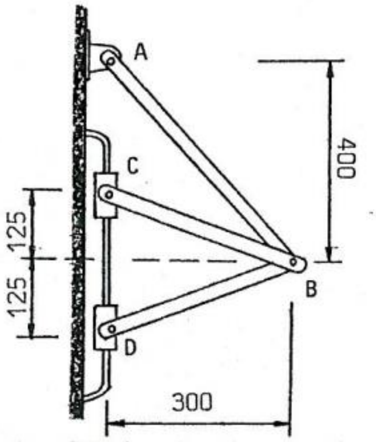
Tampereen Yliopisto / Rakennustekniikan yksikkö
RAK-31040 STATIIKAN JA DYNAMIIKAN PERUSTEET, 5 op
Kesä 2020, Harjoitus 8.

(Dynamiikka: Jäykän kappaleen kinematiikka)



20. Kaksi luistia C ja D liikkuvat pitkin pystysuoraa tankoa. Luistin D nopeus kuvan tarkasteluhetkellä on 0,210 m/s alaspäin. Määritä vektorialgebran keinoin luistin C nopeus ja sauvan AB kulmanopeus tarkasteluhetkellä. Kuvan mitat ovat millimetrejä.

Vast: −0,167 1/s , 0,110 m/s

yks (mm, s)

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BD} \times \vec{r}_{D/B} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega}_{BD} \times \vec{r}_{D/B}$$

$$\Rightarrow \quad -210\,\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{AB} \\ 300 & -400 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{BD} \\ -300 & -125 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \vec{i}: & 0 = 400\,\omega_{AB} + 125\,\omega_{BD} \\ \vec{j}: & -210 = 300\,\omega_{AB} - 300\,\omega_{BD} \end{array} \quad \Big/ \begin{array}{l} 12 \\ 5 \end{array} \Big\} +$$

$$\Rightarrow \quad -1050 = 6300\,\omega_{AB} \quad \Rightarrow \quad \omega_{AB} = -0{,}167\ 1/s$$

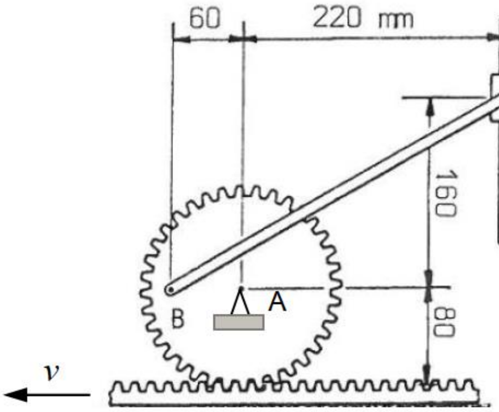
$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \times \vec{r}_{C/B} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega}_{BC} \times \vec{r}_{C/B}$$

$$\Rightarrow \quad v_C\,\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{AB} \\ 300 & -400 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{BC} \\ -300 & 125 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \vec{i}: & 0 = 400\,\omega_{AB} - 125\,\omega_{BC} \\ \vec{j}: & v_C = 300\,\omega_{AB} - 300\,\omega_{BC} \end{array} \quad \Big/ \begin{array}{l} -12 \\ 5 \end{array} \Big\} +$$

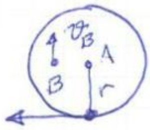
$$5\,v_C = -3300\,\omega_{AB}$$

$$v_C = -660\,\omega_{AB} = 110\ \mathrm{mm/s} = 0{,}110\ \mathrm{m/s}\ \uparrow$$



2. Määritä pisteen D nopeus ja kiihtyvyys kuvan hetkellä. Hammaspyörän keskipiste A on kiinnitetty paikalleen nivelellä ja vaakasuora hammastanko C liikkuu vakionopeudella v = 2 m/s vasemmalle. Kuvan tilanteessa pisteet A ja B ovat samalla korkeudella.

Ratkaisu JÄRJ (m, s)



$v_P = 2$

$$v_P = \omega_A r \Rightarrow \omega_A = \frac{v_P}{r} = \frac{2}{0{,}08} = 25$$

$$v_B = \omega_A |AB| = 25 \cdot 0{,}06 = 1{,}5 \uparrow$$

$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BD} \times \vec{r}_{D/B} = 1{,}5\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{BD} \\ 0{,}28 & 0{,}16 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -0{,}16\,\omega_{BD}\vec{i} + (1{,}5 + 0{,}28\,\omega_{BD})\vec{j}$$

ehto: $v_{Dx} = 0 \Rightarrow \omega_{BD} = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{v}_D = 1{,}5\vec{j}}}$$ ◁

Kiihtyvyydet vastaavasti:

$$\vec{a}_P = \omega_A^2 r \vec{j} = 50\vec{j}$$ ($\alpha_A = 0$, koska $v_P = 2$, vakio)

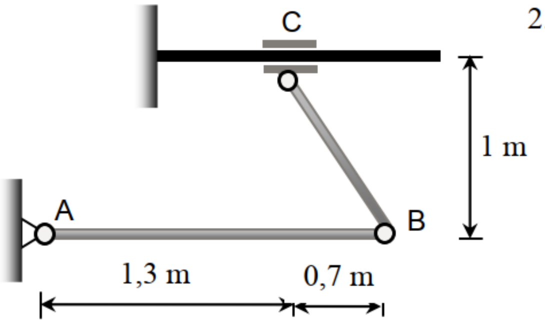
$$\vec{a}_B = \omega_A^2 |AB| \vec{i} = 37{,}5\vec{i}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BD} \times \vec{r}_{D/B} - \underbrace{\omega_{BD}^2 \vec{r}_{D/B}}_{0}$$

$$= 37{,}5\vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \alpha_{BD} \\ 0{,}28 & 0{,}16 & 0 \end{vmatrix} = (37{,}5 - 0{,}16\,\alpha_{BD})\vec{i} + 0{,}28\,\alpha_{BD}\vec{j}$$

ehto: $a_{Dx} = 0 \Rightarrow 37{,}5 - 0{,}16\,\alpha_{BD} = 0 \Rightarrow \alpha_{BD} = 234{,}4$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{a}_D}} = 0{,}28\,\alpha_{BD}\vec{j} = \underline{\underline{65{,}6\vec{j}}}$$ ◁



2. Laske sauvan AB kulmanopeus ja kulmakiihtyvyys kuvan hetkellä. Piste C liikkuu vakionopeudella 1 m/s oikealle. Sauva BC on tuettu pisteessä C kiinteään vaakasuoraan tankoon luistituella.

Ratkaisu: järj (m, s)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A}$$

$$= \vec{0} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{AB} \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\omega_{AB}\vec{j}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \times \vec{r}_{C/B}$$

$$= 2\omega_{AB}\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{BC} \\ -0{,}7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\omega_{AB}\vec{j} - \omega_{BC}\vec{i} - 0{,}7\omega_{BC}\vec{j}$$

$$v_{Cy} = 0 \Rightarrow 2\omega_{AB} - 0{,}7\omega_{BC} = 0 \Rightarrow \omega_{AB} = -0{,}35 \blacktriangleleft$$

$$v_{Cx} = 1 \Rightarrow -\omega_{BC} = 1 \Rightarrow \omega_{BC} = -1$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} - \omega_{AB}^2 \vec{r}_{B/A}$$

$$= \vec{0} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \alpha_{AB} \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 0{,}35^2 \cdot 2\vec{i}$$

$$= -2 \cdot 0{,}35^2 \vec{i} + 2\alpha_{AB}\vec{j}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BC} \times \vec{r}_{C/B} - \omega_{BC}^2 \vec{r}_{C/B}$$

$$\Leftrightarrow \vec{0} = \vec{a}_B + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \alpha_{BC} \\ -0{,}7 & 1 & 0 \end{vmatrix} - (-0{,}7\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{0} = (-2 \cdot 0{,}35^2 - \alpha_{BC} + 0{,}7)\vec{i} + (2\alpha_{AB} - 0{,}7\alpha_{BC} - 1)\vec{j}$$

$$\vec{i}: \; -2 \cdot 0{,}35^2 - \alpha_{BC} + 0{,}7 = 0 \Rightarrow \alpha_{BC} = 0{,}7 - 2 \cdot 0{,}35^2 \approx 0{,}455$$

$$\vec{j}: \; 2\alpha_{AB} - 0{,}7\alpha_{BC} - 1 = 0 \Rightarrow \alpha_{AB} = \frac{1 + 0{,}7\alpha_{BC}}{2} \approx 0{,}659 \blacktriangleleft$$