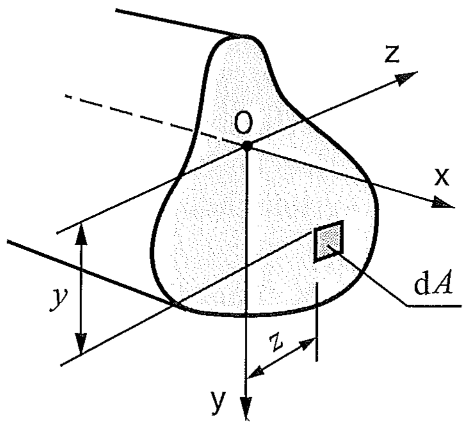
LIITE A

POIKKIPINNAN GEOMETRISET SUUREET

Pinnan ensimmäinen momentti ja pintakeskiö



Kuva 1 Poikkileikkauskoordinaatisto

Palkin teknisessä taivutusteorissa tarvitaan poikkileikkauksen geometrisia suureita monissa yhteyksissä. Palkin taivutusteoriassa koordinaatisto valitaan siten, että x-akseli on palkin akselin suuntainen, y-akseli on alaspäin ja z-akseli vaakasuorassa siten, että xyz-koordinaatisto on oikeakätinen kuvan 1 mukaisesti.

Poikkileikkauksen *pinta-ala* on

$$A = \iint \mathrm{d}A \tag{1}$$

Poikkileikkauksen *ensimmäiset momentit* eli *staattiset momentit* y- ja z-akselien suhteen määritellään yhtälöillä

$$S_y = \iint z\,\mathrm{d}A \qquad S_z = \iint y\,\mathrm{d}A \tag{2}$$

Suoraa, jonka suhteen poikkileikkauspinnan ensimmäinen momentti on nolla, sanotaan *keskeissuoraksi*. Statiikassa osoitettiin, että kaikki pinnan keskeissuorat kulkevat saman pisteen kautta. Tätä pistettä sanotaan pinnan *pintakeskiöksi*.

LAUSE 1 Poikkileikkauspinnan staattinen momentti suoran suhteen on yhtä suuri kuin kyseisen poikkileikkauksen pintakeskiöön sijoitetun pinnan staattinen momentti kyseisen suoran suhteen.

TODISTUS

Kuvan 410.1 mielivaltaisen z-akselin suhteen saadaan

$$y = y_0 + \eta \tag{3}$$

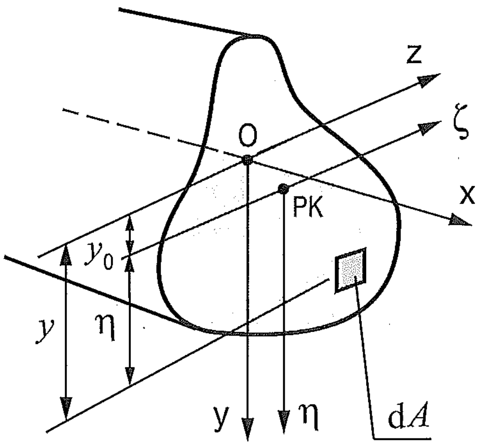
$$\Rightarrow \qquad S_z = \iint y\,\mathrm{d}A = \iint (y_0 + \eta)\,\mathrm{d}A = y_0 \iint \mathrm{d}A + \iint \eta\,\mathrm{d}A$$

Koska η on mitattu keskeissuorasta, on viimeinen pintaintegraali nolla, joten

$$S_z = y_0 A \tag{4}$$

Koska z-akseli oli mielivaltainen, on lause yleisesti voimassa.

□



Kuva 1 Keskeiskoordinaatisto

Koska staattisen momentin määritelmä (*409.2*) sisältää integroinnin, on yhteenlaskuperiaate voimassa.

LAUSE 1

Koko alueen staattinen momentti jonkin suoran suhteen on yhtä suuri kuin osa-alueiden vastinmomenttien summa. Tällöin kannattaa muistaa negatiivisen osa-alueen käyttömahdollisuus eli "reikäperiaate".

Pintakeskiön PK koordinaateille voidaan kirjoittaa lausekkeet

$$y_0 = \frac{\iint y \,\mathrm{d}A}{A} \qquad z_0 = \frac{\iint z \,\mathrm{d}A}{A} \qquad (1)$$

Pinnan neliömomentit

Poikkileikkauspinnan *A neliömomentit* eli *toiset momentit* I_y ja I_z koordinaattiakselien suhteen määritellään lausekkeilla

$$I_y = \iint z^2 \,\mathrm{d}A \qquad I_z = \iint y^2 \,\mathrm{d}A \qquad (2)$$

Niitä sanotaan myös pinnan hitausmomenteiksi tai jäyhyysmomenteiksi. Niiden yksikkö on mm^4.

Pinnan toinen momentti origon O suhteen, jota sanotaan myös *polaariseksi neliömomentiksi* origon suhteen, määritellään kaavalla

$$I_p = \iint r^2 \,\mathrm{d}A \qquad (3)$$

missä r on pintaelementin $\mathrm{d}A$ etäisyys origosta O. Sijoittamalla kaavan (*3*) integrandiin yhteys

$$r^2 = y^2 + z^2 \qquad (4)$$

saadaan tulos

$$I_p = \iint (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}A = I_z + I_y \qquad (5)$$

Määritelmistä (*2*) ja (*3*) seuraa, että neliömomentti on aina positiivinen ja kuten kaikki momenttisuureet, noudattaa edellä mainittua yhteenlaskuperiaatetta.

STEINERin lause

Suoran (pisteen) suhteen laskettu neliömomentti

$$I = I_0 + A\,c^2 \qquad (1)$$

missä I_0 on *yhdensuuntaisen keskeissuoran* (pintakeskiön) suhteen laskettu neliömomentti, c on suorien (pisteiden välimatka) ja A kyseisen poikkipinnan ala.

TODISTUS

Kuvan 410.1 z-akselin suhteen saadaan

$$I_z = \iint y^2\,\mathrm{d}A = \iint (y_0 + \eta)^2\,\mathrm{d}A$$

$$\Rightarrow \qquad I_z = y_0^2 \iint \mathrm{d}A + \iint \eta^2\,\mathrm{d}A + 2y_0 \iint \eta\,\mathrm{d}A$$

Koska koordinaatti η on mitattu z-akselin suuntaisesta keskeissuorasta ζ, on viimeinen integraali nolla. Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$I_z = y_0^2\,A + I_\zeta \qquad (2)$$

Tulos on kaavan (*1*) mukainen, sillä $y_0 = c$ ja $I_\zeta = I_0$.

Koska z-akseli oli mielivaltaisesti valittu, on saatu tulos (*1*) yleisesti voimassa.

□

Poikkileikkauspinnan *neliösäde* i suoran tai pisteen suhteen määritellään yleisesti yhtälöllä

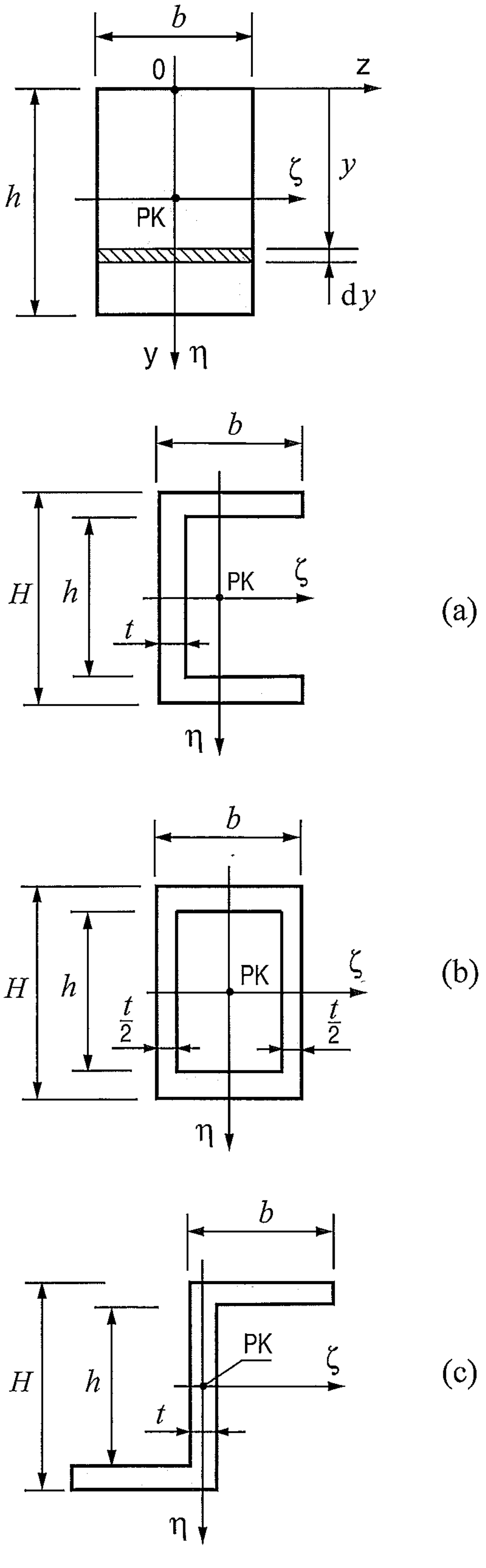
$$I = A\,i^2 \qquad \Rightarrow \qquad i = \sqrt{\frac{I}{A}} \qquad (3)$$

*STEINER*in lauseesta seuraa yhtälö

$$i^2 = i_0^2 + c^2 \qquad (4)$$

missä i on mielivaltaisen suoran (pisteen) ja i_0 sen suuntaisen keskeissuoran (pintakeskiön) suhteen laskettu neliösäde ja c suorien (pisteiden) välimatka.

Joidenkin peruskuvioiden neliömomentteja on esitetty tämän liitteen taulukko-osassa. Standardisoitujen muototankojen poikkileikkauksien momenttisuureet on esitetty kyseisissä standardeissa, joista on muutamia esimerkkejä tämän liitteen lopussa. Suorakulmion, kolmion ja ympyrän neliömomentit lasketaan seuraavissa esimerkeissä.



Kuva 1 Poikkileikkauksia

ESIMERKKI 1

Määritä kuvan suorakulmiopoikkileikkauksen neliömomentit I_z, I_ζ ja I_η sekä polaarinen neliömomentti I_p pintakeskiön PK suhteen.

RATKAISU

Leikataan suorakulmiosta kuvan mukainen differentiaalinen elementti, jonka pinta-ala on

$$\mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}y$$

Integroimalla saadaan

$$I_z = \int_0^h y^2 b\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{3} b h^3$$

*STEINER*in säännöstä seuraa

$$I_z = I_\zeta + A\left(\tfrac{1}{2}h\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad I_\zeta = I_z - \tfrac{1}{4} A h^2$$

$$\Rightarrow \quad I_\zeta = \tfrac{1}{3} b h^3 - \tfrac{1}{4} b h h^2 = \tfrac{1}{12} b h^3 \quad \Leftarrow$$

Vastaavasti neliömomentti

$$I_\eta = \tfrac{1}{12} h b^3 \quad \Leftarrow$$

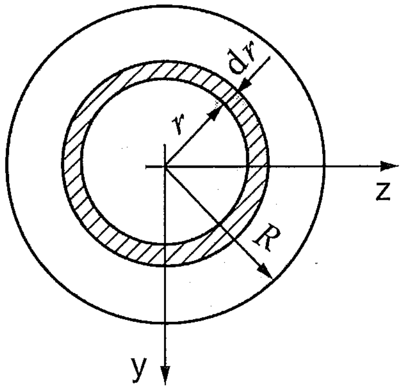
Polaarinen neliömomentti pintakeskiön suhteen

$$I_p = I_\zeta + I_\eta = \tfrac{1}{12} b h (h^2 + b^2)$$

Soveltamalla "reikäperiaatetta" kuvan 1a poikkileikkaukseen saadaan neliömomentiksi

$$I_\zeta = \tfrac{1}{12} b H^3 - \tfrac{1}{12}(b-t) h^3$$

Koska neliömomentin I_ζ arvo ei muutu, kun poikkileikkauspinnan osia siirretään ζ-akselin suunnassa, niin kaikilla kuvan 1 poikkileikkauksilla on yhtä suuri neliömomentti I_ζ.



ESIMERKKI 1

Määritä kuvan ympyräpoikkileikkauksen neliömomentit I_y ja I_z sekä polaarinen neliömomentti I_p origon O suhteen.

RATKAISU

Valitaan pinta-alkioksi kuvan differentiaalinen rengaselementti, jonka pinta-ala

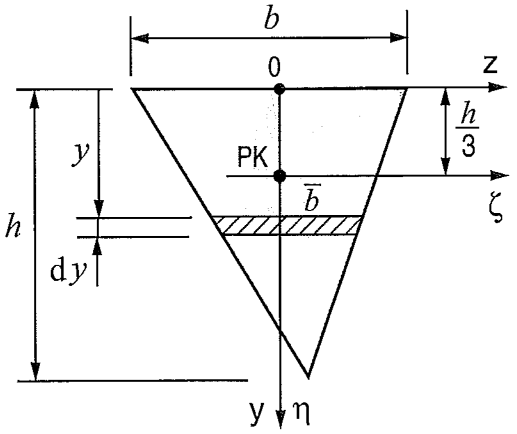
$$\mathrm{d}A = 2\pi r\,\mathrm{d}r$$

Polaariseksi neliömomentiksi saadaan

$$I_p = \int_{r=0}^{R} r^2\,\mathrm{d}A = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r = 2\pi \Big/_0^R \tfrac{1}{4} r^4 = \tfrac{\pi}{2} R^4 \qquad \Leftarrow$$

Koska ympyrällä $I_y = I_z$, niin yhteydestä $I_p = I_y + I_z = 2\,I_z$ seuraa

$$I_z = I_y = \tfrac{1}{2} I_p = \tfrac{\pi}{4} R^4 \qquad \Leftarrow$$



ESIMERKKI 2

Määritä kuvan mielivaltaisen kolmion neliömomentit I_z ja I_ζ.

RATKAISU

Kuvan differentiaalisen pintaelementin leveys $\bar{b}$ saadaan verrannosta

$$\frac{\bar{b}}{b} = \frac{h-y}{h} \quad \Rightarrow \quad \bar{b} = \frac{b}{h}(h-y)$$

Pintaelementin ala on

$$\mathrm{d}A = \bar{b}\,\mathrm{d}y = \frac{b}{h}(h-y)\,\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow \qquad I_z = \int_{y=0}^{h} y^2\,\mathrm{d}A = \frac{b}{h}\int_0^h y^2 (h-y)\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{12} b h^3 \qquad \Leftarrow$$

*STEINER*in säännön avulla saadaan

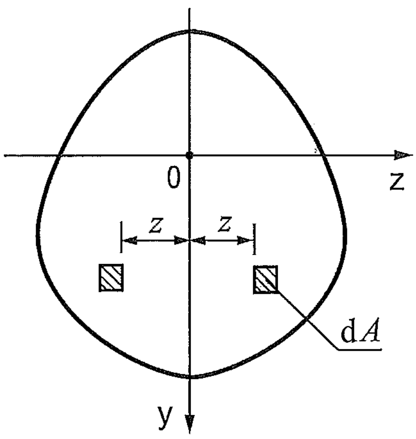
$$I_\zeta = I_z - A\left(\tfrac{1}{3}h\right)^2 = \tfrac{1}{12} b h^3 - \tfrac{1}{2} b h \cdot \tfrac{1}{9} h^2 = \tfrac{1}{36} b h^3 \qquad \Leftarrow$$

Pinnan tulomomentti

Kuvan 409.1 poikkileikkauksen tulomomentti yz-koordinaatiston suhteen määritellään pintaintegraalina

$$I_{yz} = \iint yz\, \mathrm{d}A \qquad (1)$$

Pinnan tulomomentti voi olla positiivinen, nolla tai negatiivinen riippuen yz-koordinaatiston sijainnista pinnan suhteen.



Kuva 1 Symmetrinen poikkileikkaus

Symmetrialause

Jos toinen tai molemmat koordinaattiakseleista ovat pinnan symmetria-akseleita, on tulomomentti nolla.

Todistus

Olkoon y-akseli pinnan symmetria-akseli. Valitaan kuvan 1 mukaiset symmetrisesti sijaitsevat pintaelementit $\mathrm{d}A$, jolloin voidaan kirjoittaa

$$I_{yz} = \iint_{\overline{A}} [\, yz\,\mathrm{d}A + y(-z)\,\mathrm{d}A\,] = 0 \qquad (2)$$

missä $\overline{A}$ on alueen positiivinen $(z \geq 0)$ puolikas.

STEINERin lause

Pinnan tulomomentti yz-koordinaatiston suhteen on

$$I_{yz} = I_{\eta\zeta} + A\, y_0\, z_0 \qquad (3)$$

missä $I_{\eta\zeta}$ on pinnan tulomomentti yz-koordinaatiston suuntaisessa keskeiskoordinaatistossa ja y_0, z_0 pinnan pintakeskiön koordinaatit yz-koordinaatistossa.

TODISTUS

Kuvan 409.1 mukaan koordinaattien välillä on voimassa yhteydet

$$y = \eta + y_0 \qquad z = \zeta + z_0 \qquad (4)$$

joten

$$yz = (\eta + y_0)(\zeta + z_0) = \eta\zeta + y_0 z_0 + \eta z_0 + \zeta y_0 \qquad (5)$$

Kun lauseke (*5*) sijoitetaan määritelmään (*1*), saadaan

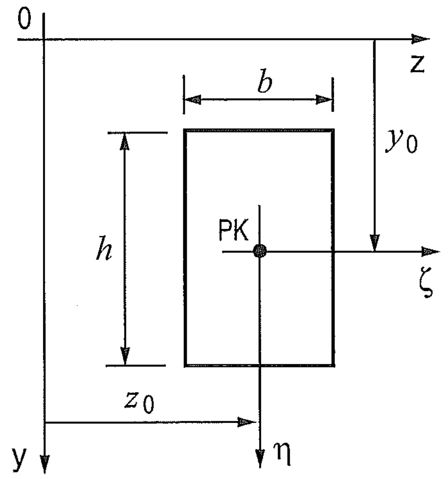
$$I_{yz} = \iint \eta\zeta\,\mathrm{d}A + y_0 z_0 \iint \mathrm{d}A + z_0 \iint \eta\,\mathrm{d}A + y_0 \iint \zeta\,\mathrm{d}A \qquad (6)$$

Kaksi viimeistä pintaintegraalia ovat nollia, sillä η - ja ζ -akselit ovat keskeissuoria. Toisaalta on voimassa

$$\iint \eta \zeta \, \mathrm{d}A = I_{\eta\zeta} \qquad \iint \mathrm{d}A = A \qquad (1)$$

joten yhtälöstä (*414.6*) seuraa väite (*414.3*).

□



ESIMERKKI 1

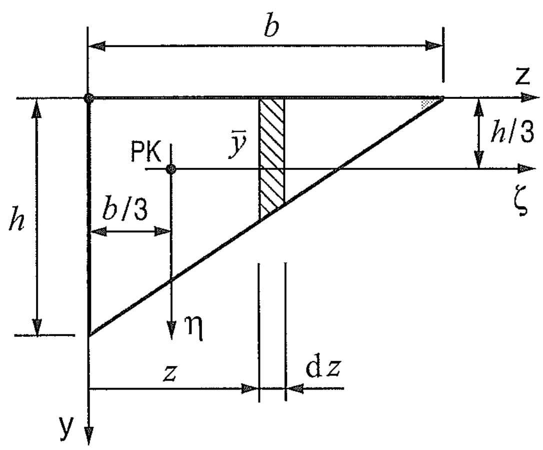
Määritä kuvan suorakulmion tulomomentti I_{yz}.

RATKAISU

Symmetrian perusteella $I_{\eta\zeta} = 0$. Soveltamalla *STEINER*in lausetta saadaan

$$I_{yz} = I_{\eta\zeta} + A\, y_0\, z_0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad I_{yz} = A\, y_0\, z_0 = b\, h\, y_0\, z_0 \qquad (2)$$



ESIMERKKI 2

Määritä kuvan suorakulmaisen kolmion tulomomentti keskeiskoordinaatistossa.

RATKAISU

Lasketaan ensin kolmion tulomomentti yz-koordinaatistossa käyttämällä kuvan pintaelementtiä. Siitä nähdään verranto

$$\frac{\bar{y}}{h} = \frac{b-z}{b} \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = \frac{h}{b}(b-z)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}I_{yz} = 0 + \mathrm{d}A \cdot \tfrac{1}{2}\bar{y}\, z$$

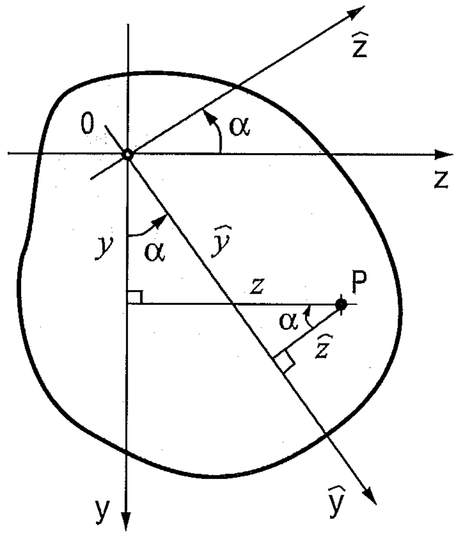
$$\Rightarrow \qquad I_{yz} = \int_{z=0}^{b} \tfrac{1}{2}\bar{y}\, z\, \mathrm{d}A = \tfrac{1}{2}\left(\frac{h}{b}\right) \int_0^b (b-z)^2 z\, \mathrm{d}z = \tfrac{1}{24} b^2 h^2$$

*STEINER*in lauseesta seuraa

$$I_{\eta\zeta} = I_{yz} - A\left(\tfrac{1}{3}h\right)\left(\tfrac{1}{3}b\right) = \tfrac{1}{24} b^2 h^2 - \tfrac{1}{2} b h \cdot \tfrac{1}{9} h b = -\tfrac{1}{72} b^2 h^2 \qquad \Leftarrow$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 1-7

Koordinaatiston kierto. Pääkoordinaatisto



Kuva 1 Koordinaatiston kierto

Kierretään kuvan 1 yz-koordinaatistoa vastapäivään kulman α verran uudeksi $\hat{y}\hat{z}$-koordinaatistoksi. Koordinaattien välillä on yhteys

$$\hat{y} = y\cos\alpha + z\sin\alpha$$

$$\hat{z} = -y\sin\alpha + z\cos\alpha$$

Neliömomentituudessa $\hat{y}\hat{z}$-koordinaatistossa ovat

$$I_{\hat{y}} = \iint_A \hat{z}^2\,\mathrm{d}A$$

$$I_{\hat{z}} = \iint_A \hat{y}^2\,\mathrm{d}A$$

$$I_{\hat{y}\hat{z}} = \iint_A \hat{y}\,\hat{z}\,\mathrm{d}A$$

Laskemalla saadaan lausekkeet

$$I_{\hat{y}} = \iint(-y\sin\alpha + z\cos\alpha)^2\mathrm{d}A$$

$$\Rightarrow \quad I_{\hat{y}} = \sin^2\alpha\iint y^2\,\mathrm{d}A - 2\sin\alpha\cos\alpha\iint yz\,\mathrm{d}A + \cos^2\alpha\iint z^2\,\mathrm{d}A$$

$$\Rightarrow \quad I_{\hat{y}} = I_z\sin^2\alpha - 2\,I_{yz}\sin\alpha\cos\alpha + I_y\cos^2\alpha \qquad (1)$$

Vastaavasti voidaan kirjoittaa

$$\Rightarrow \quad I_{\hat{z}} = I_z\cos^2\alpha + 2\,I_{yz}\sin\alpha\cos\alpha + I_y\sin^2\alpha \qquad (2)$$

$$I_{\hat{y}\hat{z}} = \iint(y\cos\alpha + z\sin\alpha)(-y\sin\alpha + z\cos\alpha)\,\mathrm{d}A$$

$$\Rightarrow \quad I_{\hat{y}\hat{z}} = -\sin\alpha\cos\alpha\left(\iint y^2\mathrm{d}A - \iint z^2\,\mathrm{d}A\right) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\iint yz\,\mathrm{d}A$$

$$\Rightarrow \quad I_{\hat{y}\hat{z}} = -\sin\alpha\cos\alpha\,(I_z - I_y) + (-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\,I_{yz}$$

$$\Rightarrow \quad I_{\hat{y}\hat{z}} = \tfrac{1}{2}(I_y - I_z)\sin(2\alpha) + I_{yz}\cos(2\alpha) \qquad (3)$$

Otetaan vielä huomioon trigonometriset yhteydet

$$\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)) \;, \quad \cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha)) \qquad (4)$$

Tällöin tulokset voidaan kirjoittaa muotoon

$$I_{\hat{y}} = \tfrac{1}{2}(I_y + I_z) + \tfrac{1}{2}(I_y - I_z)\cos(2\alpha) - I_{yz}\sin(2\alpha) \qquad (1)$$

$$I_{\hat{z}} = \tfrac{1}{2}(I_y + I_z) - \tfrac{1}{2}(I_y - I_z)\cos(2\alpha) + I_{yz}\sin(2\alpha) \qquad (2)$$

$$I_{\hat{y}\hat{z}} = \tfrac{1}{2}(I_y - I_z)\sin(2\alpha) + I_{yz}\cos(2\alpha) \qquad (3)$$

Lujuusopissa kaikkein tärkein uuden $\hat{y}\hat{z}$-koordinaatiston asento on sellainen, jossa tulomomentti $I_{\hat{y}\hat{z}} = 0$. Vastatkoon tätä koordinaatiston asentoa kulma $\alpha = \overline{\alpha}$. Lasketaan kyseisen kulman arvo:

$$I_{\hat{y}\hat{z}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}(I_y - I_z)\sin(2\overline{\alpha}) + I_{yz}\cos(2\overline{\alpha}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tan(2\overline{\alpha}) = \frac{-2\,I_{yz}}{I_y - I_z} \qquad I_{yz}\sin(2\overline{\alpha}) \le 0} \qquad (4)$$

Yhtälöiden (*4*) jälkimmäinen yhtälö kompensoi tangenttifunktion monikäsitteisyyden. Sijoittamalla lausekkeeseen (*1*) yhteydet

$$\sin(2\overline{\alpha}) = \frac{\tan(2\overline{\alpha})}{\pm\sqrt{1 + \tan^2(2\overline{\alpha})}} = \frac{-2\,I_{yz}}{\pm\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4\,I_{yz}^2}}$$

$$\cos(2\overline{\alpha}) = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \tan^2(2\overline{\alpha})}} = \frac{I_y - I_z}{\pm\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4\,I_{yz}^2}}$$

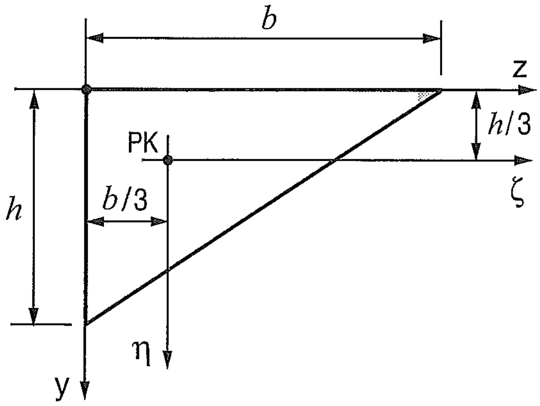
saadaan

$$I_y = \tfrac{1}{2}(I_y + I_z) + \frac{\tfrac{1}{2}(I_y - I_z)^2}{\pm\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4\,I_{yz}^2}} - \frac{-2\,I_{yz}^2}{\pm\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4\,I_{yz}^2}}$$

joka sievenee muotoon

$$\boxed{I_{1,2} = \tfrac{1}{2}(I_y + I_z) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4\,I_{yz}^2}} \qquad (5)$$

Yhtälössä (*5*) on kaksoismerkki, jonka perusteella näin saatuja neliömomentteja on merkitty I_1 ja I_2. Niitä sanotaan kyseisen poikkileikkauksen *pääneliömomenteiksi* (principal second moments). Jos $\hat{y}\hat{z}$-koordinaatiston origo on poikkileikkauksen *pintakeskiössä,* niitä sanotaan *keskeispääneliömomenteiksi.* Keskenään ortogonaalisia suuntia, jotka kulma $\overline{\alpha}$ määrittelee (kaava (*4*)), sanotaan poikkileikkauksen *pääsuunniksi.*



ESIMERKKI 1

Määritä kuvan suorakulmaisen kolmion keskeispääneliömomentit ja koordinaatiston pääakselien suunnat.
$h = 50\,\mathrm{mm}$, $b = 100\,\mathrm{mm}$

RATKAISU

Käytetään järjestelmää (mm). Taulukoista saadaan neliömomentit

$$I_\eta = \tfrac{1}{36} b^3 h \approx 1{,}389 \cdot 10^6$$

$$I_\zeta = \tfrac{1}{36} b\, h^3 \approx 0{,}347 \cdot 10^6$$

$$I_{\eta\zeta} = -\tfrac{1}{72} b^2 h^2 \approx -0{,}347 \cdot 10^6$$

Kaavasta (*417.4*) seuraa

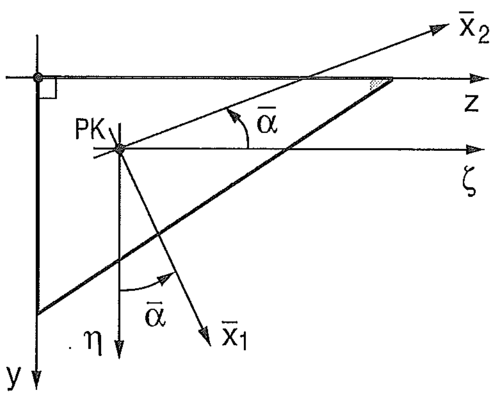
$$\tan(2\overline{\alpha}) = \frac{-2\, I_{\eta\zeta}}{I_\eta - I_\zeta} \approx 0{,}6667 \quad \Rightarrow \quad 2\,\overline{\alpha} \approx 33{,}69^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\alpha} \approx 16{,}85^\circ$$

Pääneliömomentit saadaan kaavasta (*417.5*):

$$I_{1,2} = \tfrac{1}{2}(I_\eta + I_\zeta) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(I_\eta - I_\zeta)^2 + 4\, I_{\eta\zeta}^2}$$

$$\Rightarrow \quad I_{1,2} = \tfrac{1}{2}(1{,}389 + 0{,}347) \cdot 10^6 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(1{,}389 - 0{,}347)^2 + 4 \cdot (-0{,}347)^2} \cdot 10^6$$



Kuva 1 Pääkoordinaatisto

Pääneliömomenttien arvoiksi saadaan

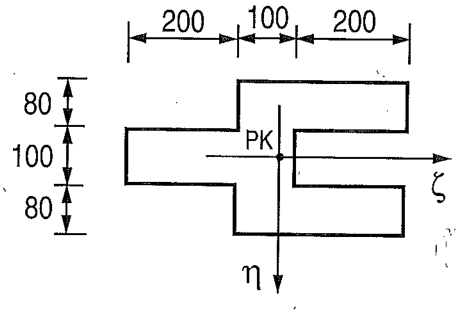
$$I_1 = 1{,}494 \cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4$$

$$I_2 = 0{,}2421 \cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4$$

Kuvassa 1 on esitetty poikkileikkauksen keskeispääakselit eli $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ -keskeispääkoordinaatisto.

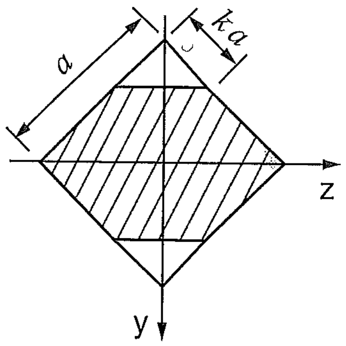
HARJOITUSTEHTÄVÄ 8

Harjoitustehtäviä



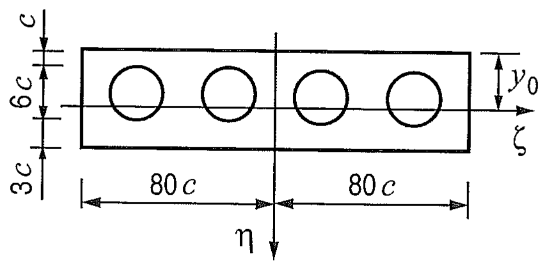
1. Määritä kuvan poikkileikkauspinnan pintakeskiön paikka ja aseta siihen sivujen suuntainen keskeiskoordinaatisto. Laske neliömomentit tässä koordinaatistossa. Kuvan mitat ovat millimetrejä.

   Vast: $699 \cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4$, $1839 \cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4$



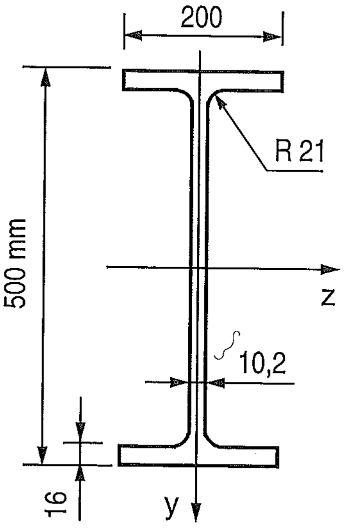
2. Kuvan neliöpoikkileikkauksesta poistetaan viivoittamattomat nurkat. Laske poikkileikkauksen keskeiskoordinaatiston neliömomentit I_y ja I_z.

   Vast: $I_z = \frac{1}{12} a^4 (1+3k)(1-k)^3$



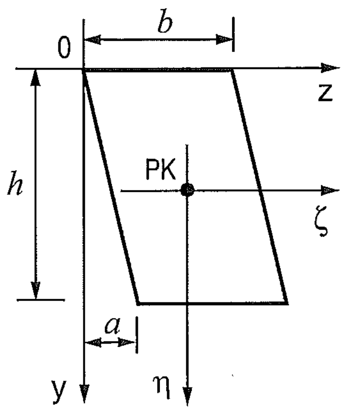
3. Määritä kuvan ontelolaatan pintakeskiön koordinaatit ja neliömomentit poikkileikkauksen yläreunan sekä vaakasuoran keskeisakselin suhteen.

   Vast: $y_0 \approx 5{,}08\,c$, $I_\zeta \approx 12900\,c^4$



4. Määritä kuvan standardiprofiilin IPE 500 A (SFS 2029) pinta-ala A ja neliömomentit I_y ja I_z sekä vertaa tuloksia standardin antamiin arvoihin. Ota pyöristykset huomioon. Kuinka monta prosenttia neliömomentista I_z aiheutuu uumasta, laipasta ja sisänurkkien pyöristyksistä?

   Vast: $A \approx 11{,}55 \cdot 10^3\ \mathrm{mm}^2$
   $I_y \approx 21{,}417 \cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4$
   $I_z \approx 481{,}99 \cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4$
   $18{,}1\,\%$, $77{,}8\ \mathrm{mm}^4$, $4{,}1\,\%$



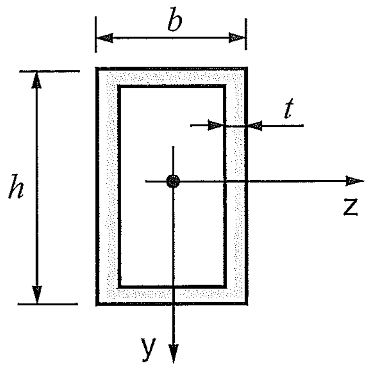
5. Määritä integroimalla kuvan suunnikkaan neliömomentit I_z, I_y ja I_{yz} sekä keskeisneliömomentit I_ζ, I_η ja $I_{\eta\zeta}$.

<u>*Vast*</u>: $I_y = \frac{1}{3} b\,h\,(b^2 + \frac{3}{2} a\,b + a^2)$

$I_\eta = \frac{1}{12} b\,h\,(b^2 + a^2)$

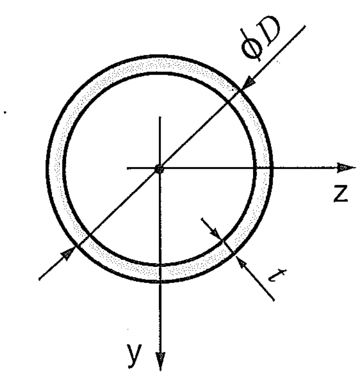
$I_{yz} = \frac{1}{12} b\,h^2\,(3\,b + 4\,a)$

$I_{\eta\zeta} = \frac{1}{12} b\,h^2 a$



6. Mbääritä kuvan ohutseinäisen poikkileikkauksen ($t << h, t << b$) keskeisneliömomentti I_z

<u>*Vast*</u>: $I_z \approx \frac{1}{6} t\,h^2\,(3\,b + h)$

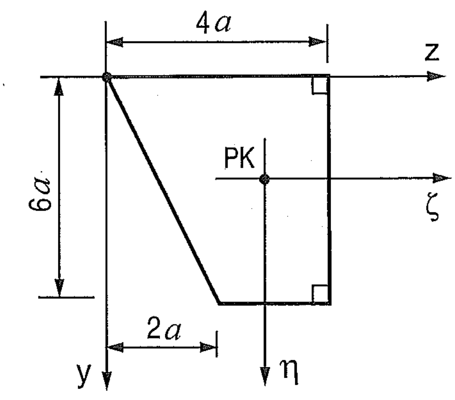


7. Määritä kuvan putken neliömomentti halkaisijan suhteen. Muodosta suhde

$$f(t/D) = I_z / \bar{I}_z$$

missä $\bar{I}_z$ on umpiputken neliömomentti ja piirrä kuvaaja suhteen t/D funktiona. Mikä on neliömomentti, jos putki on hyvin ohutseinäinen ($t << D$)?

<u>*Vast*</u>: $I_z \approx 2\,\pi\,t\,D^3$, $t << D$



8. Määritä kuvan poikkileikkauksen keskeiskoordinaatisto ja keskeispääneliömomentit.

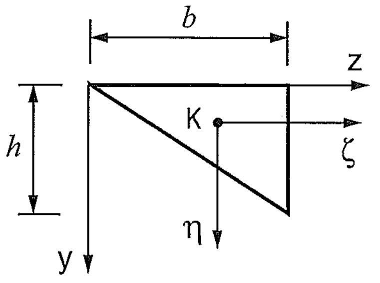
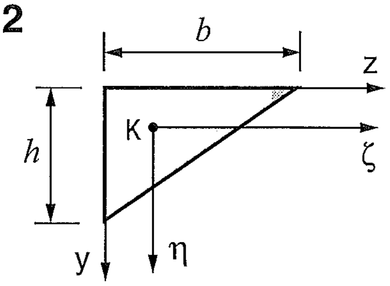
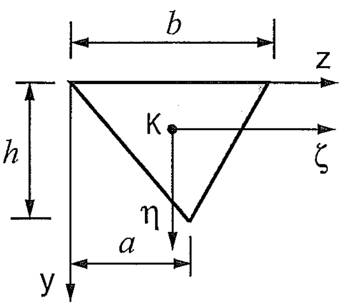
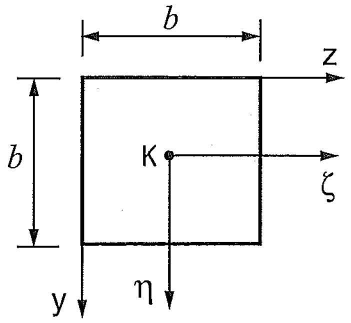
<u>*Vast*</u>: $I_\eta \approx 18{,}13\,a^4$, $I_\zeta = 54{,}00\,a^4$

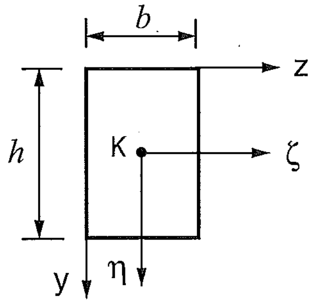
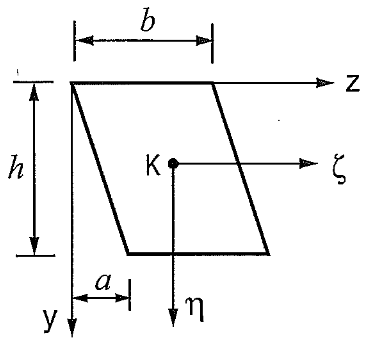
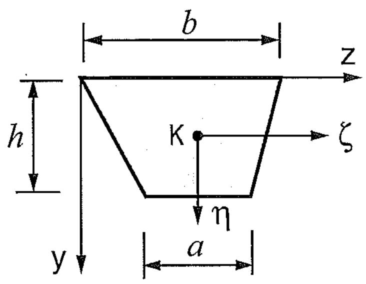
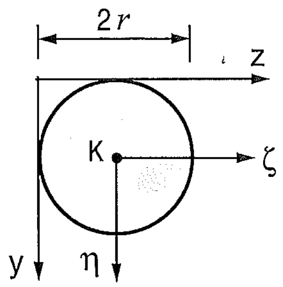
$I_{\eta\zeta} \approx -10{,}5\,a^4$

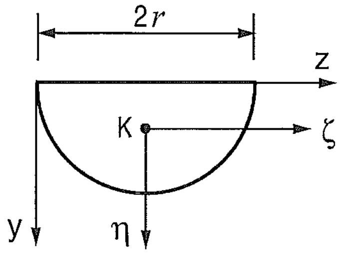
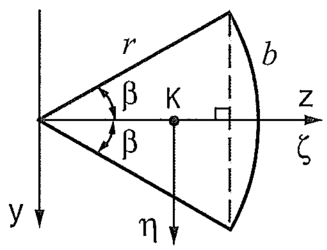
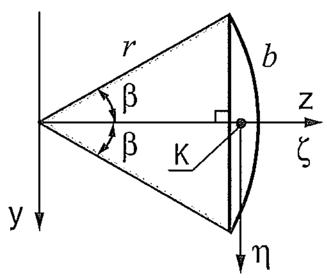
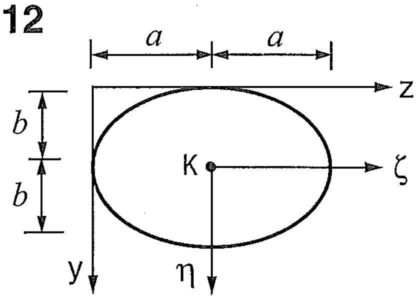
$I_1 \approx 56{,}85\,a^4$, $I_2 \approx 15{,}29\,a^4$

$\bar{\alpha} \approx 15{,}2^\circ$

Taulukko 1 Poikkipintasuureita

Poikkileikkaus	Pinta-ala Pintakeskiö	Neliömomentit
1  Suorakulmainen kolmio	$A=\frac{1}{2}bh$ $z_0=\frac{2}{3}b$ $y_0=\frac{1}{3}h$	$I_z=\frac{1}{12}bh^3$ $I_y=\frac{1}{4}b^3h$ $I_{yz}=\frac{1}{8}b^2h^2$ $I_\zeta=\frac{1}{36}bh^3$ $I_\eta=\frac{1}{36}b^3h$ $I_{\eta\zeta}=\frac{1}{72}b^2h^2$
2  Suorakulmainen kolmio	$A=\frac{1}{2}bh$ $z_0=\frac{2}{3}b$ $y_0=\frac{1}{3}h$	$I_z=\frac{1}{12}bh^3$ $I_y=\frac{1}{12}b^3h$ $I_{yz}=\frac{1}{24}b^2h^2$ $I_\zeta=\frac{1}{36}bh^3$ $I_\eta=\frac{1}{36}b^3h$ $I_{\eta\zeta}=-\frac{1}{72}b^2h^2$
3  Kolmio	$A=\frac{1}{2}bh$ $z_0=\frac{1}{3}(a+b)$ $y_0=\frac{1}{3}h$	$I_z=\frac{1}{12}bh^3$ $I_y=\frac{1}{12}bh(b^2+ab+a^2)$ $I_{yz}=\frac{1}{24}bh^2(2a+b)$ $I_\zeta=\frac{1}{36}bh^3$ $I_\eta=\frac{1}{36}bh(b^2-ab+a^2)$ $I_{\eta\zeta}=\frac{1}{72}bh^2(2a-b)$
4  Neliö	$A=b^2$ $z_0=\frac{1}{2}b$ $y_0=\frac{1}{2}b$	$I_z=I_y=\frac{1}{3}b^4$ $I_{yz}=\frac{1}{4}b^4$ $I_\zeta=I_\eta=\frac{1}{12}b^4$ $I_{\eta\zeta}=0$ $I_0=\frac{1}{6}b^4$

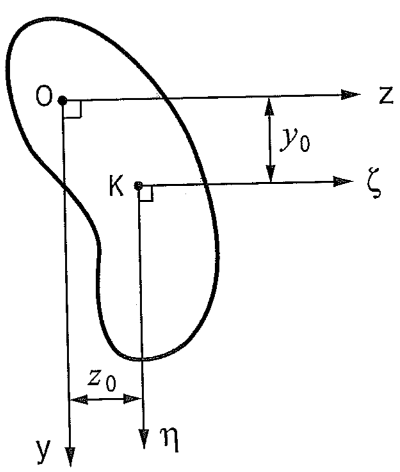
Poikkileikkaus	Pinta-ala Pintakeskiö	Neliömomentit
5  Suorakulmio	$A=bh$ $z_0=\frac{1}{2}b$ $y_0=\frac{1}{2}h$	$I_z=\frac{1}{3}bh^3$ $I_y=\frac{1}{3}b^3h$ $I_{yz}=\frac{1}{4}b^2h^2$ $I_\zeta=\frac{1}{12}bh^3$ $I_\eta=\frac{1}{12}b^3h$ $I_{\eta\zeta}=0$
6  Suunnikas	$A=bh$ $z_0=\frac{1}{2}(b+a)$ $y_0=\frac{1}{2}h$	$I_z=\frac{1}{3}bh^3$ $I_y=\frac{1}{3}bh(b^2+\frac{3}{2}ab+a^2)$ $I_{yz}=\frac{1}{12}bh^2(3b+4a)$ $I_\zeta=\frac{1}{12}bh^3$ $I_\eta=\frac{1}{12}bh(b^2+a^2)$ $I_{\eta\zeta}=\frac{1}{12}abh^2$
7  Puolisuunnikas	$A=\frac{1}{2}(a+b)h$ $y_0=\frac{1}{3}h\frac{2a+b}{a+b}$	$I_z=\frac{1}{12}h^3(3a+b)$ $I_\zeta=\frac{1}{36}h^3\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}$
8  Ympyrä	$A=\pi r^2$ $z_0=r$ $y_0=r$	$I_z=I_y=\frac{5\pi}{4}r^4$ $I_{yz}=\pi r^2$ $I_\zeta=I_\eta=\frac{\pi}{4}r^4$ $I_{\eta\zeta}=0$ $I_0=\frac{\pi}{2}r^4$

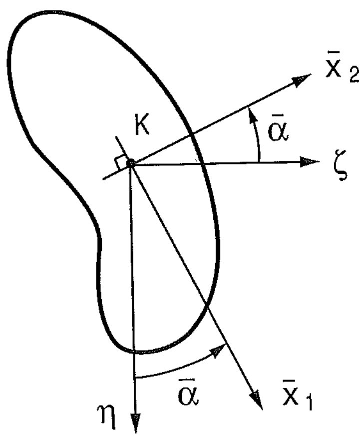
Poikkileikkaus	Pinta-ala Pintakeskiö	Neliömomentti
9  Puoliympyrä	$A=\frac{1}{2}\pi r^2$ $z_0=r$ $y_0=\frac{4r}{3\pi}$	$I_z=\frac{1}{8}\pi r^4$ $I_y=\frac{5\pi}{8}r^4$ $I_{yz}=\frac{2}{3}r^4$ $I_\zeta=\frac{9\pi^2-64}{72\pi}r^4$ $I_\eta=\frac{\pi}{8}r^4$ $I_{\eta\zeta}=0$
10  Ympyrän sektori	$A=\frac{1}{2}br$ $z_0=\frac{2}{3}kr/b$ $y_0=0$ $k=\frac{\sin\beta}{\beta}b$	$I_z=\frac{1}{4}r^4(\beta-\sin\beta\cos\beta)$ $I_{yz}=0$ $I_\zeta=\frac{1}{4}r^4(\beta+\sin\beta\cos\beta)$ $I_{\eta\zeta}=0$
11  Ympyrän segmentti	$A=r^2(\sin^3\beta)/k$ $z_0=\frac{2}{3}rk$ $y_0=0$ $k=\frac{\sin^3\beta}{\beta-\sin\beta\cos\beta}$	$I_z=\frac{1}{4}Ar^2(1-\frac{2}{3}k\cos\beta)$ $I_{yz}=0$ $I_\zeta=\frac{1}{4}Ar^2(1+2k\cos\beta)$ $I_{\eta\zeta}=0$
12  Ellipsi	$A=\pi ab$ $z_0=a$ $y_0=b$	$I_z=\frac{5\pi}{4}ab^3$ $I_y=\frac{5\pi}{4}a^3b$ $I_{yz}=\pi a^2b^2$ $I_\zeta=\frac{\pi}{4}ab^3$ $I_\eta=\frac{\pi}{4}a^3b$ $I_{\eta\zeta}=0$

Tasokuvioiden ominaisuuksia

A	pinta-ala
y_0, z_0	pintakeskiön koordinaatit
I_y, I_z	pinnan neliömomentit y- ja z-akselien suhteen
I_{yz}	pinnan tulomomentti yz–koordinaatistossa
i_y, i_z	pinnan neliösäteet y- ja z-akselien suhteen
I_η, I_ζ	pinnan keskeisneliömomentit pintakeskiön kautta kulkevien y- ja z-akselien suuntaisten η– ja ζ–akselien (keskeisakselien) suhteen
$I_{\eta\zeta}$	keskeistulomomentti
i_η, i_ζ	pinnan keskeisneliösäteet η– ja ζ–akselien (keskeisakselien) suhteen
I_0	pinnan polaarinen neliömomentti pintakeskiön suhteen
i_0	pinnan polaarinen neliösäde pintakeskiön suhteen
K	pintakeskiö

*STEINER*in lause: $I_y = I_\eta + A z_0^2 \qquad I_z = I_\zeta + A y_0^2 \qquad I_{yz} = I_{\eta\zeta} + A y_0 z_0$





Pääneliömomentit:

$$I_1 = I_{max} = \tfrac{1}{2}(I_y + I_z) + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$$I_2 = I_{min} = \tfrac{1}{2}(I_y + I_z) - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$$\tan(2\bar{\alpha}) = \frac{-2\, I_{yz}}{I_y - I_z} \qquad I_{yz} \sin(2\bar{\alpha}) \le 0$$