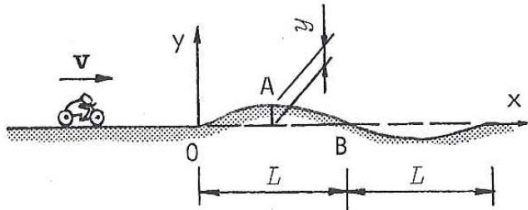


Tampereen Yliopisto / Rakennustekniikan yksikkö
RAK-31040 STATIIKAN JA DYNAMIIKAN PERUSTEET, 5 op
 Kesä 2020, Harjoitus 7.

(Dynamiikka: Partikkelin käyräviivainen liike)



22. Moottoripyöräilijä ajaa vakionopeudella v yli tienpinnan epätasaisen kohdan, jota voidaan kuvata likimain yhtälöllä

$$y = \hat{y} \sin(\pi x / L)$$

Määritä moottoripyöräilijän kiihtyvyys kohdassa A. $v = 100 \text{ km/h}$, $L = 10 \text{ m}$, $\hat{y} = 0,10 \text{ m}$

Vast: $7,62 \text{ m/s}^2$

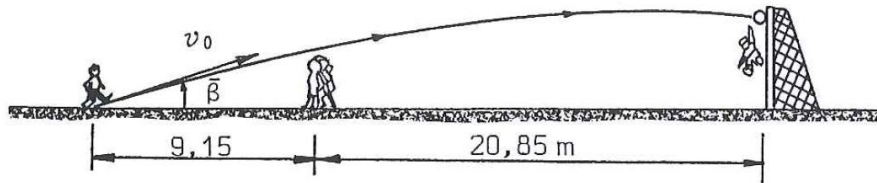
2. TAPA: $y = \hat{y} \sin(\pi x / L) \Rightarrow \dot{y} = \hat{y} \frac{\pi}{L} \cos(\frac{\pi x}{L}) \dot{x}$

$$\ddot{y} = \hat{y} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (-\sin(\frac{\pi x}{L})) \dot{x}^2 + \hat{y} \frac{\pi}{L} \cos(\frac{\pi x}{L}) \ddot{x}$$

$$\dot{x} = v \text{ (vakio)} \Rightarrow \ddot{x} = 0$$

$$x = \frac{L}{2} \Rightarrow \ddot{y} = \hat{y} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (-\sin(\frac{\pi}{2})) v^2$$

$$\Rightarrow a_A = -\hat{y} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 v^2 \approx -7,615 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \triangleleft$$



29. Brasilia on saanut vapaapotkun 30 m etäisyydeltä maalista. *Ronaldinho* asettuu ampumaan vapaapotkua. Millä alkunopeudella v_0 ja kulmalla $\bar{\beta}$ on *Ronaldinhon* laukaistava, jotta pallo juuri ylittäisi pelaajamuurin, jonka korkeus on 1,95 m ja jotta laukaus suuntautuisi kohti maalin ylänurkkaa korkeudelle 2,33 m? Paljonko Englannin maalivahdille *David Seamanille* jää torjunta-aikaa, kun hän huomaa pallon vasta sen ylitettyä pelaajamuurin? Ilmanvastusta ei oteta huomioon.

Vast: $15,2^\circ$, $28,5 \text{ m/s}$, $0,758 \text{ s}$

järj. (m, s)

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - g t \vec{j} \quad , \quad \vec{r} = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{j} \quad , \quad \vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{i} + v_0 \sin \alpha \vec{j}$$

t_1 , kun pallo on muurin kohdalla

t_2 , kun pallo on maalin kohdalla

$$\text{ehdot: } \begin{cases} v_0 \cos \alpha t_1 = 9,15 \\ v_0 \sin \alpha t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 1,95 \end{cases} \Rightarrow t_1 = \frac{9,15}{v_0 \cos \alpha} \quad (1)$$

$$\& \begin{cases} v_0 \cos \alpha t_2 = 30 \\ v_0 \sin \alpha t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = 2,33 \end{cases} \Rightarrow t_2 = \frac{30}{v_0 \cos \alpha} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9,15 \tan \alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{9,15}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 = 1,95 \\ 30 \tan \alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{30}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 = 2,33 \end{cases} \Rightarrow \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{9,15} - \frac{1,95}{9,15} \quad (3)$$

$$\Rightarrow 30 \tan \alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{30}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 = 2,33 \Rightarrow$$

$$30 \tan \alpha - \frac{30}{9,15} \left(\tan \alpha - \frac{1,95}{9,15} \right) = \frac{2,33}{30} \Rightarrow \tan \alpha \approx 0,2725$$

$$(3) \Rightarrow \Rightarrow \alpha \approx 15,24^\circ \quad \blacktriangleleft$$

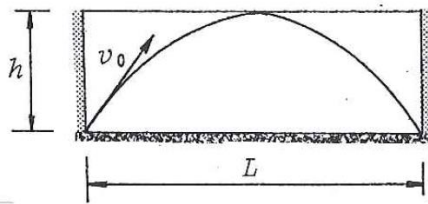
$$\frac{9,81}{2 v_0^2 \cos^2 15,24^\circ} = \frac{\tan 15,24^\circ}{9,15} - \frac{1,95}{9,15} \Rightarrow v_0 \approx 28,50 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \blacktriangleleft$$

$$v_0 \approx 102,6 \text{ km/h}$$

$$(1) \Rightarrow t_1 = \frac{9,15}{28,50 \cos 15,24^\circ} \approx 0,3328$$

$$(2) \Rightarrow t_2 = \frac{30}{28,50 \cos 15,24^\circ} \approx 1,0910$$

$$\text{Torjunta-aika: } T = t_2 - t_1 = 1,0910 - 0,3328 \approx 0,758 \text{ s} \quad \blacktriangleleft$$



32. Kuinka pitkä on voimistelusalin oltava, jotta siellä voidaan heittää pallo lähtönopeudella v_0 , kun salin korkeus on h ja ilmanvastusta ei oteta huomioon?

Vast: $L = 4h \sqrt{v_0^2 / (2gh) - 1}$

$$x = v_0 t \cos \beta$$

$$y = v_0 t \sin \beta - \frac{1}{2} g t^2$$

Lakikorkeudella: $v_y \equiv \dot{y} = 0$

$$\Rightarrow v_0 \sin \beta - g \bar{t} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{t} = \frac{v_0 \sin \beta}{g}$$

$$h = y(t = \bar{t}) = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} \sin^2 \beta - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} \sin^2 \beta = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \beta$$

$$\Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{2gh}{v_0^2} \Rightarrow \sin \beta = \frac{1}{v_0} \sqrt{2gh}$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{1}{v_0} \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

$$\Rightarrow L = 2x(t = \bar{t}) = 2 \frac{v_0^2}{g} \sin \beta \cos \beta$$

$$= 2 \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{1}{v_0} \sqrt{2gh} \cdot \frac{1}{v_0} \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

$$\Rightarrow L = 4h \sqrt{\frac{v_0^2}{2gh} - 1}$$

$v_0 \geq \sqrt{2gh}$, jotta pallo juuri ja juuri ei kosketa kattoon ja lentää salin päästä päähän.