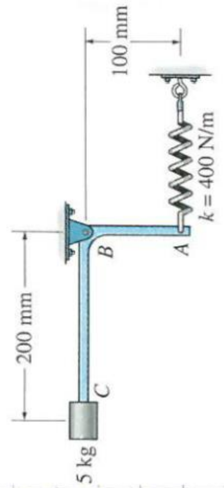
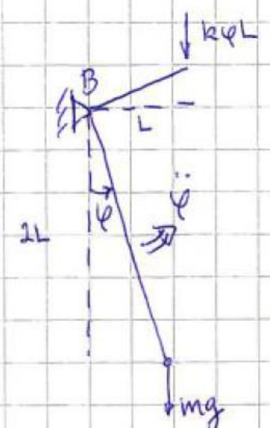
Tampereen Yliopisto / Rakennustekniikan yksikkö
RAK-31040 STATIIKAN JA DYNAMIIKAN PERUSTEET, 5 op
Kesät 2020, Harjoitus 11.

(Dynamiikka: Yhden vapausasteen värähtely)



2. Määritä oheisen rakenteen ominaisvärähtelyn värähdysaika T. Kulmapalkin oma massa on merkityksetön 5 kg pistemassaan verrattuna.

Ratkaisu:



$$B): -mg\varphi 2L - k\varphi L\cdot L = m(2L)^2\ddot{\varphi}$$

$$\Rightarrow 4mL^2\ddot{\varphi} + (kL^2 + 2mgL)\varphi = 0$$

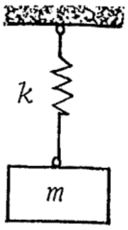
$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{kL^2 + 2mgL}{4mL^2}\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{kL^2 + 2mgL}{4mL^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{400\,\frac{N}{m}\cdot(0{,}1\,m)^2 + 2\cdot 5\,kg\cdot 9{,}81\,m/s^2\cdot 0{,}1\,m}{4\cdot 5\,kg\cdot(0{,}1\,m)^2}}$$

$$= 8{,}3096\ 1/s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}756\ s$$



1. Kuvan jouseen ripustettu massa m päästetään irti kohdasta, jossa jousessa ei ole venymää. Laske näin syntyvän ominaisvärähtelyn amplitudi.

Vast: $\hat{u} = u_{st} = mg/k$

Mitataan siirtymää $u(t)$ staattisesta tasapainoasemasta, jossa jousella on venymä u_{st}

$$u_{st} = mg/k$$

Massan liikeyhtälö on

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$\omega^2 = k/m$$

Alkuehto: $u(0) = -u_{st}$ (jousessa ei venymää)

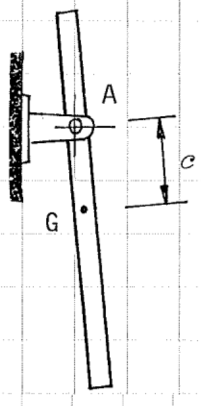
$$u(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$$

$$\begin{cases} u(0) = -u_{st} \\ \dot{u}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -u_{st} = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 \\ 0 = C_1\omega \cdot 1 - C_2\omega \cdot 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad \& \quad C_2 = -u_{st}$

$\Rightarrow \quad u(t) = -u_{st} \cos\omega t$

$\Rightarrow \quad \hat{u} = u_{st} = mg/k$ ◄

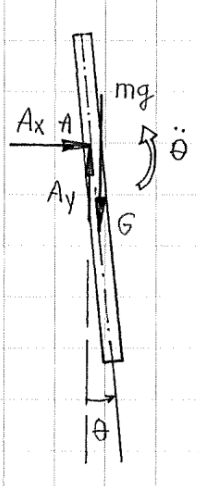


2. Kuvan tasapaksu ja homogeeninen sauva, jonka pituus $L = 1\,\mathrm{m}$, on laakeroitu kitkattomasti kohdasta A. Sauvan pienten heilahdusten värähdysajaksi halutaan 1,6 s. Mitoita etäisyys c.

$$J_A = J_G + mc^2 \qquad \text{(STEINER)}$$

$$J_G = \frac{1}{12} mL^2$$

$$\Rightarrow \quad J_A = m\left(\frac{L^2}{12} + c^2\right)$$



$$\curvearrowleft A) \qquad J_A \ddot{\theta} = -mgc \sin\theta$$

$$\theta \text{ pieni}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta \approx \theta$$

$$\Rightarrow \quad m\left(\frac{L^2}{12} + c^2\right)\ddot{\theta} + mgc\,\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{gc}{\frac{L^2}{12} + c^2}\,\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{gc}{\frac{L^2}{12} + c^2}$$

$$\Rightarrow$$

$$c^2 - \frac{g}{\omega^2}c + \frac{L^2}{12} = 0$$

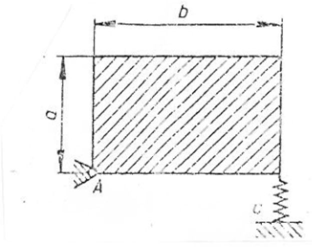
$$\Rightarrow \quad c = \frac{g}{2\omega^2} \pm \sqrt{\left(\frac{g}{2\omega^2}\right)^2 - \frac{L^2}{12}} \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1{,}6\,s} \approx 3{,}927\,\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{9{,}81}{2\cdot 3{,}927^2} \pm \sqrt{\left(\frac{9{,}81}{2\cdot 3{,}927^2}\right)^2 - \frac{1{,}0}{12}} = (0{,}3181 \pm 0{,}1337)\,m$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 0{,}4518\ m \\ c_2 = 0{,}1844\ m \end{cases}$$

$\triangleleft$

1) Homogeeninen suorakaide, jonka massa on m, on tuettu kuvion osoittamalla tavalla. Määrää pienten heilahdusten heilahdusaika.

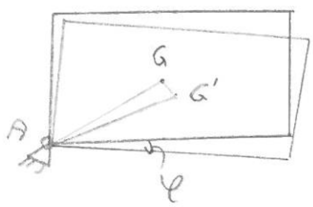


Huom. Tehtävän annossa on merkattu jousivakiota c:llä.

staattinen tasapaino tila

$$\overset{\curvearrowleft}{A} \quad -mg\frac{b}{2} + cxb = 0 \quad \Rightarrow \quad cxb = mg\frac{b}{2}$$

x = jousen puristuma



Liikeyhtälö

$$M_A = I_A\ddot{\varphi}$$

$$\therefore \quad -c(x+b\varphi)b + mg\left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2}\varphi\right) = I_A\ddot{\varphi}$$

$$\therefore \quad \left(-cb^2 + mg\frac{a}{2}\right)\varphi = I_A\ddot{\varphi}$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{I_A}\left(cb^2 - mg\frac{a}{2}\right)\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$$

$$I_A = \int_{y=0}^{a}\int_{x=0}^{b}(x^2+y^2)\,dm = \frac{a^2+b^2}{3}m$$

$$\omega^2 = \frac{cb^2 - mg\frac{a}{2}}{\frac{a^2+b^2}{3}m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{(a^2+b^2)m}{3\left(cb^2 - mg\frac{a}{2}\right)}}$$

HUOM. Hitausmomenttia on merkattu termillä I normaalin J:n sijaan.