

**Rakenteiden mekaniikan menetelmiä
metallirakentajille
OSA 3
Elementtiverkon generointi ja tulosten
jälkikäsittely**

Reijo Kouhia
TKK

Rakenteiden mekaniikka
s-posti: reijo.kouhia@tkk.fi
URL: <http://users.tkk.fi/~kouhia>

19.10.2005 Metallirakentamisen tutkimuskeskus, Seinäjoki



TEKNILLINEN KORKEAKOULU
Rakenteiden mekaniikka

OSA 3 – Sisältö

- Elementtiverkon generointi
 - mosaiikkimenetelmät (tessellation methods)
 - puumenetelmät (tree structure methods)
 - kuvausmenetelmät (mapping methods)
 - joitain käytännön seikkoja
- Elementtien lukkiutuminen/epästabiilius
- Tulosten jälkikäsittely (derivaattasuureiden)
 - keskiarvoistus
 - ekstrapolaatio
 - pienimmän neliön keino



Joitain käsitteitä

- karteesinen verkko
- tasainen (uniform) verkko
- rakenteellinen verkko (structured mesh)
- ei-rakenteellinen verkko (non-structured mesh)



Mosaiikkimenetelmät

- etenevän rintaman strategiat (advancing front)
 - diskretoidaan alueen reuna
 - lisätään kolmio jolla sivu reunalla, saadaan uusi “generointireuna”
 - jatketaan kolmiointia pienenevän generointialueen sisään
- Delaynayn kolmiointi

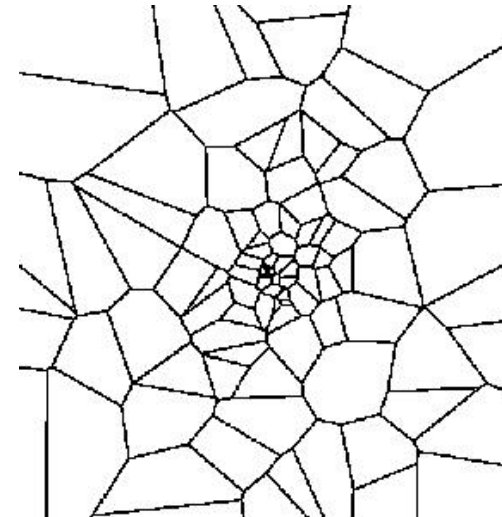
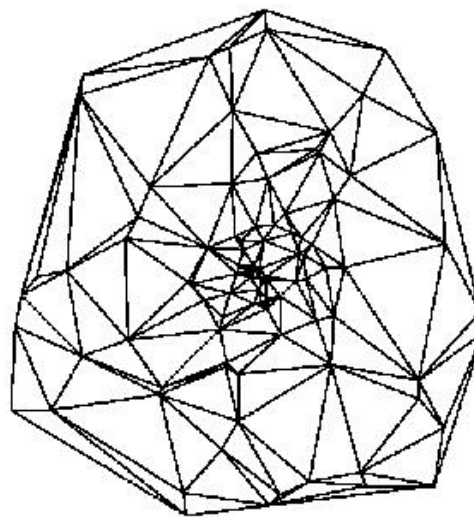
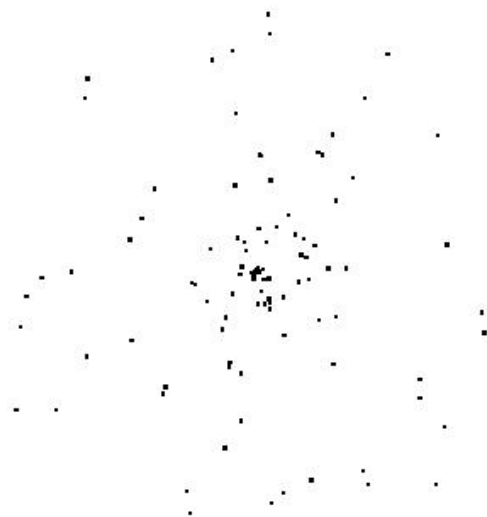


Delaunayn kolmiointi

Katso <http://www.cs.cornell.edu/Info/People/chew/Delaunay.html>

Pistejoukon Delaunayn (tai Delonen) kolmioinnilla on ominaisuus: piirrettäessä minkä tahansa kolmion kärkien kautta kulkeva ympyrä, mikään pistejoukon piste ei ole ympyrän sisällä. (Boris Delaunay, 1934)

Alla pistejoukko, sen Delaunayn kolmiointi ja Voronoin kuvio.



Joitain käytännön seikkoja

Elementtien vääristäminen

1. sivusuhte- ja suunnikasvääristymä (aspect-ratio, parallelogram distortion)
2. keskisolmujen sijoittaminen toispuoleisesti (unevenly-spaced-nodes distortion)
3. kulmavääristymä (angular distortion)
4. sivujen kaareuttaminen (curved-edge distortion)



Suosituksia isoparametristen elementtien käytöstä

1. Serendipity elementtien käyttö on syytä rajoittaa tapauksiin, joissa elementtien geometria on suorakaiteen tai vinokaiteen muotoinen.
2. Lagrangen tyypisiä elementtejä vapaammin kunhan elementtien sivut ovat suoria ja solmut symmetrisesti sijoitettuna.
3. Vältä kaarevasivuisia elementtejä. Rajoita niiden käyttö vain kaarevasivuisten reunojen lähelle. Sijoita vain yksi sivu kaarevalle reunalle ja pidä muut sivut suorina.



Lähteitä

- J.E. Akin, *Finite Elements for Analysis and Design*, luku 19, Academic Press, 1994
- G.F. Carey, *Computational Grids, Generation, Adaptation and Solution Strategies*, Taylor & Francis, 1997
- P.-L. George, H. Borouchaki, *Delaynay Triangulation and Meshing, Applications to Finite Elements*, Hermes, 1998
- N.-S. Lee, K.-J. Bathe, Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol 36, 3553–3576, 1993
- Jonathan Shewchukin kotisivu <http://www.cs.berkeley.edu/~jrs>
- <http://www.voronoi.com>



Elementtien lukkiutuminen/epästabiilius

1. kokoonpuristumaton aine
2. leikkauslukkiutuminen
 - hoikat rakenteet analysoituna kontinuumielementeillä
 - leikkausmuodonmuutoksen huomioonottavat palkki, laatta ja kuorimallit
3. kalvolukkiutuminen
 - kaarevat hoikat rakenteet



Laattaesimerkki

Reissnerin-Mindlinin laattamalli.

Mikäli valitaan samanasteinen interpolaatio taipumalle ja kiertymille on seurauksena lukkiutuminen analysoitaessa ohuita laattoja.

Ensimmäinen parannuskeino: ali-integroidaan leikkaustermit.

Seurauksena epästabiilius, kuva seuraavalla kalvolla.

Leikkausvoimajakauma (Q_x) vaakasuoralla symmetrialinjalla laskettuna SRI (ylhäällä) ja stabiloidulla MITC elementillä (alhaalla) Säännöllinen (vasemmalla) ja epäsäännöllinen (oikealla) 16×16 elementtiverkko ja laatan suhteellinen paksuus on $t/L = 0.01$. Pisteviiva on tarkka ratkaisu.

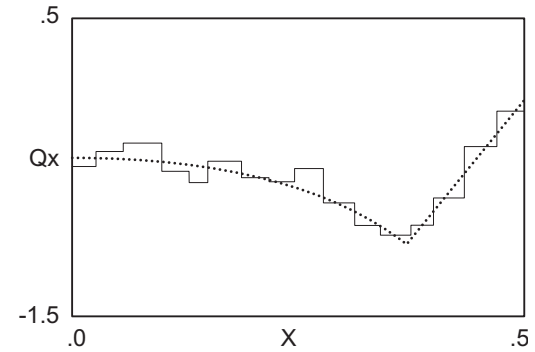
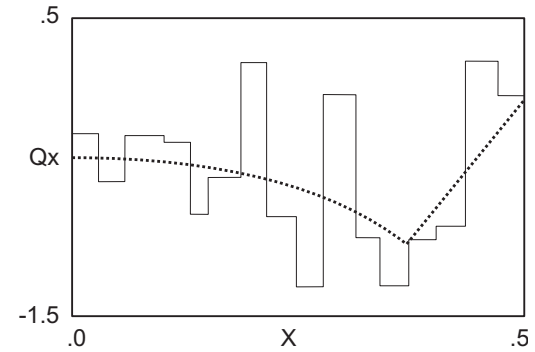
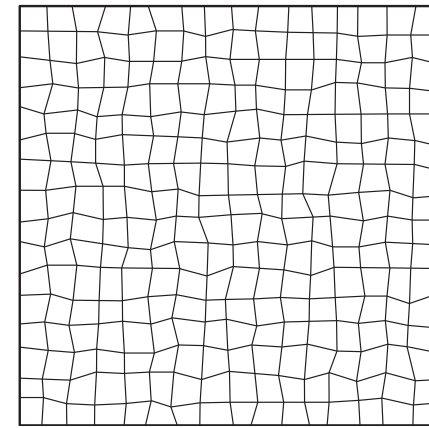
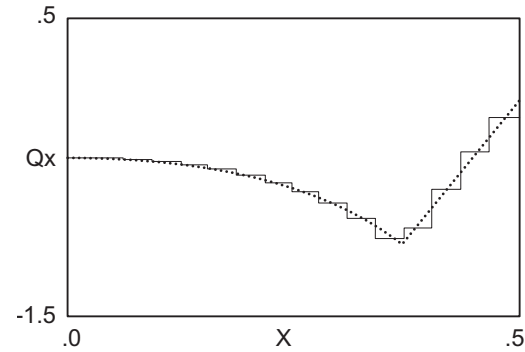
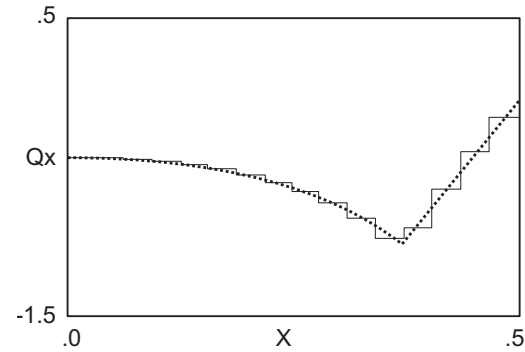
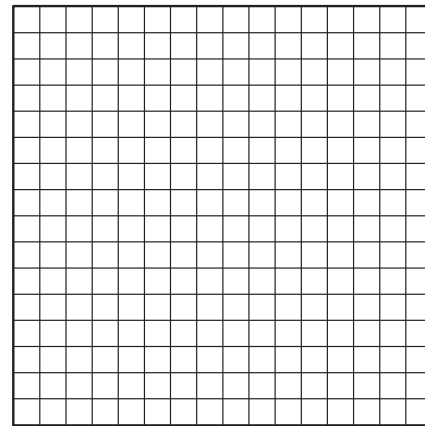
Kuva artikkelista M. Lyly, R. Stenberg, New three and four node plate bending elements, *Rakenteiden Mekaniikka*, vol. 27, no 2, 3–29, 1994

SRI = Selective Reduced Integration, t.s. taivutustermit integroidaan nelisolmuisen elementin tapauksessa 2×2 Gaussin-Legendren kaavoilla ja leikkaustermi yhden pisteen G-L kaavoilla. (Vastaavasti kolmisolmuinen elementti 3 pisteen ja 1-pisteen kaavalla)



Elementtien lukkiutuminen/epästabiilius

SRI



stab MITC



Tulosten jälkikäsittele

Jännitykset epätarkempia kuin siirtymät sillä ne on laskettu derivoimalla siirtymistä jotka ovat primäärituntemattomia.

HUOM: Tämä pätee vain siirtymämenetelmään perustuville elementeille

Jännitysten arvot lasketaan elementin integroimispisteissä, jotka eivät yleensä sijaitse elementin reunoilla.

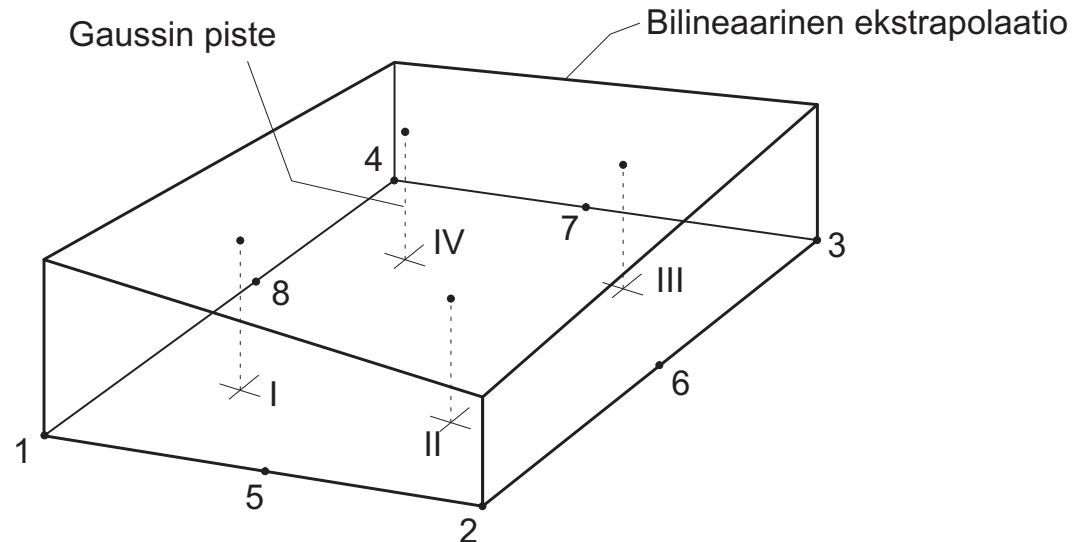
Jännitysten arvot solmupisteissä voidaan määrittää esimerkiksi:

1. Lasketaan siirtymäinterpolaatiosta muodonmuutosten arvot solmuissa ja niistä jännitykset, jotka keskiarvoistetaan solmuun liittyvien elementtien pinta-alojen suhteessa.
2. Ekstrapoloidaan jännitysten arvot integrointipisteistä käyttäen hyväksi sopivaa interpolaatiofunktiota ja suoritetaan keskiarvoistus.
3. Otaksutaan jännityskomponenteille *jatkuva* interpolaatio käyttäen samoja interpolaatiofunktioita kuin siirtymille ja määritetään jännitysten solmupistearvot pienimmän neliön keinolla.



Ekstrapolaatio solmuihin

Esimerkkinä nelisolmuinen bilineaarinen tasoelementti.



Jännityssuure Q elementin Gaussin-Legendren 2×2 integrointipisteissä, I, II, III ja IV. Merkitään haluttuja solmupistearvoja $Q_1, \dots, Q_4$.

Gaussin-Legendren 2×2 -menetelmän pisteiden koordinaatit $\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \eta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.



Otaksutaan jännitykselle bilineaarinen interpolaatio elementin alueella

$$Q = N_1(\xi, \eta)Q_1 + N_2(\xi, \eta)Q_2 + N_3(\xi, \eta)Q_3 + N_4(\xi, \eta)Q_4$$

missä bilineaariset interpolaatiofunktiot $N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)$.

Lasketaan integrointipisteissä ja tuntemattomat solmupistearvot, saadaan

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} & (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} & (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) \\ (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} & (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} & (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_I \\ Q_{II} \\ Q_{III} \\ Q_{IV} \end{Bmatrix}.$$



Pienimmän neliön keino

Elementtimenetelmäratkaisu siirtymille u_h , niistä lasketut jännitykset σ_h .
Otaksutaan jälkikäsitellyille jännityskomponenteille jatkuva interpolaatio

$$\sigma_c = N s,$$

matriisi N sisältää interpolaatiofunktioita ja s uudet jännitysten solmupistearvot.
 σ_c sovitetaan elementtimenetelmän “raakajännitykseen” pienimmän neliön keinolla

$$\min_s I(s), \quad \text{missä} \quad I = \int_{\Omega} (\sigma_c - \sigma_h)^2 d\Omega = \int_{\Omega} (N s - \sigma_h)^2 d\Omega.$$



Minimiehto

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{s}} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\mathbf{N} \mathbf{s} - \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega = 0.$$

Lyhyesti merkittynä

$$\mathbf{M} \mathbf{s} = \mathbf{b}$$

Kerroinmatriisi $\mathbf{M}$ ja vektori $\mathbf{b}$ kootaan elementtiosuuksista

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad \mathbf{b}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma}_h d\Omega.$$

Jännitysten suppenemisnopeuteen keinolla ei ole vaikutusta.

HUOM: Jännitysten tasoitusta ei saa suorittaa rajapinnoilla joissa materiaaliominaisuudet hyppäyksenomaisesti muuttuvat. Tällöin tasoitus on suoritettava osa-alueittain.



Esimerkki

Ratkaistaan lämmönjohtumisyhtälö

$$-ku'' = \bar{f}, \quad u(0) = u(L) = 0, \quad \bar{f}(x) = 4f_0 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

käyttäen kahta lineaarista elementtiä ratkaisualueen puolikkaalla. Lasketaan saadusta ratkaisusta lämpövuoto

$$q_h = -ku'_h.$$

Jälkikäsittele tätä lämpövuon lauseketta otaksumalla parannetulle lämpövuon lausekkeelle C_0 -jatkuva:

$$q_c^{(e)} = N_1(\xi)q_{c1} + N_2(\xi)q_{c2}.$$

Diskretoitaessa elementtimenetelmällä puolet alueesta reunaehdot ovat

$$u(0) = 0 \quad \text{ja} \quad q(L/2) = 0.$$



Elementtimatriisi on

$$K_{ij}^{(e)} = k \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx = \frac{2k}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} d\xi.$$

Käytettäessä lineaarisia elementtejä, yhtälöryhmäksi saadaan

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_2^{(1)} + \bar{f}_1^{(2)} \\ \bar{f}_2^{(2)} \end{Bmatrix}.$$

Lasketaan kuormitustermit

$$\bar{f}_i^{(e)} = \frac{1}{2} h^{(e)} \int_{-1}^1 \bar{f}(\xi) N_i(\xi) d\xi,$$



$$\begin{aligned}
\bar{f}_2^{(1)} &= \frac{1}{2}h^{(e)} \int_{-1}^1 4f_0 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{1}{2}(1 + \xi) d\xi \quad \left(\frac{x}{L} = \frac{x_c^{(e)}}{L} + \frac{h^{(e)}}{2L}\xi\right) \\
&= \frac{1}{256}f_0L \int_{-1}^1 (1 + \xi)^2(7 - \xi) d\xi = \frac{13}{192}f_0L, \\
\bar{f}_1^{(2)} &= \frac{1}{256}f_0L \int_{-1}^1 (3 + \xi)(5 - \xi)(1 - \xi) d\xi = \frac{21}{192}f_0L, \\
\bar{f}_2^{(2)} &= \frac{23}{192}f_0L.
\end{aligned}$$

Yhtälöryhmäksi saadaan siten

$$\frac{4k}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{192} \begin{Bmatrix} 34 \\ 23 \end{Bmatrix}.$$



Ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 57 \\ 80 \end{Bmatrix} \frac{f_0 L^2}{768k}.$$

Käytettäessä lineaarisia elementtejä lämpövuon on vakio elementin alueella

$$q^{(e)} = -ku' = -k \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{h^{(e)}} = \frac{4k}{L}(u_1^{(e)} - u_2^{(e)}).$$

Saadaan arvot

$$q^{(1)} = -\frac{57}{192}f_0L, \quad q^{(2)} = -\frac{23}{192}f_0L.$$

Lämpövuon jälkikäsittelyä varten muodostetaan matriisi $\mathbf{M}$, joka koostuu elementtimatriiseista

$$M_{ij}^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} N_i N_j dx = \frac{1}{2}h^{(e)} \int_{-1}^1 N_i N_j d\xi.$$

Lineaarisen elementin tapauksessa se on muotoa

$$\mathbf{M}^{(e)} = \frac{h^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$



Lämpövuolle voidaan antaa reunaehto alueen keskellä (ei välttämätöntä), joten ratkaistavaksi jää kaksi suuretta eli lämpövuon arvot solmuissa 1 ja 2. Oikean puolen vakiovektorin $\mathbf{b}$, joka koostuu elementtiosuuksista

$$b_i^{(e)} = \frac{1}{2} h^{(e)} \int_{-1}^1 N_i(\xi) q^{(e)} d\xi,$$

termit ovat

$$\begin{aligned} b_1 &= b_1^{(1)}, \\ b_2 &= b_2^{(1)} + b_1^{(2)}, \end{aligned}$$

$$b_1^{(1)} = \frac{L}{8} \int_{-1}^1 \left(-\frac{57}{192} f_0 L \right) \frac{1}{2} (1 - \xi) d\xi = -\frac{57}{1536} f_0 L^2,$$

$$b_2^{(1)} = b_1^{(1)},$$

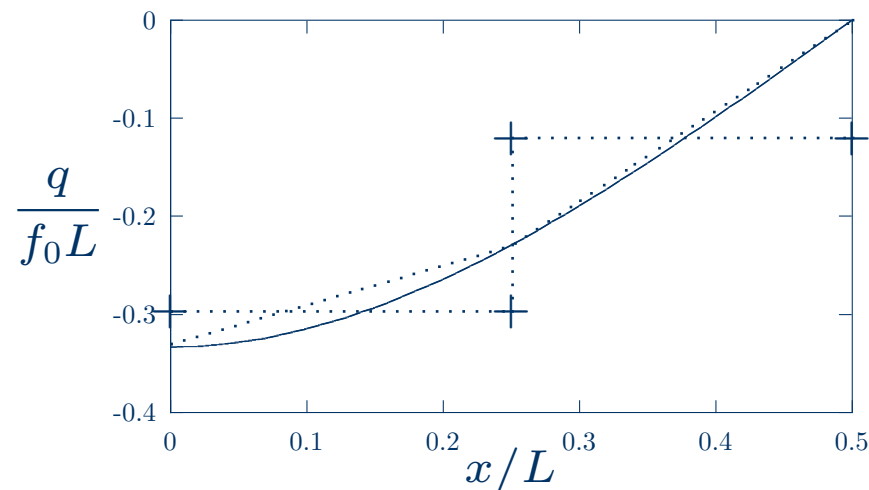
$$b_1^{(2)} = -\frac{23}{1536} f_0 L^2.$$



Ratkaistava yhtälöryhmä on

$$\frac{L}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{c1} \\ q_{c2} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 57 \\ 80 \end{Bmatrix} \frac{f_0 L^2}{1536}, \quad \begin{Bmatrix} q_{c1} \\ q_{c2} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 148 \\ 103 \end{Bmatrix} \frac{f_0 L}{796}.$$

Kuvassa lämpövuon analyttinen lauseke (yhtenäinen viiva) sekä suoraan elementti-interpolaatiosta laskettu että jälkikäsitelty jatkuva lämpövuon arvo.



Analyttinen ratkaisu lämpötilalle on

$$u(x) = \frac{f_0 L^2}{3k} \frac{x}{L} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^3 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 1 \right],$$

josta saadaan lämpövuoto kaavalla $q = -ku'$.

