

Luku 1

Rakenteiden mekaniikan jatkokurssi, kaavakokoelma

1.1 Kimmoteorian perusyhtälöt

Muodonmuutokset

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (1.1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (1.2)$$

suhteellinen tilavuuden muutos

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (1.3)$$

Yhteensopivuusehdot

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, \quad (1.6)$$

tai

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \quad (1.9)$$

Yleistetty Hooken laki

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}.\end{aligned}\tag{1.10}$$

Lamén vakiot (liikumoduuli G)

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}.\tag{1.11}$$

Tilavuudenmuutoskerroin

$$K = \left(\lambda + \frac{2G}{3} \right).\tag{1.12}$$

Yleistety Hooken laki

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x,\tag{1.13}$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y,\tag{1.14}$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z,\tag{1.15}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}.\tag{1.16}$$

Tasojännitystila

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y),\tag{1.17}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x),\tag{1.18}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}.\tag{1.19}$$

Tasapainoehdot

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0,\tag{1.20}$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0,\tag{1.21}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0.\tag{1.22}$$

Tasapainoehdot reunalla

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = \bar{t}_x,$$

$$\tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = \bar{t}_y,\tag{1.23}$$

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z = \bar{t}_z.$$

Virtuaalisen työn periaate

$$\begin{aligned}
& \int_V \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x \right) \delta u \, dV + \\
& \int_V \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y \right) \delta v \, dV + \\
& \int_V \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z \right) \delta w \, dV + \\
& \int_{S_t} [(-t_x + \bar{t}_x)\delta u + (-t_y + \bar{t}_y)\delta v + (-t_z + \bar{t}_z)\delta w] \, dS = 0.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Gaussin lause

$$\int_V \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dV = \int_S (fn_x + gn_y + hn_z) \, dS. \tag{1.25}$$

Virtuaalisen työn yhtälö

$$\begin{aligned}
& \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) \, dV \\
& - \int_V (f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w) \, dV - \int_{S_t} (\bar{t}_x \delta u + \bar{t}_y \delta v + \bar{t}_z \delta w) \, dS = 0.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Muodonmuutosenergia jännitysten funktiona

$$U = \tilde{U} = \frac{1}{4G} \int_V [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)] \, dV. \tag{1.27}$$

Potentiaalienergia

$$\Pi = U + V. \tag{1.28}$$

Muodonmuutosenergia

$$U = G \int_V [\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\nu e^2}{1-2\nu} + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)] \, dV. \tag{1.29}$$

Ulkoisten kuormien potentiaali

$$V = - \int_V (f_x u + f_y v + f_z w) \, dV - \int_{S_t} (\bar{t}_x u + \bar{t}_y v + \bar{t}_z w) \, dS. \tag{1.30}$$

Komplementaarinen energia

$$\tilde{\Pi} = \tilde{U} + \tilde{V}, \tag{1.31}$$

$$\tilde{V} = - \int_{S_u} (\bar{u} t_x + \bar{v} t_y + \bar{w} t_z) \, dS, \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned}
t_x &= n_x \sigma_x + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}, \\
t_y &= n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y + n_z \tau_{zy}, \\
t_z &= n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_z.
\end{aligned} \tag{1.33}$$

1.2 Vapaa vääntö

1.2.1 Coulombin teoria

Vääntökulma φ ja vääntymä θ

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz}. \tag{1.34}$$

Ympyräpoikkileikkaukselle

$$\gamma(r) = \frac{d\varphi}{dz} r = \theta r, \tag{1.35}$$

$$M_z = \int_A \tau r dA = 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr, \tag{1.36}$$

$$\tau = G\gamma = G\theta r, \tag{1.37}$$

$$M_z = G\theta 2\pi \int_0^R r^3 dr = G\theta I_p, \tag{1.38}$$

$$I_p = \int_A r^2 dA = 2\pi \int_0^R r^3 dr = \pi \frac{R^4}{2}. \tag{1.39}$$

Ympyräputkelle

$$I_p = \frac{\pi}{2}(b^4 - a^4), \tag{1.40}$$

b ulkosäde ja a sisäsäde.

$$\tau_{\max} = G\theta R = \frac{MR}{I_p}. \tag{1.41}$$

Tasapainoyhtälö

$$\frac{dM}{dz} + m = 0, \tag{1.42}$$

$$\frac{d}{dz} \left(GI_p \frac{d\varphi}{dz} \right) + m = 0. \tag{1.43}$$

Jos GI_p on vakio, niin

$$GI_p \frac{d^2\varphi}{dz^2} + m(z) = 0. \tag{1.44}$$

1. Vapaasti kiertyvässä päässä $M_z = \bar{M}$.
2. Kiinnitetyssä päässä $\varphi = 0$.

1.2.2 Elementtimenetelmä

Muodonmuutosenergia

$$U = \int \frac{1}{2} GI_v (\varphi')^2 dz. \quad (1.45)$$

Ulkoisten voimien potentiaali

$$V = - \int_0^L \bar{m}(z) \varphi(z) dz - \sum_i \bar{M}_i \varphi(z_i). \quad (1.46)$$

Kiertymän interpolaatio

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= (1-s)\varphi_1 + s\varphi_2 \\ &= N_1(s)\varphi_1 + N_2(s)\varphi_2 \end{aligned} \quad (1.47)$$

eli

$$\varphi(s) = \begin{bmatrix} N_1(s) & N_2(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}, \quad (1.48)$$

$$U^e = \int_0^L \frac{1}{2} GI_v \theta^2 dz, \quad (1.49)$$

$$\theta = \varphi' = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dz} = \frac{d\varphi}{ds} \frac{1}{L}, \quad (1.50)$$

$$\varphi' = N'_1 \varphi_1 + N'_2 \varphi_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}. \quad (1.51)$$

Muodonmuutosenergia

$$U^e = \frac{1}{2} LGI_v \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{GI_v}{L} & -\frac{GI_v}{L} \\ -\frac{GI_v}{L} & \frac{GI_v}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \varphi^{eT} \mathbf{K}^e \varphi^e. \quad (1.52)$$

Elementin e osuus

$$V^e = - \int_0^{L^e} \bar{m}(z) \varphi(z) dz - \sum_i \bar{M}_i \varphi(z_i), \quad (1.53)$$

\bar{M}_i pistevääntömomenttikuorma pisteessä z_i , Dirac'in δ -funktio

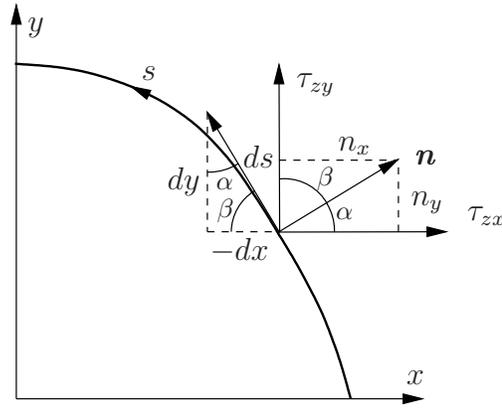
$$\bar{m}_i = \bar{M}_i \delta(z - z_i), \quad (1.54)$$

$\delta(z) = 0$, kun $z \neq 0$ ja

$$\int \delta(z) dz = 1. \quad (1.55)$$

Elementin e

$$V^e = - \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} \int_0^{L^e} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{z}{L} \\ \frac{z}{L} \end{Bmatrix} (\bar{m}(z) + \sum \bar{m}_i) dz \quad (1.56)$$



Kuva 1.1 Poikkileikkauksen reunakäyrä.

eli

$$V^e = - \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \equiv -\boldsymbol{\varphi}^{eT} \mathbf{f}^e, \quad (1.57)$$

$$\mathbf{f}^e = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \int_0^{L^e} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{z}{L} \\ \frac{z}{L} \end{Bmatrix} (\bar{m}(z) + \sum \bar{m}_i) dz \quad (1.58)$$

Sauvan potentiaalienergia

$$\Pi = \sum_{e=1}^E \Pi^e. \quad (1.59)$$

1.2.3 De Saint Venant'in vääntö

Siirtymät

$$u = -(\theta z)y, \quad v = (\theta z)x, \quad w = \theta\psi(x, y). \quad (1.60)$$

Leikkausjännitykset

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \\ \tau_{zy} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Tasapainoehdosta (1.22)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (1.62)$$

Reunaehto

$$\tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y = 0, \quad (1.63)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \cos \beta = 0, \quad (1.64)$$

$$n_x = \cos \alpha = \frac{dx}{dn} = \frac{dy}{ds}, \quad n_y = \cos \beta = \frac{dy}{dn} = -\frac{dx}{ds}, \quad (1.65)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dn} - y \frac{dy}{ds} + x \left(-\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad (1.66)$$

$$\frac{d\psi}{dn} - \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (y^2 + x^2) = 0. \quad (1.67)$$

Leikkausvoimat Q_x ja Q_y

$$Q_x = \int_A \tau_{zx} dA, \quad Q_y = \int_A \tau_{zy} dA, \quad (1.68)$$

vääntömomentti

$$M_v = \int_A (-\tau_{zx}y + \tau_{zy}x) dA, \quad (1.69)$$

vääntöjäyhyys

$$I_v = I_p + \int_A \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} y + \frac{\partial \psi}{\partial y} x \right) dA, \quad I_p = \int_A (x^2 + y^2) dA. \quad (1.70)$$

1.2.4 Voimamenetelmä

Jännitysfunktio $\phi = \phi(x, y)$:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (1.71)$$

Yhteensopivuusehto

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta. \quad (1.72)$$

Reunaehto

$$\frac{d\phi}{ds} = 0, \quad \phi = \text{vakio reunalla}. \quad (1.73)$$

Vääntömomentti

$$M_v = 2 \int_A \phi(x, y) dA. \quad (1.74)$$

ontelo poikkileikkaukselle

$$M_v = \int_A 2\phi dA + \sum_{i=1}^n 2\phi_i A_i. \quad (1.75)$$

1.2.5 Differenssimenetelmä

Differenssiaprossimaatio

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{1}{2\Delta x} (\phi_{m+1} - \phi_{m-1}), \quad (1.76)$$

molekyylimuodossa

$$2h \frac{\partial \phi}{\partial x} \simeq \boxed{-1 \quad 0 \quad 1}, \quad (1.77)$$

$h = \Delta x$ on hilaväli,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2} (\phi_{m+1} - 2\phi_m + \phi_{m-1}), \quad (1.78)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \approx \frac{1}{k^2} (\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}), \quad (1.79)$$

$k = \Delta y$, molekyyli muodossa

$$h^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \simeq \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.80)$$

$$k^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \simeq \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.81)$$

Laplacen operaattorin differenssimolekyyli, $k = \Delta y = h = \Delta x$,

$$h^2 \Delta \phi \simeq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.82)$$

1.2.6 Potentiaalienergian minimin periaate

Potentiaalienergia

$$\Pi = \frac{1}{2} GL\theta^2 \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)^2 \right] dA - \bar{M}_v L\theta. \quad (1.83)$$

Käyritysmäfunktion $\psi(x, y)$ kehitelmä

$$\psi^* = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x, y). \quad (1.84)$$

Lineaarinen yhtälöryhmä

$$\sum_{j=1}^n B_{ij} a_j + C_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.85)$$

$$B_{ij} = \int_A \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dA, \quad (1.86)$$

$$C_i = \int_A \left(-y \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + x \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) dA.$$

Vääntöjäyhyys

$$I_v^* = \int_A \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \psi^*}{\partial y} - y \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) dA \quad (1.87)$$

$$I_v^* = I_p + \sum_{i=1}^n a_i C_i. \quad (1.88)$$

Taulukko 1.1 Suorakaidepoikkileikkaus.

b/t	k
1	0.1407
1.2	0.166
1.5	0.196
2.0	0.229
3.0	0.263
4.0	0.281
5.0	0.291
10.0	0.312
∞	0.333

1.2.7 Komplementaarisen energian minimin periaatte

Modifioitu komplementaarisen energian lauseke

$$\tilde{\Pi}_c = \frac{L}{2G} \int_A \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] dA + \lambda \left(\bar{M}_v - 2 \int_A \phi dA \right). \quad (1.89)$$

Jännitysfunktion kehitelmä

$$\phi^{**}(x, y) = \frac{\lambda}{L} \sum_{i=1}^n b_i \phi_i(x, y), \quad (1.90)$$

$\phi_i = 0$ reunalla. Ehdosta

$$\delta \tilde{\Pi}_c(b_i) = 0 \quad (1.91)$$

$$\sum_{j=1}^n D_{ij} b_j - 2GE_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.92)$$

$$D_{ij} = \int_A \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dA, \quad (1.93)$$

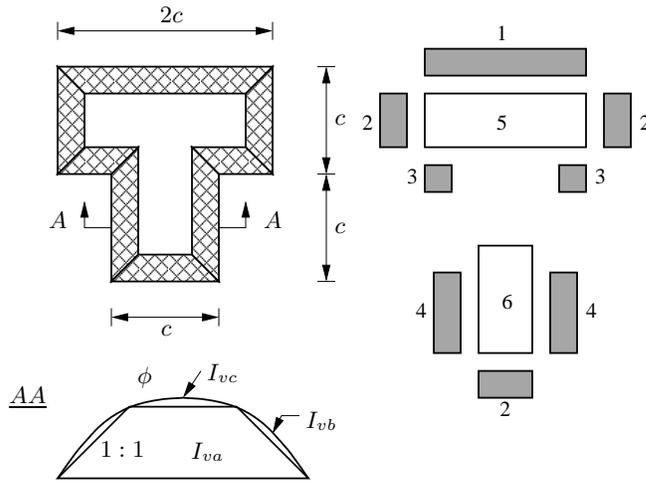
$$E_i = \int_A \phi_i dA. \quad (1.94)$$

Vääntömomentti

$$\bar{M}_v = \left(\frac{2\lambda}{L} \right) \sum_{i=1}^n b_i E_i = GI_v^{**} \theta^{**}. \quad (1.95)$$

Suhde $\frac{\lambda}{L}$ on vääntymän likiarvo θ^{**} , ja vääntöjäyhyys on

$$I_v^{**} = \frac{\bar{M}_v}{G\theta^{**}} = \frac{2}{G} \sum_{i=1}^n b_i E_i. \quad (1.96)$$



Kuva 1.2 T-poikkileikkaus.

1.2.8 Ortogonaaliset jännituskentät

$$\max I_v = \sum I_{va} + \sum I_{vb} + \sum I_{vc}. \quad (1.97)$$

$c/4$:n levyisellä vyöhykkeellä ϕ -funktion kaltevuus $1:1$, $\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = 1$,

$$I_{va} = \frac{(2V_a)^2}{A_a}, \quad (1.98)$$

A_a varjostetun osan pinta-ala, V_a poikkileikkaukseltaan murtoviivanmuotoisen ϕ -kumpareen tilavuus, tasanteiden osuudet I_{vc} . Varjostetulle alueelle suorakaiteen jännituskentät, jäyhyys I_{vb} . Suorakaidepoikkileikkaukselle

$$I_v = kbt^3 \quad (1.99)$$

t lyhyemmän sivun mitta. Parametrin k arvoja on taulukossa 1.1. Suurin leikkausjännitys

$$\tau_{\max} = \frac{M_a}{W_{va}} + \frac{M_b}{W_{vb}} = \frac{M_v}{I_v} \left(\frac{I_{va}}{W_{va}} + \frac{I_{vb}}{W_{vb}} \right), \quad (1.100)$$

$$M_a = \frac{I_{va}}{I_v} M_v, \quad M_b = \frac{I_{vb}}{I_v} M_v, \quad (1.101)$$

$$W_{va} = \frac{M_a}{\tau_a} = 2V_a. \quad (1.102)$$

Poikkileikkauksen vääntövastus

$$W_v \approx \frac{M_v}{\tau_{\max}} = \frac{I_v}{\frac{I_{va}}{W_{va}} + \frac{I_{vb}}{W_{vb}}} = \frac{I_v}{\frac{2V_a}{A_a} + \frac{k}{k_1} t_b}, \quad (1.103)$$

$$\frac{I_{vb}}{W_{vb}} = \frac{k}{k_1} t_b, \quad (1.104)$$

t_b on varjostetun vyöhykkeen suurin leveys.

1.3 Kotelopoikkileikkauksen vapaa vääntö

Leikkausjännitys τ_{zs}

$$\tau_{zs} = 2G\theta \left(e + \frac{A}{t} \oint \frac{ds}{t} \right). \quad (1.105)$$

Vääntömomentti

$$M_v = \left(\frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}} + \frac{1}{3} \oint t^3 ds \right) G\theta. \quad (1.106)$$

Monionteloinen poikkileikkaus:

$$q_i \oint \frac{ds}{t} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m q_k \int_{s_{ik}} \frac{ds}{t} = 2A_i G\theta, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.107)$$

Vääntömomentti

$$M_v = 2 \int_A \phi dA = 2 \sum_i q_i A_i. \quad (1.108)$$

1.4 Avoin poikkileikkaus

Normaalijännitys

$$\sigma_z(s, z) = E \left[\frac{dw_0(z)}{dz} - \frac{d^2u(z)}{dz^2} x(s) - \frac{d^2v(z)}{dz^2} y(s) - \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} \omega_A(s) \right]. \quad (1.109)$$

Sektoriaalinen koordinaatti ω :

$$\omega_A(s) = \int_{P_A}^{P(s)} h_A(\tau) d\tau, \quad (1.110)$$

$$|d\omega_A| = |\mathbf{r}_A \times d\mathbf{s}| = \left| \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x - x_A & y - y_A & 0 \\ dx & dy & 0 \end{bmatrix} \right| \quad (1.111)$$

$$= (x - x_A)dy - (y - y_A)dx,$$

$$d\omega_A = (x - x_A)dy - (y - y_A)dx, \quad (1.112)$$

$$\omega_A = \omega_B - (x_A - x_B)y + (y_A - y_B)x + C. \quad (1.113)$$

Jännitysresultantit

$$N(z) = \int_A \sigma_z(s, z) dA, \quad (1.114)$$

$$M_x(z) = \int_A y(s) \sigma_z(s, z) dA, \quad (1.115)$$

$$M_y(z) = - \int_A x(s) \sigma_z(s, z) dA, \quad (1.116)$$

$$B(z) = \int_A \omega(s) \sigma_z(s, z) dA, \quad (1.117)$$

$dA = t(s)ds$. Poikki-pintasuureita

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA, \quad I_{xy} = \int_A xy dA, \quad (1.118)$$

$$I_{x\omega} = \int_A y\omega_A dA, \quad I_{y\omega} = \int_A x\omega_A dA, \quad I_\omega = \int_A \omega_A^2 dA, \quad (1.119)$$

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA, \quad S_\omega = \int_A \omega_A dA. \quad (1.120)$$

Pääkoordinaatistossa

$$I_{xy} = \int_A xy dA = 0, \quad S_x = \int_A y dA = 0, \quad S_y = \int_A x dA = 0. \quad (1.121)$$

Vääntökeskiö:

$$S_{\omega_A} \equiv S_\omega = \int_A \omega_A(s) dA = 0,$$

$$I_{x\omega_A} \equiv I_{x\omega} = \int_A y(s)\omega_A(s) dA = 0, \quad (1.122)$$

$$I_{y\omega_A} \equiv I_{y\omega} = \int_A x(s)\omega_A(s) dA = 0.$$

Pääkoordinaatistossa

$$N(z) = EA \frac{dw_0(z)}{dz}, \quad (1.123)$$

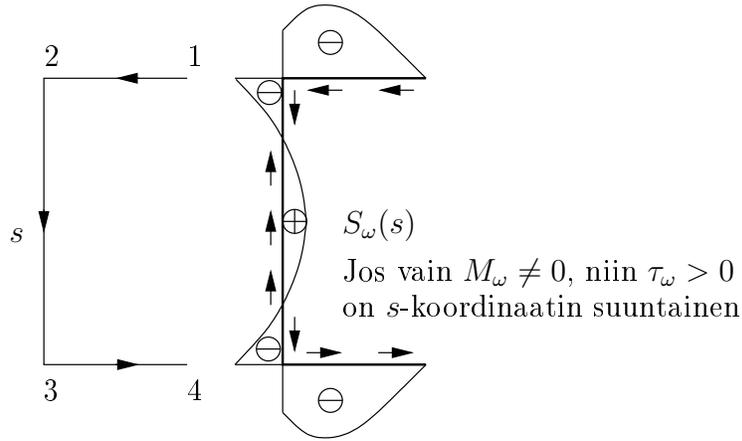
$$M_x(z) = -EI_x \frac{d^2v(z)}{dz^2}, \quad (1.124)$$

$$M_y(z) = EI_y \frac{d^2u(z)}{dz^2}, \quad (1.125)$$

$$B(z) = -EI_\omega \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}. \quad (1.126)$$

Normaalijännitys

$$\sigma_z(s, z) = \frac{N(z)}{A} + \frac{M_x(z)}{I_x} y(s) - \frac{M_y(z)}{I_y} x(s) + \frac{B(z)}{I_\omega} \omega_A(s). \quad (1.127)$$

Kuva 1.3 S_ω .

Vääntökeskiö

$$\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int y\omega_B dA \\ -\int x\omega_B dA \end{Bmatrix} \quad (1.128)$$

Leikkausjännitys

$$t\tau_\omega = -EA(s)\frac{d^2w_0}{dz^2} + ES_y(s)\frac{d^3u}{dz^3} + ES_x(s)\frac{d^3v}{dz^3} + ES_\omega(s)\frac{d^3\varphi}{dz^3}, \quad (1.129)$$

$$A(s) = \int_{s_1}^s t(s) ds,$$

$$S_y(s) = \int_{s_1}^s x(s)t(s) ds, \quad S_x(s) = \int_{s_1}^s y(s)t(s) ds, \quad (1.130)$$

$$S_\omega(s) = \int_{s_1}^s \omega_A(s)t(s) ds.$$

$$t\tau_\omega = -\frac{N'A(s)}{A} + \frac{M'_y S_y(s)}{I_y} - \frac{M'_x S_x(s)}{I_x} - \frac{B'S_\omega(s)}{I_\omega}, \quad (1.131)$$

Kahden lineaarisen funktion tulon integraali

$$\int f(s)g(s)t ds = \frac{bt}{6} [f_1(2g_1 + g_2) + f_2(g_1 + 2g_2)]. \quad (1.132)$$

Pääjäyhyyskoordinaatistossa

$$Q_x = \int \tau_\omega t dx = -EI_y \frac{d^3u}{dz^3} = -\frac{dM_y}{dz}, \quad Q_y = \int \tau_\omega t dy = -EI_x \frac{d^3v}{dz^3} = \frac{dM_x}{dz}. \quad (1.133)$$

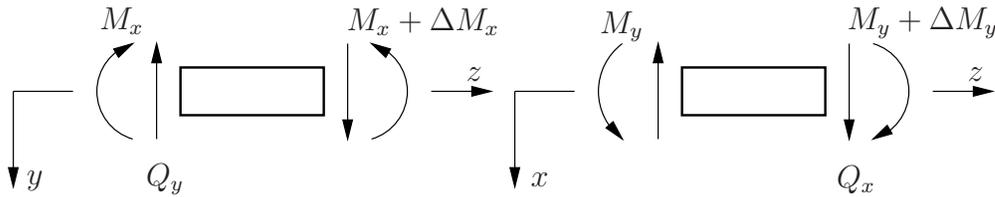
$$M_\omega = \int \tau_\omega t d\omega = -EI_\omega \frac{d^3\varphi}{dz^3} = \frac{dB}{dz}. \quad (1.134)$$

Leikkausvuo

$$\tau_\omega t = -\frac{N'A(s)}{A} - \frac{S_y(s)}{I_y} Q_x - \frac{S_x(s)}{I_x} Q_y - \frac{S_\omega(s)M_\omega}{I_\omega}. \quad (1.135)$$

Vääntömomentti

$$M_z = M_v + M_\omega. \quad (1.136)$$



Kuva 1.4 Taivutusmomenttien M_x ja M_y merkkisäännöt.

Väännön differentiaaliyhtälö

$$-EI_\omega \frac{d^4\varphi}{dz^4} + GI_v \frac{d^2\varphi}{dz^2} + m = 0, \quad (1.137)$$

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} - k^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2} = f(z), \quad k^2 = \frac{GI_v}{EI_\omega}. \quad (1.138)$$

Ratkaisu

$$\varphi(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz + \varphi_0. \quad (1.139)$$

Resultantit

$$M_v = GI_v \frac{d\varphi}{dz} = GI_v \left(C_2 + C_3 k \cosh kz + C_4 k \sinh kz + \frac{d\varphi_0}{dz} \right), \quad (1.140)$$

$$B = -EI_\omega \frac{d^2\varphi}{dz^2} = -GI_v \left(C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz + \frac{1}{k^2} \frac{d^2\varphi_0}{dz^2} \right), \quad (1.141)$$

$$M_\omega = \frac{dB}{dz} = -GI_v \left(C_3 k \cosh kz + C_4 k \sinh kz + \frac{1}{k^2} \frac{d^3\varphi_0}{dz^3} \right). \quad (1.142)$$

Kokonaisvääntömomentti

$$M_z = M_v + M_\omega = GI_v \left(C_2 + \frac{d\varphi_0}{dz} - \frac{1}{k^2} \frac{d^3\varphi_0}{dz^3} \right). \quad (1.143)$$

Vääntömomenttikuorma, kuva 1.5,

$$m(z) = q_y(x - x_A) - q_x(y - y_A). \quad (1.144)$$

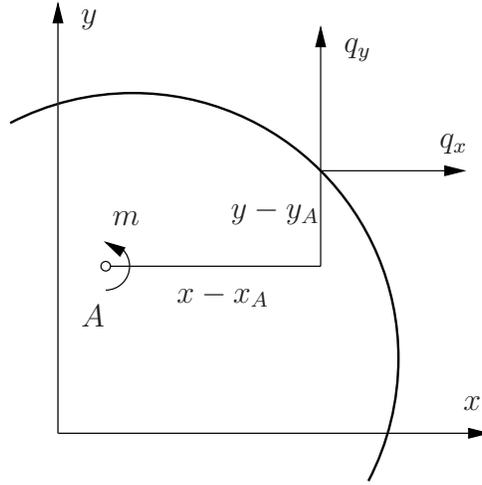
Eräitä yksityisratkaisuja

1. Tasaisen kuorma, $m(z) = m_0$,

$$\varphi_0 = -\frac{m_0}{2} \frac{1}{GI_v} z^2. \quad (1.145)$$

2. Lineaarisesti jakautunut kuorma, $m(z) = m_0 \frac{z}{L}$,

$$\varphi_0 = -\frac{m_0}{6L} \frac{1}{GI_v} z^3. \quad (1.146)$$



Kuva 1.5 Sauvan jakautuneet kuormat q_x , q_y ja vääntömomentti m

3. Pistemäinen vääntömomentti M_0 kohdassa $z = a$:

$$\varphi_0 = 0, \text{ kun } z < a, \quad (1.147)$$

$$\varphi_0 = \frac{M_0}{kGI_v} [\sinh k(z - a) - k(z - a)], \text{ kun } z > a. \quad (1.148)$$

4. Pistemäinen bimomentti kohdassa $z = a$:

$$\varphi_0 = 0, \text{ kun } z < a, \quad (1.149)$$

$$\varphi_0 = \frac{B_0}{GI_v} [\cosh k(z - a) - 1], \text{ kun } z > a. \quad (1.150)$$

Väännön differentiaaliyhtälön tarkastelua:

1. Kun $kL > 10, \dots, 20$, ratkaistaan

$$-GI_v \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = m. \quad (1.151)$$

2. Kun $kL < 0.5$, ratkaistaan

$$EI_\omega \frac{d^4 \varphi}{dz^4} = m. \quad (1.152)$$

3. Kun $0.5 < kL < 10(20)$, ratkaistaan yhtälö

$$\frac{d^4 \varphi}{dz^4} - k^2 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \frac{m}{EI_\omega}. \quad (1.153)$$

1.4.1 Jatkuva vääntösauva

Vääntymien ja bimomenttien väliset yhtälöt

$$\theta_1^k = a_{11}^k B_1 + a_{12}^k B_2 + \alpha_1^k, \quad (1.154)$$

$$\theta_2^k = a_{21}^k B_1 + a_{22}^k B_2 + \alpha_2^k,$$

k on osasauvan numero,

$$a_{11} = \frac{1}{GI_v L} \left[\frac{kL}{\tanh kL} - 1 \right], \quad a_{21} = \frac{1}{GI_v L} \left[\frac{kL}{\sinh kL} - 1 \right], \quad (1.155)$$

$$a_{12} = -\frac{1}{GI_v L} \left[\frac{kL}{\sinh kL} - 1 \right], \quad a_{22} = -\frac{1}{GI_v L} \left[\frac{kL}{\tanh kL} - 1 \right]. \quad (1.156)$$

Jos pisteessä $z = a$ on pistemäinen vääntömomentti M , niin

$$\alpha_1 = \frac{M}{GI_v} \left[\frac{b}{L} - \frac{\sinh kb}{\sinh kL} \right], \quad \alpha_2 = -\frac{M}{GI_v} \left[\frac{a}{L} - \frac{\sinh ka}{\sinh kL} \right]. \quad (1.157)$$

Tasaisesti jakautuneen vääntömomenttikuorman tapauksessa

$$\alpha_1 = \frac{m_0 L}{GI_v} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{kL} \tanh \frac{kL}{2} \right], \quad \alpha_2 = -\frac{m_0 L}{GI_v} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{kL} \tanh \frac{kL}{2} \right]. \quad (1.158)$$

Yhteensopivuusehto tuella k osavälien $k-1$ ja k liitoksessa

$$\theta_k^{(k-1)} = \theta_k^{(k)}. \quad (1.159)$$

1.4.2 Aksiaaliset kuormat

Resultantit päässä ja epäjatkuvuudet päiden välillä

$$\begin{aligned} N &= \sum_i P_i, & \Delta N &= -\sum_i P_i \\ M_x &= \sum_i y_i P_i, & \Delta M_x &= -\sum_i y_i P_i \\ M_y &= -\sum_i x_i P_i, & \Delta M_y &= \sum_i x_i P_i, \\ B &= \sum_i \omega_i P_i, & \Delta B &= -\sum_i \omega_i P_i. \end{aligned} \quad (1.160)$$

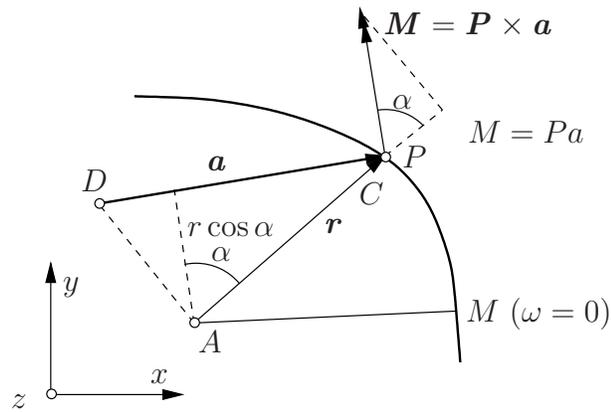
Poikkileikkauksen tasossa vaikuttavan momentin $\mathbf{M}(s)$ aiheuttama bimomentin muutos

$$\Delta B = -\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{M}(s). \quad (1.161)$$

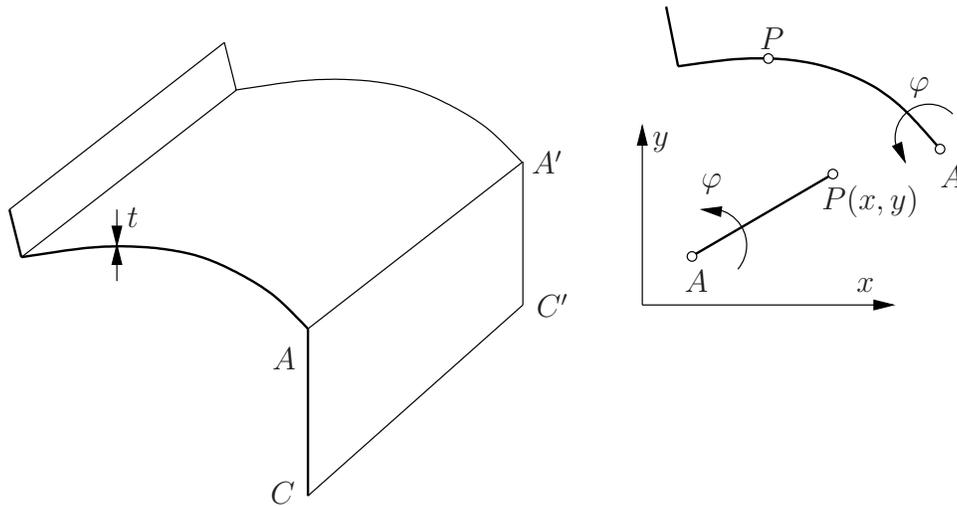
Ulokkeen päässä vaikuttavan voiman P , (kuvasssa 1.6), aiheuttama epäjatkuvuus

$$\Delta B = -2P\Omega_{AMCD}, \quad (1.162)$$

Ω_{AMCD} on alueen $AMCD$ pinta-ala.



Kuva 1.6 Sauvan akselin suuntainen pistevoima ulokkeen päässä.



Kuva 1.7 Tasossaan jäykän levyn tukema katos, jonka reunat ovat niveelliset.

1.4.3 Ohjattu vääntö

Kitkallinen liitos

$$w_A = \frac{dw_A}{dz} = 0, \quad (1.163)$$

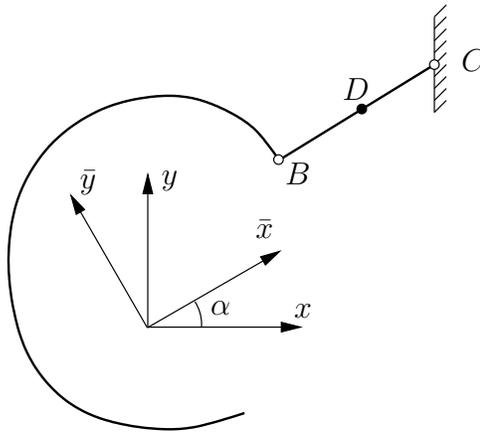
$$N = -ES_{\omega_A} \frac{d^2\varphi}{dz^2}, \quad (1.164)$$

$$B = -EI_{\omega_A} \frac{d^2\varphi}{dz^2}, \quad (1.165)$$

$$\sigma_z = -E \frac{d^2\varphi}{dz^2} \omega_A = \frac{B}{I_{\omega_A}} \omega_A. \quad (1.166)$$

Kitkaton liitos

$$N = 0, \quad (1.167)$$



Kuva 1.8 Pendelituettu sauva.

$$\sigma_z = -E\omega_b \frac{d^2\varphi}{dz^2}, \quad (1.168)$$

$$\omega_b(s) = \omega_A(s) - \frac{S\omega_A}{A}, \quad (1.169)$$

$$I_{\omega_b} = \int_A \omega_b^2 t ds, \quad (1.170)$$

$$B = \int_A \omega_b \sigma_z t ds. \quad (1.171)$$

Väännön tasapainoyhtälö molemmissa tapauksissa

$$EI_{\omega} \frac{d^2\varphi}{dz^2} - GI_v \frac{d^2\varphi}{dz^2} = m. \quad (1.172)$$

1.4.4 Yhden vapausasteen ohjattu vääntö

Taivutuksen ja väännön tasapainoyhtälöt

$$EI_{\bar{x}} \frac{d^4\bar{v}}{dz^4} + EI_{\bar{\omega}\bar{x}} \frac{d^4\varphi}{dz^4} = p\bar{y}, \quad (1.173)$$

$$EI_{\bar{\omega}\bar{x}} \frac{d^4\bar{v}}{dz^4} + EI_{\bar{\omega}} \frac{d^4\varphi}{dz^4} - GI_v \frac{d^2\varphi}{dz^2} = m. \quad (1.174)$$

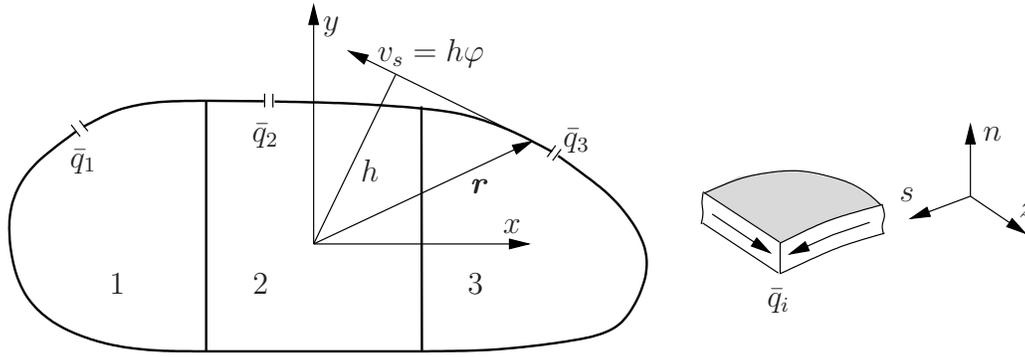
Muunnoskaava

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (1.175)$$

$$\bar{y}_D - \bar{y}_B = -\sin \alpha (x_D - x_B) + \cos \alpha (y_D - y_B) = 0. \quad (1.176)$$

$$I_{\bar{\omega}\bar{x}} = \int_A \bar{y} \bar{\omega}_D dA = 0. \quad (1.177)$$

$$\bar{\omega}_D = \bar{\omega}_B - (x_D - x_B)y + (y_D - y_B)x + C. \quad (1.178)$$



Kuva 1.9 Kotelopoikkileikkaus.

$$\begin{aligned}
 & - \int x\omega_B dA \sin \alpha + \int y\omega_B dA \cos \alpha \\
 & + (I_{xy} \sin \alpha - I_x \cos \alpha)(x_D - x_B) + (-I_y \sin \alpha + I_{xy} \cos \alpha)(y_D - y_B) = 0.
 \end{aligned} \tag{1.179}$$

Yhtälöistä (1.176) ja (1.179)

$$x_D - x_B = \frac{\int y\omega_B dA \cos^2 \alpha - \int x\omega_B dA \sin \alpha \cos \alpha}{I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha}, \tag{1.180}$$

$$y_D - y_B = \frac{\int y\omega_B dA \sin \alpha \cos \alpha - \int x\omega_B dA \sin^2 \alpha}{I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha}. \tag{1.181}$$

Jos (x, y) on pääkoordinaatisto, niin $I_{xy} = 0$.

1.5 Kotelosauva

Leikkausvuo

$$q = q^a + \bar{q} + q^v. \tag{1.182}$$

Yhteensopivuusehto (G on vakio)

$$\bar{q} \oint \frac{ds}{t} = - \oint q^a \frac{ds}{t}, \tag{1.183}$$

leikkausvuo q^a pääjäyhyyskoordinaatistossa

$$q^a(s) = - \frac{dN}{A} A(s) - \frac{Q_x}{I_y} S_y(s) - \frac{Q_y}{I_x} S_x(s) - \frac{M_\omega}{I_\omega} S_\omega(s), \tag{1.184}$$

$$\left(\oint_i \frac{ds}{t} \right) \bar{q}_i - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \left(\oint_{s_{ik}} \frac{ds}{t} \right) \bar{q}_k = - \oint_i \frac{q^a}{t} ds, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.185}$$

Kotelon deplanaatio

$$\int_0^s \frac{\partial w}{\partial s} ds = -\theta \left(\int_0^s h(s) ds - \int_0^s \tilde{q}(s) \frac{ds}{t} \right) = -\theta \hat{\omega}(s), \quad (1.186)$$

$$\tilde{q}(s) = \frac{q^v}{G\theta}, \quad (1.187)$$

$$\left(\oint_i \frac{ds}{t} \right) \tilde{q}_i - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \left(\int_{s_{ik}} \frac{ds}{t} \right) \tilde{q}_k = 2\Omega_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.188)$$

Vääntökeskiön asema:

$$\int \hat{\omega}(s)x(s)t(s) ds = 0, \quad \int \hat{\omega}(s)y(s)t(s) ds = 0, \quad \int \hat{\omega}(s)t(s) ds = 0. \quad (1.189)$$

Yksinkertaisessa kotelosauvan teoriassa

$$EI_{\hat{\omega}} \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - GI_v \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = m(z), \quad (1.190)$$

$$I_{\hat{\omega}} = \int \hat{\omega}^2(s)t(s) ds. \quad (1.191)$$

Yhteensopivuusehto

$$\bar{q} \oint \frac{ds}{t} + \oint q^a \frac{ds}{t} = 0, \quad (1.192)$$

$$q^a = -\frac{M_{\omega}}{I_{\omega}} S_{\omega}, \quad S_{\omega} \int \hat{\omega} t ds. \quad (1.193)$$

Jos $I_{xy} = 0$,

$$x_A = x_B + \frac{\int y \hat{\omega}_B dA}{I_x}, \quad y_A = y_B - \frac{\int x \hat{\omega}_B dA}{I_y}. \quad (1.194)$$

$$\hat{\omega}_A = \hat{\omega}_B - (x_A - x_B)y + (y_A - y_B)x + \omega_0. \quad (1.195)$$

Sektoriaalinen staattinen momentti

$$S_{\hat{\omega}} = S_{\omega} - \bar{q} = -(q^a + \bar{q}), \quad (1.196)$$

kun $M_{\omega}/I_{\omega} = 1$. Leikkausvuo

$$q = q^v + q^a + \bar{q}. \quad (1.197)$$

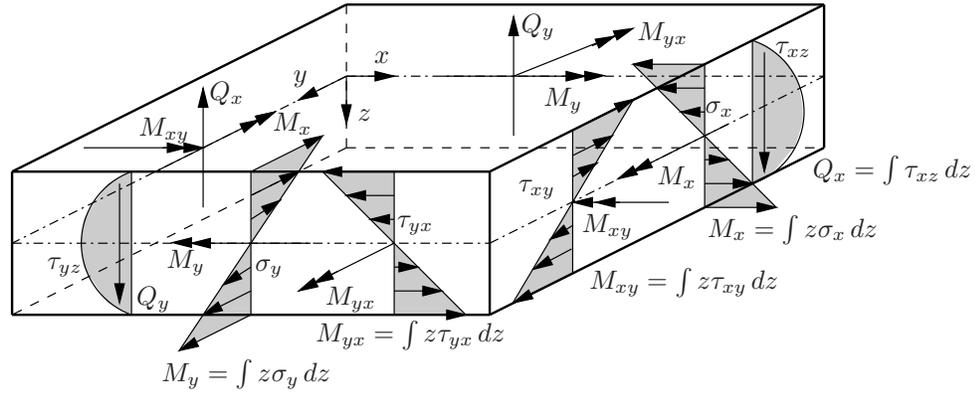
1.6 Ohuen laatan perusyhtälöt

Siirtymät

$$u = -zw_{,x} \equiv -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -zw_{,y} \equiv -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.198)$$

Muodonmuutoskomponentit

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -zw_{,xx}, \quad (1.199)$$



Kuva 1.10 Jännitysresultantit.

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -zw_{,yy}, \quad (1.200)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2zw_{,xy}. \quad (1.201)$$

Käyritymät ja vääntymä

$$\kappa_x = -w_{,xx}, \quad \kappa_y = -w_{,yy}, \quad \kappa_{xy} = -w_{,xy}. \quad (1.202)$$

Resultantit

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_x dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_y dz \quad \text{ja} \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{xy} dz, \quad (1.203)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad \text{ja} \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz. \quad (1.204)$$

Tasapainoyhtälöt

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0, \quad (1.205)$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad (1.206)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, \quad (1.207)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0. \quad (1.208)$$

Isotrooppisen kimmoisen aineen konstitutiiviset yhtälöt

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad (1.209)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \quad (1.210)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad (1.211)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (1.212)$$

Laatan konstitutiiviset yhtälöt

$$M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_y), \quad (1.213)$$

$$M_y = D(\nu\kappa_x + \kappa_y), \quad (1.214)$$

$$M_{xy} = D(1 - \nu)\kappa_{xy}, \quad (1.215)$$

$$M_x = -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}), \quad (1.216)$$

$$M_y = -D(\nu w_{,xx} + w_{,yy}), \quad (1.217)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu)w_{,xy}, \quad (1.218)$$

taivutusjäykkyys

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (1.219)$$

Jännityskomponentit

$$\sigma_x = z\frac{12}{h^3}M_x, \quad \sigma_y = z\frac{12}{h^3}M_y, \quad \tau_{xy} = z\frac{12}{h^3}M_{xy}. \quad (1.220)$$

Leikkausvoimat

$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 w), \quad (1.221)$$

$$Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 w), \quad (1.222)$$

Laplacen operaattori

$$\nabla^2(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial y^2}. \quad (1.223)$$

Momenttisumma

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} = -D\nabla^2 w, \quad (1.224)$$

$$Q_x = \frac{\partial M}{\partial x}, \quad Q_y = \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (1.225)$$

Differentiaaliyhtälö

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (1.226)$$

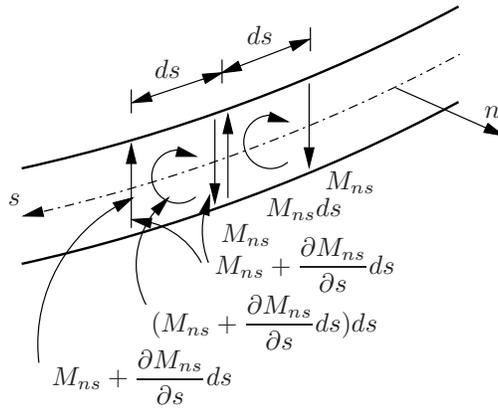
osiin

$$\nabla^2 M = -p, \quad \nabla^2 w = -\frac{M}{D}. \quad (1.227)$$

Leikkausjännitysten maksimiarvot

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q_x}{h}, \quad (\tau_{yz})_{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{h}. \quad (1.228)$$

Leikkausvoima Q_n reunalla $n = \text{vakio}$



Kuva 1.11 Korvikeleikkausvoima reunalla, jonka normaali on n .

$$Q_n = \frac{\partial M_n}{\partial n} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}, \quad (1.229)$$

korvikeleikkausvoima reunalla $n = \text{vakio}$

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \frac{\partial M_n}{\partial n} + 2\frac{\partial M_{ns}}{\partial s}. \quad (1.230)$$

Reunalla $x = \text{vakio}$

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \\ &= -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\}, \end{aligned} \quad (1.231)$$

reunalla y on vakio

$$\begin{aligned} V_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, \\ &= -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\}. \end{aligned} \quad (1.232)$$

Kuvan 1.12 vapaasti tuetun laatan suorakulmisen nurkan voima

$$R = -2M_{xy} = 2D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1.233)$$

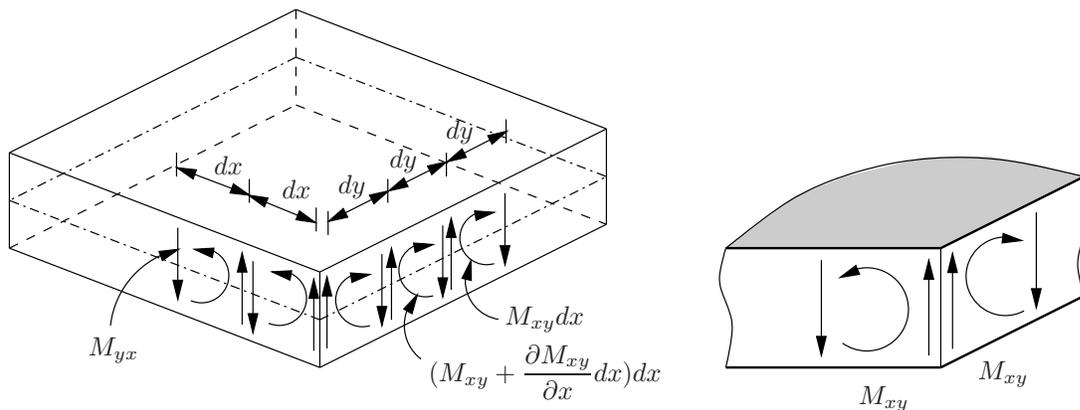
Laatan tasapainoyhtälö

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}. \quad (1.234)$$

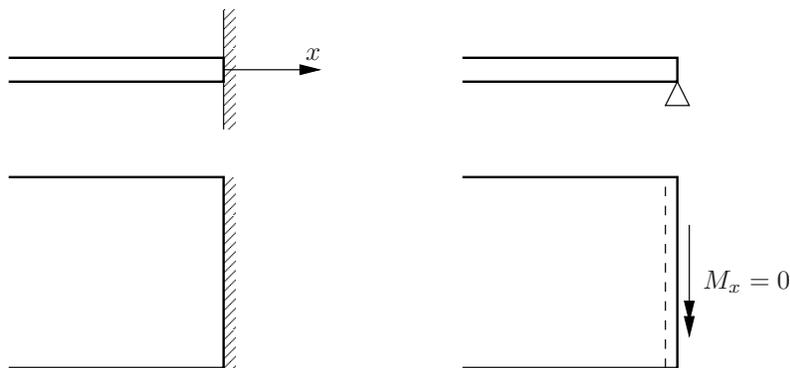
Reunaehdot

1. Jäykästi kiinnitetyllä reunalla ($x = a$)

$$w(a, y) = 0, \quad w_{,x}(a, y) = 0. \quad (1.235)$$



Kuva 1.12 a) Korkivikeleikkausvoiman muodostaminen reunalla $x = \text{vakio}$, b) nurkkavoima.



Kuva 1.13 a) Jäykästi tuettu reuna, b) vapaasti tuettu reuna.

2. Vapaasti tuetulla reunalla ($x = a$)

$$w(a, y) = 0, \quad (1.236)$$

$$M_x(a, y) = -D[w_{,xx}(a, y) + \nu w_{,yy}(a, y)] = 0. \quad (1.237)$$

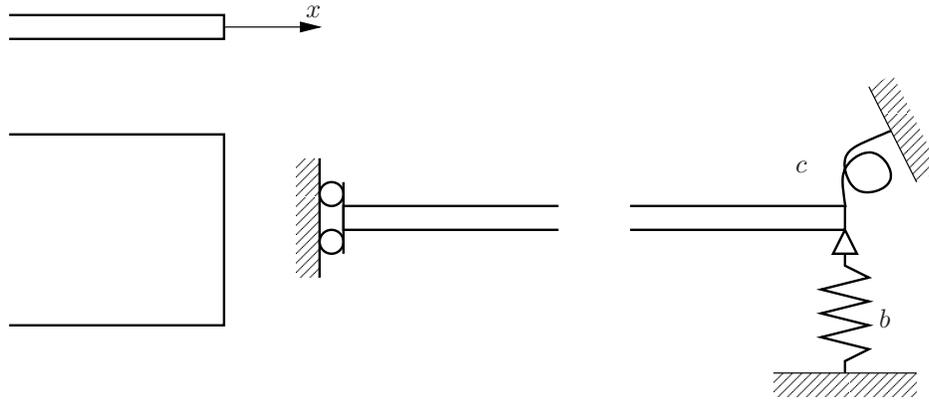
Jos vapaasti tuettu reuna, ($x = a$), pysyy suorana,

$$w_{,xx}(a, y) = 0. \quad (1.238)$$

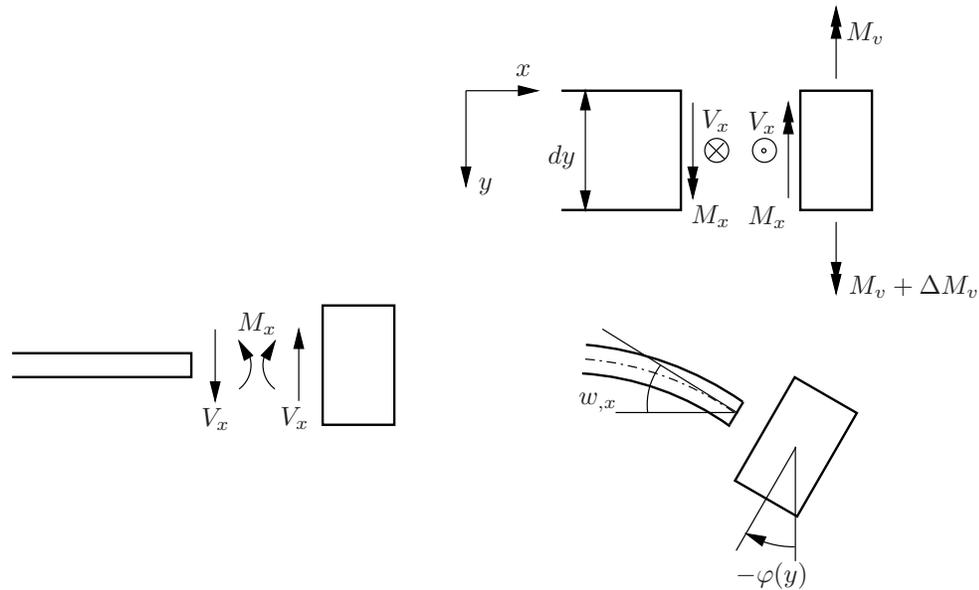
3. Vapaalla reunalla

$$M_x(a, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \text{kun } x = a, \quad (1.239)$$

$$V_x(a, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad \text{kun } x = a. \quad (1.240)$$



Kuva 1.14 a) Vapaa reuna, b) liukutuki, c) kimmainen kiinnitys.



Kuva 1.15 Kiinnitys reunapalkkiin.

4. Liukutuella

$$\frac{\partial w(a, y)}{\partial x} = 0, \quad (1.241)$$

$$V_x(a, y) = 0. \quad (1.242)$$

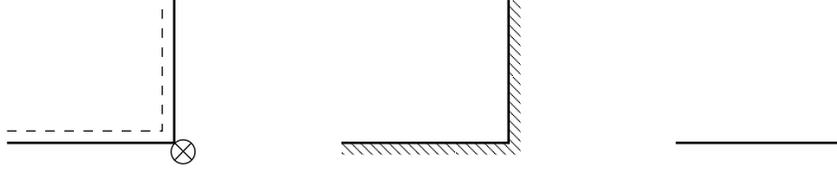
5. Joustava tuenta translaatio- ja kierrejousella

$$M_x = c \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \text{kun } x = a, \quad (1.243)$$

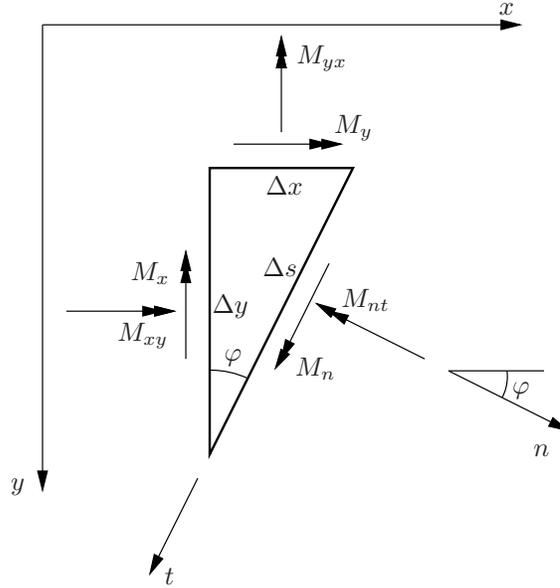
$$V_x = -bw, \quad \text{kun } x = a. \quad (1.244)$$

6. Reunapalkki, kuva 1.15

$$EI \frac{d^4 v}{dy^4} = q, \quad (1.245)$$



Kuva 1.16 a) Vapaasti tuettu, b) kiinnitetty ja c) vapaa laatan nurkka.



Kuva 1.17 Taivutusmomentti ja vääntömomentti leikkauksessa φ .

$$GI_v \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + m = 0, \quad (1.246)$$

$$q(y) = -V_x(a, y) \text{ ja } m(y) = -M_x(a, y), \quad (1.247)$$

reunalla $x = a$

$$w(a, y) = v(y), \quad (1.248)$$

$$\frac{\partial w(a, y)}{\partial x} = -\varphi(y). \quad (1.249)$$

7. Kuvan 1.16 vapaasti tuetun laatan nurkka

$$R = -2M_{xy} = 2D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.250)$$

alaspäin koordinaatin z suuntaan, kuva 1.16a.

Momenttien muunnoskaavat

$$\begin{Bmatrix} M_n \\ M_t \\ M_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -2 \sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (1.251)$$

$$M_n + M_t = M_x + M_y. \quad (1.252)$$

Päämomentit

$$M_{1,2} = \frac{M_x + M_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4M_{xy}^2}. \quad (1.253)$$

Pääsuunnat

$$\tan 2\varphi = \frac{2M_{xy}}{M_x - M_y}, \quad \tan \varphi = \frac{M_1 - M_x}{M_{xy}} = \frac{M_{xy}}{M_1 - M_y}. \quad (1.254)$$

1.7 Navierin ratkaisu

Taipuma

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a} \quad \text{ja} \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}. \quad (1.255)$$

Jakautunut kuorma $p(x, y)$

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad (1.256)$$

kertoimin

$$b_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dx \, dy. \quad (1.257)$$

Taipuman sarjan kertoimet

$$a_{mn} = \frac{b_{mn}}{D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (1.258)$$

1.8 Lévy'n ratkaisumenetelmä

Taipuma

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}. \quad (1.259)$$

Kuorma $p(x, y)$

$$p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(y) \sin \alpha_n x \quad (1.260)$$

kertoimin

$$p_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p(x, y) \sin \alpha_n x \, dx. \quad (1.261)$$

$$Y_n(y) = (A_n + B_n \alpha_n y) \cosh \alpha_n y + (C_n + D_n \alpha_n y) \sinh \alpha_n y, \quad (1.262)$$

$$\frac{dY_n(y)}{dy} = \alpha_n [(A_n + D_n + B_n \alpha_n y) \sinh \alpha_n y + (C_n + B_n + D_n \alpha_n y) \cosh \alpha_n y], \quad (1.263)$$

$$\frac{d^2 Y_n(y)}{dy^2} = \alpha_n^2 [(A_n + 2D_n + B_n \alpha_n y) \cosh \alpha_n y + (C_n + 2B_n + D_n \alpha_n y) \sinh \alpha_n y], \quad (1.264)$$

$$\frac{d^3 Y_n(y)}{dy^3} = \alpha_n^3 [(A_n + 3D_n + B_n \alpha_n y) \sinh \alpha_n y + (C_n + 3B_n + D_n \alpha_n y) \cosh \alpha_n y]. \quad (1.265)$$

Yksityisratkaisu

$$\begin{aligned} Q_n(y) &= \frac{1}{D} \int_0^y \bar{Y}_n(y-t) p_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\alpha_n^3 D} \int_0^y [\alpha_n(y-t) \cosh \alpha_n(y-t) - \sinh \alpha_n(y-t)] p_n(t) dt. \end{aligned} \quad (1.266)$$

Kokonaisratkaisu

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (Y_n(y) + Q_n(y)) \sin \alpha_n x. \quad (1.267)$$

1.8.1 Lévy'n ratkaisu tapauksessa $p(x, y) = p(x)$

$$Q_n = \frac{p_n}{\alpha_n^4 D}, \quad p_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p(x) \sin \alpha_n x dx. \quad (1.268)$$

Joitakin kaavoja

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b, \quad (1.269)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b, \quad (1.270)$$

$$\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x, \quad (1.271)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1.272)$$

1.9 Vapaasti tuettu laattakaista

1.9.1 Akselin x suhteen symmetrinen kuormitus

Taipuma

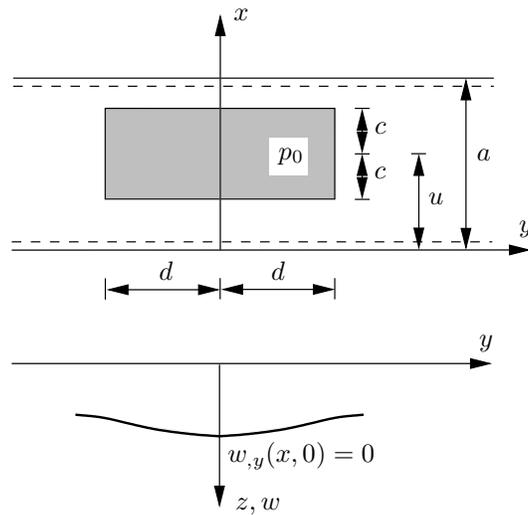
$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}. \quad (1.273)$$

Kuormitus $p(x, y)$

$$p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(y) \sin \alpha_n x \quad (1.274)$$

kertoimin

$$p_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p(x, y) \sin \alpha_n x dx. \quad (1.275)$$



Kuva 1.18 Symmetrinen palakuorma.

Taipuma y -akselilla olevasta viivakuormasta $p(x)$

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{4D\alpha_n^3} (1 + \alpha_n y) e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \text{kun } y \geq 0. \quad (1.276)$$

Taipuman muunnos

$$\bar{w}(x, \beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} w(x, y) \cos \beta y dy, \quad (1.277)$$

$$\bar{Y}_n(\beta) = \frac{\bar{p}_n(\beta)}{D(\alpha_n^2 + \beta^2)^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.278)$$

Taipuman lauseke

$$w(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{p}_n(\beta)}{D(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \cos \beta y d\beta \sin \alpha_n x. \quad (1.279)$$

Symmetrinen palakuorma

Tasainen kuorma p_0 suorakaiteessa $u - c \leq x \leq u + c$, $|y| \leq d$. Taipuman lauseke

$$w(x, y) = \frac{2p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c \sin \alpha_n x \cdot \quad (1.280)$$

$$\cdot \{2 - [(2 + \alpha_n d) \cosh \alpha_n y - \alpha_n y \sinh \alpha_n y] e^{-\alpha_n d}\}, \quad 0 \leq y \leq d,$$

$$w(x, y) = \frac{2p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c \sin \alpha_n x \cdot \quad (1.281)$$

$$\cdot \{[(2 + \alpha_n y) \sinh \alpha_n d - \alpha_n d \cosh \alpha_n d] e^{-\alpha_n y}\}, \quad y \geq d.$$

Viivakuorma

$$w(x, y) = \frac{P_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c \sin \alpha_n x \cdot \{ [2 + \alpha_n y - 1] e^{-\alpha_n y} \}, \quad y \geq 0. \quad (1.282)$$

Pistekuorma

$$w(x, y) = \frac{F a^2}{2\pi^3 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n x \cdot \{ (1 + \alpha_n y) e^{-\alpha_n y} \}, \quad y \geq 0. \quad (1.283)$$

1.9.2 Akselin x suhteen antisymmetrinen kuorma

$$\bar{w}(x, \beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} w(x, y) \sin \beta y \, dy, \quad (1.284)$$

$$\bar{p}(x, \beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} p(x, y) \sin \beta y \, dy. \quad (1.285)$$

$$\bar{Y}_n(\beta) = \frac{\bar{p}_n}{D(\alpha_n^2 + \beta^2)^2}. \quad (1.286)$$

Taipuma

$$w(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{p}_n(\beta)}{D(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \sin \beta y \, d\beta \sin \alpha_n x. \quad (1.287)$$

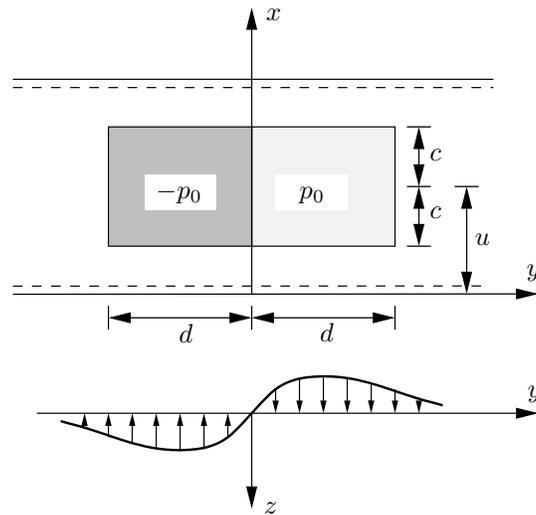
Antisymmetrinen palakuorma

Tasainen kuorma p_0 suorakaiteessa $u - c \leq x \leq u + c$, $0 \leq y \leq d$ ja kuorma $-p_0$ suorakaiteessa $u - c \leq x \leq u + c$, $-d \leq u \leq d$.

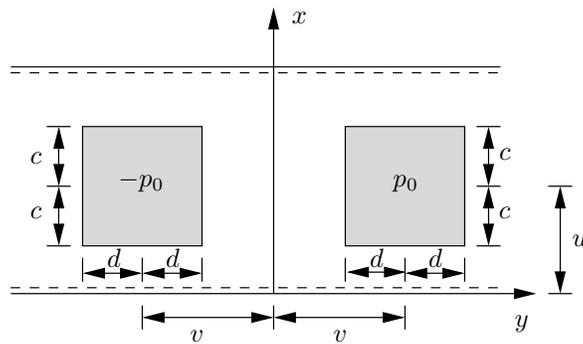
Taipuman lauseke

$$w(x, y) = \frac{2p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c \sin \alpha_n x \cdot \{ 2 - (2 + \alpha_n y) e^{-\alpha_n y} - [(2 + \alpha_n d) \sinh \alpha_n y - \alpha_n y \cosh \alpha_n y] e^{-\alpha_n d} \}, \quad 0 \leq y \leq d, \quad (1.288)$$

$$w(x, y) = \frac{2p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c \sin \alpha_n x \cdot \{ [(\cosh \alpha_n d - 1)(2 + \alpha_n y) - \alpha_n d \sinh \alpha_n d] e^{-\alpha_n y} \}, \quad y \geq d. \quad (1.289)$$



Kuva 1.19 Antisymmetrinen palakuorma.



Kuva 1.20 Antisymmetriset palakuormat vapaasti tuetulla laattakaistalla.

Palakuormat p_0 ja $-p_0$ suorakaiteessa $\Delta x = 2c, \Delta y = 2d$ ja keskipisteinä (u, v) ja $(u, -v)$

Kuvan 1.20 kuormitustapauksen ratkaisu saadaan superponoimalla. Taipuma

$$w(x, y) = \frac{4p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c \sin \alpha_n x \cdot$$

$$\cdot \{[(2 + \alpha_n v) \sinh \alpha_n d - \alpha_n d \cosh \alpha_n d] \sinh \alpha_n y - \alpha_n y \sinh \alpha_n d \cosh \alpha_n y\} e^{-\alpha_n v}, \quad (1.290)$$

$$0 \leq y \leq v - d,$$

$$\begin{aligned}
w(x, y) &= \frac{4p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c \sin \alpha_n x \cdot \\
&\cdot \frac{1}{2} \{ 2 - \{ [2 + \alpha_n (v + d)] \sinh \alpha_n y - \alpha_n y \cosh \alpha_n y \} e^{-\alpha_n (v+d)} + \\
&- [\cosh \alpha_n (v - d) (2 + \alpha_n y) - \alpha_n (v - d) \sinh \alpha_n (v - d)] e^{-\alpha_n y} \}, \quad v - d \leq y \leq v + d
\end{aligned} \tag{1.291}$$

ja

$$\begin{aligned}
w(x, y) &= \frac{4p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n c \sin \alpha_n x \cdot \\
&\cdot \{ \sinh \alpha_n v \sinh \alpha_n d (2 + \alpha_n y) - \alpha_n v \cosh \alpha_n v \sinh \alpha_n d \\
&- \alpha_n d \cosh \alpha_n d \sinh \alpha_n v \} e^{-\alpha_n y}, \quad v + d \leq y.
\end{aligned} \tag{1.292}$$

Pistekuorma F kohdassa (u, v) ja pistekuorma $-F$ kohdassa $(u, -v)$

Taipuma

$$\begin{aligned}
w(x, y) &= \frac{F a^2}{\pi^3 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n x \cdot \\
&\cdot [(1 + \alpha_n v) \sinh \alpha_n y - \alpha_n y \cosh \alpha_n y] e^{-\alpha_n v}, \quad 0 \leq y \leq v,
\end{aligned} \tag{1.293}$$

$$\begin{aligned}
w(x, y) &= \frac{F a^2}{\pi^3 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \alpha_n u \sin \alpha_n x \cdot \\
&\cdot [(1 + \alpha_n y) \sinh \alpha_n v - \alpha_n v \cosh \alpha_n v] e^{-\alpha_n y}, \quad y \geq v.
\end{aligned} \tag{1.294}$$

1.9.3 Vapaasti tuettu puoliääretön laattakaista

Taipuma on $w = w_0 + w_1$, missä w_0 on vapaasti tuetun äärettömän laattakaistan ratkaisu ja w_1 on homogeenisen yhtälön ratkaisu

$$w_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + D_n \alpha_n y) e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x. \tag{1.295}$$

Liite A

Fourier-sarjat

Jos $f(x)$ on paloittain jatkuva välillä $(-L, L)$ ja sillä on äärellinen määrä ääriarvokohtia, niin se voidaan kehittää tällä välillä Fourier-sarjaksi

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right] \quad (\text{A.1})$$

kertoimin

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{A.2})$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.3})$$

Parillisen jaksollisen funktion, $f(-x) = f(x) \quad \forall x$, Fourier-sarjan kertoimet

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad b_n = 0. \quad (\text{A.4})$$

Parittoman jaksollisen funktion, $f(-x) = -f(x)$, Fourier-sarjan kertoimet

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad a_n = 0. \quad (\text{A.5})$$

Kaksoissinisarjan kertoimet

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (\text{A.6})$$

Liite B

Fourier-muunnos

Parittoman funktion $f(x) = -f(-x)$ Fourier-sinimuunnos ja käänteismuunnos ovat

$$\bar{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \alpha \xi d\xi, \tag{B.1}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{f}(\alpha) \sin \alpha x d\alpha.$$

Muunnoksen edellytyksenä on, että

1. $f(x)$ on paloittain jatkuva jokaisella äärellisellä välillä,
2. $f(x)$ on absoluuttisesti integroitava eli

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < M < \infty. \tag{B.2}$$

Parillisen funktion $f(-x) = f(x)$ kosinimuunnos on vastaavasti

$$\bar{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \alpha \xi d\xi, \tag{B.3}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{f}(\alpha) \cos \alpha x d\alpha.$$

Symmetrisen funktion f toisen derivaatan muunnos on

$$\bar{f}_{,xx}(\alpha) = -\alpha^2 \bar{f}(\alpha). \tag{B.4}$$

Taulukko B.1 Fourier-sinimuunnoksia

$f(x)$	$\bar{f}(\alpha)$
$f = 1, \quad 0 < x < a,$ $f = 0, \quad a < x < \infty$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos \alpha a}{\alpha}$
$\frac{1}{x}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \Re y > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha y}$
$\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \Re y > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha e^{-\alpha y}$
$\arctan \frac{x}{y}, \quad \Re y > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha y}$
$\frac{1}{4} \ln \frac{(x+c)^2 + y^2}{(x-c)^2 + y^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha y} \sin \alpha c$
$\frac{y}{(c-x)^2 + y^2} - \frac{y}{(c+x)^2 + y^2},$ $\Re y > 0, \quad c + iy \notin \Re$	$\sqrt{2\pi} e^{-\alpha y} \sin \alpha c$
$\frac{1}{x} \sin \beta x, \quad \beta > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \ln \left \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right $
$\frac{\pi}{2} e^{-kx}, \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2}$
$\frac{\pi}{4} (2 - kx) e^{-kx}, \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha^3}{(\alpha^2 + k^2)^2}$
$\frac{\pi}{4} \frac{x}{k} e^{-kx}, \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + k^2)^2}$
$\frac{\pi}{4} \frac{1}{k^4} [2 - (2 + kx) e^{-kx}], \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha(\alpha^2 + k^2)^2}$
$\frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2} (1 - e^{-kx}), \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha(\alpha^2 + k^2)}$

Taulukko B.2 Fourier-kosinimuunnoksia

$f(x)$	$\bar{f}(\alpha)$
$f = 1, \quad 0 < x < a,$ $f = 0, \quad a < x < \infty$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha a}{\alpha}$
$\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \Re y > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha y}$
$\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \Re y > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha e^{-\alpha y}$
$\frac{1}{2} \ln \left \frac{x^2 + z^2}{x^2 + y^2} \right , \quad y > 0, \quad z > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha y} - e^{-\alpha z})$
$\frac{c - x}{(c - x)^2 + y^2} + \frac{c + x}{(c + x)^2 + y^2}$	$\sqrt{2\pi} e^{-\alpha y} \sin \alpha c, \quad \Re y > \Im c $
$\frac{y}{(c - x)^2 + y^2} + \frac{y}{(c + x)^2 + y^2}$	$\sqrt{2\pi} e^{-\alpha y} \cos \alpha c, \quad \Re y > \Im c $
$\frac{\pi}{2} \frac{1}{k} e^{-kx}, \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha^2 + k^2}$
$\frac{\pi}{4} \frac{1}{k} (1 - kx) e^{-kx}, \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + k^2)^2}$
$\frac{\pi}{4} \frac{1}{k^3} (1 + kx) e^{-kx}, \quad k > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\alpha^2 + k^2)^2}$
$\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2}{x^2} \right)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha} \sin \alpha$