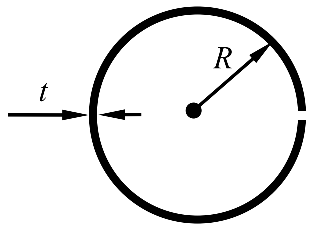
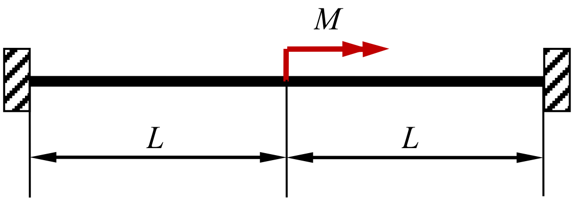




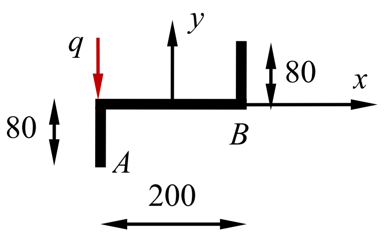
1. Määritä oheisen auki leikatun, päistään jäykästi tuetun putken kuormituspisteen kiertymä ja vertaa sitä kiertymään, jossa otetaan huomioon vain vapaa vääntö tai vain estetty vääntö (leikkausvoimavääntö). Vertaa kiertymää myös ehjän putken vastaavaan kiertymään. Tarkastele tilannetta, kun

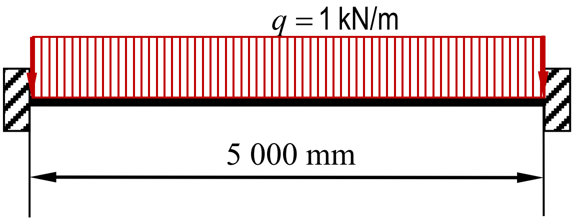
   a) $L = 10R,\ t = 0{,}05R$

   b) $L = 100R,\ t = 0{,}05R$

Avoimelle profiilelle:

$$I_\omega = 8{,}1045 R^5 t,\ I_v = \frac{1}{3} 2\pi R t^3$$





Z-profiilin poikkipintasuureita:

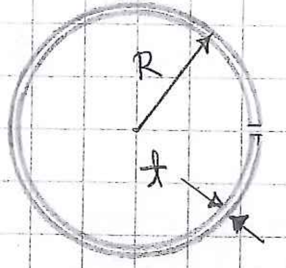
$I_x = 360\ \text{cm}^4, I_y = 2300\ \text{cm}^4, I_{xy} = 670\ \text{cm}^4,$

$I_v = 19\ \text{cm}^4,\ I_\omega = 19700\ \text{cm}^6,$

$\omega_A = 53\ \text{cm}^2, \omega_B = -18\ \text{cm}^2$

2. Määritä oheisen Z-profiilipalkin päätyjen jäykän tuennan normaalijännitysjakauma $\sigma_z(s)$, joka aiheutuu väännön tuottamasta osasta.

   Kimmokerroin $E = 205\,\text{GPa},\ \nu = 0{,}3$.



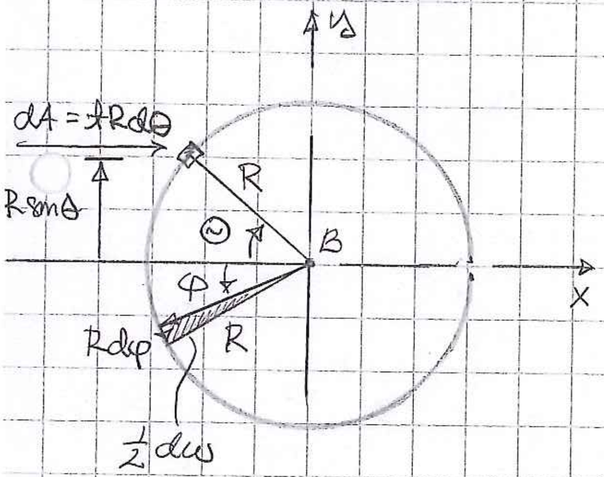
Määritetään oheisen aukileikatun ympyräprofiilin ω-kuvio I_ω ja vääntökeskiö.

Ratkaisu:

Symmetrisillä poikkileikkauksilla symmetria-akseli on pääakseli ja leikkauskeskiö sekä ω-kuvion nollakohta sijaitsevat sillä.

Ensin ω-kuvio:

Olkoon apunapa ympyrän keskipisteessä.



$$\tfrac{1}{2} d\omega_B = \tfrac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{s}| = \tfrac{1}{2} \cdot R \cdot R\, d\varphi$$

$$\underline{\underline{\omega_B(\varphi)}} = \int_0^{\varphi} d\omega = \underline{\underline{R^2 \varphi}}$$

Pääkoordinaatistossa x, y ($I_{xy} = 0$) vääntökeskiön koordinaatit ovat

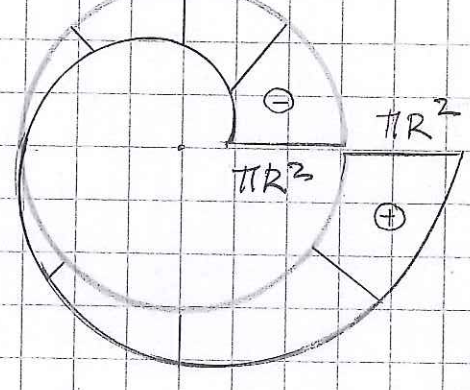
$$x_A = x_B + \frac{I_{y\omega_B}}{I_x} \qquad y_A = y_B - \frac{I_{x\omega_B}}{I_y}$$

Helposti havaitsee että $I_{x\omega_B} = 0$

Joten $\underline{y_A = y_B = 0}$ eli symmetria-akselilla

Saadaan I_x ja $I_{y\omega_B}$ integroimalla

$$\underline{\underline{I_x}} = \int_A y^2 dA = \int_{-\pi}^{\pi} R^2 \sin^2\theta \cdot tR \cdot d\theta = \underline{\underline{\pi \cdot R^3 t}}$$



ω-kuvio

$$I_{y\omega_B} = \int_A y\omega_B dA = \int_{-\pi}^{\pi} -R^2\theta \cdot R\sin\theta \cdot tR\, d\theta$$

$$= -R^4 t \int_{-\pi}^{\pi} \theta \sin\theta\, d\theta = -R^4 t \Big/_{-\pi}^{\pi} [\sin\theta - \theta\cos\theta]$$

$$I_{y\omega_B} = -R^4 t \cdot \{0 - 0 - [\pi \cdot (-1) - (-\pi \cdot (-1))]\}$$

$$\underline{\underline{I_{y\omega_B} = -2\pi R^4 t}}$$

Navan x-koordinaatti:

$$\underline{\underline{x_A}} = \cancel{x_B}^{\,0} + \frac{-2\pi R^4 t}{\pi R^3 t} = \underline{\underline{-2R}}$$

$\therefore$ vääntökeskiö on $\begin{cases} x_A = -2R \\ y_A = 0 \end{cases}$

kun napa A on löydetty voidaan ω_A - kuvio muodostaa.

Navan siirto B → A aiheuttaa ω_B kuvioon seuraavan muutoksen

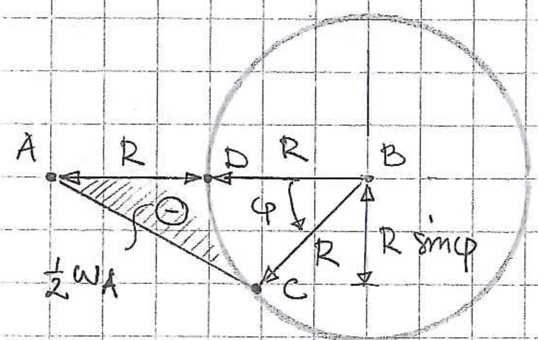
$$\underline{\omega_A = \omega_B + (y_A - y_B) * x - (x_A - x_B) * y}$$

nyt $y_A - y_B = 0$ ja $x_A - x_B = -2R$

$$\Rightarrow \omega_A = 2R * (-R\sin\varphi) + R^2\varphi = R^2(\varphi - 2\sin\varphi)$$

$$\underline{\underline{\omega_A = R^2(\varphi - 2\sin\varphi)}}$$

Johdetaan tämä geometrian avulla kuvasta

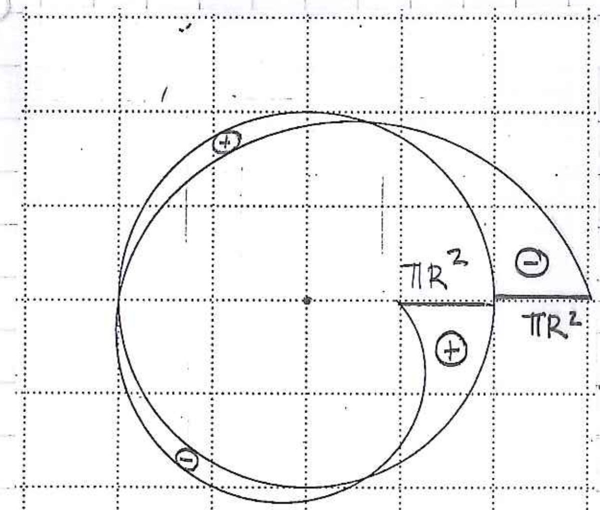


$\omega_A = -2 *$ kolmio ABC $- 2 *$ sektori BDC

$$\omega_A = -2 * [\tfrac{1}{2} * 2R * R\sin\varphi - \tfrac{1}{2}R^2\varphi]$$

$$\underline{\underline{\omega_A = R^2\varphi - 2R^2\sin\varphi}} \quad \text{ok}$$

Ja sitten I_ω



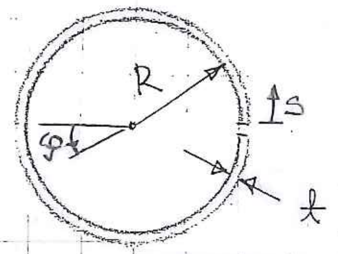
$$I_\omega = \int_A \omega_A^2 \, da = R^4 \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi - 2\sin\varphi)^2 R t \, d\varphi$$

$$= R^5 t \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi^2 - 4\varphi\sin\varphi + 4\sin^2\varphi) \, d\varphi$$

$$= R^5 t \left[\tfrac{1}{3}\varphi^3 - 4(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)\right]_{-\pi}^{\pi} + 4R^5 t\pi$$

$$= R^5 t \left[\frac{2\pi^3}{3} - 4(2\pi) + 4\pi\right] = 8.1045 R^5 t$$

$$\therefore \underline{\underline{I_\omega = 8.1045 * R^5 t}}$$



Määritetään kuvan halkaistun ohutseinäisen ympyräprofiilin S_ω-kuvio, kun entuudestaan tunnetaan

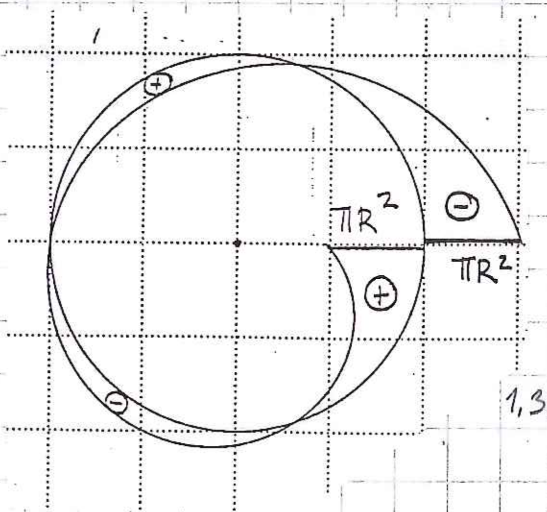
$$\omega(\varphi) = R^2(\varphi - 2\sin\varphi) \quad \text{ja} \quad I_\omega = 8{,}1045\, R^5 t$$

<u>Ratkaisu:</u> $S_\omega(s) = \int_0^s \omega(u)\,du$

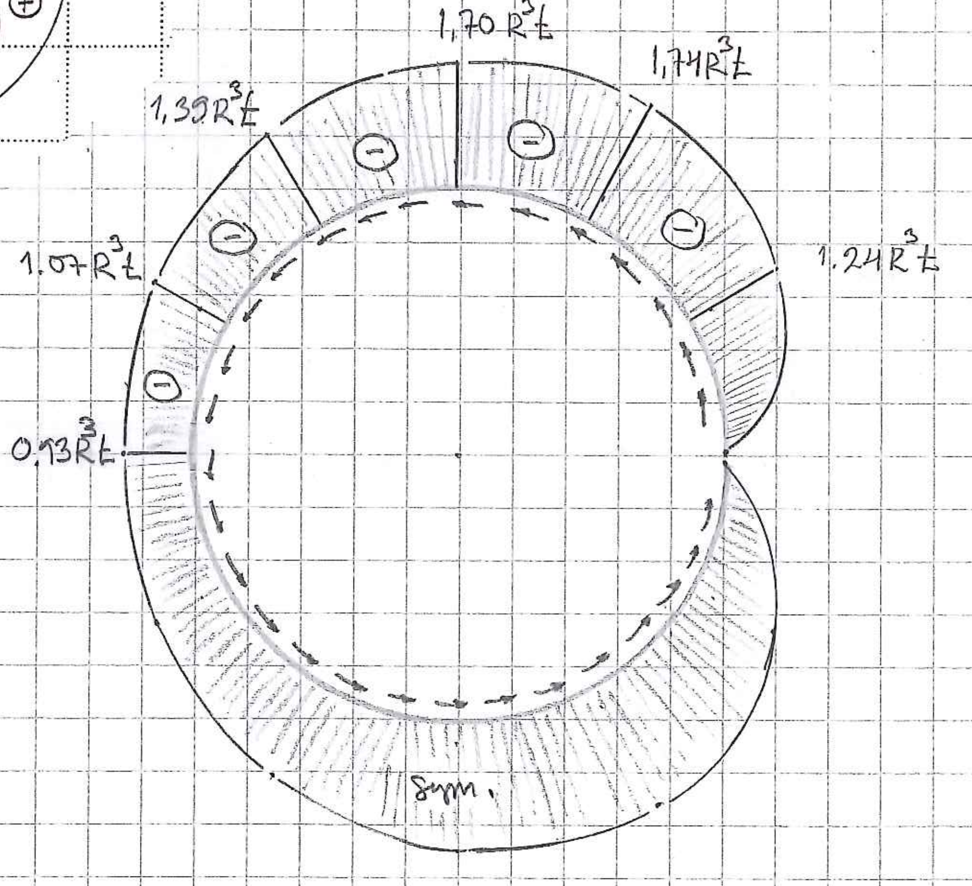
S_ω on siten tasavahvuisen seinämän omaavalla profiililla s-matkaisen osan omegakuvion pinta-ala.

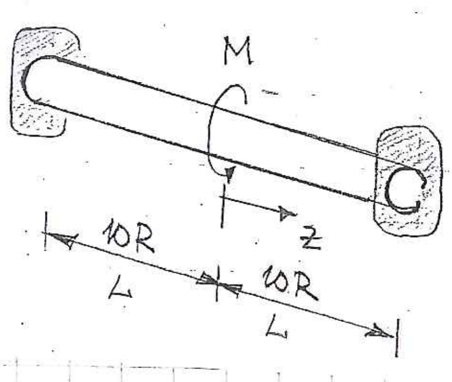
$$S_\omega(s) = \int_0^s \omega(s) \cdot t\,ds = \int_{-\pi}^{\varphi} R^2(\varphi - 2\sin\varphi)\cdot t \cdot R\,d\varphi$$

$$= R^3 t \int_{-\pi}^{\varphi} (\varphi\,d\varphi - 2\sin\varphi\,d\varphi) = R^3 t \Big|_{-\pi}^{\varphi} \tfrac{1}{2}\varphi^2 + 2\cos\varphi = R^3 t\left[\tfrac{1}{2}(\varphi^2 - \pi^2) + 2\cos\varphi + 2\right]$$



$$\underline{\underline{S_\omega(\varphi) = \left[2(\cos\varphi + 1) + \tfrac{1}{2}(\varphi^2 - \pi^2)\right] R^3 t}}$$





Määritetään kuvan halkileikatun putkiprofiilipalkin kuormapisteen kiertymä φ_{kp} ja verrataan sitä ehjän putken vääntökiertymään.

Ratkaisu:

Valitaan symmetrian vuoksi z-origo palkin puolivälin.

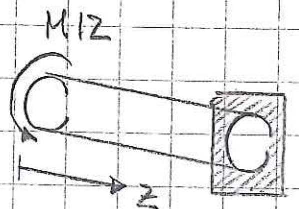
Estetyn väännön differentiaaliyhtälö on

$$EI_\omega \varphi_{,zzzz} - GI_v \varphi_{,zz} = m(z)$$

$$\varphi_{,zzzz} - k^2 \varphi_{,zz} = \frac{m(z)}{EI_\omega}$$ jossa merkintä $k^2 = \frac{GI_v}{EI_\omega}$

Homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on

$$\varphi(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz$$



Vakiot ratkaistaan reunaehdoista.

Tässä tapauksessa yksityisratkaisu $\varphi_0(z) = 0$ sillä palkki on kuormittamaton $z \in (0, 10R)$

$$\begin{cases} M_z(0) = -\frac{M}{2} \\ \varphi_{,z} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi(L) = 0 \\ \varphi_{,z}(L) = 0 \end{cases}$$

Alkupään reunaehdot:

i $\quad M_z(z) = GI_v \left(C_2 + \cancelto{0}{\varphi_{0,z}} - \frac{1}{k^2} \cancelto{0}{\varphi_{0,zzz}} \right)$

ii $\quad \varphi_{,z}(z) = \left(C_2 + C_3 k \cosh kz + C_4 k \sinh kz + \cancelto{0}{\varphi_{0,z}} \right)$

Nyt $\quad M_z(0) = GI_v * C_2 = -\frac{M}{2} \Rightarrow \underline{C_2 = -\frac{M}{2GI_v}}$

$$\varphi_{,z}(0) = (C_2 + C_3 * k * 1 + C_4 * k * 0) = 0 \Rightarrow \underline{C_3 = +\frac{M/k}{2GI_v}}$$

Loppupään reunaehdot:

$$\varphi(L) = C_1 + C_2 * L + C_3 \sinh kL + C_4 \cosh kL = 0 \qquad iii$$

$$\varphi_{,z}(L) = C_2 + C_3 k \cosh kL + C_4 k \sinh kL = 0 \qquad iv$$

iv $\Rightarrow$ $$C_4 = \frac{1}{k\sinh kL}\left[C_2 + C_3 k\cosh kL\right] = -\frac{M/k}{2GI_v}\left[-\frac{1}{\sinh kL} + \frac{\cosh kL}{\sinh kL}\right]$$

$$C_4 = \frac{M/k}{2GI_v}\left[\frac{1-\cosh kL}{\sinh kL}\right]$$

iii $\Rightarrow$ $$C_1 = -C_2L - C_3\sinh kL - C_4\cosh kL$$

$$= \frac{M}{2GI_v}\left[L - \frac{1}{k}\sinh kL - [1-\cosh kL]\frac{\cosh kL}{k*\sinh kL}\right]$$

$$C_1 = \frac{ML}{2GI_v}\left[1 - \frac{\sinh kL}{kL} - \frac{1-\cosh kL}{kL*\tanh kL}\right]$$

Vääntökulman lauseke on siten

$$\varphi(z) = \frac{ML}{2GI_v}\left[\left(1 - \frac{\sinh kL}{kL} - \frac{1-\cosh kL}{kL*\tanh kL}\right) + \frac{z}{L} + \frac{\sinh kz}{kL} + \frac{1-\cosh kL}{kL*\sinh kL}\cosh kz\right]$$

$$\varphi(0) = \frac{ML}{2GI_v}\left[\left(1 - \frac{\sinh kL}{kL} - \frac{1-\cosh kL}{kL*\tanh kL}\right) + \frac{1-\cosh kL}{kL*\sinh kL}\right]$$

Auki leikattu avoprofiili: $\quad I_\omega = 8.1045 * R^5 t$

$$I_v = \frac{1}{3} * 2\pi R * t^3$$

jos $E = 2(1+\nu)G = 2(1+0.3)G = 2.6\,G$

niin $$k^2 = \frac{GI_v}{EI_\omega} = \frac{2\pi * R * t^3}{3*2.6*8.1045*R^5 t} = \frac{t^2/R^4}{10.061} \Rightarrow k = \frac{t}{3,172\,R^2}$$

joten $kL = 3.153 * \frac{t}{R}$ kun $L = 10R$

Verrataan aukileikatun profiilin vääntökulma tulosta ehjän putken vastin tulokseen

$$\varphi_{sv}^{EP} = \frac{M/2}{GI_v^{EP}} * L = \frac{ML}{2GI_v^{EP}}$$

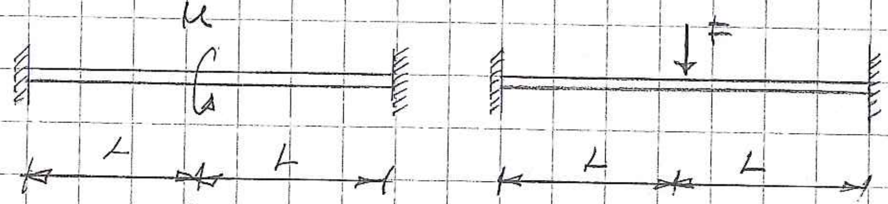
$$I_v^{EP} = \frac{(2A)^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4*\pi^2 R^4}{2\pi R/t} = 2\pi * R^3 t = 19.739\,R^3 t$$

$$\varphi_{sv}^{EP} = 0.2533 * \frac{M}{GR^2 t} \qquad \varphi_{sv}^{AVO} = \frac{ML}{2GI_v} = \frac{10R*M}{\frac{4\pi}{3} R t^3 * G} = \frac{30}{4\pi}\left(\frac{R}{t}\right)^2 \frac{M}{GR^2 t}$$

Kun kL on pieni eli $kL < 0,5$ niin

$$EI_\omega \varphi_{,zzzz} - GI_v \varphi_{,zz} = m(z) \rightarrow \quad EI_\omega \varphi_{,zzzz} = m(z)$$

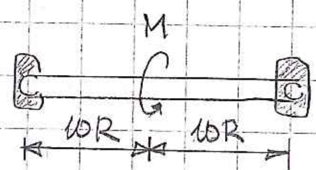
Näin ollen taivutuksen palkin ratkaisut voidaan hyödyntää analogisina ratkaisuina.



$$v_F = \frac{FL^3}{24\,EI}$$

$$\varphi_M = \frac{ML^3}{24 EI_\omega} = \frac{ML^3}{24 * GI_v/k^2} = \frac{(kL)^2}{24}\frac{ML}{GI_v} = \frac{(3,153)^2 (\frac{t}{R})^2 * 10R * M}{24 * 2\pi/3\, R t^3} = 1,798 \frac{M}{GR^2 t}$$

Tarkastellaan tarkan ja likitulosten eroja joillakin mittasuhteilla.



olkoon
$G = M = R = 1$

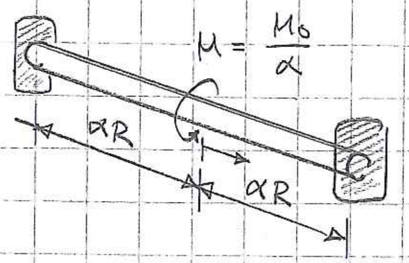
Seinämä suhde	φ_{TARKKA}	φ_{LVV}	$\varphi^{AVO}_{STVENAT}$	$\varphi^{UMPI}_{STVENAT}$
$t = 0.05R$	39,449	39,548	19098.6	5.066
$t = 0.10R$	19,579	19.774	2387.3	2.533
$t = 0.20R$	9,509	9.887	298.4	1.266

$kL = 3,15 \frac{t}{R}$ joten φ_{LVV} on hyvä arvio.

Olkoon seinämäsuhde $t = 0.05R$ ja muutellaan sauvan pituutta L.

L	kL	φ_{TARKKA}	φ_{LVV}	$\varphi^{AVO}_{STVENAT}$
10R	0,1576	39.45	39.55	19099
30R	0.473	1044.4	1067.8	57296
100R	1,576	31695	39547	190986
200R	3,153	159519	316380	381972
400R	6.305	522511	2531041	763944
1000R	15.763	1667543	39547513	1909859

Huom φ_{LVV} "räjähtää" sillä sen lausekkeessa esiintyy termi $(kL)^2$.

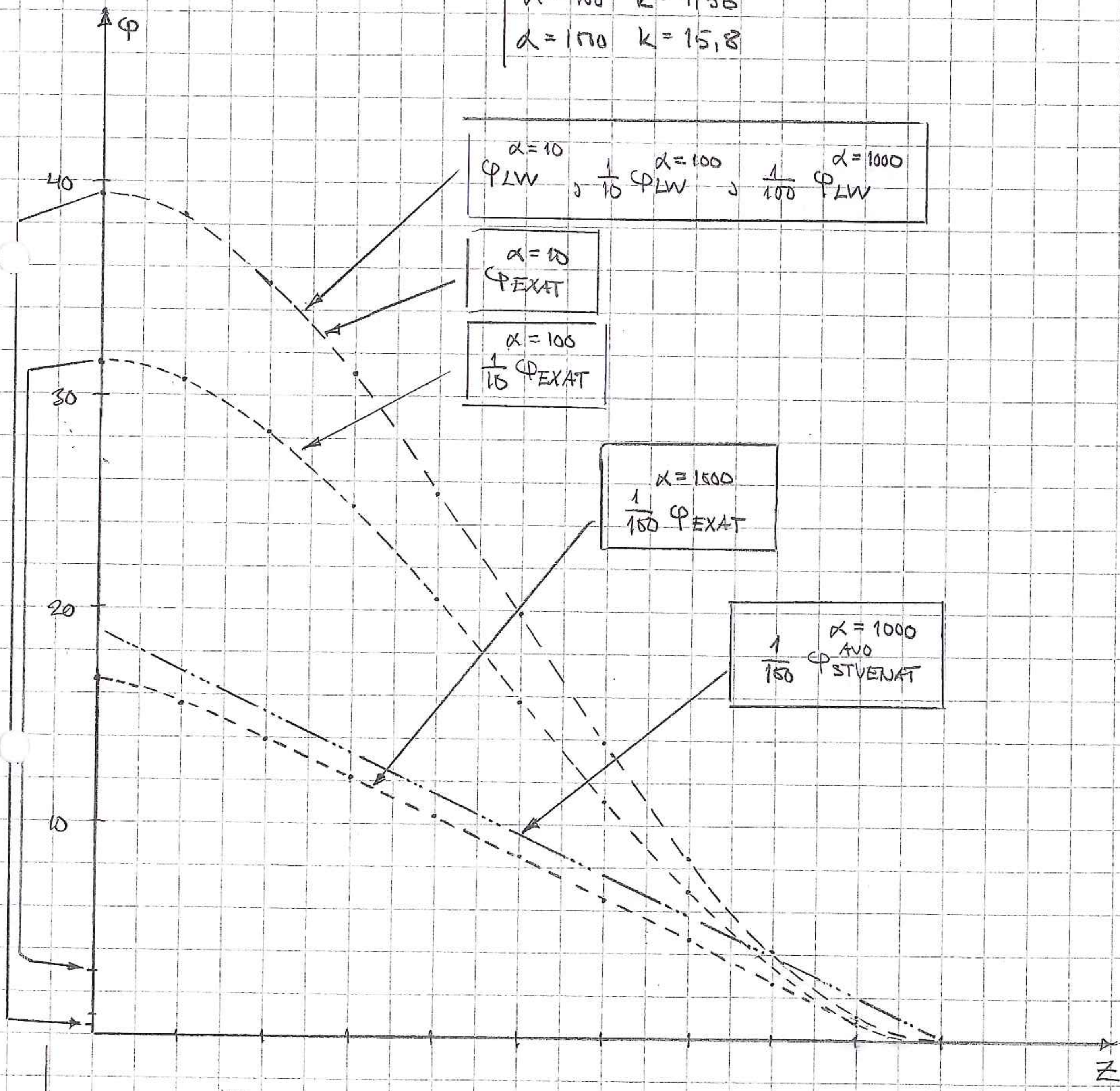


Vertaillaan eri tuloksia

olkoon $t = 0{,}05R$

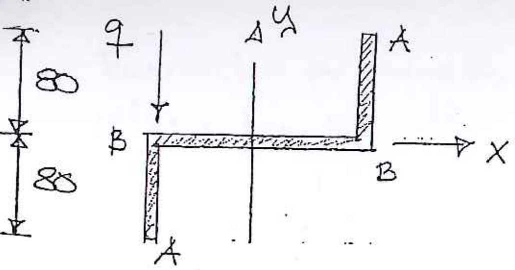
ja $G = R = 1$ ja $M_0 = 10$

$\alpha = 10$	$k = 0.158$
$\alpha = 150$	$k = 1{,}58$
$\alpha = 1500$	$k = 15{,}8$

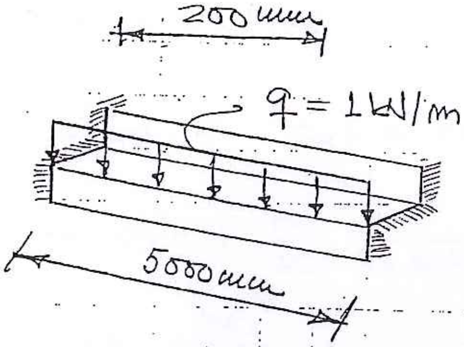


jos $\varphi^{AVO}_{STVENAT}$ mittakaavassa piirretään

muut niin ne putoavat tänne alas.



Määritä kuvan Z-profiilipalkin jäykän tuen normaalijännitysjakautuma joka syntyy taivutuksen ja väännön seurauksena.



Profiilin poikkipintasuureita

$I_{xx} = 360\ cm^4$ $\quad I_{yy} = 2300\ cm^4$

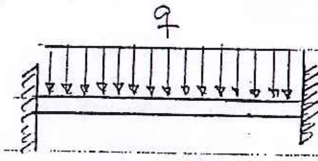
$I_{xy} = 670\ cm^4$

$I_v = 19\ cm^4$ $\quad I_\omega = 19700\ cm^6$

$\omega_A = 53\ cm^2$ $\quad \omega_B = -18\ cm^2$

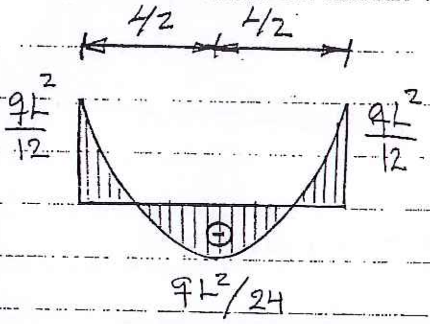
Ratkaisu:

Tarkastellaan ensin taivutus.



Tukimomentti $M_x^T = +\frac{qL^2}{12} = \frac{1*5^2}{12} = +2,08333$ kNm

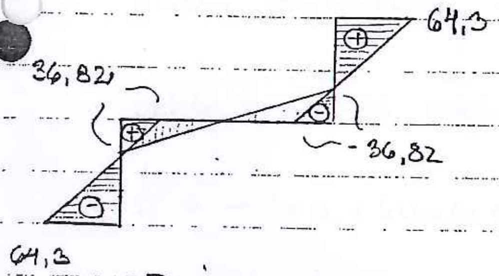
Tästä aiheutuva normaalijännitysjakautuma on



$$\sigma_z = \frac{I_y M_x - I_{xy} M_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} * y + \frac{I_x M_y - I_{xy} M_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} * x$$

$$\sigma_z = + \frac{I_y * y - I_{xy} * x}{I_x I_y - I_{xy}^2} * M_x$$

$$\sigma_z = + \frac{2,0833*10^6}{3.791*10^{13}} * [\,2,3*10^7 * y - 6.7*10^6 * x\,]$$



Piste A(100,80) $\quad \sigma_z^A = 64.30$ MPa

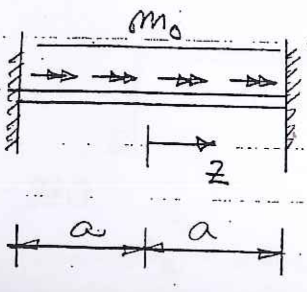
B(100,0) $\quad \sigma_z^B = -36,82$ MPa

muut pisteet tuottavat antimetriset tulokset.

σ_z^{Tuki} – jakautuma

Ja sitten vääntötehtävä:

DY $\quad EI_\omega \varphi_{,zzzz} - GI_v \varphi_{,zz} = m_0$



yleinen ratkaisu $\varphi = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz$

eräs yksityisratkaisu $\varphi_0 = Az^2$ sijoit dy:n

$-GI_v * 2A = m_0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{-m_0}{2GI_v} z^2$

Olkoon mukavuussyistä z-origo palkin keskellä kuormitus ja reunaehdot z:n suhteen symmetrisiä joten ratkaisukin on sitä, joten $c_2 = c_3 = 0$.

Kertoimet c_1 ja c_4 ratkaistaan reunaehdoista

$\varphi(a) = 0 \Rightarrow c_1 + c_4 \cosh ka - \frac{m_0}{2GI_v} * a^2 = 0$ jäykkä kiinnitys

$\varphi_{,z}(a) = 0 \Rightarrow c_4 k \sinh ka - \frac{m_0}{GI_v} a = 0$ jäykkä kiinnitys

$\rightarrow c_4 = + \frac{m_0}{GI_v} \frac{a^2}{ka \sinh ka}$

$\rightarrow c_1 = \frac{m_0 a^2}{GI_v} \left[+ \frac{1}{2} - \frac{1}{ka} \frac{\cosh ka}{\sinh ka} \right]$

$$\varphi(z) = \frac{m_0 a^2}{GI_v} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{ka} \frac{\cosh ka}{\sinh ka} \right) + \frac{\cosh kz}{ka \sinh ka} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a} \right)^2 \right\}$$

Tyoen jännitys $\sigma_z = \frac{B^T}{I_\omega} * \omega_A$

$$B = -EI_\omega \varphi_{,zz} = -\frac{GI_v}{k^2} * \frac{m_0 a^2}{GI_v} \left\{ k^2 \frac{\cosh kz}{ka \sinh ka} - \frac{1}{a^2} \right\}$$

$$B^T = B(a) = -m_0 a^2 \left\{ \frac{\cosh ka}{ka \sinh ka} - \frac{1}{(ka)^2} \right\}$$

Tässä tehtävässä olevilla mitoilla $ka = \sqrt{\frac{19}{2{,}6 * 19700}} * 250 = 4.815$

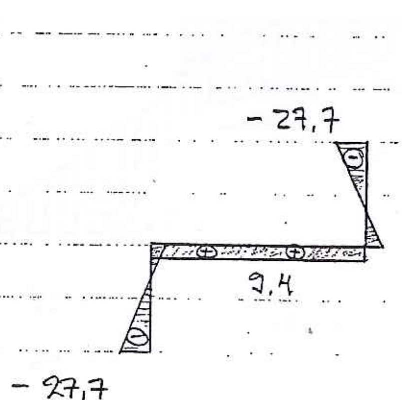
$\cosh ka = 61.678$ $\sinh ka = 61.670$

$$B^T = -1 * 0{,}1 \text{ kNm/m} * 2{,}5^2 \text{ m} \left\{ \frac{61.678}{4.815 * 61.670} - \frac{1}{(4{,}815)^2} \right\} = -0{,}103 \text{ kNm}^2$$

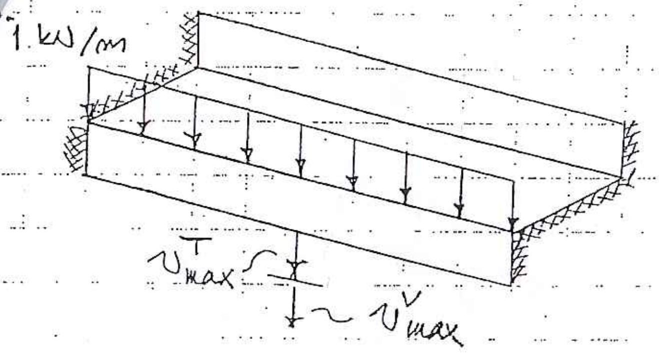
$$\sigma_z^A = \frac{-102.86 * 10^6}{19700 * 10^6} * 5300 = -27.67 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z^B = \frac{102.86 * 10^6}{19700 * 10^6} * 1800 = +9.40 \text{ MPa}$$

muut symmetriset



σ_z^{Tyo} - jakautuma



Maksimi taipuma taivutuksesta

$$v_{,zz} = -\frac{1}{\rho_y} = -\frac{I_y M_x}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$ (peruste

$$v^T_{max} = \frac{1}{384} * \frac{I_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} * \frac{qL^4}{E}$$

$$v^T_{max} = \frac{1}{384} * \frac{2350}{360*2350-670^2} * \frac{1*580^4}{205000}$$

$$v^T_{max} = 4,82 \text{ mm}$$

Maksimi taipuma vääntiöstä

$$v^V_{max} = \varphi_{max} * 100 = \frac{m_0 a^2}{GI_v} * \left[\frac{1}{2} + \frac{1-\cosh ka}{ka*\sinh ka} \right] * 100$$

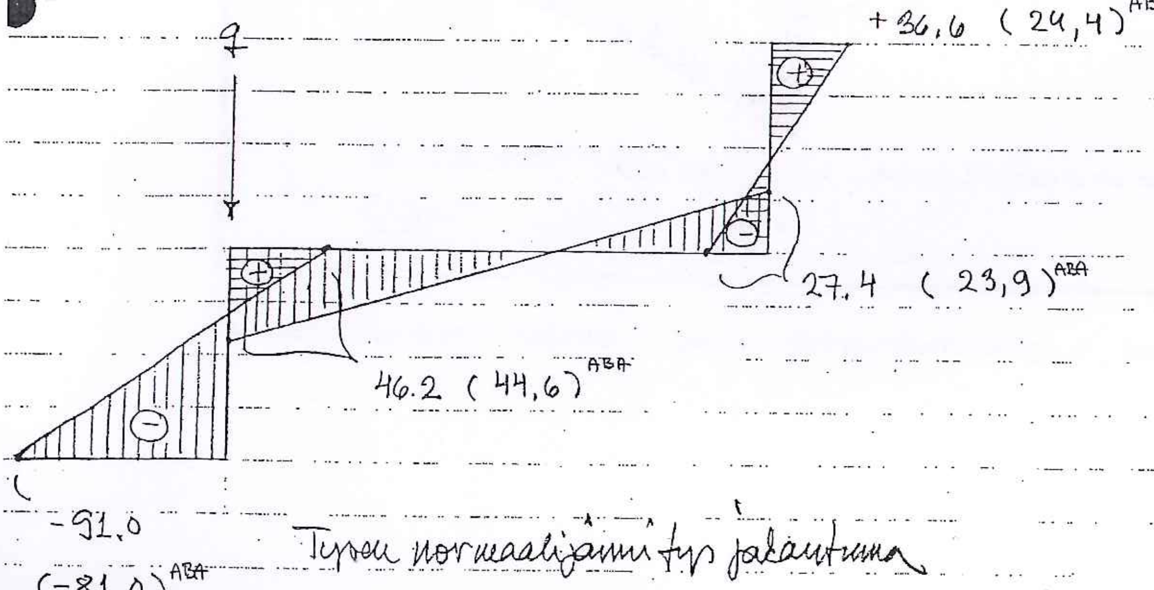
$$v^V_{max} = \frac{100*2500^2*2.6}{205000*190000} \left[\frac{1}{2} + \frac{1-61.678}{4,815*61,670} \right] * 100 \implies v^V_{max} = 1.233 \text{ mm}$$

$$\left(v^{V\,ABA}_{max} = 1.12 \text{ mm} \right)$$

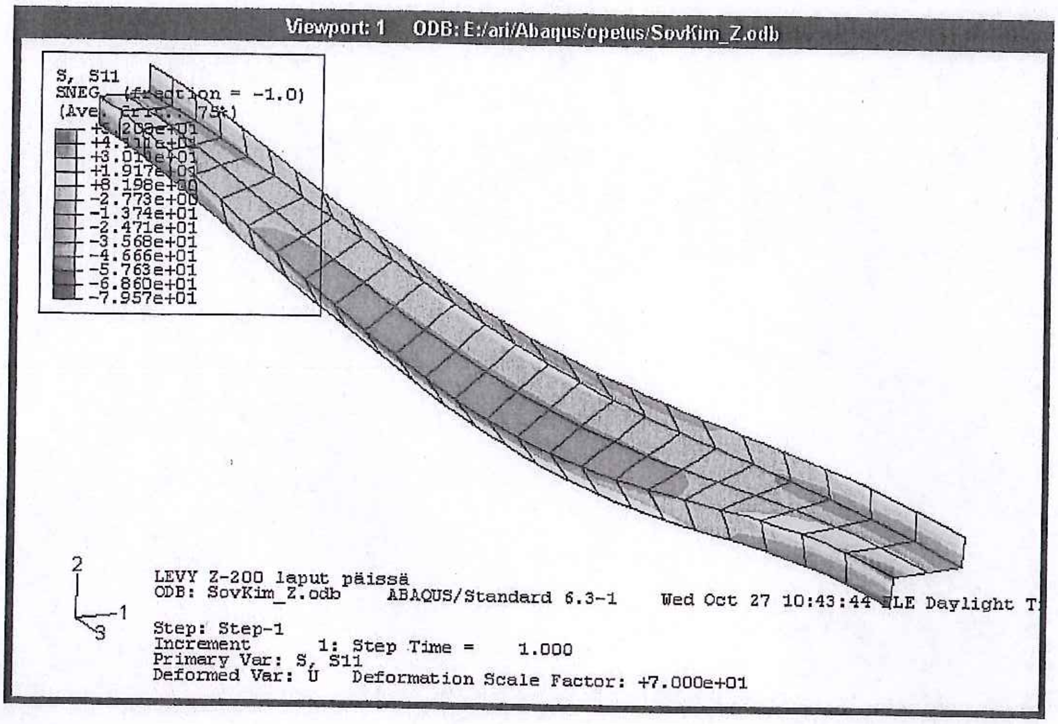
$$v_{max} = 5,05 \text{ mm}$$

Tarkistusarvio! pelkkä uloseinämä kantaa $I_{ETUS} = 450000 \text{ mm}^4$

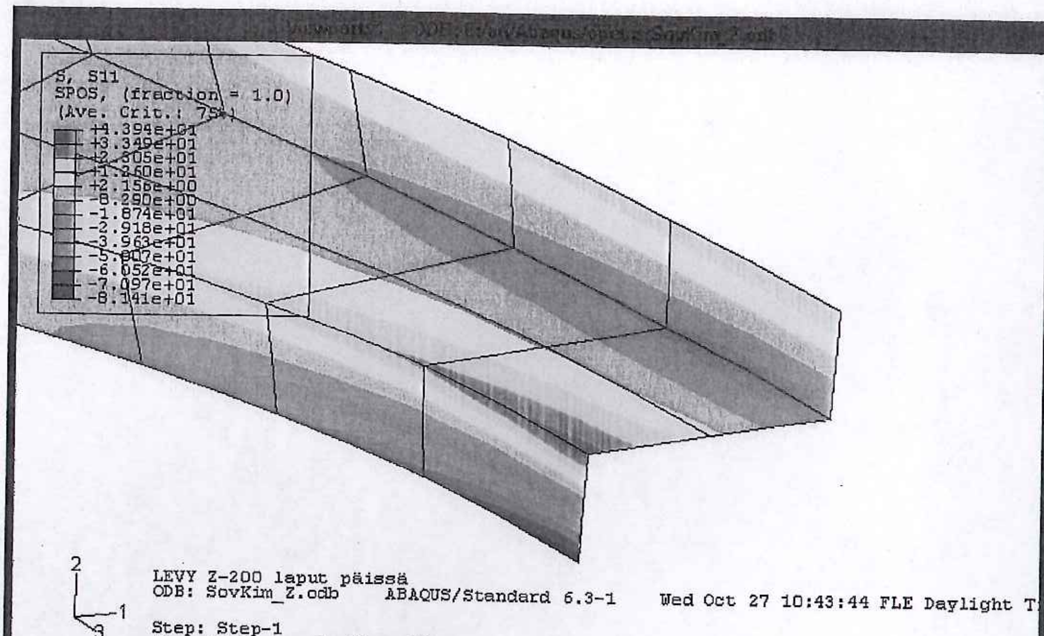
$$v_{max} = \frac{1}{384} * \frac{5000^4}{205000*450000} = 17,6 \text{ mm}$$ ok



Tyypin normaalijännitys jakautuma



Sovellettu kimmoteoria Harjoitus 7 Z-profiilin taivutusvääntö. Deformoitunut tila.



Sovellettu kimmoteoria Harjoitus 7 Z-profiilin taivutusvääntö. Päädyn σ_{xx} jakautuma.