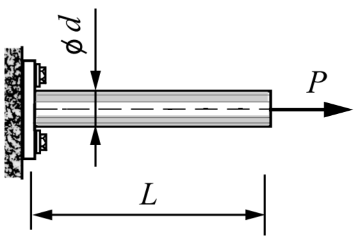
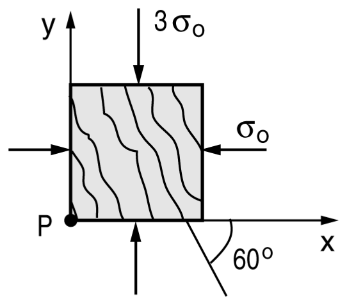
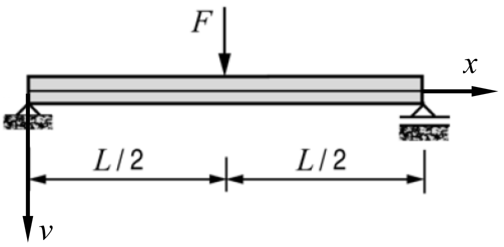


1. Kun kuvan tankoa venytetään voimalla P = 3,5 kN, se pitenee 0,55 mm ja sen halkaisija pienenee 0,0058 mm. Määritä materiaalin kimmokerroin E, Poissonin luku ν, liukukerroin G, tilavuuden muutoskerroin (eli puristuskerroin) K ja laske suhteellinen tilavuudenmuutos e. d = 6 mm, L = 200 mm



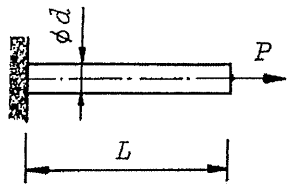
2. Kuvassa esitetään havupuusta leikattuun jännityselementtiin vaikuttavat jännityskomponentit. Sallittu puristusjännitys puun syitä vastaan kohtisuorassa suunnassa on 20 MPa ja sallittu leikkausjännitys syiden suunnassa 5 MPa. Määritä sallittu arvo suureelle σ_0.



3. Määritä kuvan niveltuetun palkin taipuman lauseke potentiaalienergian minimin periaatteen avulla. Käytä taipumalle estimaattia:

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad x \in (0, L)$$

Lasketut tehtävät palautetaan seuraavissa harjoituksissa pe 6.9 tai ennen harjoituksia tehtävät voi palauttaa Rakennustalon M-siiven 2. kerroksen palautuslaatikkoon.



10. Kun kuvan tankoa venytetään voimalla $P = 3{,}5$ kN, se pitenee 0,55 mm ja sen halkaisija pienenee 0,0058 mm. Määritä materiaalin *POISSON*in luku ja kimmomoduuli sekä arvioi, mikä materiaali on kysymyksessä. $d = 6$ mm, $L = 200$ mm.

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{0{,}55 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} = 2750\mu$$

$$\varepsilon_\perp = \frac{\Delta d}{d} = \frac{-0{,}0058 \text{ mm}}{6 \text{ mm}} = -966{,}7\mu$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_x} = -\frac{-966{,}7\mu}{2750\,\mu} = 0{,}352 \qquad \triangleleft$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{3{,}5 \cdot 10^3 \text{ N}}{\pi \cdot 3^2 \text{ mm}^2} = 123{,}8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 123{,}8 \text{ MPa}$$

$$E\varepsilon_x = \sigma_x$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{123{,}8 \text{ MPa}}{2750 \cdot 10^{-6}} = 45{,}0 \text{ GPa} \qquad \triangleleft$$

Magnesium-seos: $E \approx 43$ GPa

$\nu = 0{,}35$

liukukerroin

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 16{,}64 \text{ GPa}$$

puristuskerroin

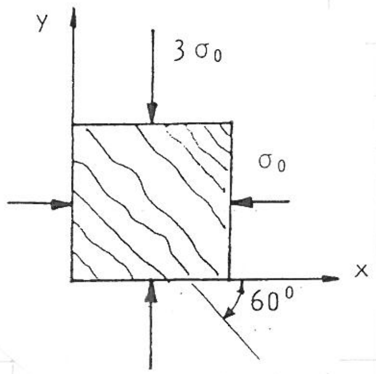
$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = 50{,}68 \text{ GPa}$$

tilavuuden muutos

$$e = e_x + e_y + e_z = \varepsilon + 2\varepsilon_\perp = \varepsilon - 2\varepsilon\nu$$

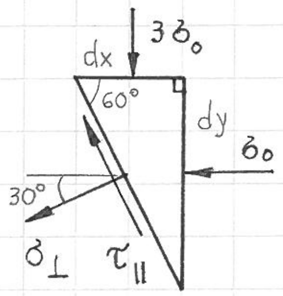
$$= \varepsilon(1-2\nu) = 814\mu$$

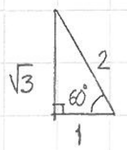
$$e = \frac{V - V_0}{V_0}$$



9. Kuvassa esitetään havupuusta leikattuun jännityselementtiin vaikuttavat jännityskomponentit. Sallittu puristusjännitys puun syitä vastaan kohtisuorassa suunnassa on 20 MPa ja sallittu leikkausjännitys syiden suunnassa 5 MPa. Määritä sallittu arvo suureelle σ_0.

<u>RATKAISU</u>





$$\frac{dy}{dx} = \tan 60° = \sqrt{3}$$

$$\swarrow \quad \sigma_\perp \frac{dx}{\cos 60°} + \sigma_0\, dy \sin 60° + 3\sigma_0\, dx \cos 60° = 0 \quad | : dx$$

$$\Rightarrow \quad 2\sigma_\perp + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_0 \frac{dy}{dx} + 3\sigma_0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\sigma_\perp + \frac{3}{2}\sigma_0 + \frac{3}{2}\sigma_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_\perp = -\frac{3}{2}\sigma_0$$

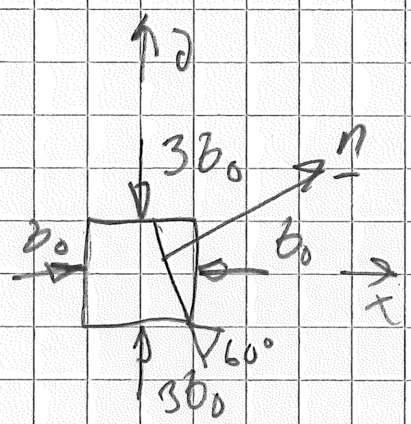
$$|\sigma_\perp| \leq \sigma_{sall} \Rightarrow \frac{3}{2}\sigma_0 \leqq 20\text{ MPa} \quad \Rightarrow \quad \sigma_0 \leqq 13{,}3\text{ MPa} \qquad (1)$$

$$\nwarrow \quad \tau_\parallel \frac{dx}{\cos 60°} + \sigma_0\, dy \cos 60° - 3\sigma_0\, dx \sin 60° = 0 \quad | : dx$$

$$\Rightarrow \quad 2\tau_\parallel + \sigma_0 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - 3\sigma_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_\parallel = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_0$$

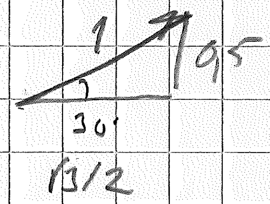
$$|\tau_\parallel| \leq \tau_{sall} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_0 \leqq 5\text{ MPa} \quad \Rightarrow \quad \sigma_0 \leqq 5{,}77\text{ MPa} \qquad (2)$$

$$(1)\ \&\ (2) \quad \Rightarrow \quad \sigma_{0\,sall} = 5{,}77\text{ MPa}$$



$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & -3\sigma_0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8660 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$



$$\underline{t}_n = \underline{\sigma}\,\underline{n} = \begin{bmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & -3\sigma_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0,866 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0,866\sigma_0 \\ -1,5\sigma_0 \end{bmatrix}$$

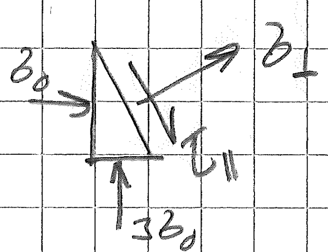
$$\sigma_\perp = \sigma_n = \underline{t}_n \cdot \underline{n} = \begin{bmatrix} -0,866\sigma_0 \\ -1,5\sigma_0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0,866 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

$$= -1,5\sigma_0$$

$$\underline{\tau}_n = \underline{t}_n - \sigma_n \underline{n}$$

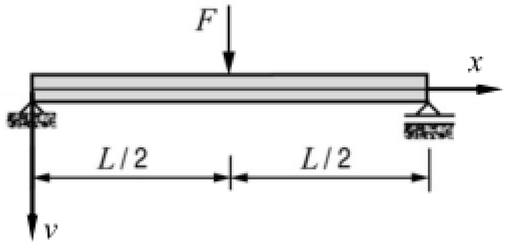
$$= \begin{bmatrix} -0,866\sigma_0 \\ -1,5\sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,866 \\ 0,5 \end{bmatrix} 1,5\sigma_0 = \begin{bmatrix} 0,433 \\ -0,75 \end{bmatrix}$$

$$\tau_n = \sqrt{3}/2\,\sigma_0 = 0,866$$



$$\sigma_\perp = -\frac{3}{2}\sigma_0 \leq 20\,MPa$$

$$\tau_\parallel = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_0 \leq 5\,MPa$$



3. Määritä kuvan niveltuetun palkin taipuman lauseke potentiaalienergian minimin periaatteen avulla. Käytä taipumalle estimaattia:

$$v(\xi) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 , \quad x \in (0, L)$$

taipumaestimaatti

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

RE: $v(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

$$v(L) = a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3 = 0$$

$$a_1 = -a_2 L - a_3 L^2$$

$$\Rightarrow v(x) = a_2(x^2 - Lx) + a_3(x^3 - L^2 x)$$

Potentiaalienergia $\Pi = U + V$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EI (v'')^2 dx$$ kimmoenergia

$$V = -F v(L/2)$$ ulk. voiman pot.energia

$$v'' = 2a_2 + 6a_3 x \qquad v(L/2) = a_2\left(\frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{2}\right) + a_3\left(\frac{L^3}{8} - \frac{L^3}{2}\right) = -a_2/4 - 3a_3/8$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EI(2a_2 + 6a_3 x)^2 dx + F\left(\frac{a_2}{4}L^2 + \frac{3a_3}{8}L^3\right)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} EI \int_0^L (4a_2^2 + 24 a_2 a_3 x + 36 a_3^2 x^2) dx + (\ )$$

$$= \frac{1}{2} EI \Big/_0^L (4a_2^2 x + 12 a_2 a_3 x^2 + 12 a_3^2 x^3) + (\ )$$

$$= \frac{1}{2} EI (4a_2^2 L + 12 a_2 a_3 L^2 + 12 a_3^2 L^3 + F\left(\frac{a_2 L^2}{4} + \frac{3a_3 L^3}{8}\right)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} EI \left(2 \cdot 4 a_2 L + 12 a_3 L^2\right) + \frac{FL^2}{4} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} EI \left(12 a_2 L^2 + 24 a_3 L^3\right) + \frac{3FL^3}{8} = 0$$

$$EI \begin{bmatrix} 4L & 6L^2 \\ 6L^2 & 12L^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -FL^2/4 \\ -3FL^3/8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI} \frac{1}{(4 \cdot 12 - 6 \cdot 6) L^4} \begin{bmatrix} 12L^3 & -6L^2 \\ -6L^2 & 4L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -FL^2/4 \\ -3FL^3/8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12 EI L^4} \begin{pmatrix} -0{,}75 \\ 0 \end{pmatrix} FL^5$$

$$v(x) = a_2 (x^2 - Lx) = \frac{-1}{16} \frac{FL}{EI} (x^2 - Lx)$$

$$v(x = L/2) = \frac{1}{64} \frac{FL^3}{EI} < v_{exakt} = \frac{FL^3}{48 EI}$$