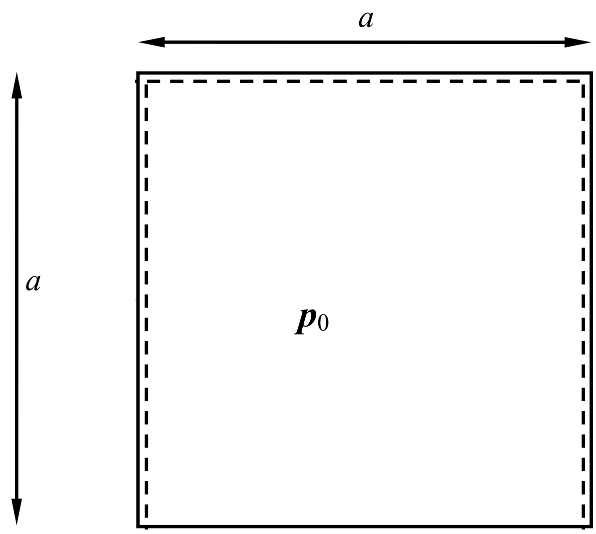
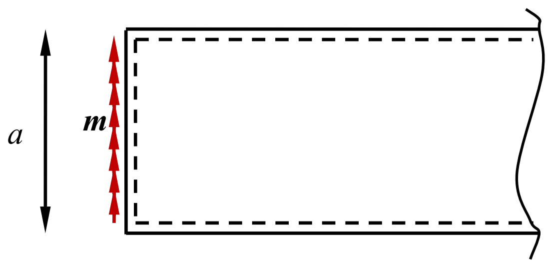


1. Neliölaatta on kolmesta sivustaan vapaasti tuettu (niveltuettu) ja yhdestä sivustaan vapaa. Määritä taipuman lauseke $w(x, y)$

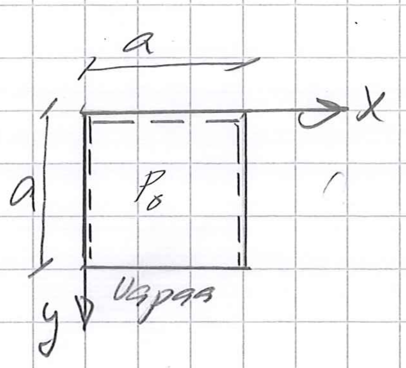


Ylimääräinen tehtävä

2. Kuvan puoliääretön laattakaista on reunoiltaan niveltuettu. Laatan lyhyen sivun niveltuelle vaikuttaa vakio taivutusmomentti m. Laske laatan taipuma ja piirrä laatan keskikohdan taipumasta kuvaaja.

T1

Levyn ratkaisu



$$w(x,y) = \sum_{1,3,5} \left[(A_n + B_n \alpha_n y)\cosh \alpha_n y + \right.$$

$$\left. + (C_n + D_n \alpha_n y)\sinh \alpha_n y + \Phi_n \right] \sin \alpha_n x$$

Symmetrian vuoksi: vain parittomat termit

$\Phi_n = \dfrac{4 p_0 a^4}{n^5 \pi^5 D}$ $\quad n = 1,3,5$

$\Phi_n = 0$ $\quad n = 2,4,6$

RE ① $w(x,0) = 0$ ② $M_y(x,0) = 0$

korvikeleikkausvoima

③ $V_y(x,a) = 0$ ④ $M_y(x,a) = 0$

① $w(x,0) = 0 \Rightarrow w(x,0) \overset{y=0}{=} \sum_{1,3,5} \left[(A_n + B_n \alpha_n \cdot 0)\overbrace{\cosh \alpha_n 0}^{=1} + \right.$

$$\left. + (C_n + D_n \alpha_n \cdot 0)\underbrace{\sinh \alpha_n 0}_{=0} + \Phi_n \right] \sin \alpha_n x = 0$$

$\Rightarrow A_n + \Phi_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_n = -\Phi_n$

② $M_y = -D(\nu w_{,xx} + w_{,yy}) = 0 \Leftrightarrow \nu w_{,xx} + w_{,yy} = 0$

$w_{,xx}(x,0) = 0$ koska $w(x,0) \equiv 0$

$\Rightarrow w_{,yy} = 0$ (9.14)

$w_{,yy}(x,0) = \sum \alpha_n^2 \left[(A_n + 2D_n + B_n \alpha_n \cdot 0) \cdot 1 + (C_n + 2B_n + D_n \alpha_n \cdot 0) \cdot 0\right] \sin \alpha_n x$

$\Rightarrow A_n + 2D_n = 0 \quad (\Phi_{n,yy} = 0)$

$D_n = -A_n / 2$

4)

② $M_y(x,a)=0 \Leftrightarrow \nu w_{,xx}(x,a)+w_{,yy}(x,a)=0$

$w_{,xx}(x,a) = -\sum[(A_n+B_n\alpha_n a)\cosh\alpha_n a+(C_n+D_n\alpha_n a)\sinh\alpha_n a+Q_n]\,\alpha_n^2\sin\alpha_n x$

$w_{,yy}(x,a)=\alpha_n^2[(A_n+2D_n+B_n\alpha_n a)\cosh\alpha_n a+(C_n+2B_n+D_n\alpha_n a)\sinh\alpha_n a]\sin\alpha_n x$

$\Rightarrow -\nu(A_n+B_n\alpha_n a\cosh\alpha_n a+(C_n+D_n\alpha_n a)\sinh\alpha_n a+Q_n)+$

$+((A_n+2D_n+B_n\alpha_n a)\cosh\alpha_n a+(C_n+2B_n+D_n\alpha_n a)\sinh\alpha_n a)=0 \quad n=1,3,5$

kosutkelikkausoma

③ $V_y(x,a)=0 \Rightarrow w_{,yyy}(x,a)+2(1-\nu)w_{,xxy}(x,a)=0$

$w_{,xxy}=-\sum_{1,3}^{2}[(A_n+B_n\alpha_n a)\alpha_n\sinh\alpha_n a+B_n\alpha_n\cosh\alpha_n a+$

$+(C_n+D_n\alpha_n a)\alpha_n\cosh\alpha_n a+D_n\alpha_n\sinh\alpha_n a]\alpha_n^2\sin\alpha_n x=0$

$\Rightarrow (A_n+B_n\alpha_n a)\alpha_n\sinh\alpha_n a+B_n\alpha_n\cosh\alpha_n a+$

$+(C_n+D_n\alpha_n a)\alpha_n\cosh\alpha_n a+D_n\alpha_n\sinh\alpha_n a=0$

(9.15)

$w_{,yyy}(x,a)=\sum\alpha_n^3[(A_n+3D_n+B_n\alpha_n a)\sinh\alpha_n a+$

$+(C_n+3B_n+D_n\alpha_n a)\cosh\alpha_n a$

$\Rightarrow w_{,yyy}(x,a)+2(1-\nu)w_{,xxy}(x,a)=0$

$2(1-\nu)[(A_n+B_n\alpha_n a)\alpha_n^3\sinh\alpha_n a+B_n\alpha_n^3\cosh\alpha_n a+$

$+(C_n+D_n\alpha_n a)\alpha_n^3\cosh\alpha_n a+D_n\alpha_n^3\sinh\alpha_n a]+$

$+\alpha_n^3[(A_n+3D_n+B_n\alpha_n a)\sinh\alpha_n a+$

$+(C_n+3B_n+D_n\alpha_n a)\cosh\alpha_n a]=0$

$A_n=-Q_n$

$D_n=-A_n/2=+Q_n/2$

④ $M_y(x,a)=0$

$$(-\nu\alpha_n a\cosh\alpha_n a + \alpha_n a\cosh\alpha_n a + 2\sinh\alpha_n a)B_n +$$
$$(\nu\sinh\alpha_n a + \sinh\alpha_n a)C_n = g_n$$

$$g_n = \Big[-\nu\cosh\alpha_n a + \frac{\nu}{2}\alpha_n a\sinh\alpha_n a + \nu +$$
$$+ \cancel{\cosh\alpha_n a} - \cancel{\cosh\alpha_n a} - \alpha_n a\sinh\alpha_n a\Big]Q_n$$

③ $V_y(x,a)=0$

$$\Big[\overset{2-2\nu}{2(1-\nu)}(\alpha_n^4 a\sinh\alpha_n a + \alpha_n^3\cosh\alpha_n a) + \alpha_n^4 a\sinh\alpha_n a + 3\alpha_n^3\cosh\alpha_n a\Big]B_n +$$
$$+\Big[\overset{2-2\nu}{2(1-\nu)}\alpha_n^3\cosh\alpha_n a + \alpha^3\cosh\alpha_n a\Big]C_n = h_n$$

$-1+\nu$

$-(1-\nu) - 1/2$

$-(2-2\nu)\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

$$h_n = \overset{2-2\nu}{2(1-\nu)}\Big[\alpha_n^3\sinh\alpha_n a - \frac{1}{2}\alpha_n^4 a\cosh\alpha_n a - \frac{1}{2}\alpha_n^3\sinh\alpha_n a\Big] +$$
$$+ \alpha_n^3\sinh\alpha_n a - \frac{3}{2}\alpha_n^3\sinh\alpha_n a - \frac{1}{2}\alpha_n^4 a\cosh\alpha_n a$$

$$\begin{bmatrix} (1-\nu)\alpha_n a\cosh\alpha_n a + 2\sinh\alpha_n a & (1-\nu)\sinh\alpha_n a \\ (3-2\nu)\alpha_n^4 a\sinh\alpha_n a + (5-2\nu)\alpha^3\cosh\alpha_n a & (3-2\nu)\cosh\alpha_n a \end{bmatrix}\begin{pmatrix} B_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_n \\ h_n \end{pmatrix}$$

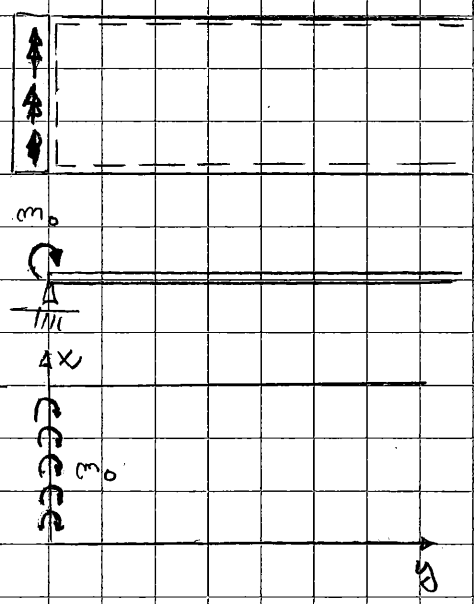
$$h_n = \Big[-\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\alpha_3^3\sinh\alpha_n a + \left(-\frac{5}{2}+\nu\right)\alpha_n^4 a\cosh\alpha_n a\Big]Q_n$$

$$g_n = \Big[\nu + \left(\frac{\nu}{2}-1\right)\sinh\alpha_n a - \nu\cosh\alpha_n a\Big]Q_n$$

$\Rightarrow$ ratkaistaan B_n ja C_n ... kullakin ännän n = 1,3,5,7,...

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow \alpha_n a = n\pi$$

Oheista laattakaistaa kuormittaa sen lyhyessä niveltuetussa päädyssä vaikuttava taivutusmomentti m_0. Ratkaistaan laatan taipuma.



Ratkaisu:

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\sin\alpha_n x \;;\quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}$$

kun kuormafunktio $q(x,y) \equiv 0$ riittää homogeenisen yhtälön ratkaisu koko tehtävän ratkaisuksi.

$$\therefore\; w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n\alpha_n y)\, e^{-\alpha_n y}\sin\alpha_n x$$

Vakiot ratkaistaan reunaehdoista

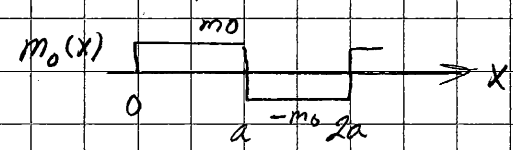
$w(x,0) = 0$ ja $M_y = -D(\nu w_{,xx} + w_{,yy}) = m_0$ $\quad w_{,xx}(x,0) = 0$

$$w_{,yy}(x,0) = -2\sum_{n=1}^{\infty} B_n\alpha_n^2 \sin\alpha_n x$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(A_n + 0)\cdot 1\cdot \sin\alpha_n x = 0 \;\Rightarrow\; A_n = 0$$

$$\rightarrow -D\cdot\sum \alpha_n^2 B_n(0 - 2 + 0)\cdot 1\cdot \sin\alpha_n x = m_0(x) = \frac{4m_0}{a}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\sin\alpha_n x$$

$$\rightarrow B_n = +\frac{2m_0}{Da}\frac{1}{\alpha_n^3}$$



$$\therefore\; w(x,y) = \frac{2m_0}{Da}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\alpha_n y}{\alpha_n^3}e^{-\alpha_n y}\sin\frac{n\pi x}{a}$$