktio on myös antisymmetrinen ja tällöin käytetään sinimuunnosta

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (\Delta\Delta w - \frac{p}{D}) \sin \beta y \, dy = \bar{w}^{(4)} - 2\beta^2 \bar{w}'' + \beta^4 \bar{w} - \frac{\bar{p}}{D} = 0, \tag{10.75}$$

missä $(\bullet)' = \dfrac{\partial(\bullet)}{\partial x}$ ja

$$\bar{w}(x,\beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} w(x,y) \sin \beta y \, dy, \tag{10.76}$$

$$\bar{p}(x,\beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} p(x,y) \sin \beta y \, dy. \tag{10.77}$$

Sijoittamalla laatan differentiaaliyhtälöön yrite

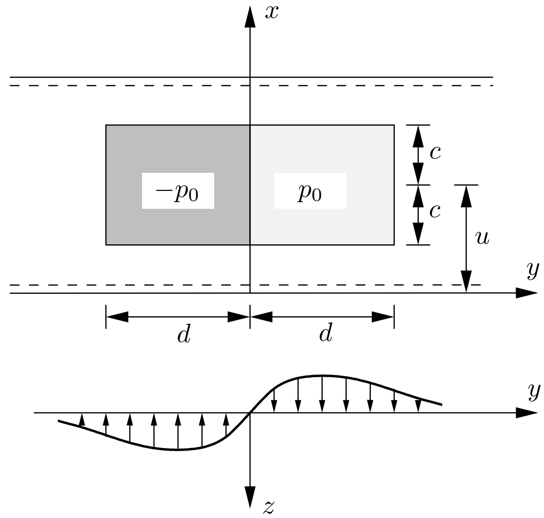
$$\bar{w}(x,\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Y}_n(\beta) \sin \alpha_n x \tag{10.78}$$

tulee

$$\bar{Y}_n(\beta) = \frac{\bar{p}_n}{D(\alpha_n^2 + \beta^2)^2}. \tag{10.79}$$

Muunnettu laattakaistan taipuman kaava on nyt

$$\bar{w}(x,\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{p}_n(\beta)}{D(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \sin \alpha_n x. \tag{10.80}$$



Kuva 10.11 Antisymmetrinen palakuorma.

Taipuma saadaan suorittamalla käänteismuunnos (sinimuunnos) kaavalla

$$w(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{\bar{p}_n(\beta)}{D(\alpha_n^2+\beta^2)^2} \sin\beta y \, d\beta \sin\alpha_n x. \tag{10.81}$$

Erikoistapaus 4. Antisymmetrinen palakuorma

Määritellään tasainen kuorma p_0 suorakaiteeseen $u-c \le x \le u+c$, $0 \le y \le d$ ja kuorma $-p_0$ suorakaiteeseen $u-c \le x \le u+c$, $-d \le u \le d$.

Kuorman sinisarjan

$$p(x,y) = \sum_{n=1}^\infty p_n(y) \sin\alpha_n x \tag{10.82}$$

kertoimet ovat

$$\begin{aligned} p_n(y) =& \frac{2}{a}\int_{u-c}^{u+c} p_0 \sin\alpha_n \, dx \\ =& \frac{2}{a} p_0 \left(-\frac{1}{\alpha_n}\right)[\cos\alpha_n(u+c) - \cos\alpha_n(u-c)] \\ =& \frac{4}{a}\frac{p_0}{\alpha_n} \sin\alpha_n u \sin\alpha_n c, \quad \text{kun} \quad 0 < y \le d \end{aligned} \tag{10.83}$$

ja

$$p_n(y) = 0, \quad \text{kun} \quad y > d. \tag{10.84}$$

Kertoimien $p_n(y)$ sinimuunnos on

$$\begin{aligned}\bar{p}_n(\beta) =& \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^d p_n(y) \sin \beta y \, dy \\ =& \frac{4p_0}{n\pi} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^d \sin \beta y \, dy \\ =& \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{4p_0}{n\pi} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c \, \frac{1 - \cos \beta d}{\beta},\end{aligned} \tag{10.85}$$

jonka avulla voidaan kirjoittaa taipuman amplitudin $Y_n(y)$ lauseke muunnosmuotoon

$$\begin{aligned}Y_n(y) =& \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{Y}_n(\beta) \sin \beta y \, d\beta \\ =& \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\bar{p}_n(\beta)}{D(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \sin \beta y \, d\beta \\ =& \frac{8p_0}{\pi^2 Dn} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c \int_0^\infty \frac{1 - \cos \beta d}{\beta(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \sin \beta y \, d\beta.\end{aligned} \tag{10.86}$$

Ratkaisu saadaan tekemällä käänteismuunnos eli laskemalla $Y_n(y)$:n kaavassa oleva integraali. Ensimmäisen integraalin laskentaan soveltuu jälleen liitteen B taulukon B.1 toiseksi alin kaava, jonka mukaan

$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta y}{\beta(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \, d\beta = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\alpha_n^4} [2 - (2 + \alpha_n y) e^{-\alpha_n y}], \quad \text{kun} \quad y \geq 0. \tag{10.87}$$

Sijoittamalla

$$\sin \beta y \cos \beta d = \frac{1}{2} [\sin \beta (y + d) + \sin \beta (y - d)] \tag{10.88}$$

funktion $Y_n(y)$ kaavassa olevaan toiseen integraaliin saadaan

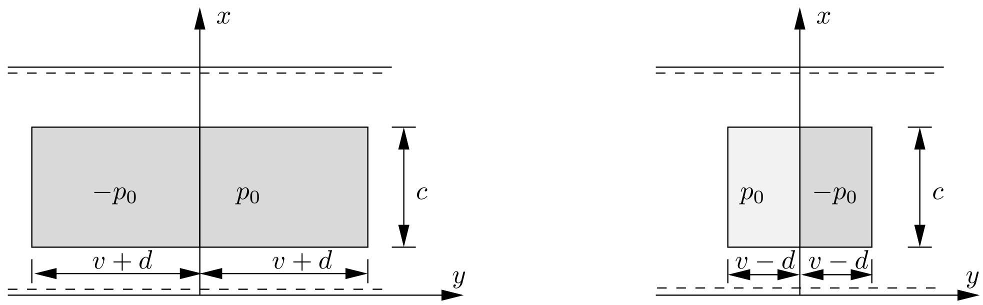
$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta y \cos \beta d}{\beta(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \, d\beta = \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{\sin \beta (y + d) + \sin \beta (y - d)}{\beta(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \, d\beta. \tag{10.89}$$

Soveltamalla edellä mainittua integraalikaavaa saadaan

$$\begin{aligned}& \int_0^\infty \frac{\sin \beta y \cos \beta d}{\beta(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \, d\beta \\ =& \frac{\pi}{8\alpha_n^4} \left\{ 2 - [2 + \alpha_n (y + d)] e^{-\alpha_n (y + d)} - 2 + [2 + \alpha_n (d - y)] e^{-\alpha_n (d - y)} \right\},\end{aligned} \tag{10.90}$$

kun $0 \leq y \leq d$, ja

$$\begin{aligned}& \int_0^\infty \frac{\sin \beta y \cos \beta d}{\beta(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \, d\beta \\ =& \frac{\pi}{8\alpha_n^4} \left\{ 2 - [2 + \alpha_n (y + d)] e^{-\alpha_n (y + d)} + 2 - [2 + \alpha_n (y - d)] e^{-\alpha_n (y - d)} \right\},\end{aligned} \tag{10.91}$$



Kuva 10.12 Antisymmetriset palakuormat.

kun $y \geq d$.

Sijoittamalla yllä olevat integraalikaavat taipuman lausekkeeksi y:n arvoilla $y > d$ tulee

$$w(x,y) = \frac{p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin\alpha_n u \sin\alpha_n c \sin\alpha_n x \cdot \tag{10.92}$$
$$\cdot \frac{1}{\alpha_n} \left\{ -4 + [2+\alpha_n(y+d)]e^{-\alpha_n(y+d)} + [2+\alpha_n(y-d)]e^{-\alpha_n(y-d)} \right\}, \quad \text{kun} \quad y \geq d.$$

Taipuman lauseke alueessa $0 \leq y \leq d$ saadaan muotoon

$$w(x,y) = \frac{p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin\alpha_n u \sin\alpha_n c \sin\alpha_n x \cdot$$
$$\cdot \{\, 4 - 2[2+\alpha_n y]e^{-\alpha_n y} \tag{10.93}$$
$$+ [2+\alpha_n(y+d)]e^{-\alpha_n(y+d)} - [2+\alpha_n(d-y)]e^{-\alpha_n(d-y)} \,\}, \quad \text{kun} \quad 0 \leq y \leq d.$$

Ottamalla huomioon yhteydet (10.67) taipuman lauseke tulee muotoon

$$w(x,y) = \frac{2p_o a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin\alpha_n u \sin\alpha_n c \sin\alpha_n x \cdot \tag{10.94}$$
$$\cdot \left\{ 2 - (2+\alpha_n y)e^{-\alpha_n y} - [(2+\alpha_n d)\sinh\alpha_n y - \alpha_n y \cosh\alpha_n y]e^{-\alpha_n d} \right\}, \quad 0 \leq y \leq d,$$

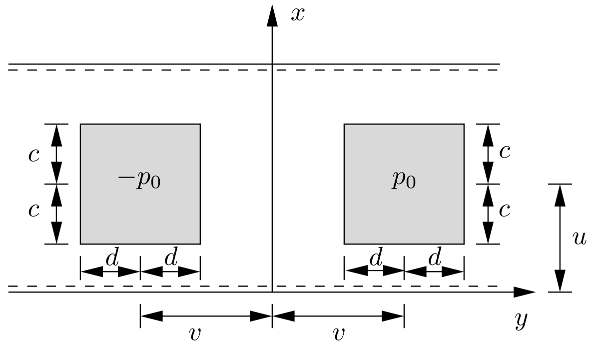
tai

$$w(x,y) = \frac{2p_o a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin\alpha_n u \sin\alpha_n c \sin\alpha_n x \cdot \tag{10.95}$$
$$\cdot \{ [(\cosh\alpha_n d - 1)(2+\alpha_n y) - \alpha_n d \sinh\alpha_n d] e^{-\alpha_n y} \}, \quad y \geq d.$$

Taipuman lauseke toteuttaa reunaehdot

$$w(x,0) = 0 \;\; \text{ja} \;\; w_{,xx}(x,0) = 0, \tag{10.96}$$

joten se on myös x-akselia pitkin vapaasti tuetun puoliäärettömän laattakaistan ratkaisu.



Kuva 10.13 Antisymmetriset palakuormat vapaasti tuetulla laattakaistalla.

Erikoistapaus 5. Palakuormat p_0 ja $-p_0$ suorakaiteessa $\Delta x = 2c, \Delta y = 2d$ ja keskipisteinä (u, v) ja $(u, -v)$

Kuvan 10.12 kuormitustapauksista saadaan superponoimalla kuvan 10.13 kuormitustapauksen ratkaisu.

Taipuman lausekkeeksi tulee

$$w(x,y) = \frac{4p_0a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin\alpha_n u \sin\alpha_n c \sin\alpha_n x \cdot$$

$$\cdot \{[(2+\alpha_n v)\sinh\alpha_n d - \alpha_n d\cosh\alpha_n d]\sinh\alpha_n y - \alpha_n y \sinh\alpha_n d\cosh\alpha_n y\}\, e^{-\alpha_n v}, \tag{10.97}$$

$$0 \le y \le v - d,$$

$$w(x,y) = \frac{4p_oa^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin\alpha_n u \sin\alpha_n c \sin\alpha_n x \cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2}\{2 - \{[2+\alpha_n(v+d)]\sinh\alpha_n y - \alpha_n y\cosh\alpha_n y\}e^{-\alpha_n(v+d)} + \tag{10.98}$$

$$-[\cosh\alpha_n(v-d)(2+\alpha_n y) - \alpha_n(v-d)\sinh\alpha_n(v-d)]e^{-\alpha_n y}\}, \quad v-d \le y \le v+d$$

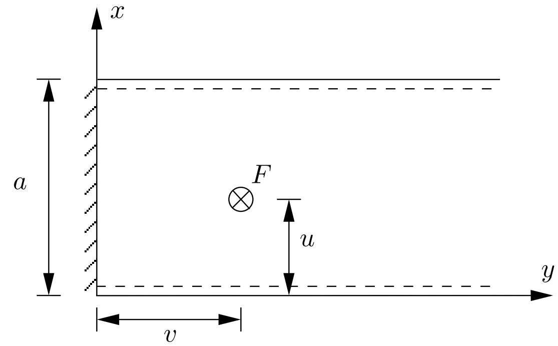
ja

$$w(x,y) = \frac{4p_0a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin\alpha_n u \sin\alpha_n c \sin\alpha_n x \cdot$$

$$\cdot \{\, \sinh\alpha_n v \sinh\alpha_n d(2+\alpha_n y) - \alpha_n v\cosh\alpha_n v \sinh\alpha_n d \tag{10.99}$$

$$-\alpha_n d\cosh\alpha_n d\sinh\alpha_n v\,\}\, e^{-\alpha_n y}, \quad v+d \le y,$$

ja se on myös x-akselia pitkin vapaasti tuetun puoliäärettömän laattakaistan ratkaisu.



Kuva 10.14 Reunalta $y = 0$ jäykästi tuettu laattakaista, pistekuorma kohdassa (u, v).

Erikoistapaus 6. **Pistekuorma** F **kohdassa** (u, v) **ja pistekuorma** $-F$ **kohdassa** $(u, -v)$

Palakuorman ratkaisusta saadaan kohdassa $x = u, y = v$ vaikuttavan pistekuorman F ja kohdassa $x = u, y = -v$ olevan pistekuorman $-F$ ratkaisu rajaprosessina pitämällä kuorman resultantti $F = 4cdp_0$ vakiona, kun $c, d \to 0$. Tällöin tulee laattakaistan taipumalle ratkaisu

$$\begin{aligned} w(x,y) = & \frac{Fa^2}{\pi^3 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n x \cdot \\ & \cdot [(1+\alpha_n v)\sinh \alpha_n y - \alpha_n y \cosh \alpha_n y] e^{-\alpha_n v}, \quad 0 \le y \le v, \end{aligned} \tag{10.100}$$

$$\begin{aligned} w(x,y) = & \frac{Fa^2}{\pi^3 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n x \cdot \\ & \cdot [(1+\alpha_n y)\sinh \alpha_n v - \alpha_n v \cosh \alpha_n v] e^{-\alpha_n y}, \quad y \ge v, \end{aligned} \tag{10.101}$$

ja se on myös x-akselia pitkin vapaasti tuetun puoliäärettömän laattakaistan ratkaisu.

10.4 Vapaasti tuettu puoliääretön laattakaista

Edellä käsiteltyä x-akselin suhteen antisymmetrisesti kuormitetun laattakaistan ratkaisua voidaan soveltaa vapaasti tuetulle laattakaistalle, jonka reuna $y = 0$ on vapaasti tuettu.

Pitkiltä sivuilta vapaasti tuetun puoliäärettömän laattakaistan ratkaisu voidaan superponoida kahdesta osasta $w = w_0 + w_1$, missä w_0 on vapaasti tuetun äärettömän laattakaistan ratkaisu ja w_1 on homogeenisen yhtälön ratkaisu

$$w_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + D_n \alpha_n y) e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x. \tag{10.102}$$

Esimerkki 10.1 *Laattakaista on jäykästi tuettu reunalta $y = 0$. Määritetään taipuman lauseke pistekuormasta.*

Reunan $y = 0$ reunaehdot ovat

$$w(x,0) = 0, \quad w_{,y}(x,0) = 0. \tag{10.103}$$

Aikaisemmin johdetun ratkaisun perusteella

$$\begin{aligned} w_0(x,y) &= \frac{Fa^2}{2\pi^3 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin\alpha_n u \sin\alpha_n x \cdot \\ &\cdot [1 + \alpha_n(v-y)] e^{-\alpha_n(v-y)}, \quad 0 \le y \le v \end{aligned} \tag{10.104}$$

ja

$$\begin{aligned} w_0(x,y) &= \frac{Fa^2}{2\pi^3 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin\alpha_n u \sin\alpha_n x \cdot \\ &\cdot [1 + \alpha_n(y-v)] e^{-\alpha_n(y-v)}, \quad y \ge v. \end{aligned} \tag{10.105}$$

Vakiot C_n ja D_n määritetään reunaehtojen perusteella:

$$C_n + \frac{Fa^2}{2\pi^3 D n^3} \sin\alpha_n u (1 + \alpha_n v) e^{-\alpha_n v} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{10.106}$$

$$-C_n + D_n + \frac{Fa^2}{2\pi^3 D n^3} \sin\alpha_n u \alpha_n v e^{-\alpha_n v} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{10.107}$$

joista ratkaistaan

$$C_n = -\frac{Fa^2}{2\pi^3 D n^3} \sin\alpha_n u (1 + \alpha_n v) e^{-\alpha_n v}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{10.108}$$

$$D_n = -\frac{Fa^2}{2\pi^3 D n^3} \sin\alpha_n u (1 + 2\alpha_n v) e^{-\alpha_n v}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{10.109}$$

10.5 Lévyn menetelmä vapaasti tuetulle ja puoliäärettömälle laattakaistalle

Seuraavassa on esitetty lisäesimerkkejä Lévyn ratkaisumenetelmän soveltamisesta vapaasti tuetulle puoliäärettömälle laattakaistalle ja vapaasti tuetulle laattakaistalle.

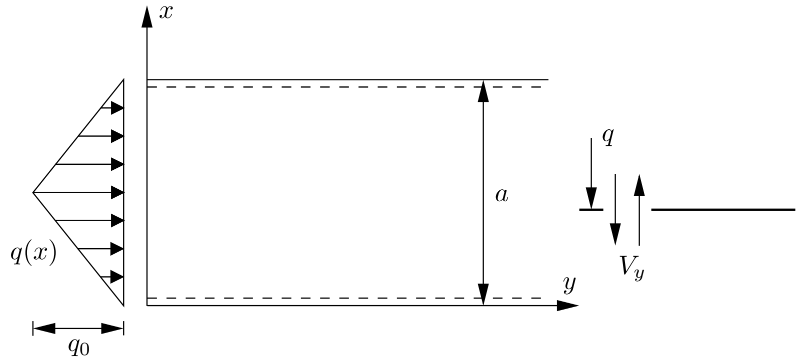
Esimerkki 10.2 *Puoliäärettömän laattakaistan vapaalla reunalla on kolmion muotoinen jakautunut viivakuorma. Määritetään vapaasti tuetun laattakaistan taipuma.*

Viivakuorma on laattakaistan vapaalla reunalla, joten puoliäärettömän vapaasti tuetun laattakaistan ratkaisuksi käy nyt homogeenisen yhtälön ratkaisu

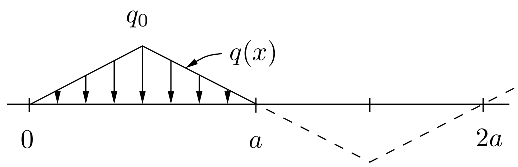
$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} (C_n + D_n \alpha_n y) e^{-\alpha_n y} \sin\alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}. \tag{10.110}$$

Viivakuorma reunalla $y = 0$ on

$$q(x) = \begin{cases} \dfrac{2q_0}{a} x, & \text{kun} \;\; 0 \le x \le \dfrac{a}{2}, \\[2ex] \dfrac{2q_0}{a}(a-x), & \text{kun} \;\; \dfrac{a}{2} \le x \le a, \end{cases} \tag{10.111}$$



Kuva 10.15 Puoliääretön laattakaista, viivakuorma vapaalla reunalla $y = 0$.



Kuva 10.16 Kolmion muotoinen viivakuorma laattakaistan reunalla.

ja se kehitetään Fourier-sinisarjaksi jaksona $2a$

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \alpha_n x \tag{10.112}$$

kertoimin

$$\begin{aligned} q_n =& \frac{2}{a}\left[\int_0^{a/2} \frac{2q_0}{a} x \sin \alpha_n x \, dx + \int_{a/2}^{a} \frac{2q_0}{a}(a-x) \sin \alpha_n x \, dx\right] \\ =& \frac{8q_0}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned} \tag{10.113}$$

Reunan $y = 0$ reunaehdot ovat

$$M_y(x,0) = -D[w_{,yy}(x,0) + \nu w_{,xx}(x,0)] = 0, \tag{10.114}$$

$$V_y(x,0) = -D[w_{,yyy}(x,0) + (2-\nu)w_{,xxy}(x,0)] = -q(x), \tag{10.115}$$

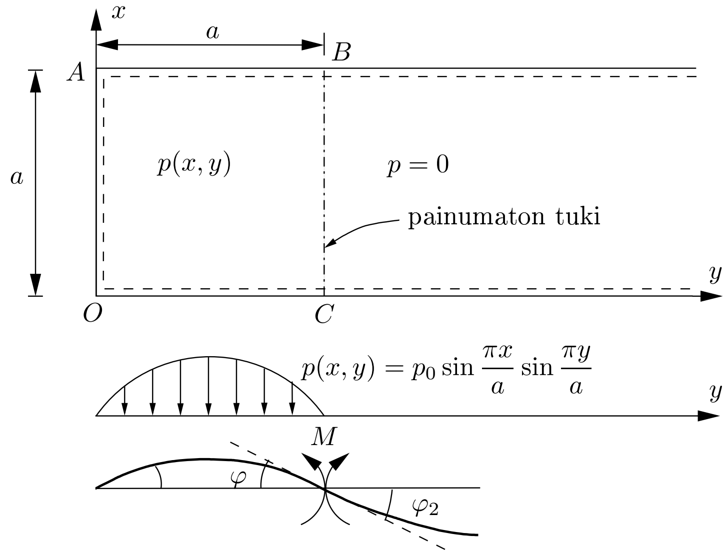
joista seuraa

$$C_n = \frac{2q_n}{D\alpha_n(3 - 2\nu - \nu^2)}, \quad D_n = \frac{q_n}{D\alpha_n(3+\nu)}. \tag{10.116}$$

Taipuman maksimiarvoksi tulee

$$\begin{aligned} w_{\max} = w(\frac{a}{2}, 0) =& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\alpha_n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \\ =& \frac{16q_0a^3}{D\pi^5(3 - 2\nu - \nu^2)} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5}. \end{aligned} \tag{10.117}$$

Esimerkki 10.3 *Vapaasti tuettu puoliääretön laattakaista on lisäksi tuettu painumattomalla tuella kohdassa $y = a$. Määritetään laattakaistan taipuma ja taivutusmomentti*



Kuva 10.17 Laattakaista, painumaton tuki kohdassa $y = a$.

tuella, kun vasemman kentän kuormana on sinikuplan muotoinen jakautunut kuormitus.

Vapaasti tuetulla puoliäärettömällä laattakaistalla on painumaton tuki kohdassa $y = a$. Kaistaa kuormittaa neliössä $ABCO$ eli alueessa $0 \leq x, y \leq a$ sinikuplan muotoinen jakautunut kuorma

$$p(x, y) = p_0 \sin \alpha x \sin \alpha y, \quad \alpha = \frac{\pi}{a}. \tag{10.118}$$

Määritetään laattakaistalle momentti M_y tuella.

a) Taipuma osassa $ABCO$ on

$$w(x, y) = w_0(x, y) + w_1(x, y), \tag{10.119}$$

missä Navierin ratkaisun mukaan vapaasti tuetun laatan taipuma on

$$w_0(x, y) = \frac{p_0 a^4}{4\pi^4 D} \sin \alpha x \sin \alpha y, \tag{10.120}$$

ja reunamomentin $M_y(x, a) = M \sin \alpha x$ aiheuttama taipuma on

$$w_1(x, y) = \frac{M}{2D} \frac{\sin \alpha x}{\alpha^2 \sinh \pi}(\pi \coth \pi \sinh \alpha y - \alpha y \cosh \alpha y). \tag{10.121}$$

b) Laattakaistan taipuma on

$$w_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n + D_n \alpha_n y)e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x. \tag{10.122}$$

Laattakaistan reunaehdot ovat

$$w(x, 0) = 0, \tag{10.123}$$

$$M_y(x, 0) = M \sin \alpha x, \tag{10.124}$$

missä

$$\begin{aligned} M_y(x, y) =& -D[w_{,yy}(x, y) + \nu w_{,xx}(x, y)] \\ =& -D \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 (C_n - 2D_n + D_n \alpha_n y)e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x - D\nu w_{,xx}(x, y). \end{aligned} \tag{10.125}$$

Koska kaistan reuna pysyy painumattoman tuen ansiosta suorana, on

$$w_{,xx}(x,0) = 0. \tag{10.126}$$

Ensimmäisestä reunaehdosta (10.123) seuraa

$$C_n = 0, \quad \text{kun} \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{10.127}$$

ja toisesta reunaehdosta (10.124) tulee

$$D_1 = \frac{M}{2D\alpha^2}, \quad D_2 = D_3 = \ldots = D_n = 0. \tag{10.128}$$

Taipuman lauseke laattakaistalle on siten

$$w_2(x,y) = \frac{M}{2D\alpha^2}\alpha y e^{-\alpha y} \sin \alpha x. \tag{10.129}$$

Nyt voidaan lausua yhteensopivuusehto tuella BC

$$\frac{\partial w_0(x,a)}{\partial y} + \frac{\partial w_1(x,a)}{\partial y} = \frac{\partial w_2(x,0)}{\partial y} \tag{10.130}$$

eli

$$-\frac{p_0 a^3}{4\pi^3 D} \sin \alpha x - M \frac{\cosh \pi \sinh \pi - \pi}{2D\alpha \sinh^2 \pi} \sin \alpha x = M \frac{1}{2D\alpha} \sin \alpha x, \tag{10.131}$$

josta seuraa

$$M = -\frac{p_0 a^2}{2\pi^2 \left(1 + \dfrac{\cosh \pi \sinh \pi - \pi}{\sinh^2 \pi}\right)} \approx -0.0256 p_0 a^2. \tag{10.132}$$

Taivutusmomentti tuella on

$$M_y(x,0) = M \sin \alpha x \approx -0.0256 p_0 a^2 \sin \alpha x. \tag{10.133}$$

Esimerkki 10.4 *Vapaasti tuettu laattakaista on tuettu palkilla x-akselia pitkin. Kaistan keskellä on pistekuorma F. Määritetään laattakaistan taipuma ja suurimmat taivutusmomentit.*

Vapaasti tuettua lattakaistaa tukee palkki jänteen keskellä olevan pistekuorman F kohdalla. Määritetään momenttien suurimmat arvot. Merkitään, että palkin ja laatan taipumat ovat $v(x)$ ja $w(x,y)$. Otaksutaan palkin pysyvän kiinni laatassa. Tällöin on voimassa yhteensopivuusehto

$$w(x,0) = v(x). \tag{10.134}$$

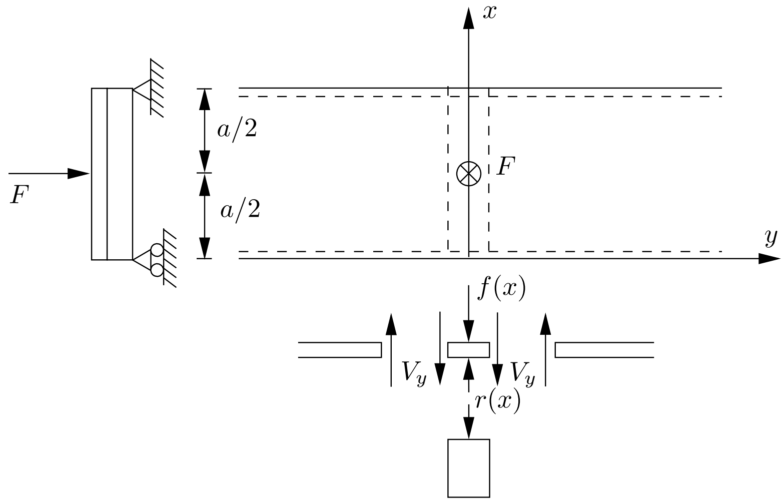
Symmetrian ja pystysuoran tasapainoehdon nojalla saadaan yhtälöt

$$w_{,y}(x,0) = 0, \tag{10.135}$$

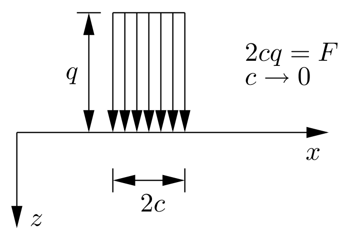
$$V_y(x,0) = -\frac{1}{2}(f(x) - r(x)), \tag{10.136}$$

missä $f(x)$ on pistekuorman Fourier-sarjaesitys ja $r(x)$ on laatan ja palkin välinen tukireaktio. Kuorman Fourier-sarja on

$$f(x) = f_n \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a} \tag{10.137}$$



Kuva 10.18 Palkilla tuettu laattakaista.



Kuva 10.19 Palkilla tuetun laattakaistan pistekuorman F esittäminen jakautunena palakuormana.

kertoimin

$$f_n = \frac{2F}{a} \sin \frac{n\pi}{2}. \tag{10.138}$$

Kertoimet f_n voidaan määrittää antamalla suorakaiteen muotoisen viivakuorman $q(x)$ = vakio vaikutuspituuden $2c$ mennä kohti nollaa siten, että resultantti $F = 2cq$ pysyy vakiona. Vaihtoehtoisesti diskreetti pistekuorma F voidaan esittää Dirac'in δ-funktion avulla 'jatkuvana' funktiona muodossa

$$f(x) = F\delta(x - \frac{a}{2}). \tag{10.139}$$

Tällöin lasketaan kuten minkä tahansa viivakuorman tapauksessa Fourier-sarjan kertoimet

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \alpha_n \, dx \\ &= \frac{2F}{a} \int_0^a \delta(x - \frac{a}{2}) \sin \alpha_n x \, dx \\ &= \frac{2F}{a} \sin \frac{n\pi}{2}, \end{aligned} \tag{10.140}$$

missä on käytetty hyväksi Dirac'in δ-funktion määritelmää. Saatiin siis sama tulos kuin vaihtoehtoisella menettelyllä.

Tukipaineen $r(x)$ Fourier-sarja on puolestaan

$$r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sin \alpha_n x, \tag{10.141}$$

missä r_n ovat toistaiseksi tuntemattomia kertoimia. Laattakaistaa kuormittaa viivalla $y = 0$ viivakuorma

$$f(x) - r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2F}{a} \sin \frac{n\pi}{a} - r_n \right) \sin \alpha_n x. \tag{10.142}$$

Symmetrian vuoksi tarkastellaan laattakaistan puolikasta. Kuorma saadaan tällöin puoliäärettömän laattakaistan reunalle, ja se voidaan ottaa huomioon reunaehdossa. Kaistan taipuman lauseke on

$$w(x,y) = w_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n + D_n \alpha_n y] e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x. \tag{10.143}$$

Kiertymän reunaehdosta $w_{,y}(x,0) = 0$ seuraa

$$\sum_{n=1}^{\infty} [-C_n + D_n] \sin \alpha_n x = 0 \quad \Rightarrow \quad C_n = D_n. \tag{10.144}$$

Reunaehdosta

$$V_y(x,0) = -D[w_{,yyy}(x,0) + (2-\nu) w_{,xxy}(x,0)] = -\frac{1}{2}(f(x) - r(x)) \tag{10.145}$$

saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} &-D \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^3 [-C_n + 3D_n + (2-\nu)(C_n - D_n)] \sin \alpha_n x \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2F}{a} \sin \frac{n\pi}{2} - r_n) \sin \alpha_n x. \end{aligned} \tag{10.146}$$

Koska $C_n = D_n$, saadaan

$$C_n = \frac{1}{4D\alpha_n^3} (\frac{2F}{a} \sin \frac{n\pi}{2} - r_n) = D_n, \tag{10.147}$$

ja kaistan taipuman lauseke on

$$w(x,y) = \frac{1}{4D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3} (\frac{2F}{a} \sin \frac{n\pi}{2} - r_n)(1 + \alpha_n y) e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x. \tag{10.148}$$

Viivalla $y = 0$ taipuma on

$$w(x,0) = \frac{1}{4D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3} (\frac{2F}{a} \sin \frac{n\pi}{2} - r_n) \sin \alpha_n x. \tag{10.149}$$

Palkin taipuma toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$EIv^{(4)} = r(x), \tag{10.150}$$

jonka puolestaan toteuttaa taipuman sarjakehitelmä

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{EI\alpha_n^4} r_n \sin \alpha_n x. \tag{10.151}$$

Reunaehdon (yhteensopivuusehdon)

$$v(x) = w(x, 0) \tag{10.152}$$

perusteella saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{EI\alpha_n^4} r_n \sin \alpha_n x = \frac{1}{4D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3} (\frac{2F}{a} \sin \frac{n\pi}{2} - r_n) \sin \alpha_n x. \tag{10.153}$$

Jotta yhteensopivuusehto olisi voimassa kaikilla x:n arvoilla, täytyy kertoimien olla samat yhtälön molemmilla puolilla eli

$$\left(\frac{1}{EI} + \frac{\alpha_n}{4D} \right) r_n = \frac{F\alpha_n}{2Da} \sin \frac{n\pi}{2}, \tag{10.154}$$

mistä seuraa tukireaktion sarjakehitelmän kertoimille kaava

$$r_n = \frac{2F}{a\left(1 + \dfrac{4D}{EI\alpha_n}\right)} \sin \frac{n\pi}{2}. \tag{10.155}$$

Suurimmat momentit ovat kohdassa $x = a/2$ ja $y = 0$. Palkissa taivutusmomentti on

$$M(x) = -EIv''(x), \tag{10.156}$$

ja laattakaistassa taivutusmomentit ovat

$$M_x(x, y) = -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}), \quad M_y(x, y) = -D(w_{,yy} + \nu w_{,xx}). \tag{10.157}$$

Suurimmat kaistan momentit ovat

$$M_x(\frac{a}{2}, 0) = M_y(\frac{a}{2}, 0) = \frac{2FD}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \nu) \sin \dfrac{n\pi}{2}}{\alpha_n(4D + EI\alpha_n)}. \tag{10.158}$$

Liite A

Fourier-sarjat

Välillä $(-L, L)$ määritelty funktio $f(x)$ on jaksollinen, jos välin $(-L, L)$ ulkopuolella määritellään

$$f(x + 2L) = f(x). \tag{A.1}$$

Jakson pituus on $2L$. Esimerkiksi funktion $\sin(x)$ jakson pituus on 2π.

Jos $f(x)$ on paloittain jatkuva välillä $(-L, L)$ ja sillä on äärellinen määrä ääriarvokohtia, niin se voidaan kehittää tällä välillä Fourier-sarjaksi

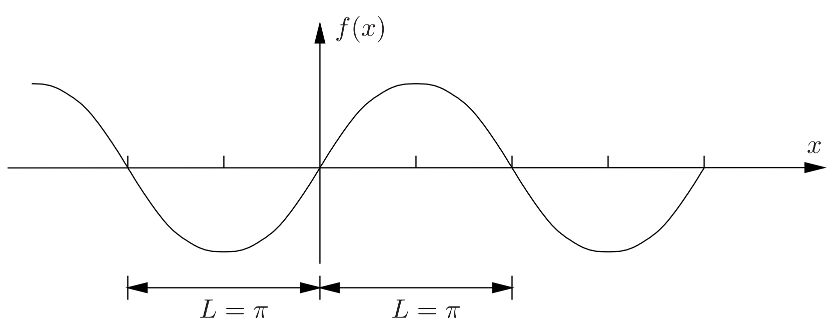
$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right] \tag{A.2}$$

kertoimin

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{A.3}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{A.4}$$

Kertoimien a_n kaava johdetaan kertomalla funktion $f(x)$ sarja termillä $\cos(m\pi x/L)$, integroimalla yli välin ja käyttämällä hyväksi trigonometristen funktioiden ortogonaali-



Kuva A.1 Funktio $\sin x$.

suusominaisuuksia

$$\int\limits_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n, \end{cases} \tag{A.5}$$

$$\int\limits_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0 \quad \forall m, \forall n. \tag{A.6}$$

Tällöin tulee

$$a_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{A.7}$$

Kertomalla funktion $f(x)$ sarjakehitelmä termillä $\sin(m\pi x/L)$, integroimalla välin $(-L, L)$ yli ja ottamalla huomioon kaavan (A.6) lisäksi, että

$$\int\limits_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n, \end{cases} \tag{A.8}$$

saadaan kertoimet

$$b_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{A.9}$$

Esimerkki A.1 *Kehitetään Fourier-sarjaksi jaksollinen funktio*

$$\begin{aligned} f(x) =& 0, \quad x \in (-\pi < x < 0), \\ f(x) =& \sin x, \quad x \in (0 < x < \pi). \end{aligned} \tag{A.10}$$

Jakson pituus on nyt $2L = 2\pi$, ja puolijakso on $L = \pi$. Sijoittamalla $f(x)$ Fourier-sarjan kertoimen a_n kaavaan tulee

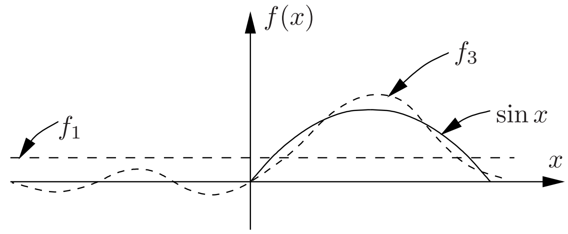
$$\begin{aligned} a_n =& \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\cos nx\,dx \\ =& -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-\cos n\pi}{1-n} + \frac{-\cos n\pi}{1+n} - \frac{2}{1-n^2}\right) \\ =& \frac{1+\cos n\pi}{\pi(1-n^2)}, \quad (n \neq 1), \end{aligned} \tag{A.11}$$

ja n:n arvolla yksi

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\cos x\,dx = 0. \tag{A.12}$$

Kertoimille b_n saadaan arvot

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} 0\cdot\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\sin nx\,dx = 0, \quad \text{kun} \quad n \neq 1, \tag{A.13}$$



Kuva A.2 Funktion $f(x) = \sin x,\ x \in (0,\pi),\ f(x) = 0,\ x \in (-\pi, 0)$ yhden ja kolmen termin Fourier-sinisarjat f_1 ja f_3.

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}. \tag{A.14}$$

Vaadittu Fourier-sarja on siis

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \frac{\cos 8x}{63} + \cdots . \tag{A.15}$$

Yhden termin ja kolme termiä sisältävät kehitelmät

$$f_1 = \frac{1}{\pi} \quad \text{ja} \quad f_3 = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2\cos 2x}{3\pi} \tag{A.16}$$

on piirretty kuvaan A.2 pistekatkoviivalla ja katkoviivalla.

A.1 Parillisen jaksollisen funktion Fourier-sarja

Funktio $f(x)$ on parillinen, jos

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x. \tag{A.17}$$

Parillinen funktio on symmetrinen y-akselin suhteen. Esimerkiksi funktiot x^2 ja $\cos x$ ovat parillisia.

Fourier-sarjan kertoimet a_n voidaan esittää muodossa

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx + \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx. \tag{A.18}$$

Sijoitetaan ensimmäiseen integraaliin $x = -u$ ja $dx = -du$. Kun $x = -L$, on $u = L$ ja x:n arvoa 0 vastaa u:n arvo 0. Esimmäinen integraali muuntuu sijoituksessa muotoon

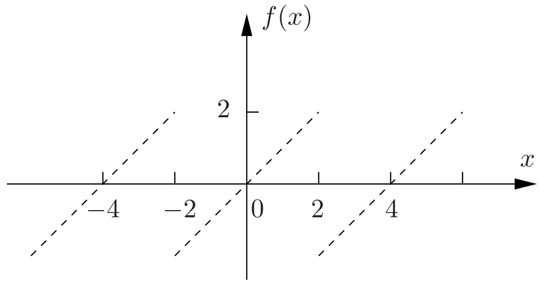
$$\frac{1}{L}\int_L^0 f(-u)\cos\frac{-n\pi u}{L}(-du). \tag{A.19}$$

Koska

$$f(-u) = f(u) \quad \text{ja} \quad \cos\frac{-n\pi u}{L} = \cos\frac{n\pi u}{L}, \tag{A.20}$$

tulee e.o. integraali muotoon

$$\frac{1}{L}\int_L^0 f(-u)\cos\frac{-n\pi u}{L}(-du) = \frac{1}{L}\int_0^L f(u)\cos\frac{n\pi u}{L}du. \tag{A.21}$$



Kuva A.3 Funktio $f(x) = x$ jatkettuna parittomasti.

Kirjoittamalla integroimismuuttujan u tilalle x saadaan parillisen jaksollisen funktion Fourier-sarjan kertoimet

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{A.22}$$

Samanlaisella laskulla todetaan, että parillisen funktion tapauksessa

$$b_n = 0. \tag{A.23}$$

A.2 Parittoman jaksollisen funktion Fourier-sarja

Pariton funktio toteuttaa ehdon

$$f(-x) = -f(x), \tag{A.24}$$

ja tällöin

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1, 2, \dots. \\ a_n =& 0. \end{aligned} \tag{A.25}$$

Esimerkki A.2 *Kehitetään funktio* $f(x) = x$, $(0 < x < 2)$ a) *sinisarjaksi,* b) *kosinisarjaksi.*

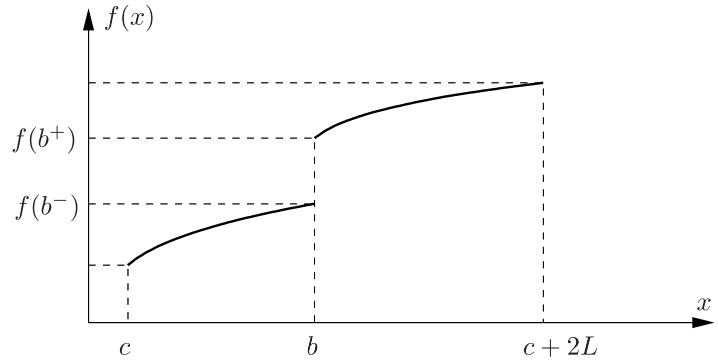
a) Jatketaan funktio $f(x) = x$ parittomasti jaksolla $2L = 4$.

Fourier-sarjan kertoimiksi tulee

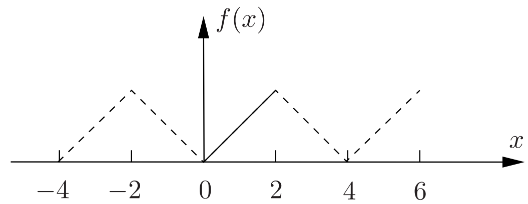
$$\begin{aligned} a_n =& 0, \\ b_n =& \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx, \\ =& -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi, \end{aligned} \tag{A.26}$$

ja itse Fourier-sarja on

$$\begin{aligned} f(x) =& \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi \sin\frac{n\pi x}{2} \\ =& \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right). \end{aligned} \tag{A.27}$$



Kuva A.4 Epäjatkuvan funktion Fourier-sarjan arvo epäjatkuvuuspisteessä.



Kuva A.5 Funktio $f(x) = x$ jatkettuna parillisesti.

Kuvan A.3 pariton funktio on epäjatkuva pisteissä $x = 2$ ja $x = -2$. Epäjatkuvuuspisteissä sinisarja konvergoi kohti nollaa eli funktion $f(x)$ keskiarvoa

$$\bar{f} = \frac{f(2^+) + f(2^-)}{2}. \tag{A.28}$$

Fourier-sarja konvergoi jokaisessa funktion $f(x)$ jatkuvuuspisteessä a kohti arvoa $f(a)$ ja epäjatkuvuuspisteessä b kohti keskiarvoa

$$\bar{f} = \frac{f(b^+) + f(b^-)}{2}. \tag{A.29}$$

Jos funktion arvot jakson päätepisteissä eivät ole samat, s.o. $f(c) \neq f(c + 2L)$, niin Fourier-sarja konvergoi kohti arvoa

$$\bar{f} = \frac{1}{2}[f(c + 2L) + f(c)] \tag{A.30}$$

jakson päätepisteissä.

b) Jatketaan $f(x)$ parillisesti jaksolla $2L = 4$.

Koska f on parillinen, niin sarjan kertoimet ovat

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 x \cos\frac{n\pi x}{2}\, dx \\ &= -\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1), \quad n \neq 0, \\ a_0 &= \int_0^2 x\, dx = 2, \\ b_n &= 0. \end{aligned} \tag{A.31}$$

Funktion $f(x) = x$ Fourier-sarja on nyt

$$
\begin{aligned}
f(x) =& 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{2} \\
=& 1 - \frac{8}{\pi}{}^{2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right).
\end{aligned}
\tag{A.32}
$$

Sarjat (A.27) ja (A.32) esittävät kuvien A.3 ja A.5 funktioita. Mielenkiinnon kohteena on kuitenkin vain väli $(0, 2)$. Parillisesti jatketun funktion sarja suppenee nopeammin.

A.3 Kaksoissarjat

Fourier-sarjat voidaan helposti yleistää kaksiulotteiselle tapaukselle. Esimerkkinä kehitetään kahden muuttujan funktio $p(x, y)$ Fourier-kaksoissinisarjaksi

$$
p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{A.33}
$$

Kaava (A.33) esittää puolen jakson sinisarjaa x:n suhteen kerrottuna puolen jakson sinisarjalla y:n suhteen jaksojen pituuksien ollessa $2a$ ja $2b$. Kaava (A.33) voidaan kirjoittaa muodossa

$$
p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_m(y) \sin\frac{m\pi x}{a}, \tag{A.34}
$$

missä

$$
p_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{A.35}
$$

Pitämällä edellistä yhtälöä Fourier-sarjana x:n suhteen, missä $y =$ vakio, ja soveltamalla parittoman funktion kertoimen kaavaa saadaan

$$
p_m(y) = \frac{2}{a}\int_0^a p(x, y) \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx. \tag{A.36}
$$

Samalla tavalla johdetaan

$$
p_{mn} = \frac{2}{b}\int_0^b p_m(y) \sin\frac{n\pi y}{b}\, dy. \tag{A.37}
$$

Kahdesta viimeisimmästä kaavasta seuraa lopullinen muoto kertoimelle

$$
p_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a p(x, y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy. \tag{A.38}
$$

Samalla tavalla voidaan johtaa kaavat kosinisarjalle ja sini/kosinisarjalle.

Liite B

Fourier-muunnos

Parittoman funktion $f(x) = -f(-x)$ Fourier-sarja on

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{a} \int_0^a f(\xi) \sin \alpha_n \xi \, d\xi \right\} \sin \alpha_n x. \tag{B.1}$$

Tästä kaavasta päädytään Fourier-muunnokseen ajattelemalla diskreetti muuttuja $\alpha_n = n\pi/a$ jatkuvaksi, jonka inkrementti on $\Delta\alpha = \pi/a$. Tällöin Fourier-sarja tulee muotoon

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{a} \left\{ \int_0^a f(\xi) \sin \alpha_n \xi \, d\xi \right\} \sin \alpha_n x. \tag{B.2}$$

Kun $a \to \infty$, niin saadaan kaava

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (\int_0^{\infty} f(\xi) \sin \alpha\xi \, d\xi) \sin \alpha x \, d\alpha. \tag{B.3}$$

Kaava (B.3) voidaan jakaa kahteen osaan

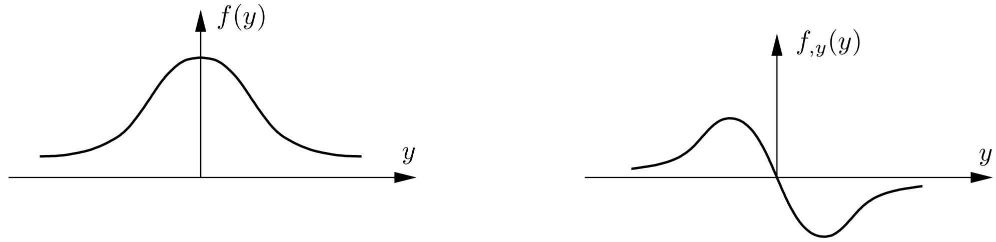
$$\begin{aligned} \bar{f}(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \alpha\xi \, d\xi, \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{f}(\alpha) \sin \alpha x \, d\alpha, \end{aligned} \tag{B.4}$$

jotka ovat Fourier-sinimuunnos ja takaisinmuunnos.

Muunnoksen edellytyksenä on, että

1. $f(x)$ on paloittain jatkuva jokaisella äärellisellä välillä,
2. $f(x)$ on absoluuttisesti integroituva eli

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < M < \infty. \tag{B.5}$$



Kuva B.1 Symmetrinen funktio.

Parillisen funktion $f(-x) = f(x)$ kosinimuunnos on vastaavasti

$$\begin{aligned} \bar{f}(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(\xi) \cos \alpha\xi \, d\xi, \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{f}(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha. \end{aligned} \tag{B.6}$$

Symmetrisen funktion f toisen derivaatan muunnos on

$$\begin{aligned} \bar{f}_{,xx}(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_{,xx}(x) \cos \alpha x \, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\Big/_0^\infty f_{,x} \cos \alpha x - \int_0^\infty f_{,x}(-\alpha \sin \alpha x) \, dx \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\Big/_0^\infty \alpha f \sin \alpha x - \alpha \int_0^\infty f \alpha \cos \alpha x \, dx \right] \\ &= -\alpha^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f \cos \alpha x \, dx = -\alpha^2 \bar{f}(\alpha) \end{aligned} \tag{B.7}$$

eli

$$\bar{f}_{,xx}(\alpha) = -\alpha^2 \bar{f}(\alpha). \tag{B.8}$$

Kaavassa (B.7) sijoitustermit häviävät, koska funktio f derivaattoineen menee nollaksi äärettömyydessä, $f_{,x}(0) = 0$ ja $\sin 0 = 0$.

Soveltamalla toisen derivaatan muunnoskaavaa kahteen kertaan saadaan symmetrisen funktion neljännen derivaatan muunnos

$$\bar{f}_{,xxxx} = (-\alpha^2)(-\alpha^2)\bar{f} = \alpha^4 \bar{f}. \tag{B.9}$$

Taulukko B.1 Fourier-sinimuunnoksia

$f(x)$	$\bar{f}(\alpha)$
$f=1,\quad 0<x<a,$ $f=0,\quad a<x<\infty$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos\alpha a}{\alpha}$
$\frac{1}{x}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$\frac{x}{x^2+y^2},\quad \Re y>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\alpha y}$
$\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \Re y>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\alpha e^{-\alpha y}$
$\arctan\frac{x}{y},\quad \Re y>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha y}$
$\frac{y}{(c-x)^2+y^2}-\frac{y}{(c+x)^2+y^2},$ $\Re y>0,\quad c+iy\notin\Re$	$\sqrt{2\pi}e^{-\alpha y}\sin\alpha c$
$\frac{1}{x}\sin\beta x,\quad \beta>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right\|$
$\frac{\pi}{2}e^{-kx},\quad k>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\alpha}{\alpha^2+k^2}$
$\frac{\pi}{4}(2-kx)e^{-kx},\quad k>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\alpha^3}{(\alpha^2+k^2)^2}$
$\frac{\pi}{4}\frac{x}{k}e^{-kx},\quad k>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\alpha}{(\alpha^2+k^2)^2}$
$\frac{\pi}{4}\frac{1}{k^4}[2-(2+kx)e^{-kx}],\ k>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\alpha(\alpha^2+k^2)^2}$
$\frac{\pi}{2}\frac{1}{k^2}(1-e^{-kx}),\quad k>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\alpha(\alpha^2+k^2)}$

Taulukko B.2 Fourier-kosinimuunnoksia

$f(x)$	$\bar{f}(\alpha)$
$f = 1, \quad 0 < x < a,$ $f = 0, \quad a < x < \infty$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\ \alpha a}{\alpha}$
$\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \Re y > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\alpha y}$
$\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \Re y > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\alpha e^{-\alpha y}$
$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{x^2+z^2}{x^2+y^2}\right\rvert, \quad y = 0, \quad , z > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha y} - e^{-\alpha z}\right)$
$\frac{c-x}{(c-x)^2+y^2} + \frac{c+x}{(c+x)^2+y^2}$	$\sqrt{2\pi}e^{-\alpha y}\sin\alpha c, \quad \Re y > \lvert\Im c\rvert$
$\frac{y}{(c-x)^2+y^2} + \frac{y}{(c+x)^2+y^2}$	$\sqrt{2\pi}e^{-\alpha y}\cos\alpha c, \quad \Re y > \lvert\Im c\rvert$
$\frac{\pi}{2}\frac{1}{k}e^{-kx}, \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\alpha^2+k^2}$
$\frac{\pi}{4}\frac{1}{k}(1-kx)e^{-kx}, \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\alpha^2}{(\alpha^2+k^2)^2}$
$\frac{\pi}{4}\frac{1}{k^3}(1+kx)e^{-kx}, \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\alpha^2+k^2)^2}$
$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2}{x^2}\right)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha}\sin\alpha$