

KÄYTÄNNÖN NÄKÖKOHTIA RAKENTEIDEN STABIILIUSANALYYSIIN

Reijo Kouhia

TKK, Rakenteiden mekaniikka, PL 2100, 02015 TKK

TIIVISTELMÄ

Hoikkien puristettujen rakenteiden suunnittelussa stabiiliusanalyysi on mitoitusprosessin yksi olennaisimpia vaiheita. Nykykäytännössä tämä merkitsee usein vain yksittäisen rakenneosan mitoitusta kriittisen kuorman suhteen vaikka tehokkaita rakennelaskentaohjelmistoja olisi käytössä. Esitelmässä keskitytään stabiiliusanalyysin suorittamiseen olettaen että suunnittelijalla on käytössään tavanomainen kaupallinen elementtimenetelmäohjelmisto. Näiden rajoituksia käsitellään samaten kuin hyvään analyysitapaan kuuluvia välttämättömiä vaiheita. Periaatteita voidaan soveltaa kaikentyyppisten rakenteiden, kuten sauvojen, levyjen ja kuorten kriittisen käyttäytymisen analysointiin.

AVAINSANAT

Stabiiliusanalyysi, epälineaarinen yhtälösystemi, ominaisarvoanalyysi, häiriöherkkyys.

JOHDANTO

Kunnollisen stabiiliusanalyysiin kuuluu vähintään kaksi vaihetta: (i) kriittisen kuorman määrittäminen ja (ii) rakenteen häiriöherkkyuden selvittäminen. Kriittisen kuorman ja sitä vastaavan siirtymämuodon määrittäminen johtaa epälineaariseen ominaisarvotehtävään, jonka ratkaisuun soveltuvia kaupallisia ohjelmistoja ei tiettävästi ole käytössä. Ongelmaa voidaan lähestyä myös sarjamuotoisella ratkaisulla, eli kehittämällä ominaisarvoongelma Taylorin sarjaksi kuormaparametrin suhteen, jolloin se redusoituu polynomi-muotoiseksi ominaisarvotehtäväksi. Kaupallisissa ohjelmissa yleensä ainoa mahdollisuus on ratkaista deformatumattoman alkutilan suhteen linearisoitu ominaisarvotehtävä. Tiettyissä tapauksissa, esimerkiksi laakeiden kaarien ja kuorien analyyseissä, alkutilan suhteen linearisoitu ominaisarvotehtävä aliarvioi kriittistä kuormaa.

Rakenteiden häiriöherkkyuden määrittämiseen (kriittisen kuorman suhteen) ei kaupallisissa ohjelmistoissa ole suoria työkaluja. Käytännössä häiriöherkkyysanalyysi suoritetaan ratkaisemalla muotovirheellisten rakennemallien tasapainopoluja ja tutkimalla niiden ominaisuuksia. Ongelmana on muotovirheen oikea valinta ja siinä onnistuminen on erityisen riippuvainen analyysoijan taidoista. Tässä artikkelissa pyritään keskittymään mahdollisiin ongelmatilanteisiin.

STABIILIUSONGELMAN FORMULOINTI

Yleinen tapaus ja määritelmiä

Rakenteen tasapainoyhtälöt voidaan esittää sisäisten rasitus suureiden $\mathbf{r}$ ja ulkoisten kuormien $\mathbf{p}$ välisenä tasapainoehtona:

$$\mathbf{f} = \mathbf{r} - \lambda \mathbf{p}_r = \mathbf{0}, \quad (1)$$

missä on oletettu ulkoisten kuormien intensiteetin riippuvan yhdestä parametrasta λ . Sisäiset voimat $\mathbf{r}$ ja mahdollisesti myös ulkoinen referenssikuormitus $\mathbf{p}_r$ riippuvat impliittisesti siirtymävektorista $\mathbf{u}$. Mikäli systeemi (1) kuvaa esim. elementtimenetelmällä diskreetoitua rakennemallia saadaan sisäisten voimien vektori kokoamalla elementtikohdalliset voimavektorit

$$\mathbf{r}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV,$$

missä $\boldsymbol{\sigma}$ jännitysvektori ja $\mathbf{B}$ muodonmuutos-siirtymämatriisi joka määritellään venymien variaation avulla: $\delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}$.

Epälineaarinen kuvaus $\mathbf{f}$ määrittelee rakennemallin tasapainopolun avaruudessa jonka muodostavat siirtymävektori $\mathbf{u}$ ja kuormaparametri λ . Elementtimenetelmän tapauksessa siirtymävektori sisältää mallin diskreetit vapausasteet ja sen dimensio on N , joka on myös tasapainoyhtälöiden lukumäärä. Mallista riippuen vapausasteiden lukumäärä N on suuri, tehokkaimmilla supertietokoneilla voidaan ratkaista systeemejä joissa on yli 100 miljoonaa tuntematonta ja nykyiset mikrotietokoneetkin selviytyvät yli 100000 vapausasteen tehtävistä helposti.

Tasapainopolun kriittisen pisteen määrittäminen on epälineaarinen ominaisarvotehtävä, joka voidaan lausua seuraavasti: etsi siirtymätila $\mathbf{u}_{kr}$, kriittinen kuorma λ_{kr} ja sitä vastaava ominaisvektori $\mathbf{v}$ siten, että

$$D\mathbf{f}(\mathbf{u}_{kr}, \lambda_{kr})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{ja} \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}_{kr}, \lambda_{kr}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

missä $D\mathbf{f}$ merkitsee kuvauksen $\mathbf{f}$ derivaattaa siirtymävektorin suhteen, ja sen arvo määritettynä tietyssä pisteessä on systeemin $\mathbf{f}$ tangenttijäykkyysmatriisi (Jacobiin matriisi).

Häiriöherkkyydellä tarkoitetaan rakenteen kriittisen kuormaparametrin arvon pienemistä mikäli rakennetta jollain lailla häiritään joko sen geometriaa tai kuormitusta muuttamalla. Koska vaarallisinta häiriötä ei yleensä tunneta, ongelma voidaan formuloida seuraavasti [4]. Oletetaan häiriön aiheuttajaksi rakenteen muotovirhe. Ratkaistaan tiettyä muotovirheen amplitudia vastaava pienin mahdollinen kriittinen kuorma ja virheen muoto $\mathbf{y}$, joka on normeerattu jollain mielekkäällä tavalla.

Merkitään häirityn rakenteen tasapainoyhtälöitä symbolilla $\mathbf{f}_\epsilon$, missä ϵ kuvaa häiriön amplitudia. Käyttökelpoinen häiriöherkkyysongelma voitaisiin siten määrittellä seuraavasti. Määritä ennalta valitulla häiriönparametrin arvolla ϵ kriittinen kuorma λ_{kr} , sitä vastaava ominaismuoto $\mathbf{v}$, siirtymätila $\mathbf{u}_{kr}$ ja vaarallisimman häiriön muoto $\mathbf{y}$ siten, että

$$\lambda_{kr}(\epsilon) \text{ saavuttaa minimin ja } D\mathbf{f}_\epsilon(\mathbf{u}_{kr}, \lambda_{kr}, \epsilon\mathbf{y})\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sekä } \mathbf{f}_\epsilon(\mathbf{u}_{kr}, \lambda_{kr}, \epsilon\mathbf{y}) = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Syntyvän yhtälösystemin ratkaisu on täten epälineaarisen ominaisarvo-ongelman (2) ratkaisuakin hankalampi tehtävä.

Polynominen ominaisarvotehtävä

Epälineaarisen ominaisarvotehtävän (2) ratkaisuun kykeneviä algoritmeja ei kaupallisissa ohjelmistoissa ole. Toinen tapa lähestyä ongelman (2) ratkaisua on formuloida tehtävä polynomisena ominaisarvotehtävänä. Otaksutaan että tila $(\mathbf{u}_*, \lambda_*)$ on tasapainopolun säännöllinen piste, eli siinä muodostettu tangenttijäykkyysmatriisi ei ole singulaarinen, epälineaarisen ominaisarvotehtävän (2) Taylorin sarjakehitelmä voidaan lausua muodossa:

$$\left(\mathbf{K}_* + \Delta\lambda \mathbf{K}'_* + \frac{1}{2}(\Delta\lambda)^2 \mathbf{K}''_* + \dots \right) \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

missä $\Delta\lambda = \lambda_{kr} - \lambda_*$ ja pilkku suureen oikeassa yläkulmassa merkitsee derivointia kuormaparametrin λ suhteen. Kehittämällä siirtymätila myös kuormaparametrin muutoksen suhteen sarjaksi: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_* + \Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_* + \Delta\lambda \mathbf{u}' + \frac{1}{2}(\Delta\lambda)^2 \mathbf{u}'' + \dots$ systeemissä (4) esiintyvät matriisit saavat muodon

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_* &= D\mathbf{f}_*, \\ \mathbf{K}'_* &= D^2\mathbf{f}_* \mathbf{u}' + D\mathbf{f}'_*, \\ \mathbf{K}''_* &= D^2\mathbf{f}_* \mathbf{u}'' + D^3\mathbf{f}_* \mathbf{u}'\mathbf{u}' + 2D^2\mathbf{f}'_* \mathbf{u}' + D\mathbf{f}''_*, \end{aligned}$$

missä $\mathbf{f}_* = \mathbf{f}(\mathbf{u}_*, \lambda_*)$ jne. Eulerin ennustaja-askel $\mathbf{u}'$ voidaan ratkaista lineaarisesta systeemistä

$$\mathbf{K}_* \mathbf{u}' = -\mathbf{f}'_*,$$

ja korkeamman kertaluvun korjaukset saadaan differentioimalla yllä olevaa systeemiä:

$$\mathbf{K}_* \mathbf{u}'' = -[D^2\mathbf{f}_* \mathbf{u}'\mathbf{u}' + 2D\mathbf{f}'_* \mathbf{u}' + \mathbf{f}''_*].$$

Huomionarvoista on se, että $\mathbf{u}', \mathbf{u}'' \dots$ ratkaistaan yhtälösystemistä jonka kerroinmatriisi on sama.

Klassisessa lineaarisessa stabiiliusominaisarvotehtävässä deformatumaton jännityksetön tila on referenssitilana, jonka suhteen kehitelmä (4) suoritetaan. Mikäli otaksutaan siirtymätilasta riippumaton kuormitus, termi $D\mathbf{f}'_*$ ja siitä johdetut kuormaparametrin suhteen derivoimalla saadut termit häviävät. Täten lineaarinen stabiiliusominaisarvotehtävä saa muodon: ratkaistaan ominaisarvoparit $\lambda_i, \mathbf{v}_i$ tehtävästä

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{v}_i = -\lambda_i \mathbf{K}_1 \mathbf{v}_i, \quad (5)$$

missä $\mathbf{K}_0 = D\mathbf{f}(\mathbf{0}, 0)$ ja $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}'_0 = D^2\mathbf{f}(\mathbf{0}, 0)\mathbf{u}'$. Referenssitilan siirtymät ratkaistaan lineaarisesta yhtälöstä $\mathbf{K}_0 \mathbf{u}' = \mathbf{p}_r$. Täten venymät riippuvat *lineaarisesti* siirtymistä $\mathbf{u}'$ jolloin geometrinen jäykkyysmatriisi (alkujännitysmatriisi) $\mathbf{K}_1$ on myös siirtymien $\mathbf{u}'$ lineaarinen funktio.

Geometrisen jäykkyysmatriisin lineaarisuus siirtymätilasta ei välttämättä toteudu mikäli ominaisarvotehtävä ratkaistaan kahden peräkkäisen tasapainopolun tilan suhteen muodostettujen tangenttijäykkyysmatriisien avulla:

$$(\mathbf{K}_* + s(\mathbf{K}_{**} - \mathbf{K}_*)) \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

missä $\mathbf{K}_*$ ja $\mathbf{K}_{**}$ ovat tangentiaaliset jäykkyysmatriisit kahdessa peräkkäisessä tasapainotilassa. Systeemi (6) approksimoi lineaarista ominaisarvotehtävää vain mikäli kuoraparametrin muutos $\Delta\lambda_* = \lambda_{**} - \lambda_*$ on pieni eli $\mathbf{K}'_* \approx (\Delta\lambda_*)^{-1}(\mathbf{K}_{**} - \mathbf{K}_*)$.

Häiriöherkkyysanalyysi

Systeemin (3) mukaisesti formuloidun häiriöherkkyysanalyysin ratkaisu tapahtuu soveltamalla Newtonin menetelmää laajennettun epälineaariseen systeemiin. Ratkaisumenetely on sängen suoraviivainen, mutta ongelmana on tarvittavien derivaattojen muodostaminen. Lisäksi ratkaisu edellyttää kinemaattisesti tarkkaa elementtiformulaatiota. Newtonin menetelmällä linearisoitu yhtälösystemi ratkaistaan lohko-faktorointi menettelyllä, jotta välttyttäisiin yhtälösystemin koon paisuminen kolminkertaiseksi alkuperäiseen tasapainoyhtälöön verrattuna.

STABIILIUSONGELMAN RATKAISUALGORITMEJA

Edellä esitettyjen ongelmien (2), (3) ja (4) soveltuvia suoria ratkaisumenetelmiä ei kaupallisista ohjelmistoista löydy. Seuraavassa tarkastellaan sitä miten edellä kuvattuja analyysivaiheita voi yrittää matkia kun käytettävissä on jokin ohjelma, jossa työkaluina ovat alkumuodon suhteen linearisoitu ominaisarvoanalyysi (5) ja epälineaarisen yhtälösystemin (1) ratkaisuun soveltuva polunseuranta-algoritmi.

Yleistetty ominaisarvotehtävä

Täsmällisemmin ilmaistuna tarkastellaan algebrallista lineaarista yleistettyä ominaisarvotehtävää (5): $\mathbf{K}_0 \mathbf{v} = -\lambda \mathbf{K}_1 \mathbf{v}$, missä $\mathbf{K}_0$ on positiivisesti definiitti jäykkyysmatriisi ja $\mathbf{K}_1$ on rakenteen geometrinen jäykkyysmatriisi tai toiselta nimeltään alkujännitysmatriisi. Tyypillisesti ratkaistavan systeemin koko on suuri, matriisit $\mathbf{K}_0$ ja $\mathbf{K}_1$ ovat harvoja ja vain tietty osa ominasarvospektristä on kiinnostava. Kvadraattisten tai korkeamman asteen stabiiliusominaisarvotehtäviin pystyviä kaupallisia elementtimenetelmäohjelmistoja ei ole kirjoittajan tiedossa, joten niiden ratkaisuun soveltuvia algoritmeja ei tässä käsitellä.

Rakenneanalyysiohjelmistojen yleisimmät yleistetyn ominaisarvotehtävän (5) ratkaisualgoritmit ovat aliavaruusiteraatio (engl. subspace iteration method) tai Lanczosin menetelmä. Nimi aliavaruusiteraatio on hieman epätasällinen, sillä myös Lanczosin menetelmä on periaatteeltaan aliavaruusiteraatio, missä alkuperäinen suurikokoinen ongelma projisoidaan pieniulotteiseksi ominaisarvotehtäväksi, joka ratkaistaan jollain täysille matriiseille soveltuvalla standardimenetelmällä. Ohjelmistojen aliavaruusiteraatiolle hieman kuvaavampi nimitys olisi lohko potenssi-iteraatio (engl. block power iteration).

Stabiiliusanalyysin ominaisarvotehtävä (5) poikkeaa ominaisuuksiltaan värähtelyongelman vastaavasta, sillä alkujännitysmatriisi $\mathbf{K}_1$, jota värähtelyongelmassa vastaa positiivisesti (semi)definiitti massamatriisi, voi olla indefiniittinen, jolloin ominaisarvot voivat olla sekä positiivisia että negatiivisia.

Aliavaruusiteraation juuret juontavat F.L. Bauerin julkaisuun vuodelta 1957 [3] (katso myös lähde [9] ja Wilkinsonin ja Reinschin klassiseen lineaarialgebran käsikirjaan vuodelta 1971 [10]. Sen yleisyyteen rakenneanalyysiohjelmassa lienee suuresti vaikuttanut myös K.-J. Bathen väitöskirja vuodelta 1971 [1]. Nämä teokset sisälsivät myös yksityiskohtaiset ohjelmalistaukset. Useimpien rakenneanalyysiohjelmien perustana oleva aliavaruusiteraatio lienee perua Bathen ohjelmasta. Se on rakenteeltaan melko yksinkertainen ja toimii luotettavasti, elleivät ratkaistavan ongelman ominaisarvot ole pakkautuneet tiiviisti pienelle välille. Mikäli ratkaisussa käytettävän aliavaruuden dimensio on q ($q \ll N$) on i :nnen ominaismuodon suppenemisnopeus¹ luokkaa λ_i/λ_{q+1} . Mikäli ominaisarvot ovat klusteroituneet ryppääksi halutun ominaisarvon läheisyyteen voi suppeneminen olla hyvin hidasta, kuten voi käydä ratkaistaessa esimerkiksi kuorirakenteiden lommahduskuormia. Aliavaruusiteraatiosta on esitetty myös kiihdytetty versio [2] joka perustuu ylirelaksaatioon ja spektrin siirtämiseen.

Lanczosin menetelmä yleistyi rakenneanalyysiohjelmiin 1980 luvulla. Sitä pidetään yleisesti aliavaruusiteraatiota nopeampana algoritmina. Voidaan myös matemaattisesti todistaa, että Lanczosin menetelmä suppenee *aina* potenssimenetelmää (aliavaruusiteraatiota) nopeammin. Käytännössä kuitenkin pyörästysvirheet tekevät Lanczosin menetelmästä hieman vaikeasti käytettävän. Keskeinen ongelma on iteraatioprosessin aikana mahdollisesti tapahtuva Lanczosin vektoreiden ortogonaalisuuden menetys. Uusimmat algoritmit käyttävät ns. osittaista ja/tai valikoivaa uudelleenortogonalisointimenettelyä ongelman voittamiseksi. Aliavaruusiteraatiota ja Lanczosin menetelmiä on vertailtu esim. lähteessä [7].

Lanczosin menetelmän yhteydessä stabiiliusanalyysin yleistetty ominaisarvotehtävä (5) on muunnettava muotoon²

$$\mathbf{K}_0(\mathbf{K}_0 + \sigma \mathbf{K}_1)^{-1} \mathbf{K}_0 \mathbf{v} = \theta \mathbf{K}_0 \mathbf{v},$$

missä $\theta = \lambda/(\lambda - \sigma)$ ja $\sigma \neq 0$ on siirros (engl. shift).³ Ominaismuodot $\mathbf{v}_i$ ovat energiaortogonaalisia, eli $\mathbf{v}_i^T \mathbf{K}_0 \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$, missä $\delta_{ij} = 1$ kun $i = j$ ja 0 muutoin. Siirros σ valitaan läheltä haluttavia ominaisarvoja, ja sen käyttö on suositeltavaa myös aliavaruusiteraation yhteydessä, sillä muodon i suppenemisnopeus paranee arvoon $|\lambda_i - \sigma|/|\lambda_{q+1} - \sigma|$.

Häiriöherkkyyshanalyysi

Häiriöherkkyyshanalyysin voi suorittaa myös ratkaisemalla tasapainoyhtälöt (1) polunseuranta-algoritmia hyväksikäyttäen. Ensin ratkaistaan lineaarinen yleistetty ominaisarvotehtävä (5) ja määritetään riittävä määrä ominaismuotoja. Seuraavaksi rakenteen

¹Suppenemisnopeudella tarkoitetaan tässä virheen pienenemistä yhden iteraation aikana.

²Muunnos on välttämätön, jotta yleistetyn ominaisarvotehtävän (5) oikealle puolelle saadaan positiivisesti (semi)definiitti matriisi, jonka suhteen ominaismuodot normeerataan.

³On sängen hämmästyttävää, että kyseistä muunnosta ei ole implementoitu tiettyihin kaupallisiin elementtimenetelmäohjelmistoihin, joissa Lanczosin menetelmää on mahdollista käyttää.

geometriaa muutetaan ominaismuotojen avulla ja näiden muotovirheellisten rakenteiden tasapainopoluilta määritetään kriittiset pisteet (yleensä rajapisteet). Ongelmana on vaarallisimman muotovirheen löytäminen. Mikäli ominaismuodot ovat selvästi toisistaan eroavia, on todennäköistä, että korkeampia kriittisiä kuormia vastaavilla ominaismuodoilla ei ole vuorovaikutusta alinta kriittistä kuormaa vastaavan muodon kanssa. Tällöin muotovirheeksi riittää alinta kriittistä kuormaa vastaava ominaismuoto. Jos ominaisarvot ovat niputtuneet ryppääksi alimman ominaismuodon välittömään läheisyyteen, on analysoitava rakenne mitä todennäköisimmin hyvin häiriöherkkä. Tässä tapauksessa on myös epälineaaristen tasapainoyhtälöiden ratkaisussa odotettavissa vaikeuksia.

Epälineaaristen yhtälösystemien ratkaisu

Epälineaarisen parametrisoidun tasapainoyhtälön (1) ratkaisussa lähdetään liikkeelle tunnetusta tasapainotilasta edeten sopivasti valituin askelin tasapainopolkua eteenpäin. Yksinkertaisin strategia on viipaloida kuorma sopiviin osiin. Tällainen strategia ei kuitenkaan toimi hyvin lähellä rajapisteitä, joissa rakenteen kuormankantokyvyn maksimi (ainakin paikallinen) saavutetaan. Riks kehitti väitöskirjassaan 1970 [8] hyvin suosituksi tulleen tasapainopolun seuranta-algoritmin jota myös usein kutsutaan kaarenpituusmenetelmäksi. Siitä on kehitetty lukuisia versioita, jotka eivät kuitenkaan merkittävästi poikkea alkuperäisestä Riksin menetelmästä [6].

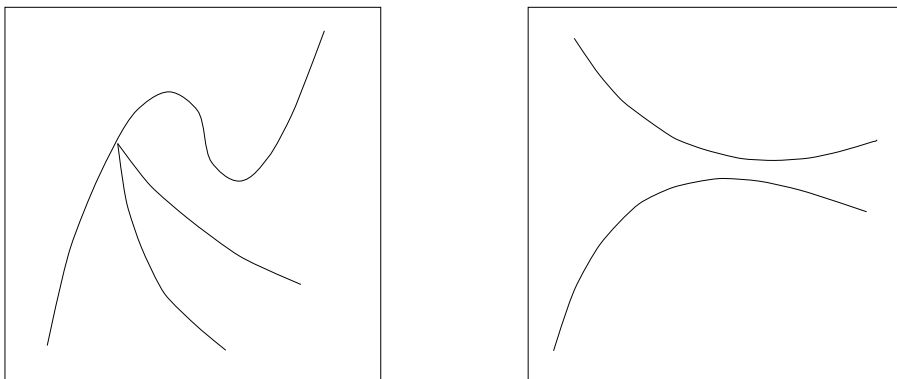
Perusajatus Riksin menetelmässä on valita parametrisointiin polun kaarenpituus ja askeleen koko valitaan tasapainotilan tangetin pituuden mukaan. Askelpituuden määräävän ennustaja-askeleen jälkeen uusi tasapainotila tarkennetaan jollain Newtonin tyyppisellä iteraatiolla.

Kaarenpituusmenetelmien tehokas käyttö edellyttää hieman ratkaistavan ongelman ominaisuuksien tuntemista. Epälineaarisen tasapainopolun laskennan kuluessa voidaan törmätä monenlaisiin ongelmiin, joita on pyritty havainnollistamaan kuvissa 1, 2 ja 3. Kuvassa 1 hypoteettisen rakenteen tasapainopolkua kuvaa jatkuva käyrä $N + 1$ dimensioisessa siirtymäparametrien (vaaka-akseli) ja kuorman (pystyakseli) muodostamassa avaruudessa. Tasapainopolulla esiintyy stabiiliustarkastelun kannalta kriittisiä pisteitä kuten raja- ja haarautumispisteitä. Laskettaessa polunseuranta-algoritmillä kyseisen rakenteen vastetta saadaan kuvan 2 mukainen ratkaisujen pistejoukko. Numeerisen ratkaisun muodostuessa vain harvasta pistejoukosta on helppo ymmärtää miksi erikoispisteiden, kuten haarautumis- ja rajapisteiden, identifiointi ei ole aivan triviaali toimenpide. Koska epälineaaristen systeemien ratkaisut eivät välttämättä ole yksikäsitteisiä, voi ratkaisualgoritmi "erehtyä" seurattavasta polusta. Tätä on kuvassa 3 pyritty havainnollistamaan. Haarautumispisteiden läheisyydessä myös Newtonin menetelmän suppenemisessa voi olla ongelmia.

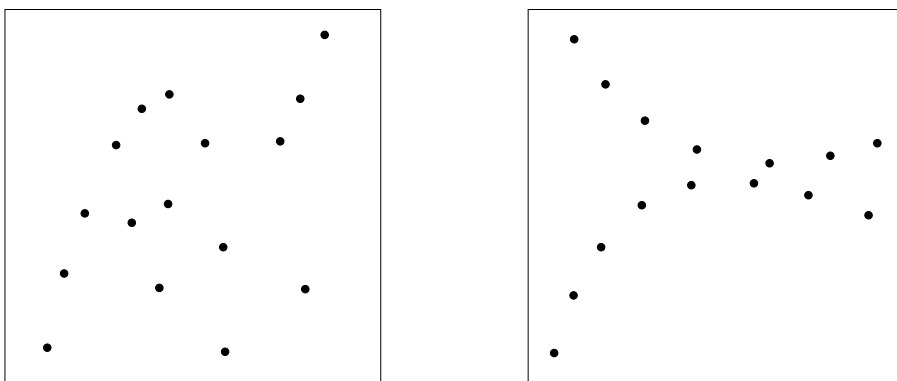
YHTEENVETO

Stabiiliusanalyysin suorittaminen voidaan kiteyttää seuraavasti:

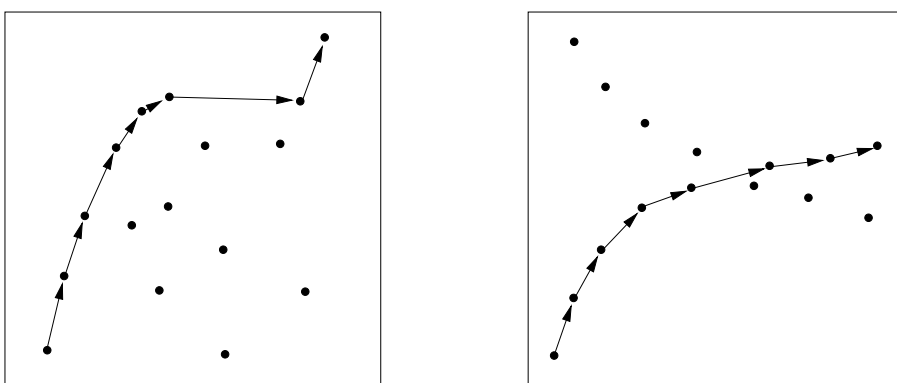
- suorita ensi ominaismuotoanalyysi,
- tutki ominaisarvospektiä ja ominaismuotoja ja päättele onko ominaismuotojen vuorovaikutus mahdollinen,



Kuva 1: Tyypillisiä tasapainopolun kuvaajia.



Kuva 2: Tyypillinen kaarenpituusmenetelmän tuottama ratkaisujoukko.



Kuva 3: Polunseurannassa mahdollisesti tapahtuvia virhetilanteita.

- suorita useita epälineaarisia analyysyjä käyttäen muotovirheenä sopivasti valittuja ominaismuotokombinaatioita [5].

Symmetriaa on stabiiliusanalyysissä syytä käyttää harkiten, sillä se saattaa estää jonkun mahdollisesti tärkeän ominaismuodon syntymisen. Alustavassa laskennassa on myös syytä muistaa, että alin kriittinen muoto voi harvassa elementtiverkossa olla huonosti edustettuna. Tällaisia rakenteita ovat kimmoisasti tuetut laatat ja kuorirakenteet.

Diskretoinnin tarkkuudesta saa hyvän kuvan suorittamalla ominaismuotoanalyysi useammalla eri elementtijaolla. Tuloksista voidaan ekstrapoloida mallin kriittinen kuorma, jolloin myös saadaan arvio diskreetointivirheen suuruudesta.

Viitteet

- [1] K.-J. Bathe. Solution methods of large generalized eigenvalue problems in structural mechanics. Report UC SESM 71-20, Civil Engineering Department, University of California, Berkeley, 1971.
- [2] K.-J. Bathe, S. Ramaswamy. An accelerated subspace iteration method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 23:313–330, 1980.
- [3] F.L. Bauer. Das Verfahren der Treppeniteration und verwandte Verfahren zur Lösung algebraischer Eigenwertprobleme. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 8:214–235, 1957.
- [4] M. Deml, W. Wunderlich. Direct evaluation of the ‘worst’ imperfection shape in shell buckling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149:201–222, 1997.
- [5] K. Kolari. *Kehä- ja sauvarakenteiden epälineaarinen analyysi*. VTT tiedotteita 1881, 1997
- [6] R. Kouhia. *Techniques for the Analysis of Non-Linear Systems – With Applications to Solid and Structural Mechanics*. Acta Polytechnica Scandinavica, Civil Engineering and Building Construction Series, No 116. Teknisten tieteiden akatemia, 1999.
- [7] B. Nour-Omid, B.N. Parlett, R.L. Taylor. Lanczos versus subspace iteration for solution of eigenvalue problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19:859–871, 1983.
- [8] E. Riks. On the numerical solution of snapping problems in the theory of elastic stability. Report SUDAAR No 401, Stanford University, Department of Aeronautics and Astronautics, 1970.
- [9] H. Rutishauser. Computational aspects of F.L. Bauer’s simultaneous iteration method. *Numerische Mathematik*, 13:4–13, 1969.
- [10] J.H. Wilkinson, C. Reinsch. *Linear Algebra, Handbook for Automatic Computation*, volyymi II. Springer-Verlag, 1971.