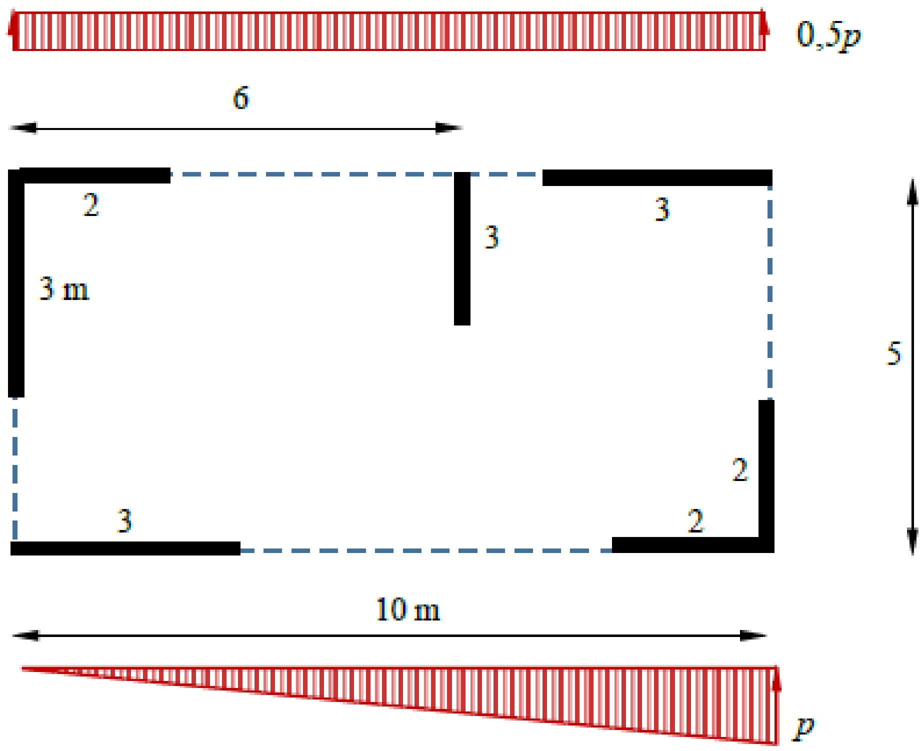
1. Tehtävä



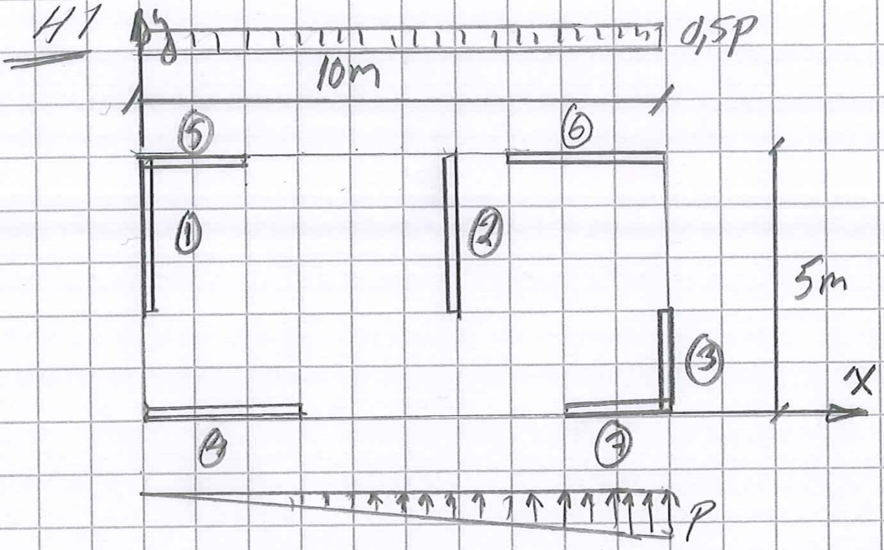
Kuvaan on merkitty jäykistysseinien paikat ja niiden pituudet. Seinien paksuus on t. Rakennuksen korkeus on H. Rakennukseen kohdistuu epäsymmetrinen kolmiomainen tuulenpaine p ja rakennuksen takaseinään tasainen imupaine $0{,}5\,p$. 60 % paineesta kohdistuu rakenteen yläosaan ja loput perustuksiin. Jäykistysseinän materiaalin liukukerroin on G.

Määritä rakennuksen

1. vääntökeskiön paikka
2. vääntökeskiön siirtymät ja kiertymä ja
3. jäykistysseiniin kohdistuvat voimat

Voit halutessasi valita sopivan arvon korkeudella H ja seinän paksuudelle t sekä paineelle p.

H1



t = seinien paksuus

	x_k	GA_k	$x_k GA_k$	y_j	GA_j	$y_j GA_j$
1	0	3Gt	0			
2	6	3Gt	18Gt			
3	10	2Gt	20Gt			
4				0	3Gt	0
5				5	2Gt	10Gt
6				5	3Gt	15Gt
7				0	2Gt	0Gt
Σ		8Gt m	38Gt m		10Gt m	25Gt m

Vääntökeskiön paikka (1.25) m = 1 metri

$$x_v = \frac{\sum_{k=1}^{3} x_k GA_k}{\sum_{k=1}^{3} GA_k} = \frac{38Gt}{8Gt} = \underline{\underline{4,75\ m}}$$

$$y_v = \frac{\sum_{j=4}^{7} y_j GA_j}{\sum_{j=4}^{7} GA_j} = \frac{25Gt}{10Gt} = \underline{\underline{2,5\ m}}$$

Vääntökeskiön siirtymät (1.31)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{det} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} GA_k \sin^2\alpha_k & -\sum_{k=1}^{n} GA_k \sin\alpha_k \cos\alpha_k \\ symm & \sum_{k=1}^{n} GA_k \cos\alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} HRx \\ HRy \end{pmatrix}$$

$k = 1 \dots t$ y-suuntaiset seinät $k = 1,2,3$

$\Rightarrow \sin\alpha_k = 1$, $\cos\alpha_k = 0$

$l = t+1 \dots n$ x-suunt. seinät $l = 4,5,6,7$

$\Rightarrow \sin\alpha_l = 0$, $\cos\alpha_l = 1$

nyt $\sin\alpha_k \cos\alpha_k = 0$ kaikilla k

(1.32) $$\det = \sum_k GA_k \cos^2\alpha_k \sum_k GA_k \sin^2\alpha_k - \left(\sum GA_k \sin\alpha_k \cos\alpha_k\right)^2$$

$$= \sum_{l=t+1}^{n} GA_l \sum_{k=1}^{t} GA_k$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sum_{l=t+1}^{n} GA_l \sum_{k=1}^{t} GA_k} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{t} GA_k & 0 \\ 0 & \sum_{l=t+1}^{n} GA_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} HR_x \\ HR_y \end{pmatrix}$$

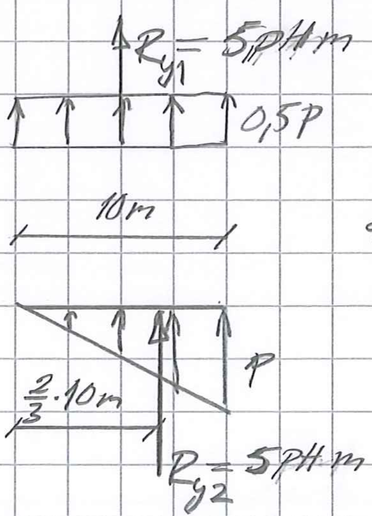
$$= \begin{pmatrix} 1/\sum_{l=t+1}^{n} GA_l & 0 \\ 0 & 1/\sum_{k=1}^{t} GA_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} HR_x \\ HR_y \end{pmatrix}$$

$$u = \frac{HR_x}{\sum_{l=t+1}^{n} GA_l} \qquad v = \frac{HR_y}{\sum_{k=1}^{t} GA_k}$$

Kiertymä (1.33)

$$\varphi = \frac{H}{\sum_{k=1}^{n} GA_k r_k^2} M_v$$

Voimat: $R_x = 0$



$m = 1$ metri

H = korkeus

$R_y = 10pHm$ 60% kohdistuu yläosaan

$\therefore$ $\underline{\underline{R_y = 6{,}0\, pHm}}$

Vääntömomentti M_v

$x_1 = 5m$

$x_2 = 6,667m$

$$M_v = R_{y1}(x_1 - x_v) + R_{y2}(x_2 - x_v)$$

$M_v = 10,833\ pHm^2$ 60% kohdistuu yläosaan

$\therefore M_v = 6,50\ pHm^2$

Siirtymät:

$$u = 0 \qquad v = \frac{H\ 6,0\ pHm}{\underbrace{\sum_{t=1}^{t} GA_k}_{8Gtm}} = 0,75 \frac{pH^2}{Gt}$$

Kiertymä

$$\varphi = \frac{H}{\sum_{k=1}^{n} GA_k r_k^2} M_v = \frac{H}{Gt \cdot 190\ m^3} \cdot 6,5\ pHm^2 = \underline{\underline{0,03421 \frac{pH^2}{Gtm}}}$$

$r_k = (x_k - x_v)\sin\alpha_k - (y_k - y_v)\cos\alpha_k$

k	GA_k	r_k (1.14)	$GA_k r_k^2$
1	3Gtm	−4,75 m	Gt 67,6875 m^3
2	3Gtm	1,25 m	Gt 4,6875 m^3
3	2Gtm	5,25 m	Gt 55,125 m^3
4	3Gtm	2,5 m	Gt 18,75 m^3
5	2Gtm	−2,5 m	Gt 12,5 m^3
6	3Gtm	−2,5 m	Gt 18,75 m^3
7	2Gtm	2,5 m	Gt 12,5 m^3
			Σ = Gt 190 m^3

Seinävoimat

x-suuntaiset seinät

$$F_j = \frac{GA_j}{\sum_{k=t+1}^{n} GA_k} R_x - \frac{(y_j - y_v) GA_j}{\sum_{k=1}^{n} GA_k r_k^2} M_v \qquad (1.37) \& (1.39) \quad j = t+1 \ldots n$$

$R_x = 0$

y-suunt. seinät

$$F_j = \frac{GA_j}{\sum_{k=1}^{t} GA_k} R_y + \frac{(x_j - x_v) GA_j}{\sum_{k=1}^{n} GA_k r_k^2} M_v \qquad (1.38) \& (1.40) \quad j = 1 \ldots t$$

Seinävoimat

$$F_1 = \frac{3\,6\,t\,m}{8\,6\,t\,m} 6\,pH\,m + \frac{4{,}75\,m\;3\,6\,t\,m}{190\,6\,t\,m} 6{,}5\,pH\,m^2$$

$$= (2{,}25 - 0{,}4875)\,pH\,m = 1{,}7625\,pH\,m$$

$$F_2 = (2{,}25 + 0{,}1283)\,pH\,m = 2{,}3783\,pH\,m$$

$$F_3 = (1{,}5 + 0{,}3592)\,pH\,m = 1{,}8592\,pH\,m$$

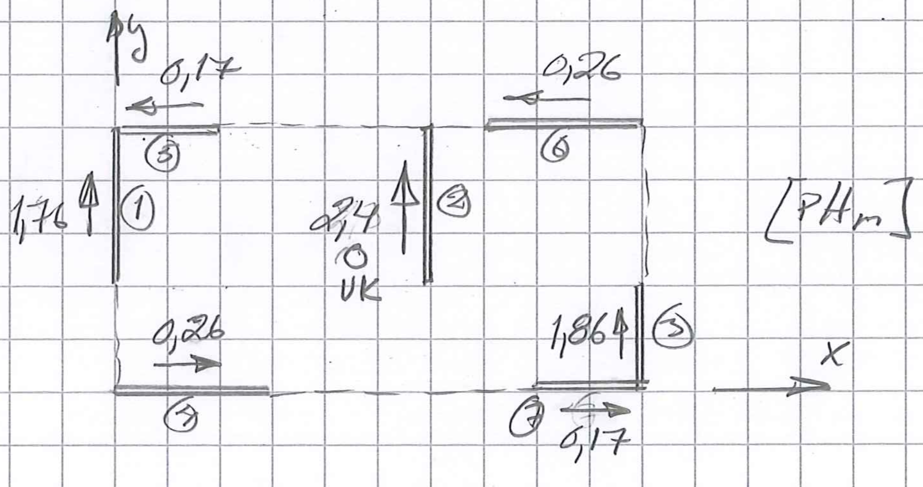
$$F_4 = \frac{3\,6\,t\,m}{10\,6\,t\,m} \cdot 0 - \frac{-2{,}5\,m\;3\,6\,t\,m}{190\,6\,t\,m} 6{,}5\,pH\,m^2$$

$$= (0 + 0{,}2566)\,pH\,m$$

$$F_5 = \left(0 - \frac{+2{,}5\,m\;2\,6\,t\,m}{190\,6\,t\,m} 6{,}5\,pH\,m^2\right) = -0{,}1711\,pH\,m$$

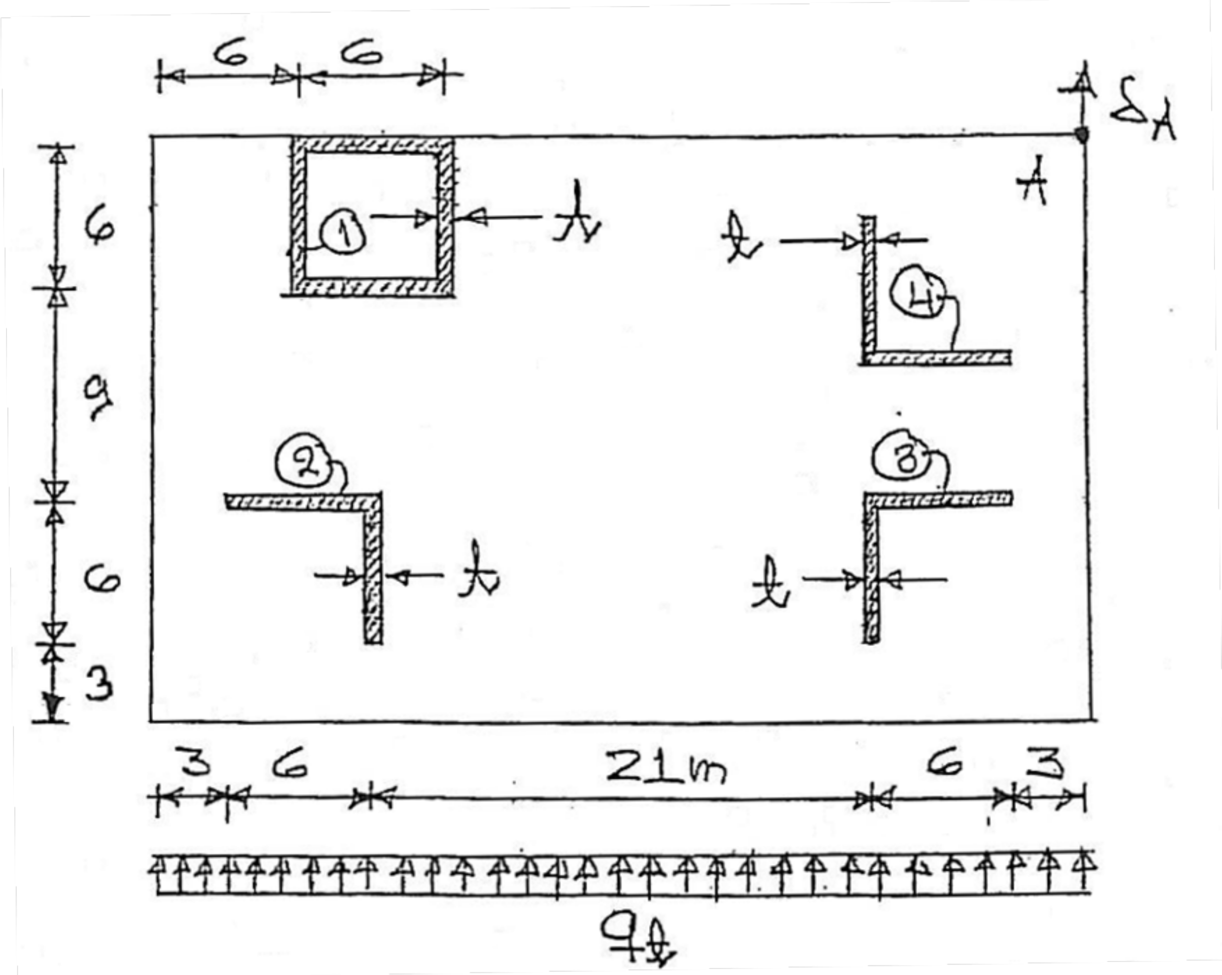
$$F_6 = (0 - 0{,}2566)\,pH\,m = -0{,}2566\,pH\,m$$

$$F_7 = (0 + 0{,}1711)\,pH\,m = 0{,}1711\,pH\,m$$



UK : (4,75 ; 2,5) m

2. Tehtävä



Talotehtävän lähtösuureita:

Pohja $B \times L = 24 \times 39$ m^2, korkeus $H =$ 30 m

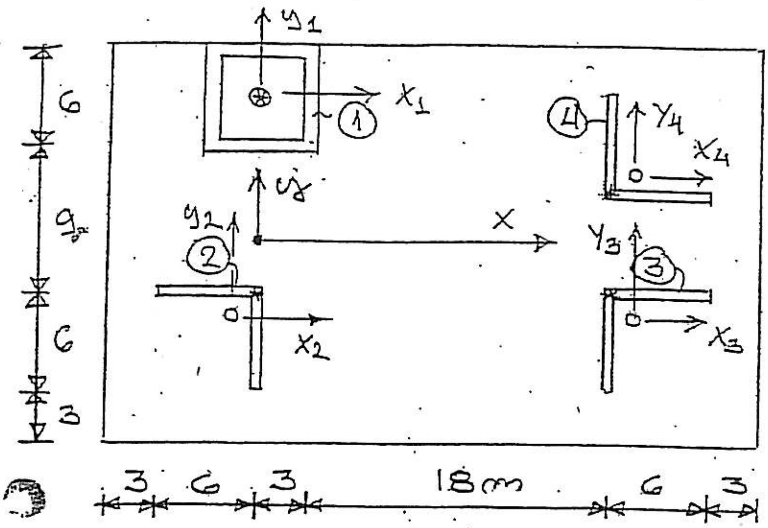
Seinämateriaalin $E = 30\,000$ MPa, $G = 15\,000$ MPa

ja seinämän vahvuus $t = 0,2$ m

Tuulikuorma $q_t = 1$kN/m^2 ja tuulikuorman epäkeskeisyys $e = \pm L / 10$

Tarkastellaan oheisen kerrostalon käyttäytymistä tuulikuormitettuna. Talo on jäykistetty vaakakuormitusta vastaan kuvassa esitetyillä neljällä jäykistysseinällä. Talon välipohjat otaksutaan omissa tasoissaan täysin jäykiksi ja ne ohjaavat jäykistysseinien siirtymätilaa.

Määritä rakenteen vääntökeskiön paikka ja tuulikuorman aiheuttamat normaalijännitykset seinien 1 ja 3 pohjatasossa. Laske lisäksi nurkan A siirtymä.

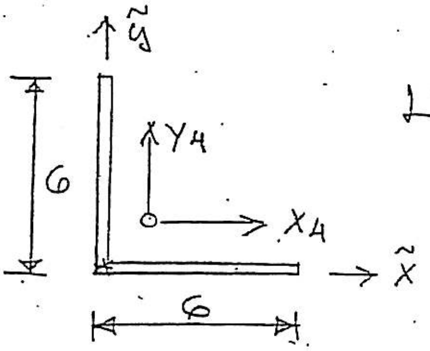


Merkintöjä

o osan (i) pintakeskiö
* osan (i) vääntökeskiö

(x_{io}, y_{io}) pintakeskiö koordin.
(x_i, y_i) vääntökeskiö koordin.
(a_x, a_y) koko rakenteen vääntökeskiökoordinaatit

Lasketaan aluksi osien geometrisia suureita.



L-osat: $A_{2-4} = 2*6*t = 2.4 m^2$ $\quad t = 0.2 m$

$S_{\tilde{x}} = 6*t*3 = 3.6 m^3$

pintakeskiön koordinaatit $\tilde{y}_0, \tilde{x}_0$

$$\underline{\underline{\tilde{y}_{04}}} = \frac{S_{\tilde{x}}}{A} = \frac{3,6 m^3}{2,4 m^2} = \underline{\underline{1,5 m = \tilde{x}_{04}}}$$

$$\underline{\underline{I_{x4}}} = \frac{6^3 * t}{12} + 6*t*1,5^2 + 6*t*1,5^2 = \underline{\underline{9 m^4}} \quad \underline{\underline{I_{y4} = 9 m^4}}$$

$$\underline{\underline{I_{xy4}}} = 6*t*(1,5)*(-1,5) + 6*t*(-1,5)*(1,5) = \underline{\underline{-5.40 m^4}}$$

$$\underline{\underline{I_{v4}}} = \frac{1}{3}*12*0.2^3 = \underline{\underline{0.032 m^4}} \quad \underline{\underline{I_{\omega 4} \cong 0}}$$

L-osilla I_{xi}, I_{yi}, I_{vi} ja $I_{\omega i}$ ovat kaikilla samat termit I_{xyi} kenties vaihtelevat onhan osien asento paikalliskoordinaatistossa kullakin erilainen.

$$\underline{\underline{I_{xy2}}} = 1.2 m^2 * \{(1,5)(-1,5) + (-1,5)(1,5)\} = \underline{\underline{-5.40 m^4}}$$

$$\underline{\underline{I_{xy3}}} = 1.2 m^2 * \{(-1,5)(-1,5) + (1,5)(1,5)\} = \underline{\underline{+5.40 m^4}}$$

$$\underline{\underline{I_{xy4} = -5.40 m^4}}$$

NELIÖOSA

$$\underline{\underline{I_{x1} = I_{y1}}} = \frac{1}{12}[6.2^4 - 5,8^4] = \underline{\underline{28.83 m^4}} \quad \underline{\underline{I_{xy1} = 0}} \quad \underline{\underline{I_{\omega 1} \simeq 0}}$$

$$\underline{\underline{I_{v1}}} = 4*\frac{\Omega^2}{p} = 4*\frac{[6*6]^2}{4*6}*t = \underline{\underline{43.2 m^4}}$$ vääntökirja s 112; Bredt II Lujuusopin perusteet

↳ jossa $\Omega \triangleq$ ontelon ala $\quad p = \oint \frac{ds}{t} = \frac{\text{piiri}}{t}$

Haetaan kokorakenteen vääntökeskiö. Rakenteiden Vääntö s.138

$$a_x = \frac{I_y^o \sum (x_i I_{xi} - y_i I_{xyi}) + I_{xy}^o \sum (y_i I_{yi} - x_i I_{xyi})}{I_x^o I_y^o - I_{xy}^{o\,2}}$$

Markkun prujun lausekkeet 2,57 auki kirjoitettuna ovat samat lausekkeet.

$$a_y = \frac{I_x^o \sum (y_i I_{yi} - x_i I_{xyi}) + I_{xy}^o \sum (x_i I_{xi} - y_i I_{xyi})}{I_x^o I_y^o - I_{xy}^{o\,2}}$$

Joissa $I_x^o = \sum I_{xi}$ $I_y^o = \sum I_{yi}$ $I_{xy}^o = \sum I_{xyi}$

Suoritetaan laskelmat taulukon avulla

seinä	Vääntök. x_i	y_i	Neliömomentit I_{xi}	I_{yi}	I_{xyi}	Apuna tarvittavia suureita $x_i - a_x$	$^2 * I_{xi}$	$y_i - a_y$	$^2 * I_{yi}$	$(x_i-a_x)(y_i-a_y) * I_{xyi}$
1	0	9	28.83	28.83	0	−6.72	1302	5.51	875.7	0
2	0	−3	9	9	−5.4	−6.72	406	−6.69	402.8	−243
3	21	−3	9	9	5.4	14.28	1856	−6.69	402.8	−516
4	21	+3	9	9	−5.4	14.28	1855	−0.49	2.16	38
Σ			55.83	55.83	−5.4		5498		1683	−721

$$a_x = \frac{55{,}83\,[2*21*9 + 3*5{,}4] + (-5{,}4)[9*28{,}33 - 3*9 - 0]}{55{,}83*55{,}83 - 5{,}4^2} = 6.72\ m$$

$$a_y = \frac{55{,}83\,[+9*28{,}33 - 3*9 - 0] + (-5{,}4)[2*21*9 + 3*5{,}4]}{55{,}83*55{,}83 - 5{,}4^2} = 3.489\ m$$

SEINILLE TULEVAT NORMAALI JÄNNITYKSET σ_{zi}

Jaetaan ulkoisen kuorman rasitukset eri seinille. Vääntö kirjan kaavan 20.13 mukaisesti jolloin saadaan tuloksiksi $\bar{M}_{xi}$; $\bar{M}_{yi}$ ja $\bar{B}_i$ tai lausekkeet (2,36) MT.

$$\bar{\bar{M}}_{xi} = \frac{I_{xy}^o I_{xi} - I_x^o I_{xyi}}{DET}\bar{\bar{M}}_y + \frac{I_y^o I_{xi} - I_{xy}^o I_{xyi}}{DET}\bar{\bar{M}}_x + \frac{I_{xi}(x_i - a_x) - I_{xyi}(y_i - a_y)}{\bar{I}_\omega}\bar{\bar{B}}$$

$$\bar{\bar{M}}_{yi} = \frac{I_x^o I_{yi} - I_{xy}^o I_{xyi}}{DET}\bar{\bar{M}}_y + \frac{I_{xy}^o I_{yi} - I_y^o I_{xyi}}{DET}\bar{\bar{M}}_x + \frac{I_{yi}(y_i - a_y) - I_{xyi}(x_i - a_x)}{\bar{I}_\omega}\bar{\bar{B}}$$

Jossa kokonaissektoriaalinen neliömomentti on (2,29) MT.

$$I_\omega = \sum I_{\omega i} + \sum [(y_i - a_y)^2 I_{yi} + (x_i - a_x)^2 I_{xi} - 2(x_i - a_x)(y_i - a_y) I_{xyi}]$$

ja $DET = I_x^o I_y^o - I_{xy}^{o\,2}$

Tällä kertaa $\underline{DET} = 55{,}83 * 55{,}83 - 5{,}4^2 = \underline{\underline{3088}}$

$\underline{\underline{\bar{I}_\omega}} = 0 + 5498 + 1683 - 2*(-721) = \underline{\underline{8623}}$

Kun kuormituksessa on tuulikuorma y-suuntaan niin $\bar{M}_y = 0$ ja vain $\bar{M}_x$ ja $\bar{B}$ ovat nollasta poikkeavat.

$$\bar{\bar{M}}_{x1} = \frac{55{,}83 * 28{,}83 - 0}{3088}\bar{M}_x + \frac{28{,}83 * (-6.72) - 0}{8623}\bar{B}$$

$$\bar{\bar{M}}_{y1} = \frac{-5{,}4 * 28{,}83 - 0}{3088}\bar{M}_x + \frac{28{,}83 * (-5{,}51) - 0}{8623}\bar{B}$$

$$\bar{\bar{M}}_{x3} = \frac{55{,}83 * 9 + 5.4 * 5.4}{3088}\bar{M}_x + \frac{9 * (14.28) - 5.4 * (-6.49)}{8623}\bar{B}$$

$$\bar{\bar{M}}_{y3} = \frac{-5.4 * 9 - 55{,}83 * 5.4}{3088}\bar{M}_x + \frac{9 * (-6.49) - 5.4 * (14.28)}{8623}\bar{B}$$

① $\underline{\bar{\bar{M}}_{x1} = 0.521\bar{M}_x - 0.022\bar{B}}$ $\qquad \underline{\bar{\bar{M}}_{y1} = -0.050\bar{M}_x + 0.018\bar{B}}$

③ $\underline{\underline{\bar{\bar{M}}_{x3} = 0.172\bar{M}_x + 0.019\bar{B}}}$ $\qquad \underline{\underline{\bar{\bar{M}}_{y3} = -0.113\bar{M}_x - 0.016\bar{B}}}$

Jännitykset lasketaan nyt tavalliseen tapaan, jos x_i, y_i pääkoordinaatisto.

$$\sigma_{zi} = \frac{\bar{\bar{M}}_{xi}}{I_{xi}} * y_i - \frac{\bar{\bar{M}}_{yi}}{I_{yi}} * x_i + \frac{\bar{\bar{B}}}{\bar{I}_\omega} * \omega_i$$

Huomioi, ellei x_i ja y_i ovat paikalliskoordin.

ω_i on osan i paikallinen sektoriaalinen koordinaatti.

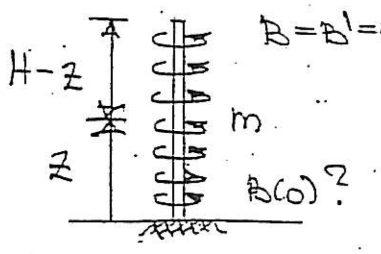
Lasketaan tuulikuorman synnyttämät $\bar{M}_x$ ja $\bar{B}$.

<u>Vääntö</u> D.Y. $\Theta'''' - k^2\Theta'' = \frac{m}{EI_\omega}$ tai $B'' - k^2 B = -m$

jossa $k^2 = \frac{GI_v^0}{EI_\omega}$ $\qquad I_v^0 = \sum I_{vi} = 43.2 + 3 * 0.03 = 43.3\,m^4$

$\underline{\underline{k^2}} = \frac{G\,43.3}{2G * 8623} = \underline{\underline{2.53 \cdot 10^{-3}}}$ $\qquad \underline{\underline{k * H}} = 0.050 * 30 = \underline{\underline{1.509}}$

Jos $kH < 1$ olisi kysymyksessä leikkausvoimavääntö ja tällöin.



Analogia taivutukseen

$$\left.\begin{array}{l} B'' = -m \\ M_t'' = -q \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{B(0) = -\tfrac{1}{2} m H^2}}$$

Tarkastellaan yhdistetyn väännön tehtävää.

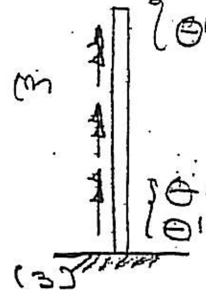
DY $\Theta'''' - k^2\Theta'' = \frac{m}{EI_\omega}$ $\qquad M_B = -EI_\omega\Theta'' \hat{=}$ Bimomentti

yleinen ratkaisu on $\Theta_H = A + Bkz + C\sinh kz + D\cosh kz$

Eräs yksityisratkaisu on $\Theta_y = -\frac{1}{2}\frac{m}{k^2 EI_\omega}z^2$

Ratkaistaan vakiot reunaehdoista

$\begin{cases}\Theta'' = 0 \\ \Theta''' - k^2\Theta' = 0\end{cases}$



$\begin{cases}\Theta = 0 \\ \Theta' = 0\end{cases}$

$\Theta(0) = A + D = 0 \qquad (1)$

$\Theta'(0) = Bk + Ck = 0 \Rightarrow B + C = 0 \qquad (2)$

$\Theta''(H) = Ck^2\sinh kH + Dk^2\cosh kH - \frac{m}{k^2EI_\omega} = 0 \qquad (3)$

$\Theta'''(H) - k^2\Theta' = Ck^3\cosh kH + Dk^3\sinh kH - Bk^3$
$\quad - Ck^3\cosh kH - Dk^3\sinh kH - k^2 * \left(-\frac{mH}{k^2EI_\omega}\right) = 0$

$\Rightarrow Bk^2 = \frac{mH}{kEI_\omega} \qquad Ck^2 = -\frac{mH}{kEI_\omega}$

$(3) \Rightarrow Dk^2 = \left\{\frac{m}{k^2EI_\omega} + \frac{mH}{kEI_\omega} * \sinh kH\right\} / \cosh kH$

$Dk^2 = \frac{m}{k^2EI_\omega\cosh(kH)}\left\{1 + kH * \sinh(kH)\right\}$

Kun vain $M_B(0)$ kiinnostaa ja se on $M_B(0) = -EI_\omega\Theta''(0)$

$M_B(0) = \left[Ck^2\overset{0}{\cancel{\sinh(0)}} + Dk^2\overset{1}{\cancel{\cosh(0)}} - \frac{m}{k^2EI_\omega}\right] * (-EI_\omega)$

$M_B(0) = \frac{-m}{k^2\cosh(kH)}\left\{1 + kH\sinh(kH) - \cosh(kH)\right\}$

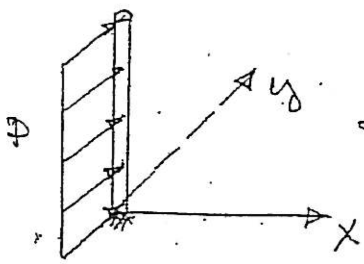
Nyt $m = 300 \quad H = 30 \quad k^2 = 2{,}53\cdot10^{-3} \quad kH = 1{,}509$

$M_B(0) = \frac{-300 * 1000}{2{,}53 * 2{,}3716}\left\{1 + 1{,}509 \times 2.1505 - 2{,}3716\right\}$

Bimomentti tyvellä on siis $\underline{\underline{\bar{B}(0) = -93667}}$

Leikkausvoimavääntöteorilla se on $\underline{\underline{-135\,000}}$

Taivutus :



$$M_x(0) = -\tfrac{1}{2} p H^2 \qquad M_y(0) = 0$$

Tuulikuorma : $p = L * q_f = 39 * 1$ kN/m

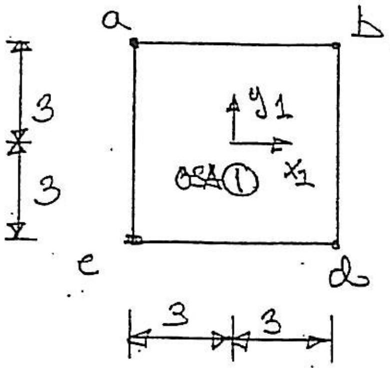
$$m = p * d = 39 * 7.68 = 300 \ \frac{kNm}{m}$$

jossa $d = 0.6 * 39 - (9 + 6.72) = 7.68$ m

Perustustasossa kuormitus on siis
$$\begin{cases} M_x(0) = -17550 \text{ kNm} \\ M_y(0) = 0 \\ B(0) = -93667 \text{ kNm}^2 \end{cases}$$

Seinän ① jännitysjakautuma :

$$\begin{cases} \bar{\bar{M}}_{x_1} = 0.521 * (-17550) - 0.022 * (-93667) = -7083 \\ \bar{\bar{M}}_{y_1} = -0.050 * (-17550) + 0.018 * (-93667) = -808 \end{cases}$$

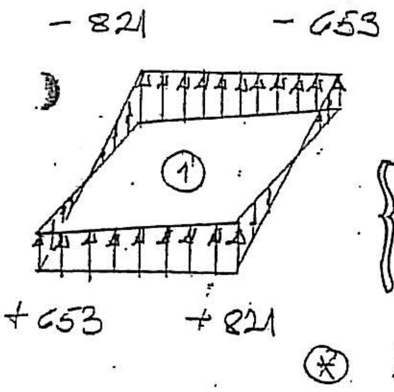


$$\sigma_{z1} = \frac{\bar{\bar{M}}_{x1}}{I_{x_1}} * y_1 - \frac{\bar{\bar{M}}_{y1}}{I_{y_1}} * x_1 + \cancel{\frac{\bar{\bar{B}}}{I_\omega} * \omega_1}^{\,0}$$

$$\sigma_{z1} = -246 * y_1 - 28 * x_1$$

$\sigma_{za} = -821 \qquad \sigma_{zb} = -653$

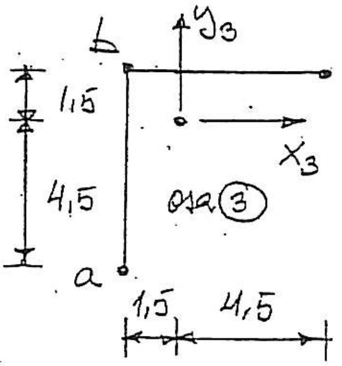
$\sigma_{zc} = +653 \qquad \sigma_{zd} = +821$



seinän ③ jännitysjakautuma :

$$\begin{cases} \bar{\bar{M}}_{x_3} = 0.172 * (-17650) + 0.019 * (-93667) = -4798 \\ \bar{\bar{M}}_{y_3} = -0.113 * (-17550) - 0.016 * (-93667) = 3482 \end{cases}$$

(*) $$\sigma_{z3} = \frac{I_{y3}\bar{\bar{M}}_{x3} + I_{xy3}\bar{\bar{M}}_{y3}}{I_{x3}I_{y3} - I_{xy3}^2} * y_3 - \frac{I_{x3}\bar{\bar{M}}_{y3} + I_{xy3}\bar{\bar{M}}_{x3}}{I_{x3}I_{y3} - I_{xy3}^2} * x_3 + \cancel{\frac{\bar{\bar{B}}}{I_\omega}}^{\,0} \omega_3$$

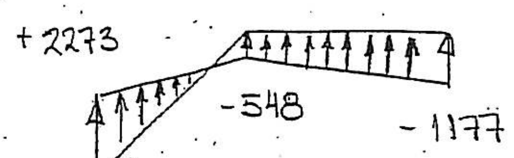


$$\Rightarrow \sigma_{z3} = -470 * y_3 - 105 * x_3$$

$\sigma_{za} = 2273$

$\sigma_{zb} = -548$

$\sigma_{zc} = -1177$



(*) Huomaa että $x_3 y_3$ ei ole paikallinen päakoordinaatisto joten pitää käyttää tätä pitempää kaavaa (katso perusteet)

Lasketaan sama vääntökiijän lausekkeella (20.12) $\boxed{2.32\ M}$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zi} = \frac{I_y^0 \bar{\bar{M}}_x + I_{xy}^0 \bar{\bar{M}}_y}{I_x^0 I_y^0 - I_{xy}^{0\,2}}(y - y_{oi}) - \frac{I_x^0 \bar{\bar{M}}_y + I_{xy}^0 \bar{\bar{M}}_x}{I_x^0 I_y^0 - I_{xy}^{0\,2}}(x - x_{oi}) + \frac{\bar{\bar{B}} \cdot \bar{\omega}_i}{\bar{\bar{I}}_\omega}$$

jossa $\bar{\omega}_i$ on osan (i) keskimääräinen sektoriaalinen koordinaatti

Tässä tehtävässä kun $\bar{\bar{M}}_y = 0$ ja $x - x_{oi} = x_i$ $y - y_{oi} = y_i$

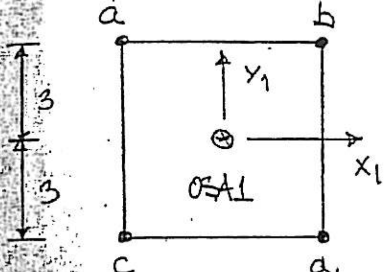
$$\bar{\bar{\sigma}}_{zi} = \frac{5583}{3088}\bar{\bar{M}}_x * y_i - \frac{-5.4}{3088}\bar{\bar{M}}_x * x_i + \frac{\bar{\bar{B}}}{8623} * \bar{\omega}_i$$

$$\underline{\sigma_{zi} = -317 * y_i - 30.7 * x_i - 10.86 * \bar{\omega}_i}$$

keskimääräinen sektoriaalinen koordinaatti $\bar{\omega}_i$ on

$$\bar{\omega}_i = (y - y_{oi})(x_i - a_x) - (x - x_{oi})(y_i - a_y) + \omega_i(x_i, y_i)$$

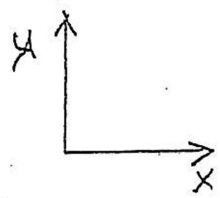
Osa (1) $\quad \bar{\omega}_1 = (y - 9)(0 - 6.72) - (x - 0)(9 - 3.49) + 0$



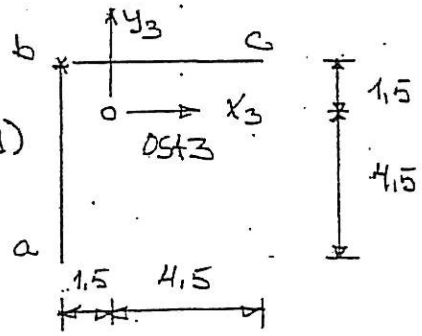
Tarkastellaan nurkat a → d

a	$\bar{\omega}_{1a}$ = $3*(-6.72) - (-3)(5.51)$	=	-3.63
b	ω_{1b} = $3*(-6.72) - (3)(5.51)$	=	-36.69
c	ω_{1c} = $-3*(-6.72) - (-3)(5.51)$	=	$+36.69$
d	ω_{1d} = $-3*(-6.72) - (3)(5.51)$	=	$+3.63$

VK ⊛



Osa (3) $\quad \bar{\omega}_3 = (y + 4.5)(21 - 6.72) - (x - 22.5)(-3 - 3.49)$
$+ 0$



a $\quad \bar{\omega}_{3a} = (-4.5)(14.28) + (1.5)(-6.49) = -74.0$

b $\quad \bar{\omega}_{3b} = (1.5)(14.28) + (1.5)(-6.49) = +11.7$

c $\quad \bar{\omega}_{3c} = (1.5)(14.28) - (4.5)(-6.49) = +50.6$

Taivutuksesta syntyvät jännitykset:

Osa (1)

a = −859
b = −1043
c = + 1043
d = + 859

Osa (3)

a = 1473
b = −429
c = −614

Bimomentin aiheuttamat jännitykset.

osa ①

$a = -10{,}83 * (-3{,}63) = 39{,}3$

$b = -10{,}83 * (-36{,}69) = 397$

$c = -10{,}83 * (+36{,}69) = -397$

$d = -10{,}83 * (+3{,}63) = -39{,}3$

osa ③

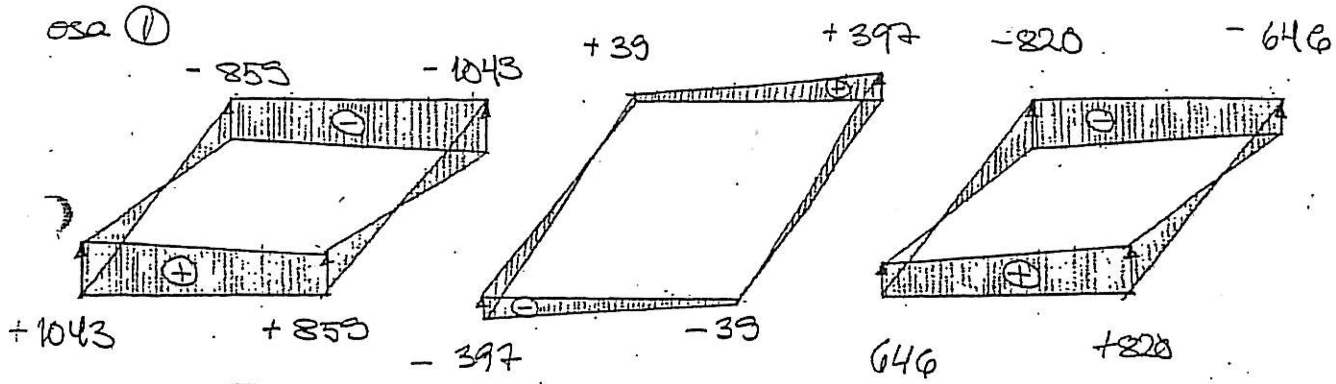
$a = 801$

$b = -127$

$c = -548$

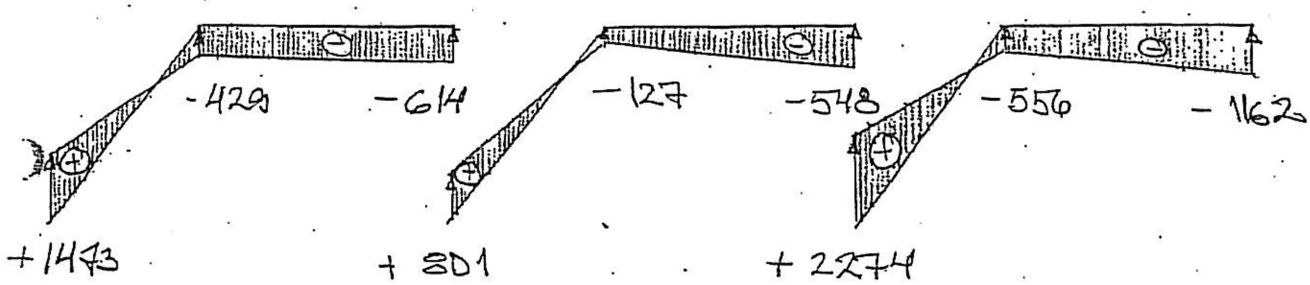
Jännitykset ovat kokonaisuudessaan:

osa ①



taivutus   vääntö (B)   kokonaisjännitys.

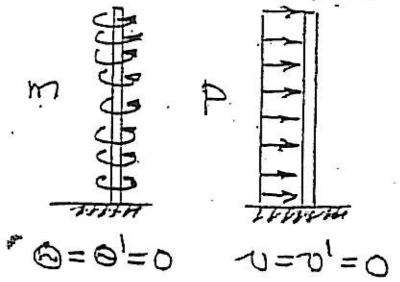
osa ③



taivutus   vääntö (B)   kokonisjännitys.

Kummallakin tavalla laskien saadaan samat tulokset.

Rakennuksen kiertymä ja nurkan siirtymä δ_A.



Nyt jos kysymyksessä oli leikkausvoima-vääntö käytetään hyväksi analogiaa taivutukseen.

$$v(H) = \frac{pH^4}{8EI} \qquad \Theta(H) = \frac{mH^4}{8EI_\omega}$$

$$\Theta(H) = \frac{mH^4}{8EI_\omega} = \frac{300*30^4}{8*3*10^7*8623} = 117*10^{-6}$$

Taivutus on hieman hankalampi sillä xy-koordinaatisto ei ole pääkoordinaatisto sillä $I_{xy} \neq 0$.

Vääntökirjan mukaan 20.20

$$\begin{cases} EI_y^\circ v_x'''' + EI_{xy}^\circ v_y'''' = p_x = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x'''' = -\dfrac{EI_{xy}^\circ}{EI_y^\circ} v_y'''' \\ EI_{xy}^\circ v_x'''' + EI_x^\circ v_y'''' = p_y = p \qquad \leftarrow \text{sijoitetaan} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E\left[I_x^\circ - \frac{{I_{xy}^\circ}^2}{I_y^\circ}\right] v_y'''' = p \qquad \text{jos merkitään } I \triangleq \frac{I_x^\circ I_y^\circ - {I_{xy}^\circ}^2}{I_y^\circ}$$

saadaan tavallinen dy $EI v_y'''' = p$ jolloin rakennuksen huipulla saadaan vääntökeskiön y suuntaiseksi taipumaksi

$$v_y(H) = \frac{p*I_y^\circ*H^4}{8*[I_x^\circ I_y^\circ - {I_{xy}^\circ}^2]E} = \frac{39*55.83*30^4}{8*3*10^7[55.83^2 - 5.4^2]}$$

$$v_y(H) = 2.38\,mm$$

Nurkan siirtymä δ_A

$$\delta_A = v_y + \Theta(H)*r$$

$$\delta_A = 2.38 + 0.117*23.28 = 2.38 + 2.73$$

$$\delta_A = 5.11\,mm$$

Lasketaan rakenteen kiertymä yhdistetyllä teorialla

$$\Theta(H) = A + B\,kH + C\sinh kH + D\cosh kH - \frac{1}{2}\frac{m}{k^4 EI_\omega}(kH)^2$$

jossa $D = -A = \dfrac{m}{k^4 EI_\omega} * \left[\dfrac{1 + kH\sinh kH}{\cosh kH}\right]$

$$B = -C = \frac{m}{k^4 EI_\omega} * (kH)$$

ja nyt $kH = 1.509$ $\sinh kH = 2.1505$ $\cosh kH = 2.3716$

sekä $\dfrac{m}{EI_\omega kH} = \dfrac{300}{3\cdot 10^7 \cdot 8623 \cdot (2.53\cdot 10^{-3})^2} = 181.2\cdot 10^{-6}$

$\tilde{A} = -1.790$ $\tilde{B} = 1.509$ $\tilde{C} = -1.509$ $\tilde{D} = 1.790$

$$\Theta(H) = 181.18\cdot 10^{-6} * \left\{-1.790 + 1.509 * 1.509 - 1.509 * 2.1505 + 1.790 * 2.3716 - \frac{1.509^2}{2}\right\}$$

$$\Theta(H) = 181.18\cdot 10^{-6} * \{348.56\cdot 10^{-3}\} = 63.15\cdot 10^{-6} \rightarrow \delta_H = 3.85\,\text{mm}$$

yhteensä:

yhdistetty teoria $B(0) = -93667$ kNm^2

$\Theta(H) = 63.2 * 10^{-6}$

leikkausvoimavääntö $B(0) = 135000$ kNm^2

teoriankäyttö ei sallittu $\Theta(H) = 117\cdot 10^{-6}$

tällä alueella

Bimomentin tukiarvon lauseke oli

$$B(0) = -mH^2 * \left[\frac{1 + kH\sinh kH - \cosh kH}{(kH)^2\cosh kH}\right]$$

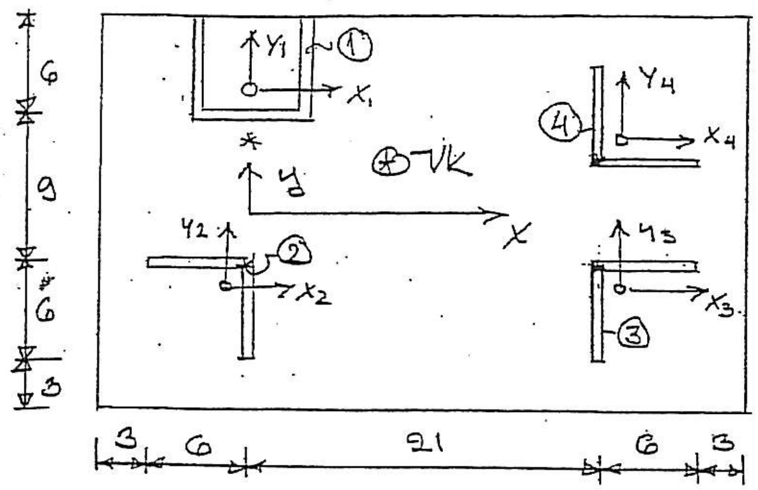
kehitetään $\sinh kH$ ja $\cosh kH$ sarjoiksi jolloin

$$B(0) = -mH^2 * \left\{\frac{1 + (kH)[kH + (kH)^3/3! + (kH)^5/5! \ldots] - [1 + (kH)^2/2! + (kH)^4/4! \ldots]}{(kH)^2[1 + (kH)^2/2! + (kH)^4/4! + \ldots]}\right\}$$

$$B(0) = -\frac{1}{2}mH^2 * \left\{1 - \frac{1}{4}(kH)^2 + \frac{7}{72}(kH)^4 + \ldots\right\}$$

Jos $kH < 1$ niin $B(0) \rightarrow -\frac{1}{2}mH^2$ eli leikkausvoimaväännön mukaista lauseketta.

Entäpä jos kotelon ulkoseinä puuttuukin?



Merkinnät:

o pintakeskiö * vääntökeskiö

x_{oi} pintakeskiö koordinaatti

x_i vääntökeskiö —"—

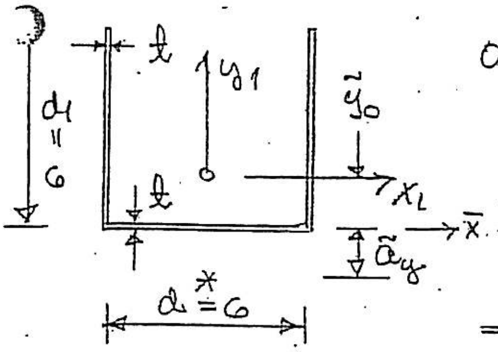
a_x kokorakenteen vk-koord.

Edellä lasketuin ⊾ kappaleille poikkileikkaussuureet

$I_{xi} = I_{yi} = 9 \quad I_{vi} = 0.032$

$I_{xy2} = I_{xy4} = -5.4 \quad I_{xy3} = 5.4$

$I_{\omega i} \equiv 0$



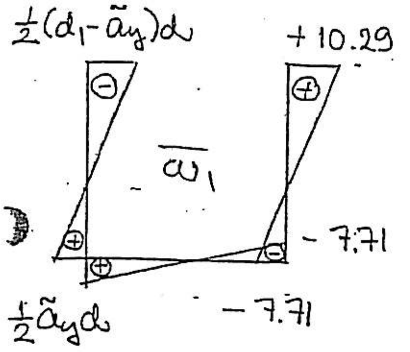
OSAN ① pintasuureet (vääntökirja s 75 Es 1

$$\tilde{a}_y = \frac{d_1}{2 + \frac{d * t}{3 * d_1 * t_1}} = \frac{6}{2 + \frac{1}{3}} = 2.571 \text{ m}$$

$$\tilde{y}_o = \frac{S_{\bar{x}}}{A} = \frac{2 * 6 * t * 3}{3 * 6 * t} = 2.000 \text{ m}$$

$$I_{x_1} = \frac{2 * t * 6^3}{12} + (6t) * 2^2 + (12t) * 1^2 = 14.40$$

$$I_{y_1} = \frac{t * 6^3}{12} + (12t) * 3^2 = 25.20$$



$$I_{\omega_1} = \tilde{a}_y^2 I_{x_1} + \frac{1}{6}(d_1 - 3\tilde{a}_y) d^2 d_1^2 t_1$$

$$I_{\omega_1} = 2.571^2 * 14.40 + \frac{1}{6}(6 - 3 * 2.571) 6^2 * 6^2 * 0.2 = 21.18$$

$I_{xy_1} = 0$ sym. $\quad I_{V1} = \frac{1}{3} * t^3 * 18 = 0{,}048$

Laskelmataulukko on nyt

OSA	VÄÄNTÖK.		NELIÖMOMENTIT			Apuna tarvittavia suureita				
	x_i	y_i	I_{xi}	I_{yi}	I_{xyi}	$x_i - a_x$	$(\;)^2 * I_{xi}$	$y_i - a_y$	$(\;)^2 * I_{xi}$	$(x_i - a_x)(y_i - a_y) * I_{xyi}$
1	0	3.43	14.40	25.20	0	-9.50	1299.6	3.27	269.5	0
2	0	-3	9	9	-5.4	-9.50	812.3	-3.16	89.9	-162.1
3	21	-3	9	9	+5.4	11.50	1190.3	-3.16	89.9	-196.2
4	21	+3	9	9	-5.4	11.50	1190.3	-3.16	89.9	+196.2
			41.40	52.20	-5.4		4871		539	-162.1

Vääntökeskiö koordinaatit kaavalle 20.5'. Nyt saadaan

$$a_x = \frac{52.2*[2*21*9+3*5.4]+(-5.4)[3.43*25.2-3*9-0]}{41.40*52.20-5.4^2} = 9.50\,m$$

$$a_y = \frac{41.40*[3.43*25.2-3*9-0]+(-5.4)[2*21*9+3*5.4]}{41.40*52.20-5.40^2} = 0.16\,m$$

Jaetaan kuorma seinille ① ja ③ kaavan 20.13. mukaisesti. Nyt

$$DET = 41.4*52.2-5.4^2 = 2132$$

$$I_\omega = 21.18+4871+539-2*(-162.1) = 5755$$

$$\bar{\bar{M}}_{x1} = \frac{52.2*14.4-0}{2132}\bar{\bar{M}}_x + \frac{14.4*(-9.5)-0}{5755}\bar{\bar{B}} = 0.353\bar{\bar{M}}_x - 0.024\bar{\bar{B}}$$

$$\bar{\bar{M}}_{y1} = \frac{-5.4*25.2-0}{2132}\bar{\bar{M}}_x + \frac{25.2*(3.27)-0}{5755}\bar{\bar{B}} = -0.062\bar{\bar{M}}_x + 0.014\bar{\bar{B}}$$

$$\bar{\bar{M}}_{x3} = \frac{52.2*9+5.4*5.4}{2132}\bar{\bar{M}}_x + \frac{9*11.5+5.4*3.16}{5755}\bar{\bar{B}} = 0.234\bar{\bar{M}}_x + 0.021\bar{\bar{B}}$$

$$\bar{\bar{M}}_{y3} = \frac{-5.4*9-52.2*5.4}{2132}\bar{\bar{M}}_x + \frac{9*(-3.16)-5.4*11.5}{5755}\bar{\bar{B}} = -0.165\bar{\bar{M}}_x - 0.016\bar{\bar{B}}$$

Perustustasossa:

$$\bar{\bar{M}}_x = -\frac{1}{2}p*H^2 = -\frac{1}{2}*39*30^2 = -17\,550\ kNm$$

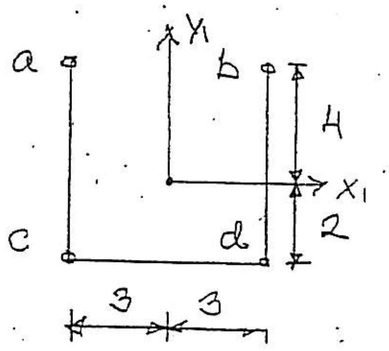
$$r = 0.6*39-9-9.5 \qquad \bar{\bar{B}} = -\frac{1}{2}m*H^2 = -\frac{1}{2}*39*r*30^2 = -85995\ kNm^2$$

$$\bar{\bar{M}}_{x1} = -4132\ kNm \qquad \bar{\bar{M}}_{x3} = -5913\ kNm$$

$$\bar{\bar{M}}_{y1} = -116\ kNm \qquad \bar{\bar{M}}_{y3} = 4096\ kNm$$

OSA ① jännitykset

$$\sigma_{z①} = \frac{\bar{\bar{M}}_x}{I_{x1}}*y_1 - \frac{\bar{\bar{M}}_y}{I_{y1}}*x_1 + \frac{\bar{\bar{B}}}{I_\omega}*\omega_1(x,y)$$



Taivutus: $\sigma^t_{z1} = -287*y_1 + 4.6*x_1$

Vääntö (B): $\sigma^v_{z1} = -14.9*\omega_1(x,y)$

$$\sigma_{za} = -287*4+4.6*(-3)-14.9*(-10.3) = -1008$$

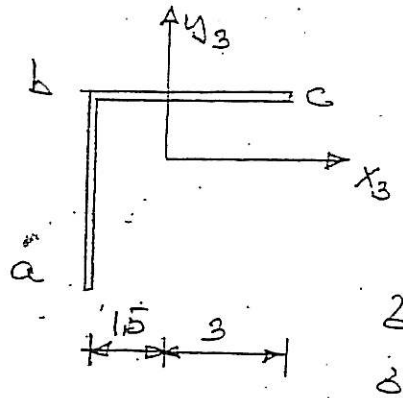
$$\sigma_{zc} = -287*(-2)+4.6*(-3)-14.9*(+7.7) = 445$$

$$\sigma_{zd} = -287*(-2)+4.6*(3)-14.9*(-7.7) = 702$$

$$\sigma_{zb} = -287*4+4.6*3-14.9*10.3 = -1287$$

Osa ③ Jännitykset

Huomaa että $x_3 y_3$ ei ole pääkoordinaatisto.



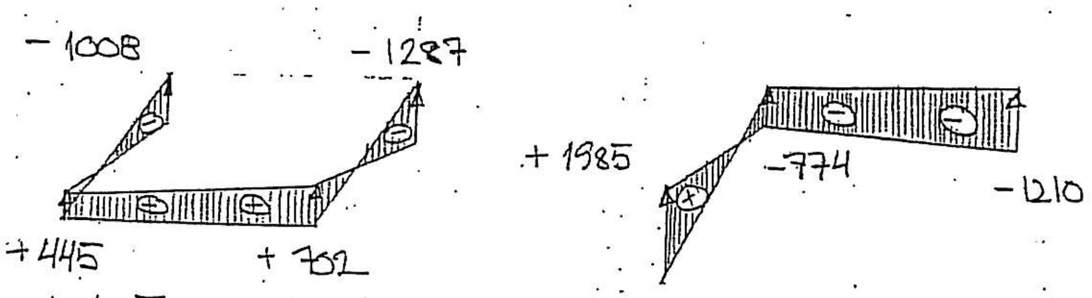
$$\sigma_{z3} = \frac{I_{y3}\bar{M}_{x3} + I_{yx3}\bar{M}_{y3}}{I_{x3}I_{y3} - I_{yx3}^2} * y_3 - \frac{I_{x3}\bar{M}_{y3} + I_{xy3}\bar{M}_{x3}}{I_{x3}I_{y3} - I_{xy3}^2} * x_3 + \frac{\bar{\bar{B}}}{\bar{\bar{I}}_\omega} * \omega_3$$

$$\underline{\underline{\sigma_{z3} = -613 * y_3 - 97 * x_3 + 0}}$$

$$\sigma_{za} = -613*(-3.0) - 97*(-1,5) = 1985$$

$$\sigma_{zb} = -613*(1,5) - 97*(-1,5) = -774$$

$$\sigma_{zc} = -613*(1,5) - 97*(3,0) = -1210$$



taivutus + vääntö

Rakennoksen nurkan siirtymä ja kiertymä

Kysymyksessä on edelleen leikkausvoimavääntö sillä

$$k^2 = \frac{GI_v}{EI_\omega} = \frac{0.048 + 3*0.032}{2*5755} = 12.5*10^{-6} \qquad \underline{\underline{k*H = 0.106 \ll 1}}$$

Kiertymä $\underline{\underline{\Theta(H)}} = \dfrac{mH^4}{8EI_\omega} = \dfrac{39*4.9*30^4}{8*3*10^7*5755} = \underline{\underline{112*10^{-6}}}$

Huomio kiertymä pieneni joten antenni voidaan asentaa.

<u>vääntökeskiön taipuma</u> $v_y(H) = \dfrac{p*I_y^\circ*H^4}{8*E*[I_x^\circ I_y^\circ - I_{xy}^{\circ 2}]}$

$$v_y(H) = \frac{39*52.2*30^4}{8*3\cdot10^7[52.2*42.4 - 5.4^2]} \Rightarrow \underline{\underline{v_y(H) = 3.15\ \text{mm}}}$$

<u>Nurkan siirtymä:</u>

$$\delta_A = v_y(H) + \Theta(H)*r$$

$$\delta_A = 3.15 + 0.122*19.5 = 3.15 + 2.38$$

$$\underline{\underline{\delta_A = 5.52\ \text{mm}}}$$