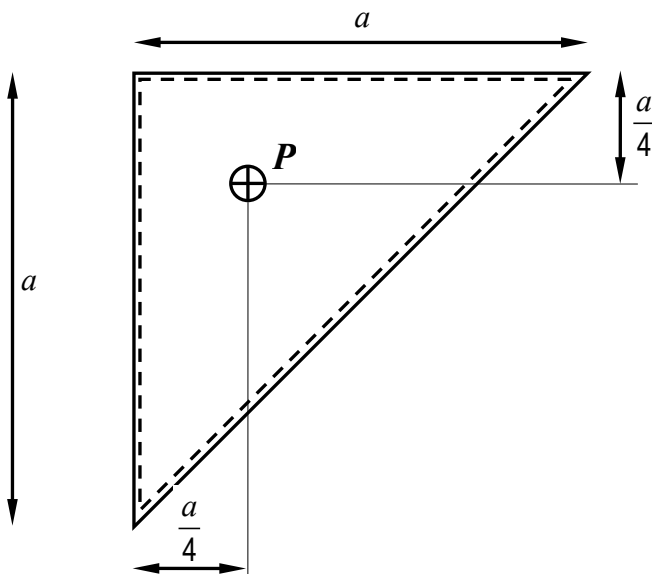
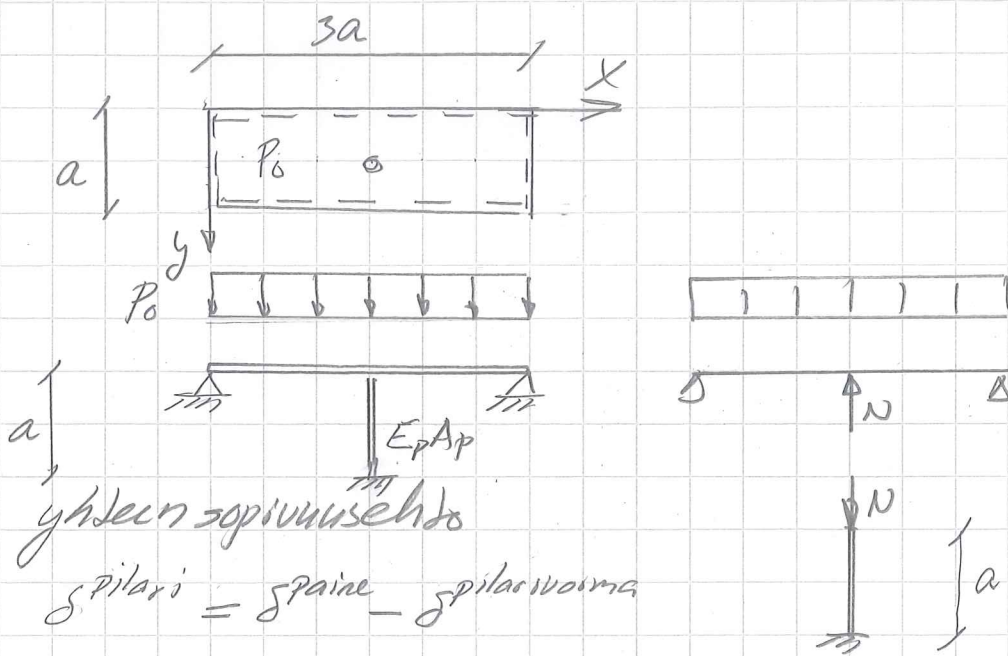


1. Vapaasti tuettuun suorakaidelaattaan, joka on tuettu myös pilarilla, kohdistuu tasainen kuorma p_0 . Määritä pilarin puristusvoima P sekä laatan taipuma $w(x, y)$. Laatan taivutusjäykkyys on D .



2. Kolmiolaattaan, joka kaikki reunat on niveltuettuja, vaikuttaa pistevoima P . Määritä kolmiolaatan kuormituspisteen taipuma. Hyödynnä pistevoiman Navierin ratkaisua. Täydennä kolmiolaatta neliölaataksi ja anna kuormaksi anti-metrinen pistekuormitus



yhteisen sopivuusehto

$$\sigma_{\text{pilarin}} = \sigma_{\text{paine}} - \sigma_{\text{pilarivoima}}$$

Pilarin siirtymä

$$\sigma_{\text{pilarin}} = \frac{Na}{E_p A_p}$$

Laatan keskipisteen siirtymä paineesta

$$\sigma_{\text{paine}} = w_p(1,5a; 0,5a)$$

Laatan siirtymä pilarin tulireaktiosta

$$\sigma_{\text{pilarivoima}} = w_N(1,5a; 0,5a) \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a} \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}$$

$$w_p(x, y) = \frac{16 P_0}{\pi^6 D} \sum_{1,3} \sum_{1,3} \frac{\sin \alpha_m x \sin \beta_n y}{m n \left[\left(\frac{m}{3a} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right]^2} \quad \begin{matrix} x=1,5a \\ y=0,5a \end{matrix}$$

$$w_N(x, y) = \frac{4N}{\pi^4 D 3a^2} \sum_{1,3} \sum_{1,3} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{\left[\left(\frac{m}{3a} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right]^2} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y$$

$$u = 1,5a$$

$$v = 0,5a$$

$$w_N = N \bar{w}_N$$

$$\sigma_{\text{pilarin}} = \sigma_{\text{paine}} - \sigma_{\text{pilarivoima}} \Rightarrow$$

$$\frac{Na}{E_p A_p} = w_p(1,5a; 0,5a) - N \bar{w}_N(1,5a; 0,5a)$$

$$N = \frac{w_p(1,5a; 0,5a)}{\frac{a}{E_p A_p} + \bar{w}_N(1,5a; 0,5a)}$$

$$\sin \frac{m\pi}{2} = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} = -(-1)^{\frac{m+n}{2}}$$

$$\sin \frac{2m\pi}{2} = 1$$

$$N = \frac{\frac{16P_0 a^4}{\pi^6 D} \sum_{1,3,5} \sum_{1,3,5} \frac{-(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{mn[m^2/9 + n^2]^2}}{\frac{a}{E_{AP}} + \frac{4a^2}{3\pi^4 D} \sum_{1,3,5} \sum_{1,3,5} \left[\frac{m^2}{9} + n^2 \right]^2}$$

Koko rakenteen taipumas

$$w(x,y) = w_0(x,y) - N \bar{w}_0(x,y)$$

$$f_{mn} = \left[\frac{m^2}{9} + n^2 \right]^2$$

m \ n	1	3	5	...
1	0,8100	0,0120	0,0016	
3	0,2500	0,010	0,0015	
5	0,0701	0,0072	0,0013	
⋮				

$$\sum_{1,3,5} \sum_{mn} f_{mn} = 1,1637 \quad \checkmark = 1,2376 \quad (m,n=1,3,\dots,99)$$

(taulukko)

$$j_{mn} = \frac{-(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{mn[m^2/9 + n^2]^2}$$

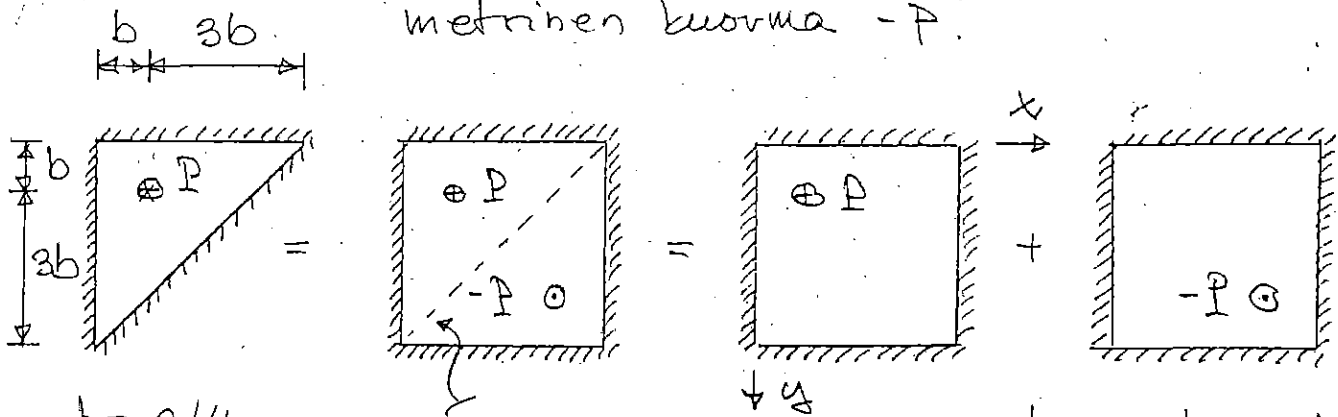
m \ n	1	3	5
1	0,8100	-0,0040	0,0003
3	-0,0833	0,0011	-0,0001
5	0,0140	-0,0005	0,0001

$$\sum_{1,3,5} \sum_{mn} j_{mn} = 0,7376 \quad = 0,7350 \quad (m,n=1,3,5,\dots,99)$$

(taulukko)

$$N = \frac{\frac{16P_0 a^4}{\pi^6 D} \cdot 0,7350}{\frac{a}{E_{AP}} + \frac{4a^2}{3\pi^4 D} \cdot 1,2371}$$

Laajennetaan lattia ja lisätään anti-
metrinen kuorma $-P$.



$$b = a/4$$

ei painu sillä se on symmetria-akseli kun
kuorma on sen suhteen anti-metrinen.

Kun meitä kiinnostaa kuormapinteen taipuma
on se kuvasarjan perusteella

$$w_{PA} \left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4} \right) = w_{P\Box} \left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4} \right) - w_{P\Box} \left(\frac{3a}{4}, \frac{3a}{4} \right)$$

kolmiolattian taipuma, joka neliolattian taipumat

Leontomurto muuttuu kuormasta P kohdassa $0,0$
taipuma on

$$w_{P\Box}(x,y) = \frac{4P}{\pi^4 D ab} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} * \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

kun nyt $a=b$ ja $u=v=a/4$ saadaan

$$w_{PA}(x,y) = \underbrace{\frac{4Pa^2}{\pi^4 D}}_K \sum_m \sum_n \underbrace{\frac{\sin \frac{m\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{4}}{(m^2+n^2)^2}}_{T_{nm}} * \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

kolmiolattian taipumaksi saadaan siten lauseke

$$w_{PA} = K * \sum_m \sum_n T_{nm} * \left[\sin \frac{m\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{3m\pi}{4} \sin \frac{3n\pi}{4} \right]$$

$$\text{jossa } K = \frac{4Pa^2}{\pi^4 D} \text{ ja } T_{nm} = \frac{\sin \frac{m\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{4}}{(m^2+n^2)^2}$$

lasketaan taulukoon T_{mn} ja $[S \times S - S3 \times S3]$ arvoja

m \ n	1	2	3	4
1	0.125000	0.028284	0.005000	0
2	0.028284	0.015625	0.004184	0
3	0.005000	0.004184	0.001543	0
4	0	0	0	0

$$T_{mn} = \frac{\sin \frac{m\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{4}}{[m^2 + n^2]^2}$$

$\sin \frac{m\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{3m\pi}{4} \sin \frac{3n\pi}{4}$ on oikeassa taulukossa

m \ n	1	2	3	4
1	0	$\sqrt{2}$	0	0
2	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	0
3	0	$\sqrt{2}$	0	0
4	0	0	0	0

muodostetaan taipumalausekkeen summaus seuraavaa lävistäjän suunnan

1	2	3	4
2	3	4	
3	4		
4			

$$S1 = n+m = 2$$

$$S2 = n+m = 3$$

$$S3 = n+m = 4$$

$$S4 = n+m = 5$$

Taulukoidaan saadut tulokset

S	w/k	$\Delta w/k$
1	0	0
2	0.08	0.08
3	0.08	0
4	0.091834	0.011834
6	0.095673	0.003839
8	0.097373	0.001699
10	0.098383	0.001010
20	0.099344	0.000137

$$w_{pa} = 0.00408 \frac{Pa^2}{D}$$

$$sillä k = \frac{4Pa^2}{\pi^4 D}$$

suppenee kovin hitaasti

VERTAILO ELEMENTIEN VUORTELAMÄNNÄ
SAATAVIIN TULOKSIIN.

$$w = 0.00408 \times \frac{P a^2}{h}$$

$$P = 100, a = 10, h = 0.1$$

$$E = 20000$$

$$w = 22.28 \text{ mm NAVIER}$$

ABAQUS TULOKSET

VERKKO 1 $w = 21.34$

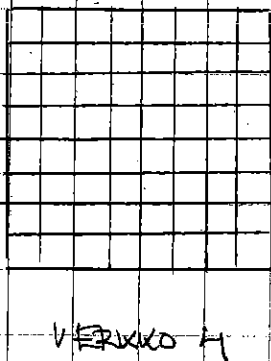
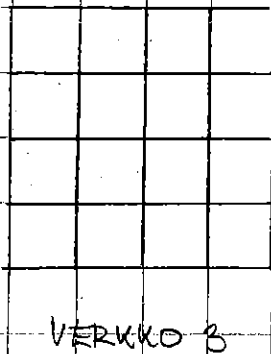
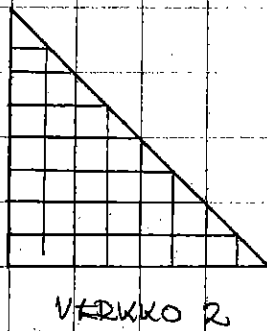
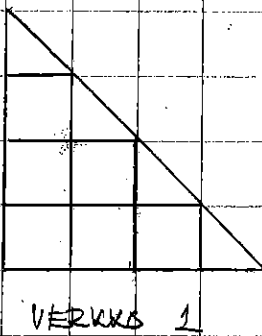
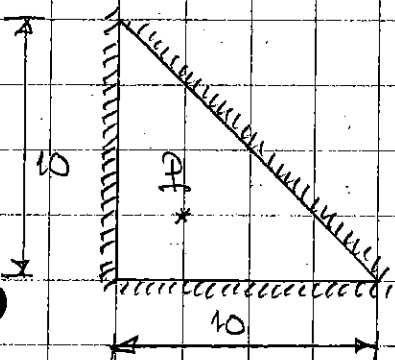
VERKKO 2 $w = 22.34$

ELEMENTIT 4-SOLMUISIA □
3-SOLMUISIA ▽

VERKKO 3 $w = 22.74$

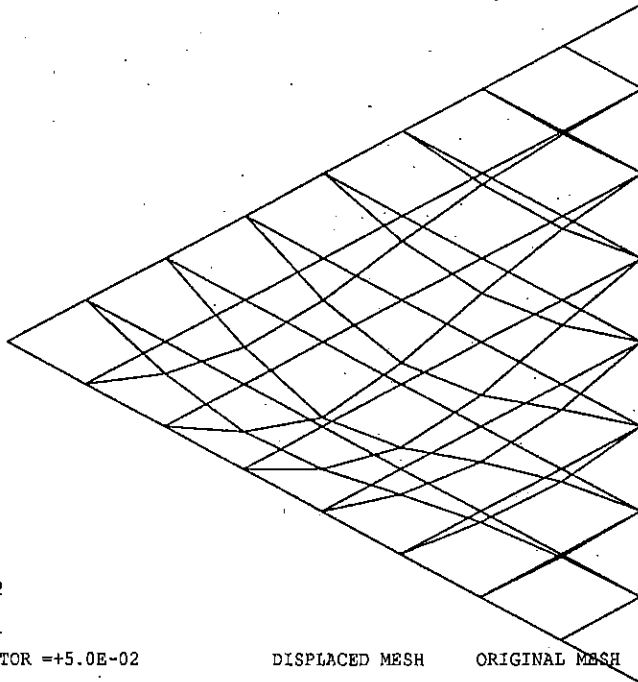
VERKKO 4 $w = 22.34$

ELEMENTIT 8-SOLMUISIA □



VERKON 2 mutainen siirtymäkenttä.

ABAQUS



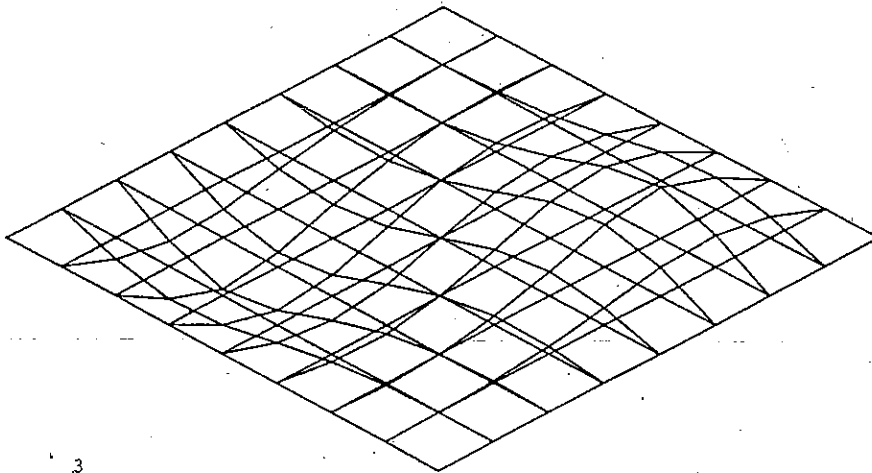
MAG. FACTOR =+5.0E-02

DISPLACED MESH

ORIGINAL MESH

VERKON 4 mutainen siirtymäkenttä.

ABAQUS



MAG. FACTOR =+5.0E-02

DISPLACED MESH

ORIGINAL MESH