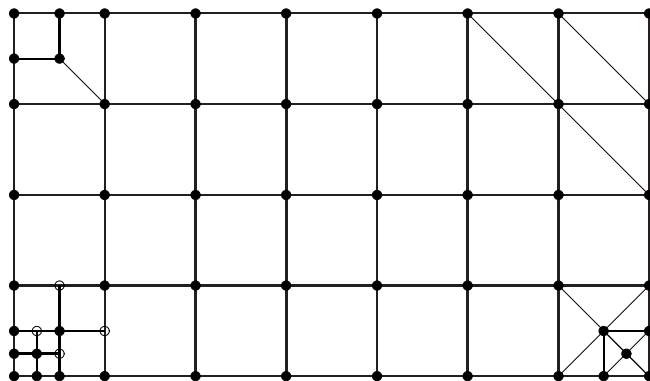
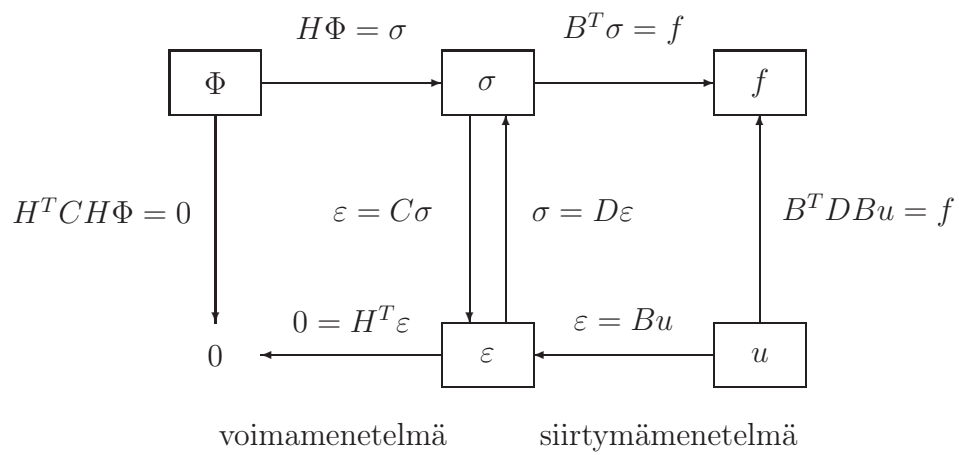


Rakennetekniikan Numeeriset Menetelmät

luentomoniste - 2009

Reijo KOUHIA

Markku TUOMALA



Sisältö

1	Johdanto	1
1.1	Fysikaalisten ilmiöiden mallintaminen	1
1.2	Matemaattisen mallin perusrakenne	2
1.3	Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden luokittelusta	3
1.4	Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisujen luonteesta	6
1.4.1	Parabolinen yhtälö	6
1.4.2	Hyperbolinen yhtälö	7
1.4.3	Elliptinen yhtälö	7
1.4.4	Muutamia huomioita yhtälöiden luokittelussa	9
1.5	Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmistä	11
1.6	Yhteenveto	14
1.7	Harjoitustehtäviä	15
2	Variaatioperiaatteet	17
2.1	Variaatiolaskennan perusteita	17
2.2	Oleelliset ja luonnolliset reunaehdot	25
2.3	Variaatiotehtävän likiratkaisumenetelmiä	28
2.3.1	Painotettujen jäännösten menetelmä	28
2.3.2	Kollokaatiomenetelmät	32
2.3.3	Pienimmän neliön menetelmä	33
2.3.4	Galerkinin menetelmä	34
2.3.5	Rayleighin-Ritzin menetelmä	35
2.3.6	Muutamia huomautuksia	36
2.4	Yhteenveto	37
2.5	Harjoitustehtäviä	37
3	Johdatus elementtimenetelmään	41
3.1	Malliprobleema	41
3.2	Elementtimenetelmän perusosat	44
3.2.1	Yleistä	44
3.2.2	Interpolaatiofunktiot	44
3.3	Malliprobleema elementtimenetelmällä	49

3.4	Diffuusio-konvektioyhtälön numeerinen ratkaisu	61
3.5	Stabiloidut formulaatit	66
3.6	Yhteenvedo	71
3.7	Harjoitustehtäviä	72
4	Elementtimenetelmä tasoalueessa	75
4.1	Kvasiharmoninen yhtälö	75
4.2	Lineaarinen kolmioelementti	78
4.3	Alakoordinaatit	82
4.4	Korkeamman asteen kolmioelementtejä	84
4.5	Esimerkkejä diffuusioyhtälön ratkaisusta tasoalueessa	89
4.6	Nelikulmioelementtejä	103
4.6.1	Elementtiperheet	103
4.6.2	Parametrinen kuvaus	104
4.6.3	Bilineaarinen interpolaatio	106
4.6.4	Bikvadraattinen ja korkeamman asteen interpolaatio	109
4.7	Elementtimatriisien muodostaminen	112
4.8	Parametriset kolmioelementit	115
4.9	Hierarkinen interpolaatio kahdessa dimensiossa	118
4.9.1	Nelikulmioelementit	118
4.9.2	Kolmioelementit	119
4.10	Yhteenvedo	120
4.11	Harjoitustehtäviä	120
5	Mekaniikan variaatioperiaatteita	125
5.1	Johdanto	125
5.2	Virtuaalisen työn periaate	129
5.3	Potentiaalienergian minimin periaate	131
5.4	Muunnoksia potentiaalienergian minimin periaatteesta	133
5.5	Harjoitustehtäviä	134
6	Kontinuumielementtejä	137
6.1	Tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilan elementit	137
6.2	Pyörähdyssymmetrisen tilan elementti	140
6.3	Esimerkkejä	141
6.4	Harjoitustehtäviä	147
7	Numeerinen integrointi	149
7.1	Johdanto	149
7.2	Newton-Cotes menetelmä	150
7.3	Gaussin-Legendren menetelmä	151
7.4	Gaussin-Lobattoon menetelmä	156

7.5	Numeerinen integrointi kolmioelementissä	157
7.6	Isoparametrusten elementtien integrointi	157
7.6.1	Yleistä	157
7.6.2	Redusoitu integrointi ja nollaenergiamuodot	160
7.6.3	Mekanismien kontrollointi	163
7.6.4	Nollaenergiamuotojen määrä elementtiverkossa	165
7.6.5	Reunakuormitus	167
8	Elementtiapproksimaation tarkkuus	171
8.1	Virheen mittaus	171
8.2	A priori virhearviot	172
8.3	Säännöllisyysluokat	173
8.4	Elementtimenetelmän h -, p - ja hp -versiot	174
8.5	Elementtimenetelmän geometrinen tulkinta	176
8.6	Elementtimenetelmän abstrakti formulaatio	178
9	Palkkielementtejä	181
9.1	Eulerin-Bernoullin palkkimalli	181
9.2	Timoshenkon palkkimalli	185
9.2.1	Virtuaalisen työn yhtälö	185
9.2.2	Yksinkertainen elementti	186
9.2.3	Parannettu elementti	189
9.2.4	Numeerinen ali-integrointi	192
9.2.5	Leikkausjäykkyyden redusointi	192
9.2.6	Viisivapausasteinen elementti	198
9.3	Diskreetti EB-palkkimallin elementti	199
9.3.1	Tapa 1: kuubinen taipuma, kvadraattinen kiertymä	199
9.3.2	Tapa 2: sekä taipuma että kiertymä kvadraattinen	200
9.4	Harjoitustehtäviä	202
10	Laattaelementtejä	205
10.1	Kirchhoffin laattamalli	205
10.1.1	Kinemaattiset otaksumat	205
10.1.2	Virtuaalisen työn yhtälö	207
10.1.3	Ohuen laatan elementin yhteensopivuus- ja täydellisyysvaatimukset	209
10.2	Laattaelementtejä historian lehdiltä	210
10.2.1	Suorakaide-elementti	210
10.2.2	Bikuubinen suorakaide-elementti	212
10.2.3	Morleyn vakiokaarevuuselementti	212
10.2.4	Muita kolmioelementtejä	213
10.3	Reissnerin-Mindlinin laattamalli	215

10.3.1	Elementin formulointi	215
10.3.2	Numeerinen integrointi	218
10.3.3	Reissnerin-Mindlinin laattaelementtien mekanismit	221
10.4	DK otaksumaan perustuvat elementit	222
10.5	Toinen DK-elementtien johtotapa	226
10.6	Laatan reunaehdot	230
10.7	Esimerkkejä	232
10.8	Stabiileja Reissnerin-Mindlinin-laattamallin elementtejä	236
10.8.1	Johdanto	236
10.8.2	Arnoldin ja Falkin epäkonformi elementti	237
10.8.3	Stabiloidut MITC-elementit	238
10.8.4	Yleinen stabilointitekniikka Reissnerin-Mindlinin laattamallin elementeille	246
10.9	Harjoitustehtäviä	249
11	Kaarevien sauvojen analysointi	251
11.1	Kehäsauelementti	251
11.2	Isoparametrinen kaarielementti	255
12	3D elementtimenetelmä	261
12.1	Johdanto	261
12.2	Kolmiulotteinen interpolaatio	262
12.2.1	Lineaarinen interpolaatio	262
12.2.2	Tilavuuskoordinaatit	263
12.2.3	Muita 3D-elementtigeometrioita	264
12.2.4	Isoparametrinen kuvaus	264
12.2.5	Solmuihin sidottu interpolaatio	268
12.2.6	Hierarkinen interpolaatio	270
13	Kuorielementtejä	273
13.1	Tasokuorielementti	273
13.2	Kaareva, isoparametrinen kuorielementti	279
13.2.1	Kuorielementin geometriset suureet	279
13.2.2	Siirtymien interpolointi	282
13.2.3	Kuoren muodonmuutokset	282
14	Jännitysten laskennasta	287
14.1	Ekstrapolaatio	287
14.2	Pienimmän neliön keino	288
14.2.1	Harjoitustehtäviä	292

15 Sekaelementtimenetelmät	293
15.1 Johdanto	293
15.2 Yksinkertainen esimerkkiongelmia	293
15.2.1 Symmetrisen heikon muodon johto	293
15.2.2 Muutamia huomautuksia	296
15.3 Eulerin-Bernoullin palkkimallin sekaelementtimenetelmäformulaatio	298
15.4 Kokoonpuristumattoman aineen ongelma	299
15.5 Stabiloidut sekaelementtimenetelmäformulaatiot	303
16 Systeemyhtälöiden ratkaisu	305
16.1 Johdanto	305
16.2 Suorat eliminaatiomenetelmät	308
16.2.1 Croutin ja Choleskyn hajotelmat	308
16.2.2 Aaltorintamatekniikka	311
16.2.3 Alirakennetekniikka	312
16.3 Iteratiiviset menetelmät	313
16.3.1 Yksinkertaisia iteraatioalgoritmeja	313
16.3.2 Minimointialgoritmeja	317
16.3.3 Pohjustinstrategioista	322
16.3.4 Moniverkkoalgoritmi	322
16.4 Menetelmien vertailua	325
17 Etenemistehtävien numeerinen ratkaisu - diffuusioyhtälö	327
17.1 Diffuusioyhtälö	327
17.2 Yksiaskeldifferenssimenetelmiä	328
17.2.1 Eulerin menetelmät	328
17.2.2 Crankin-Nicolsonin menetelmä	329
17.2.3 Keskipistekaava	329
17.2.4 Eksplisiittiset ja implisiittiset menetelmät	330
17.2.5 Menetelmien tarkkuus ja stabiilius	331
17.3 Galerkinin menetelmät etenemistehtävien ratkaisussa	332
17.3.1 Globaali Galerkinin menetelmä	332
17.3.2 Aika-askeleittain jatkuva Galerkinin menetelmä	333
17.3.3 Epäjatkuva Galerkinin menetelmä	334
17.4 Diffuusioyhtälön semidiskreetti muoto	336
17.5 Diskreetti diffuusioyhtälö	337
17.6 Yleistetyn keskipistekaavan analyysi	338
17.6.1 Diagonalisointi ominaismuotosuperpositiolla	338
17.6.2 Stabiilius	339
17.6.3 Konsistenssi ja konvergenssi	341
17.6.4 Muutamia huomioita	341

17.6.5	Korkeamman asteen eksplisiittiset yksiaskelmenetelmät	344
17.6.6	Korkeamman asteen implisiittiset yksiaskelmenetelmät	344
17.7	Moniaskelmenetelmät	346
18	Etenemistehtävien numeerinen ratkaisu - liikeyhtälö	353
18.1	Yksivapausasteinen liikeyhtälö	353
18.2	Keskeisdifferenssimenetelmä	354
18.3	Newmarkin menetelmäperhe	356
18.3.1	Menetelmä ja sen stabiiliusanalyysi	356
18.3.2	Newmarkin menetelmäperheen tunnettuja edustajia	360
18.4	Vaimennettu värähtelijä	360
18.4.1	Keskeisdifferenssimenetelmä vaimennetulle liikeyhtälölle	362
18.4.2	Newmarkin menetelmä vaimennetulle liikeyhtälölle	364
18.5	Yleistetty α -menetelmä	367
18.6	Moniaskelmenetelmät	369
18.6.1	Johto Taylorin kehitelmän avulla	370
18.6.2	Moniaskelmenetelmän kertaluku	371
18.6.3	Konsistenssi	373
18.6.4	Kankeat yhtälöt	375
18.6.5	Moniaskelmenetelmän stabiiliusalue	376
18.6.6	Toisen kertaluvun yhtälöt	379
18.7	Vaimennuksen mallintaminen	382
18.7.1	Väliaineen vastus	383
18.7.2	Materiaalin vaimennus	385
19	Elementtimenetelmän ohjelmointi	387
19.1	Johdanto	387
19.2	Elementtimatriisien muodostaminen	388
19.2.1	Interpolaatiofunktio	388
19.3	Matriisin varastointitavat ja kokoamisprosessi	388
19.4	Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu	388
19.4.1	Johdanto	388
19.4.2	Suorat ratkaisijat	389
Kirjallisuutta		395
Liitteet		399
A	Hermiten interpolaatiopolynomit	399
A.1	Solmuinterpolaatio	399
A.2	Hierarkiset C_1 -interpolaatiofunktio	400

B	Lagrangen kertojamenettely	403
C	R-M laattamallin reunahäiriöt	409
C.1	Tasapainoyhtälöiden muokkaus	409
C.2	Esimerkkinä puoliääretön laatta	411
C.3	Yhteenveto	417

Luku 1

Johdanto

Luvun tarkoituksena on esitellä erilaisia differentiaaliyhtälötyyppejä ja antaa käsitys niiden ratkaisujen ominaisuuksista. Jotta voitaisiin konstruoida hyvin toimivia numeerisia menetelmiä, on tunnettava ratkaistavan ongelman luonteenpiirteet.¹

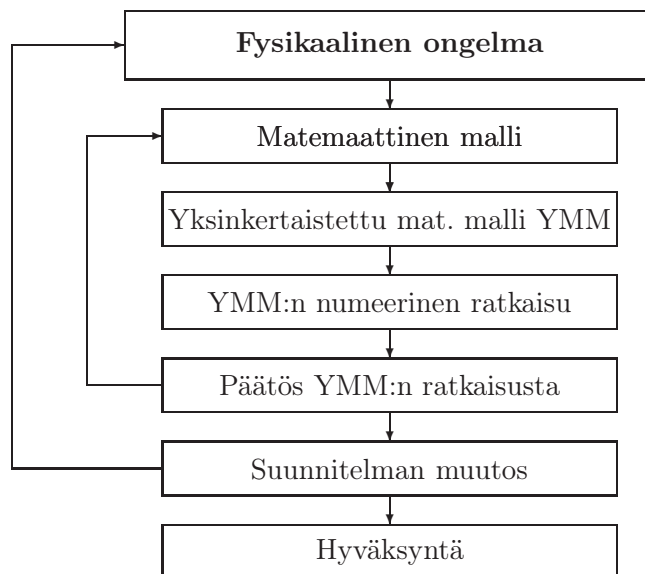
1.1 Fysikaalisten ilmiöiden mallintaminen

Luonnontieteellisten ja teknisten ongelmien ratkaisemisessa matemaattisella mallinnuksella on keskeinen rooli. Ratkaisun kulku on usein kuvan 1.1 mukainen. Ratkaistavana olevasta fysikaalisesta ongelmasta muodostetaan matemaattinen malli, jonka pitäisi pyrkiä kuvaamaan ongelmassa esiintyvät ilmiöt mahdollisimman hyvin. Tässä vaiheessa päätetään myös kriteerit joilla ongelman ratkaisun kelpoisuutta arvioidaan. Usein tällainen malli on liian monimutkainen, joten matemaattista mallia joudutaan yksinkertaistamaan jättämällä siitä pois osia, joiden vaikutuksen arvioidaan olevan haluttuun tarkkuuteen nähden vähäinen. Yksinkertaistettu matemaattinen mallikin voi olla liian monimutkainen, jotta ratkaisu onnistuisi analyttisesti. Tällöin malli voidaan ratkaista numeerisesti. Numeerisesta ratkaisusta tehdään päätelmiä yksinkertaistetun matemaattisen mallin toimivuudesta kyseiseen ongelmaan ja mahdollisesti siihen tehtävistä muutoksista. Ratkaisu voi tuoda esiin myös muutostarpeita itse fysikaalisen ongelman määrittelyyn.

Matemaattisen mallin ja yksinkertaistetun matemaattisen mallin ratkaisujen välistä erotusta kutsutaan mallinnusvirheeksi. Mikäli mallinnusvirheen suhteen haluttu tarkkuus voidaan saavuttaa, sanotaan probleeman ratkaisun olevan ennustettavissa. Kaikille tuttu esimerkki ennustamattomista tehtävistä on pitkän aikavälin sääennusteet. Mallinnusvirheeksi voidaan käsittää myös todellisuuden ja mallin välinen ero. Tämä ”mallinnusvirhe” ei kuitenkaan ole kvantifioitavissa.

Yksinkertaistetun matemaattisen mallin ja sen numeerisen ratkaisun välistä erotusta kutsutaan laskentavirheeksi, ja ongelman sanotaan olevan laskettavissa, mikäli

¹Katso esimerkiksi J.G. Simmondsin artikkelia ”Don’t compute ’til you see the whites of their eyes” teoksessa *Analytical and computational models of shells*, ASME, 1989.



Kuva 1.1 Fysikaalisen ongelman ratkaisun periaate.

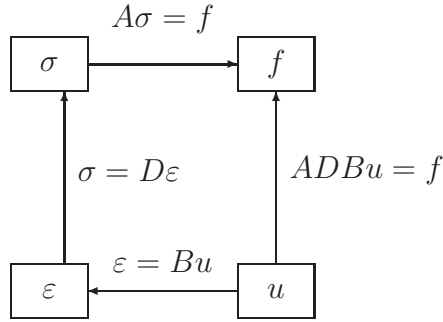
laskentavirheen suhteen haluttu tarkkuus voidaan saavuttaa.

1.2 Matemaattisen mallin perusrakenne

Hyvin usein fysikaalisten ilmiöiden matemaattisessa mallintamisessa joudutaan yhtälösystemiin, joka rakentuu kolmentyyppisistä relaatioista. Kyseisen fysikaalisen teoriakehyksen yleiset peruslait, aksioomat eli luonnonlait antavat osan vallitsevista yhtälöistä. Niiden pätevyyttä ei yleensä tarvitse epäillä. Ne eivät kuitenkaan riitä, vaan lisäksi tarvitaan ns. konstitutiivisia yhtälöitä, jotka kuvaavat kulloinkin esiintyvien materiaalien käyttäytymistä enemmän tai vähemmän totuudenmukaisesti. Aksioomien ja materiaalilakien matemaattinen esittäminen vaatii lisäksi geometrinen relaatioiden (kinematiikan) hallintaa.

Edellä esitetyn rakenteen mukaiset yhteydet ovat usein tyypiltään kimppu osittaisdifferentiaaliyhtälöitä tai yksinkertaisimmillaan algebrallisia relaatioita. Useat mekaniikassa esiintyvät ilmiöt voidaan mallintaa kuvassa 1.2 esiintyvän lohkoavion mukaisesti. Kuvassa 1.2 ylimmäisenä on esitetty Newtonin liikelakiin pohjautuvat tasapainoyhtälöt muodossa $A\sigma = f$, jossa A on kyseisen probleeman tasapaino-operaattori, joka kuvaa jännityksen σ ulkoisten kuormien joukon alkioksi f . Kuvion vasemmassa laidassa on esitetty materiaalilaki, jossa venymä ε kuvautuu materiaalin jäykkyysoperaattorin D välityksellä jännitysten joukon alkioksi σ . Systemin täydentää kinemaattiset yhteydet siirtymien u ja venymien ε välillä, joka välittyy operaattorin B kautta.

Oheinen struktuuri on hyvin yleinen fysikaalisten ongelmien mallinnuksessa, mm. lämmönjohtumisen, kosteudensiirtymisen, virtausongelmien jne. tapauksissa. Täl-



Kuva 1.2 Matemaattisen mallin perusstruktuuri.

lön fysikaalisten suureiden (σ, ε) ja (f, u) merkitys on vain erilainen.

Ongelman ratkeavuuden, erityisesti yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolon edellytyksenä on myös riittävien reuna- ja/tai alkuehtojen asettaminen.

1.3 Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden luokittelusta

Vaikka useiden fysikaalisten ilmiöiden matemaattiset mallit voidaan kuvata kaavion 1.2 muodossa, voi niiden ratkaisujen käyttäytyminen poiketa huomattavastikin toisistaan, riippuen siitä millaisia olioita f, A, B, D ovat. Koska numeeristen likiratkaisujen onnistunut konstruointi edellyttää ratkaistavan probleeman luonteen tuntemusta, tarkastellaan hieman millaisia osittaisdifferentiaaliyhtälöiden perustyyppisiä on olemassa ja mitkä ovat niiden karakteristiset ominaisuudet. Näitä ominaisuuksia pyritään numeeristen algoritmien kehittämisessä matkimaan mahdollisimman aidosti.

Tarkastellaan nyt yksinkertaisuuden vuoksi osittaisdifferentiaaliyhtälöiden luokittelua lineaarisen skalaariyhtälön tapauksessa. Luokittelu voidaan myös yleistää yhtälösystemeille ja epälineaariin tapauksiin.

Yleinen kertalukua m oleva lineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö tuntemattoman skalaarifunktion $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ suhteen on muotoa ²

$$\sum a_{i_1 \dots i_n}(x) \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} + L_1 u = f(x), \quad \sum_{j=1}^n i_j = m, \quad (1.1)$$

jossa L_1 on lineaarinen osittaisdifferentiaalioperaattori joka on alhaisempaa astetta (astetta $< m$), kuin yhtälön ns. pääosa (astetta m) ja jossa $a_{i_1 \dots i_n}(x), f(x)$ ovat reaalisia muuttujien x_i funktioita. Yhtälön (1.1) ns. karakteristinen muoto on reaaliparametrien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ kertalukua m oleva multilineaarinen muoto

$$K(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum a_{i_1 \dots i_n}(x) \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_n^{i_n}, \quad \sum_{j=1}^n i_j = m. \quad (1.2)$$

²Tämän voi ajatella vaikkapa yhtälöksi $ADB u = f$, katso kuva 1.2.

Yhtälöä (1.1) sanotaan *paraboliseksi* (parabolisesti degeneroituneeksi) pisteessä x , mikäli on olemassa affiini muunnos muuttujien $\lambda_i = \lambda_i(\mu_1, \dots, \mu_n)$, $i = 1, \dots, n$ suhteen, joka muuntaa karakteristisen muodon muuttujien μ_i multilineaariseksi muodoksi ja johon jää riippuvuus vain ℓ :stä muuttujasta $0 < \ell < n$. Mikäli kyseessä ei ole parabolinen degeneraatio, kutsutaan yhtälöä (1.1) *elliptiseksi* pisteessä x , jos yhtälöllä

$$K(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \quad (1.3)$$

ei ole yhtään nollasta eroavaa reaalista ratkaisua. Mikäli kumpikaan edellämainituista ehdoista ei toteudu, voi yhtälö olla *hyperbolinen* pisteessä x . Tämä voidaan määritellä seuraavasti. Muuttujien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ määrittelyssä Euklidisessa avaruudessa on olemassa suora, joka otetaan uudeksi koordinaattiakseliksi. Merkitään uutta koordinaattijärjestelmää $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ joka siis saadaan järjestelmästä λ_i affinisella muunnoksella. Näin saatu muunnettu karakteristinen yhtälö (1.3) voidaan tulkita yhtälöksi tämän uuden akselin koordinaatin suhteen. Mikäli nyt tällä yhtälöllä on tasan m juurta (yksinkertaista tai moninkertaista) sanotaan tällöin yhtälöä (1.1) hyperboliseksi pisteessä x .

On syytä huomata, että yhtälön tyyppi saattaa muuttua eri ratkaisualueen osissa. Tämä seikka vaikeuttaa huomattavasti yhtälön numeerista ratkaisua. Epälineaarisissa tapauksissa yhtälön (1.1) kertoimet $a_{i_1, \dots, i_n}$ riippuvat paitsi paikkakoordinaatista x myös ratkaisusta u ja/tai sen derivaatoista kertalukuun $m - 1$ saakka. Koska epälineaarisella yhtälöllä saattaa olla useita ratkaisuja, on edellä esitetty luokittelu mielekäs vain mikäli identifioidaan myös tarkasteltavana oleva ratkaisun haara.

Esimerkkeinä tutkitaan kolmea tekniikan sovellutuksissa hyvin yleisesti esiintyvää osittaisdifferentiaaliyhtälöä:

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u &= f, \\ \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sigma\Delta u &= f, \\ D\Delta\Delta u &= f, \end{aligned} \quad (1.4)$$

jossa Δ on Laplacen operaattori, joka suorakulmaisessa koordinaatistossa saa tasotapauksessa muodon

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (1.5)$$

Ensimmäinen yhtälöistä (1.4) on diffuusioyhtälö, joka kuvaa esimerkiksi lämmön siirtymistä johtumalla. Siinä esiintyvät positiiviset vakiot c, ρ, k merkitsevät tällöin materiaalin ominaislämpöä, tiheyttä ja lämmönjohtavuutta. Yhtälön karakteristinen muoto, assosioimalla muuttujat $\lambda_1 \leftrightarrow x, \lambda_2 \leftrightarrow y, \lambda_3 \leftrightarrow t$ on

$$K(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -k(\lambda_1^2 + \lambda_2^2). \quad (1.6)$$

Havaitaan, että kyseessä on degeneroitunut tapaus, sillä muuttuja λ_3 ei esiinny ol-
lenkaan karakteristisessa muodossa, joten yhtälön tyyppi on parabolinen.

Toinen yhtälöistä (1.4) on ns. aaltoyhtälö ja siinä u kuvaa esimerkiksi värähte-
levän kalvon poikittaista siirtymää. Tällöin vakiot γ, σ merkitsevät massatiheyttä
pinta-alayksikköä kohden ja kalvon jännitystä pituusyksikköä kohden. Yhtälö voi-
daan kirjoittaa muodossa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f/\gamma, \quad c^2 = \frac{\sigma}{\gamma}, \quad (1.7)$$

jossa c on aaltoliikkeen etenemisnopeus. Karakteristinen yhtälö on

$$K(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_3^2 - c^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = 0, \quad (1.8)$$

jossa muuttujien assosiointi koordinaatteihin on sama kuin diffuusioyhtälön tapauk-
sessa. Havaitaan, että ratkaisemalla karakteristinen yhtälö muuttujan λ_3 suhteen,
on sillä tasmälleen kaksi ratkaisua, joten yhtälö on hyperbolinen.

Viimeisin esimerkkiyhtälöistä (1.4) on biharmoninen osittaisdifferentiaaliyhtälö
jossa u kuvaa esimerkiksi laatan taivutuksessa keskipinnan poikittaista siirtymää ja
on auki kirjoitettuna muotoa

$$D \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) = f, \quad (1.9)$$

jossa D merkitsee laatan taivutusjäykkyyttä. Karakteristinen yhtälö on muotoa

$$K(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^4 + 2\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 = 0 \quad (1.10)$$

josta heti havaitaan että ainoa reaalin ratkaisu on nollaratkaisu, joten yhtälö on
elliptinen.

Kaikista edellä esitetyistä yhtälöistä havaitaan, että ne säilyttävät tyyppinsä
kaikilla muuttujien x, y ja t arvoilla, sillä yhtälöt ovat lineaarisia ja vakiokertoimisia.

Edellä esitetty tapa jaotella yhtälöitä saattaa tuntua hieman epämääräiseltä.
Matemaattisesti täsmällinen teoria yhtälöiden luokituksesta kuuluu karakteristika-
teorian piiriin. Tässä teoriassa luokittelu hyperbolisten, parabolisten ja elliptisten
yhtälöiden välillä perustuu karakterististen pintojen (tai käyrien) olemassaoloon ja
lukumäärään. Karakteristinen pinta on sellainen jolla ns. Cauchy-ongelmalla³ ei ole
yksikäsitteistä ratkaisua. Cauchyn ongelma tarkoittaa sitä, että määrääkö tietyllä
pinnalla annetut funktion ja sen derivaatan arvot (kertalukuun $m - 1$ saakka mikäli

³Ongelma on saanut nimensä ranskalaisen matemaatikon ja insinöörin Augustin Cauchyn (1789-
1857) nimen mukaan. Häntä pidetään osittaisdifferentiaaliyhtälöiden modernin teorian alullepani-
jana ja hänen nimensä liitetään myös kuuluisaan teoreemaan osittaisdifferentiaaliyhtälöiden rat-
kaisujen olemassaolosta, jonka puolalaissyntyinen matemaatikko Sophie Kowalewski todisti väitös-
kirjassaan melko yleisessä muodossa (Cauchy-Kowalewski teoreema).

yhtälön kertaluku on m) ratkaisun tämän pinnan läheisyydessä. Tätä probleemaa nimitetään myös karakteristiseksi alkuarvo-ongelmaksi.

1.4 Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisujen luonteesta

1.4.1 Parabolinen yhtälö

Tarkastellaan nyt edellä esitettyjen kolmen esimerkkiyhtälön ratkaisujen luonnetta. Aloitetaan tutkimalla parabolisen diffuusioyhtälön ratkaisua suorakulmaisessa alueessa $\Omega = \{(x, y) \in (0, a) \times (0, b)\}$, ja olettamalla ajanhetkellä $t = 0$ vallitsevan alkulämpötilan

$$u(x, y, 0) = u_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (1.11)$$

Oletetaan lisäksi, että lämpötila alueen Ω reunalla S on kaikilla ajanhetkillä vakio, eli lämpötilan reunaehdoksi asetetaan

$$u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in S \quad (1.12)$$

ja että alueessa Ω ei ole lämmönlähteitä, eli $f \equiv 0$. Tällöin ratkaistava ongelma voidaan asettaa seuraavasti: etsi funktio $u(x, y, t)$, joka toteuttaa

$$\begin{aligned} \text{kenttäyhtälön :} \quad & c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ \text{alkuehdon :} \quad & u(x, y, 0) = u_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, & (x, y) \in \Omega, \\ \text{reunaehdon :} \quad & u(x, y, t) = 0, & (x, y) \in S. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Ratkaisu löydetään muodossa

$$u(x, y, t) = u_0 e^{-\beta t} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (1.14)$$

joka sijoittamalla yhtälöön (1.13) antaa lausekkeen

$$\left\{ -c\rho\beta + k \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right] \right\} = 0 \quad (1.15)$$

vakion β ratkaisemiseksi (huomaa $\beta > 0$):

$$\beta = \pi^2 \frac{k}{c\rho a^2} \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]. \quad (1.16)$$

Diffuusioyhtälön ratkaisu on siis ajan suhteen eksponentiaalisesti vaimeneva, mikä tuntuukin fysikaalisesti oikealta, sillä lämpö siirtyy kohti kylmempää aluetta ja lämpövirta tapahtuu alueesta ulospäin, jos $u_0 > 0$. Raja-arvona (kun $t \rightarrow \infty$) saadaan tietenkin tilanne, jossa lämpötila on tasaantunut koko alueessa, eli $u(x, y) \rightarrow 0$

kun $t \rightarrow \infty$. Huomaa myös, että diffuusioyhtälöllä on ratkaisua siloittava ominaisuus. Tämän voi havaita helposti tarkastelemalla ratkaisun kehittymistä ajan suhteen, kun alkuehdoksi asetetaan

$$u(x, y, 0) = u_{01} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + u_{0n} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (1.17)$$

missä n on positiivinen luonnollinen luku ja $n > 1$. Korkeataajuuksinen komponentti siloituu pois ratkaisusta hyvin nopeasti.

1.4.2 Hyperbolinen yhtälö

Etsitään homogeenisen ($f = 0$) aaltoyhtälön ratkaisua suorakulmaisessa tasoalueessa $\Omega = \{(x, y) \in (0, a) \times (0, b)\}$ ajanhetkellä $t > 0$, eli funktiota $u(x, y, t)$, joka toteuttaa

$$\begin{aligned} \text{kenttäyhtälön :} \quad & \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, & (x, y) \in \Omega, & (1.18) \\ \text{alkuehdot :} \quad & u(x, y, 0) = u_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, & (x, y) \in \Omega, \\ & \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = v_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, & (x, y) \in \Omega, \\ \text{reunaehdon :} \quad & u(x, y, t) = 0, & (x, y) \in S. \end{aligned}$$

Huomaa ero diffuusioyhtälöön alkuehtojen lukumäärän suhteen. Ratkaisu voidaan löytää muodossa

$$u(x, y, t) = \left(u_0 \cos \frac{c\pi t}{s} + \frac{v_0 s}{c\pi} \sin \frac{c\pi t}{s} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (1.19)$$

jossa on merkitty $c^2 = \sigma/\gamma$ ja $s^{-2} = a^{-2} + b^{-2}$ ja joka kuvaa kalvon vaimentumatonta harmonista värähtelytilaa. Peruserona parabolisen ja hyperbolisen yhtälön välillä onkin juuri yhtälön suhde aikakoordinaattiin t : hyperbolinen yhtälö on aikasymmetrinen kun taas parabolisessa yhtälössä ajan suunnalla on merkityksensä. Aaltoyhtälölle on myös ominaista, että ratkaisun luonteenpiirteisiin vaikuttaa yhtälön koordinaattiavaruuden dimensio; yhden ja kolmen paikkakoordinaatin tapauksessa ratkaisu on hajaantumaton (engl. sharp) mitä se ei ole tasoalueessa. Ratkaisun hajaantuvuudella tarkoitetaan tässä sitä, miten se reagoi impulssivasteeseen; säilyttääkö ratkaisu tarkasti impulssin muodon vai aiheutuuko siitä myös muita väreilyjä.

1.4.3 Elliptinen yhtälö

Viimeisenä joskaan ei vähäpätöisimpänä tutkitaan elliptisen laattayhtälön ratkaisua suorakulmaisessa alueessa Ω . Valitaan ulkoiseksi kuormitukseksi suuruudeltaan F oleva pistekuorma kohdassa $(\xi, \eta) \in \Omega$, joten ratkaistavana on nyt taipumafunktio

$u(x, y)$, joka toteuttaa

$$\begin{aligned} \text{kenttäyhtälön :} \quad & D\Delta\Delta u = F\delta(x - \xi, y - \eta), \quad (x, y) \in \Omega, \\ \text{reunaehdot :} \quad & u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 0, \quad (x, y) \in S, \end{aligned} \quad (1.20)$$

jossa δ on ns. Diracin⁴ delta-distribuuutio ja n viittaa reunakäyrän S ulkonormaalin suuntaan. Ratkaisu saadaan Fourierin⁵ sarjojen avulla ja on muotoa

$$u(x, y) = \frac{4F}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{-2} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (1.21)$$

Oheinen ratkaisu pistekuormalle on hyödyllinen, sillä siitä saadaan probleeman (1.20) ns. Greenin funktio⁶ eli taipuman influenssipinta $K(x, y, \xi, \eta)$:

$$K(x, y, \xi, \eta) = \frac{4}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{-2} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (1.22)$$

joka siis kuvaa pisteessä (ξ, η) vaikuttavan yksikköpistekuorman kuormittamaa laatan taipumaa pisteessä (x, y) . Siitä voidaan konstruoida ratkaisu mille tahansa jakautuneelle kuormitukselle $f(\xi, \eta)$ käyttäen superpositioperiaatetta, jolloin saadaan

$$u(x, y) = \int \int_A f(\xi, \eta) K(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (1.23)$$

ja jossa integrointi suoritetaan kuormitetun pinnan ylitse. Greenin funktiosta havaitaan sen olevan symmetrinen muuttujien x, ξ ja y, η suhteen, josta mekaniikassa tunnettu Maxwellin vastavuoroisuusväittämä voidaan helposti osoittaa paikkansa pitäväksi tälle erikoistapaukselle.

Pistekuormalle kuormitetun laatan ratkaisusta (1.21) havaitaan myös elliptisille yhtälöille ominainen piirre: olkoon kuormitus miten pieni tahansa, sen vaikutus ulottuu yli koko tarkasteltavan alueen.

⁴Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984), englantilainen fyysikko.

⁵Jean Baptiste Fourier (1768–1830), ranskalainen matemaatikko ja fyysikko jonka tärkein teos on *Théorie analytique de la chaleur* (1822), joka käsittelee lämmön johtumista ja jossa hän esitti matemaattisen sarjateorian lämmönjohtumisongelman ratkaisemiseksi.

⁶George Green oli pääosin itseoppinut englantilainen matemaatikko, joka vuonna 1828 julkaisi omakustanteena teoksen "*On the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*". Teoksessaan hän johtaa integraaliesityksen mm. tietyille Laplacen yhtälön ratkaisuille.

1.4.4 Muutamia huomioita yhtälöiden luokittelussa

1.4.4.1 Rajatapaukset

Osittaisdifferentiaaliyhtälön käyttäytymisen määrittävät sen korkeimmat derivaatat. Mikäli niihin liittyvät kertoimet ovat pieniä verrattuna alhaisasteisempien termien kertoimiin, voi ratkaisun käyttäytyminen muuttua. Yksi mielenkiintoinen välimuototapaus on ns. diffuusio-konvektioyhtälö, joka dimensiottomassa muodossa kirjoitettuna yksiulotteisessa paikka-avaruudessa on

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{P} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = f, \quad (1.24)$$

ja jonka numeerinen ratkaisu tuotti ongelmia vielä 1980 luvun alkupuolelle saakka, etenkin konvektion dominoimissa tehtävissä (Pécletin luku P suuri). "Virallisesti" yhtälö on parabolinen, mutta käytännössä yhtälön käyttäytyminen on lähempänä hyperbolisen yhtälön käyttäytymistä kun P on suuri. Kun P on pieni (luokkaa ~ 1), diffuusion osuus dominoi ratkaisua ja yhtälön parabolinen luonne on hallitseva, eikä yhtälön ratkaisu tuota ongelmia tavanomaisille numeerisille menetelmillekään.

Diffuusio-reaktioyhtälössä on toinen esimerkki rajatapauksesta erityisesti silloin kun reaktiotermin on hallitseva diffuusiotermin verrattuna, katso harjoitustehtävä 12 sivulla 16. Kiinteän aineen mekaniikassa samankaltaisiin ongelmiin törmätään esimerkiksi laatta- ja kuorirakenteita analysoitaessa.

1.4.4.2 Tasapaino- ja etenemistehtävät

Diffuusio- (1.13) ja aaltoyhtälöistä (1.18) havaitaan, että yhdellä koordinaattisuorella, nimittäin ajalla, on oma erikoisasemansa. Tähän seikkaan nojautuen voidaan suorittaa tehtävätyypin jako myös fysikaalisiin perustein ja ajasta riippuvia tehtäviä kutsutaan yhteisellä nimellä etenemistehtävät, jossa systeemin tilaa pyritään ennustamaan tietyssä ratkaisualueessa (paikkakoordinaattien suhteen) ajan suhteen edeten. Puhutaan myös alkuarvotehtävistä tai yhdistetyistä alku- reuna-arvotehtävistä.

Kappaleessa 1.3 esitetty osittaisdifferentiaaliyhtälöiden luokittelumetodi saattaa tuntua vaikeasti sovellettavalta. Erityisesti hyperbolisen ja parabolisen yhtälön erottaminen toisistaan voi olla hankalaa. Helppo tapa erottaa parabolinen yhtälö hyperbolisesta on sijoittaa yrite

$$u = e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (1.25)$$

ja etsiä kulmataajuuden ω ja aaltolukujen k_1, k_2, k_3 ($k = |\vec{k}|$, $\vec{k} = k_1 \vec{i} + k_2 \vec{j} + k_3 \vec{k}$) välinen yhteys. Ratkaisemalla $\omega = \omega(k)$ tästä yhteydestä voidaan yhtälön tyyppi päätellä siitä ovatko kulmataajuudet ω reaalisia, jolloin yhtälö on hyperbolinen, vai ovatko ne imaginaarisia, jolloin yhtälö on parabolinen.

Hyperbolisen yhtälön tapauksessa voidaan kulmataajuuden ja aaltoluvun välisestä yhteydestä päätellä myös muita fysikaalisesti kiinnostavia ominaisuuksia. Vai-

henopeus c määritellään yhtälöllä

$$c = \frac{\omega}{k}. \quad (1.26)$$

Mikäli c on riippuvainen aaltoluvusta k , tällöin aaltoliikkeessä esiintyvät eri aallonpituiset (muista, että aallonpituus λ on $\lambda = 2\pi/k$) komponentit etenevät eri nopeudella. Tällaista tapausta kutsutaan *dispersiiviseksi*.

Laattayhtälö (1.20) on luonteeltaan tasapainotehtävä, jossa systeemi ratkaistaan pysyvän eli stationäärisen tilan suhteen.

1.4.4.3 Ominaisarvotehtävät

Etenemis- ja tasapainotehtävien lisäksi on olemassa eräs tehtävätyyppi nimittäin ominaisarvotehtävät. Ominaisarvotehtävät voivat liittyä joko etenemistehtäviin tai tasapainotehtäviin. Tyypillisiä tapauksia ovat ominaisvärähtelyjen määrittäminen ja rakenteiden stabiiliusanalyysit. Esimerkiksi ominaisvärähtelytehtävä saadaan aaltoyhtälöstä (1.18), kun otaksutaan ratkaisu harmoniseksi värähtelyksi, jolloin voidaan otaksua aikariippuvuuden olevan muotoa

$$u(x, y, t) = e^{-i\omega t} \phi(x, y), \quad (1.27)$$

jossa i on imaginaariyksikkö ja ω on värähtelyn ominaistajuus. Sijoittamalla tämä yrite aaltoyhtälöön saadaan osittaisdifferentiaaliyhtälö pelkästään paikkakoordinaattien suhteen⁷

$$-\omega^2 \rho \phi - \sigma \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (1.28)$$

Tehtävänä on nyt ratkaista ominaisarvot ω^2 (tai ainakin joitain arvoja ominaisarvospektristä) ja niitä vastaavat ominaismuodot $\phi(x, y)$ annetuilla reunaehdoilla. Aaltoyhtälön aikakehitys voidaan kylläkin konstruoida käyttäen hyväksi laskettuja ominaisarvoja ja ominaismuotoja. Tätä menettelyä kutsutaan ominaismuotosuperpositioksi ja se on usein käyttökelpoinen värähtelytehtävissä joissa ratkaisu suurelta osin määräytyy alimpien ominaistajuuksien mukaan. Se ei tietenkään ole käyttökelpoinen sellaisenaan epälineaarisissa tehtävissä eikä ole taloudellinen aallonetemistehtävissä joissa rakenteen vaste on riippuvainen laajemmasta taajuuskaistasta kuin värähtelytehtävissä. Toisena esimerkkinä ominaisarvotehtävistä voidaan mainita vaikkapa levyn lommahduksen yhtälö, jossa määritetään kriittinen kuormaparametrin arvo ja sitä vastaava ominaismuoto. Esimerkkinä vaikkapa tehtävä

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} + P \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad x \in (0, L), \quad (1.29)$$

jossa P on ominaisarvo, eli nurjahduskuorma ja u on sitä vastaava nurjahdusmuoto.

⁷Yhtälöä $(\Delta + k^2)u = 0$ eli aaltoyhtälön paikkamuotoa kutsutaan myös Helmholtzin yhtälöksi.

1.5 Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmistä

Kuten jo oheisista suhteellisen yksinkertaisista esimerkkitalauksista voitaneen päätellä, on jo lineaaristen vakioehtoimistenkin osittaisdifferentiaaliyhtälöiden analyytinen ratkaisu vaikeaa mikäli kuormitus ja/tai alueen geometria ovat hiemankin monimutkaisemmat.

Onneksi tietokonetekniikan kehitys on mahdollistanut vaikeiden ongelmien likimääräisen ratkaisemisen monimutkaisissa geometrioissa. Perusajatuksena näissä numeerisissa menetelmissä on fysikaalista ongelmaa kuvaavan matemaattisen mallin korvaaminen diskreetillä matemaattisella mallilla, jossa ratkaisua etsitään sopivien funktioiden joukosta ja että ratkaisu pystytään konstruoimaan äärellisellä määrällä diskreettejä parametreja, jotka ovat lineaarisessa yhteydessä approksimoiviin funktioihin, jolloin ratkaistavaksi jää äärellinen määrä algebrallisia yhtälöitä.

Ongelman ratkaisuun sopivan numeerisen metodin konstruointi riippuu ratkaistavan probleeman luonteesta. Tällä hetkellä elementtimenetelmä, tai tarkemmin suomennettuna äärellisten elementtien menetelmä on hallitseva elliptistyyppisten kenttäprobleemien ratkaisussa. Myös parabolisten yhtälöiden tapauksessa yhtälön elliptinen osa pääsääntöisesti diskretoidaan elementtimenetelmällä ja yhtälön aika-riippuvuus integroidaan jollain sopivalla differenssimenetelmällä, samaten kuin rakenteiden dynaamisessa analyysissä. Uudempaa tapaa ajasta riippuvien yhtälöiden diskretoinniseksi edustaa ns. ajan suhteen epäjakuvakuva Galerkinin keino. Tietyissä tapauksissa se kuitenkin johtaa tunnettuihin differenssikaavoihin.

Virtausmekaniikan yhtälöt ovat usein hyperbolistyyppisiä myös paikkakoordinaatin suhteen. Tästä johtuen standardimuotoinen elementtimenetelmäformulaatio ei useinkaan toimi hyvin virtausmekaniikan ongelmissa. 1980-luvun aikana on ongelma kuitenkin pystytty voittamaan ja uusimmat virtausmekaniikan ohjelmat käyttävät elementtimenetelmää paikkakoordinaattien suhteen suoritettuna diskretoinnissa aikaisemmin yleisen differenssimenetelmän sijaan.

Elementtimenetelmän voidaan ajatella kehittyneen yleistykseenä klassisista Rayleighin-Ritzin (RRM) ja painotettujen jäännösten menetelmästä (PJM). Molemmat menetelmät käyttävät hyväksi variaatioperiaatteita, katso luku 2. Näissä menetelmissä tuntemattomalle funktiolle (tai funktioille) valitaan riittävät jatkuvuusominaisuudet toteuttavien lineaarisesti riippumattomien kantafunktioiden joukosta lineaarikombinaatio, jossa kantafunktioiden kertoimet ovat tuntemattomia parametreja (diskretointi). Yhtälöt tuntemattomien parametrien määrittämiseksi Rayleighin ja Ritzin menetelmässä saadaan, kun funktion approksimaatio sijoitetaan ongelmalle ominaiseen funktionaaliin (esim. potentiaalienergian funktionaaliin) ja minimointi suoritetaan nyt tuntemattomien diskreettien muuttujien suhteen. Painotettujen jäännösten menetelmä eroaa edellämäinitusta siinä, että ratkaisufunktionaalina käytetään ongelmaan liittyvän yhtälön (esim. yhtälö $ADB u - f = 0$, katso kuva 1.2) approksimoitun muodon ratkaisualueen yli integroitua painotettua jäännöstä, jossa

painofunktioille valitaan jokin sopiva kantafunktiojoukko. Näistä ratkaisumenetelmistä saadaan helposti erilaisia versioita, mm. Galerkinin menetelmäksi kutsutaan menettelyä, jossa painofunktioille valitaan sama kanta kuin ratkaistavalle funktiolle. Klassinen tapa on valita kantafunktiot siten, että ne ulottuvat yli koko ratkaistavan alueen. Tämä rajoittaa heti menetelmien käyttökelpoisuuden hyvin yksinkertaisiin alueisiin. Elementtimenetelmän perusidea jakaa tarkastelualue pieniin äärellisiin osiin vapauttaa analysoinnin geometrian tuomilta ongelmilta. Elementtimenetelmää voitaisinkin kutsua yleistetyksi painotettujen jäännösten menetelmäksi tai yleistetyksi Galerkinin menetelmäksi.

Esimerkki 1.1 *Ratkaise stationäärinen 1-dimensioinen diffuusio-konvektio-yhtälö*

$$-ku'' + \rho cvu' = f, \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0, \quad (1.30)$$

kun k, ρ, c, v ja f ovat positiivisia vakioita (k lämmönjohtavuus, ρ tiheys, c ominaislämpö, v väliaineen virtausnopeus). Piirrä ratkaisun kuvaajia suhteen $P = \rho cvL/k$ erilaisilla arvoilla, esim. $P = 1, P = 10, P = 100$. Mitä tapahtuu kun $P \rightarrow \infty$?

Yhtälö on toisen kertaluvun vakiokertoiminen epähomogeeninen tavallinen differentiaaliyhtälö, jonka täydellinen yleinen ratkaisu saadaan homogeenisen osan täydellisen ratkaisun ja täydellisen yhtälön jonkin yksityisratkaisun summana. Homogeenisen osan

$$-ku_0'' + \rho cvu_0' = 0 \quad (1.31)$$

yleinen ratkaisu konstruoidaan yrittäen $u_0(x) = A \exp(rx)$ avulla. Karakteristiseksi yhtälöksi saadaan

$$-kr^2 + \rho cvr = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{tai} \quad r = \frac{\rho cv}{k}. \quad (1.32)$$

Homogeenisen osan ratkaisu on siten

$$u_0(x) = A \exp(\rho cvx/k) + B. \quad (1.33)$$

Yksityisratkaisu arvataan olevan lineaarista muotoa

$$u_f(x) = Cx, \quad (1.34)$$

joka sijoittamalla täydelliseen yhtälöön antaa vakion C arvoksi $C = f/\rho cv$. Ottamalla huomioon reunaehdot saadaan yhtälöt vakioiden A ja B määrittämiseksi

$$\begin{aligned} u(0) &= A + B = 0, \\ u(L) &= A \exp(\rho cvL/k) + B + fL/\rho cv = 0, \end{aligned} \quad (1.35)$$

josta seuraa vakioille arvot

$$A = \frac{fL}{\rho cv [1 - \exp(\rho cv L/k)]}, \quad B = -A. \quad (1.36)$$

Yhtälön (1.30) täydellinen ratkaisu on siten

$$u(x) = \frac{fL}{\rho cv} \left(\frac{x}{L} - \frac{\exp(Px/L) - 1}{\exp(P) - 1} \right). \quad (1.37)$$

Kun Pécletin luku P on suuri aiheuttaa termit $\exp(P)$ ja $\exp(Px/L)$ hankaluuksia numeeristen arvojen laskennassa, joten muokataan ratkaisun lauseke sopivampaan muotoon

$$u(x) = \frac{fL}{\rho cv} \left\{ \frac{x}{L} - \exp[-P(1 - x/L)] \frac{1 - \exp(-Px/L)}{1 - \exp(-P)} \right\} \quad (1.38)$$

Yhtälö kuvaa esimerkiksi lammön johtumista ja kulkeutumista nopeudella v etenevässä väliaineessa. Pécletin luku kuvaa siis kulkeutumisen ja johtumisen välistä suhdetta. Kuvassa 1.3 on esitetty ratkaisun kulku kolmella eri Pécletin luvun arvolla. Mikäli P on suuri, on konvektion osuus dominoiva ja jotta ratkaisu toteuttaisi oikeanpuoleisen reunaehdon syntyy lähelle oikeaa reunaa ns. reunahäiriö. Häiriövyöhykkeen leveys voidaan arvioida kun määritetään funktion $u(x)$ maksimin sijaintikohta, joka saadaan ehdosta

$$\begin{aligned} u'(x) = 0 & \Rightarrow \exp(Px) = \frac{1}{P}(\exp(P) - 1), \\ \text{kun } P \text{ suuri} & \Rightarrow \exp(Px) \simeq \frac{1}{P} \exp(P) \end{aligned} \quad (1.39)$$

ja se on luokkaa

$$\sim \left(\frac{1}{P} \ln P \right) L. \quad (1.40)$$

Yhtälö on elliptinen reuna-arvotettava, mutta Pécletin luvun P suuretessa yhtälön (1.30) toisen derivaatan merkitys pienenee pienenemistään. Rajalla kun $P = \infty$ supistuu yhtälö pelkästään alkuarvotyypiseksi probleemaksi

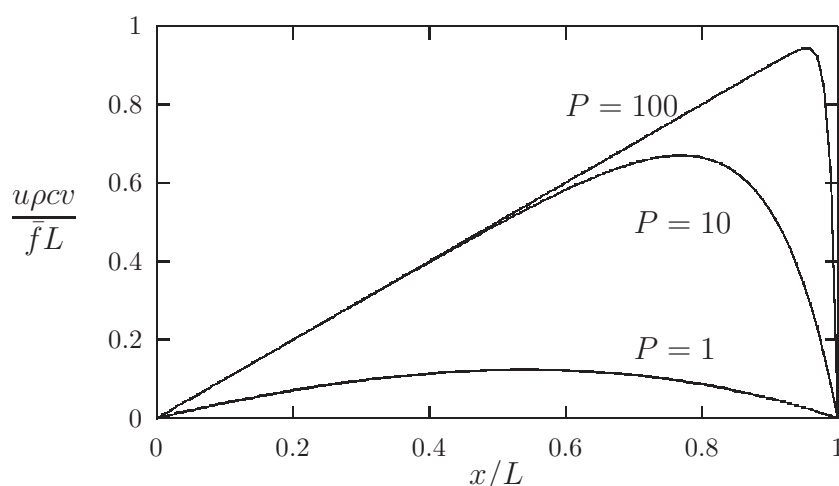
$$\rho cv u' = f, \quad (1.41)$$

jolle voidaan antaa vain alkuehto $u(0) = 0$ ja jonka ratkaisu on $u(x) = fx/\rho cv$. Kuvasta 1.3 havaitaan yhtälön (1.30) ratkaisun pyrkivän ratkaisua (1.41) kohden P :n kasvaessa.

Yhtälön (1.30) epästationäärinen muoto on

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho cv \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad (1.42)$$

joka on parabolinen ODY (ks. harj. teht.). Mikäli nyt lämmönjohtavuus $k \rightarrow 0$



Kuva 1.3 Yksidimensioisen stationäärisen diffuusio-konvektioyhtälön ratkaisuja Pécletin luvun P arvoilla $P = 1$, $P = 10$ ja $P = 100$.

eli $P \rightarrow \infty$ muuntuu yhtälön tyyppi rajalla $k = 0$ hyperboliseksi. Suurilla Pécletin luvun arvoilla yhtälön käyttäytyminen muistuttaa hyperbolisen yhtälön käyttäytymistä vaikkakin yhtälö on "virallisesti" parabolinen. Numeerisissa laskelmissa se saattaa aiheuttaa ongelmia. Tähän seikkaan palataan myöhemmin.

1.6 Yhteenveto

Tekniikassa esiintyvät osittaisdifferentiaaliyhtälöt voidaan luokitella tehtävän ajallisen luonteen perusteella (i) tasapainotehtäviin ja (ii) etenemistehtäviin tai karakterististen ominaisuuksien perusteella (a) elliptisiin, (b) parabolisiin ja (c) hyperbolisiin yhtälöihin. Tasapainotehtävät ovat ajasta riippumattomia stationäärisen tilan ongelmia ja ne ovat yleensä elliptisiä. Ajan suhteen muuttuvat etenemistehtävät (edetään ajassa) ovat joko parabolisia tai hyperbolisia yhtälöitä.

Tämän luokittelun lisäksi on olemassa ominaisarvotehtäviä, jotka liittyvät joko tasapainotehtäviin tai etenemistyyppisiin tehtäviin.

Sama yhtälö voi eri ratkaisualueen kohdissa olla eri tyyppiä. Mikäli yhtälö on epälineaarinen, voi ratkaisu itsessään muuttaa yhtälön tyyppiä.

Elliptiset tasapainotehtävät ovat reuna-arvotehtäviä, joille on ominaista, että "kaikki vaikuttaa kaikkeen". Tämä tarkoittaa sitä, että pienimmänkin kuormituksen vaikutus ulottuu yli koko ratkaisualueen.

Paraboliset etenemistehtävät ovat alkuarvo- reuna-arvotehtäviä, joille on ominaista aallonpituudesta riippuva vaimenemisominaisuus ja häiriön ääretön etenemisnopeus. Parabolisen ongelman ratkaisu siloittuu ajan edetessä, mikä tarkoittaa ratkaisun spatiaalisesti korkeataajuisempien komponenttien (lyhyempi aallonpituus)

nopeampana vaimenemisena.

Hyperboliset etenemistehtävät ovat alkuarvo- reuna-arvotehtäviä. Hyperbolisten yhtälöiden ratkaisut ovat konservatiivisia, eli ratkaisuun sisältyy jokin säilyvä ominaisuus, joka voi olla esimerkiksi energia. Lisäksi hyperboliselle systeemille on ominaista häiriön *äärellinen etenemisnopeus*. Ne ovat myös ajan suhteen symmetrisiä. Häiriön äärellisestä etenemisnopeudesta johtuen on häiriöllä tietty vaikutusalue aika-paikka avaruudessa.

1.7 Harjoitustehtäviä

1. Assosioi lämmönjohtumisprobleemassa esiintyvät suureet kuvan 1.2 perusstruktuuriin. Identifioi myös operaattorit A , B ja D .
2. Kirjoita taivutetun palkin probleemassa esiintyvät suureet perusstruktuurin muodossa. Identifioi myös operaattorit A , B ja D .
3. Näytä, että kaksidimensioinen stationäärinen lämmönjohtumisyhtälö

$$-k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f$$

on tyypiltään elliptinen osittaisdifferentiaaliyhtälö.

4. Näytä, että epästationäärinen diffuusio-konvektioyhtälö (1.30) on parabolinen. Tutki myös degeneroitunutta tapausta kun lämmönjohtavuus $k = 0$.
5. Näytä, että funktio

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-(\xi+\tau)^2 P/4\tau}$$

toteuttaa dimensiottomaan muotoon kirjoitetun homogeenisen diffuusio-konvektioyhtälön

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{P} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Piirrä yhtälön kuvaajia eri dimensiottoman ajan τ hetkillä ja Pécletin luvun P arvoilla 1 ja 100. Näytä myös, että siirtymällä liikkuvaan koordinaatistoon $X = \xi + \tau$ ja $T = \tau/P$ yllä oleva yhtälö palautuu muotoon

$$\frac{\partial u}{\partial T} - \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = 0.$$

6. Mitä tyyppiä yhtälö

$$\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f$$

on? Mitä fysikaalista ilmiötä se kuvaa?

7. Näytä, että diffuusioyhtälön (1.13) ratkaisu on muotoa (1.14) käyttämällä muuttujien erottelukeinoa, eli otaksumalla

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t),$$

jossa X, Y, T ovat tuntemattomia yhden muuttujan funktioita, jotka määritetään sijoittamalla yrite kenttäyhtälöön, josta seuraa kullekin funktiolle ratkaistavaksi tavallinen differentiaaliyhtälö.

8. Käy läpi yksityiskohdat aaltoyhtälön ratkaisun (1.19) johdossa. Huomaa, että muuttujien erottelukeino on tässäkin tapauksessa hyödyllinen menettely.
9. Näytä, että aaltoyhtälön (1.18) toteuttaa myös yrite

$$u(x, y, t) = e^{i(k_1 x + k_2 y + \omega t)},$$

jossa $i = \sqrt{-1}$. Johda yhteys aallon etenemisnopeuden c ja aaltolukujen k_1, k_2 ja ominaistajuuden ω välille.

10. Näytä, että aaltoyhtälö kolmiulotteisessa paikkakoordinaattiavaruudessa redusoituu pallosymmetrisessä tapauksessa yksidimensioiseen aaltoyhtälöön

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(ru) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) = 0,$$

jossa r on säteen suuntainen pallokoordinaatti.

11. Ratkaise yksiulotteinen diffuusioyhtälö alueessa $\Omega = \{x \in (0, L)\}$ kun kuormituksena on lämmönlähde $f(x) = f_c \cos(\pi x/2L)$ ja alkulämpötila hetkellä $t = 0$ on $u(x, 0) \equiv 0$, sekä reunaehdot $u'(0) = 0, u(L) = 0$. Määritä myös lämpövuoto reunalla $x = L$.
12. Ratkaise stationäärinen 1-dimensioinen diffuusioyhtälö

$$-ku'' = f, \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0,$$

kun lähdetermi f riippuu ratkaisusta tavalla $f = s - qu$, jossa s ja q ovat positiivisia vakioita. Piirrä ratkaisun kuvaajia eri suhteen qL^2/k arvoilla. Mitä tapahtuu kun $qL^2/k \rightarrow \infty$?

13. Esimerkkitehtävän 1.1 ratkaisut on piirretty kuvaan 1.3 eri Pécletin luvun arvoilla. Ratkaisu on esitetty dimensiottomassa muodossa jakamalla lämpötila u suureella $fL/\rho cv$. Koska lämmönjohtavuuden k arvo on eliminoitu käyttäen hyväksi Pécletin lukua P , vastaavat kuvassa esitetyt ratkaisut ongelmaa, jossa lähdetermi f kasvaa Pécletin luvun kasvaessa. Piirrä ratkaisut kun lämmönlähteen antoisuus ja lämmönjohtavuus pidetään vakiona, eli esitä kuvaaja skaalaamalla u suureella fL^2/k .

Luku 2

Variaatioperiaatteet

Luvun tarkoituksena on antaa perustiedot variaatiolaskennasta. Tämän luentomonisteen kannalta variaatioperiaatteiden tärkein ominaisuus on mahdollisuus likiratkaisujen muodostamiseen. Variaatiomenetelmillä on myös muita hyviä ominaisuuksia: (i) varioitavalla funktiolla on usein selkeä fysikaalinen merkitys, (ii) se on invariantti koordinaatistomuunnosten suhteen, (iii) ne mahdollistavat usein jonkin suureen ylä- ja alarajaratkaisut ja (iv) ne mahdollistavat ongelman muuntamisen toiseksi ekvivalentiksi ongelmaksi, joka on ehkä helpommin ratkaistava (Legendren-Fenchelin muunnos).

2.1 Variaatiolaskennan perusteita

Differentiaalilaskennan perustoimitus on yhden tai useamman muuttujan funktion ääriarvon etsintä ja funktion ominaisuuksien tutkiminen ääriarvon läheisyydessä. Päätelmiä ääriarvon luonteesta ja funktion käyttäytymisestä tehdään tutkimalla funktion derivaattoja mahdollisessa ääriarvopisteessä. Variaatiolaskennan perustettava on löytää funktio, joka antaa ääriarvon ns. funktionaalille eli kuvaukselle, joka liittyy reaalityön tarkasteltavaan funktioon.¹ Funktionaalien käyttäytymisestä taas voidaan tehdä päätelmiä tutkimalla sen variaatioita ääriarvopisteessä (= se *funktio*, joka antaa funktionaalille ääriarvon). Ääriarvon etsiminen palautuu differentiaaliyhtälön ratkaisuun, joten funktionaalien minimointi ja differentiaaliyhtälön ratkaisu ovat ekvivalentteja toimenpiteitä. Koska differentiaaliyhtälöiden ratkaisu on vaikeaa, voidaankin kysyä: mitä etua variaatiomenetelmän käyttöönotto tuo tullessaan? Kysymykseen vastaaminen on helppoa, sillä variaatiomenetelmien suurin etu (etenkin näin tietokoneiden aikakaudella) on helppous muodostaa probleeman likiratkaisuja.

¹Formaalin näkökannan mukaan määrätyn integraalin minimoiminen on aito variaatiolaskennan tehtävä kun taas funktion minimointi kuuluu tavallisen differentiaalilaskennan piiriin. Historiallisesti nämä kaksi ongelmatyyppiä tulivat esille miltei samanaikaisesti ja selvää eroa niiden välillä ei tehty ennen kuin Joseph-Louis Lagrange kehitti yleisen variaatiolaskennan metodiikan teoksessaan *Mécanique Analytique* 1788. Eräs variaatiolaskennan äitiongelmia on nopeimman laskun käyrän yhtälön määrittäminen; ongelma jonka Jean Bernoulli esitti 1696 ja jonka ratkaisun löysivät toisistaan riippumatta Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz ja Bernoulli itse. Variaatio-ongelman yhteyden differentiaaliyhtälöihin havaitsivat Leonhard Euler ja Lagrange.

Tarkastellaan funktionaalia

$$I(w) = \int_a^b F(x; w, w') dx, \quad (2.1)$$

ja etsitään funktiota $w(x)$, joka antaa minimiarvon I :lle ja joka toteuttaa reunapisteissä ehdot

$$w(a) = u_a, \quad w(b) = u_b. \quad (2.2)$$

Otaksutaan lisäksi, että funktio w on vähintään kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva, eli $w \in C_2(a, b)$.²

Olkoon $u(x)$ se funktio, joka antaa minimiarvon funktionaalille (2.1), eli

$$I(u) = \min_{w \in C_2(a, b)} \int_a^b F(x; w, w') dx \quad (2.3)$$

ja toteuttaa reunaehdot (2.2). Määritellään *varioitu funktio*

$$w(x) = u(x) + \delta u(x) = u(x) + \epsilon \hat{u}(x), \quad (2.4)$$

jossa ϵ on *mielivaltainen reaaliuku* ja $\hat{u}$ on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva, homogeeniset reunaehdot ($\hat{u}(a) = \hat{u}(b) = 0$) toteuttava mielivaltainen funktio (mielivaltainen, mutta täysin *kiinnitetty* kun valitaan variaatioksi). Funktiota $\delta u(x) = \epsilon \hat{u}(x)$ kutsutaan funktion u variaatioksi. Sijoitetaan varioitu funktio funktionaalin (2.1) lausekkeeseen, jolloin saadaan

$$I(w) = I(u + \epsilon \hat{u}) = I(\epsilon) = \int_a^b F(x; u + \epsilon \hat{u}, u' + \epsilon \hat{u}') dx. \quad (2.5)$$

Huomaa, että funktionaali on nyt vain ϵ :n funktio, sillä sekä u että $\hat{u}$ ovat kiinnitetyjä funktioita. Oletuksen mukaan funktio $u(x)$ antaa I :lle minimiarvon ja vastaa edellisen funktionaalin arvoa, kun $\epsilon = 0$. Minimien olemassaolon välttämätön ehto on

$$\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial w} \frac{dw}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial w'} \frac{dw'}{d\epsilon} \right) dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial w} \hat{u}(x) + \frac{\partial F}{\partial w'} \hat{u}'(x) \right) dx = 0. \quad (2.6)$$

Osittaisintegroimalla jälkimmäinen termi

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial w'} \hat{u}'(x) dx = \left[\frac{\partial F}{\partial w'} \hat{u} - \int_a^b \hat{u}(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w'} \right) dx \right] \quad (2.7)$$

²n-kertaa jatkuvasti derivoituvien funktioiden luokkaa merkitään C_n .

saadaan

$$\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w'} \right) \right] \hat{u}(x) dx = 0, \quad (2.8)$$

sillä sijoitustermi häviää, koska funktio $\hat{u}$ toteuttaa homogeeniset reunaehdot.

Nyt tarvitaan hieman aputuloksia matematiikasta.

Lause 2.1 Mikäli funktio $f(x)$ on jatkuva välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b f(x) \eta(x) dx = 0 \quad (2.9)$$

kaikille funktioille $\eta(x) \in C_2(a, b)$ ja $\eta(a) = \eta(b) = 0$, niin $f(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Soveltamalla tätä tulosta yhtälöön (2.8), saadaan funktionaalin (2.1) ns. *Eulerin yhtälö*³

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w'} \right) = 0, \quad (2.10)$$

joka on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö funktion $w(x)$ määrittämiseksi ja välttämätön ehto sille, että $w(x)$ antaa funktionaalille I suhteellisen minimin. Yhtälön (2.10) ja reunaehdot (2.2) toteuttavaa funktiota kutsutaan myös funktionaalin (2.1) ekstremaaliksi.

Yhteenvedon voidaan todeta, että funktionaalin minimin etsiminen annetuilla reunaehdoilla on ekvivalenttia differentiaaliyhtälön ratkaisulle ko. reunaehdoilla.

Funktion u variaatio δu määritellään yhtälöllä

$$\delta u(x) = \epsilon \hat{u}(x), \quad \text{eli} \quad \delta u = \epsilon \left. \frac{d(u + \epsilon \hat{u})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}. \quad (2.11)$$

Samalla tavalla voidaan määritellä myös funktionaalin variaatio

$$\delta I = \epsilon \left. \frac{dI(u + \epsilon \hat{u})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}. \quad (2.12)$$

Yhtälön (2.8) mukaan

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w'} \right) \right] \delta u dx = 0, \quad (2.13)$$

eli funktionaali I saavuttaa ääriarvon, jos ja vain jos $\delta I = 0$. Funktionaalin I kor-

³Usein kutsutaan myös Eulerin-Lagrangen yhtälöksi.

keampia variaatioita voidaan määrittää rekursiivisesti, esimerkiksi

$$\begin{aligned}\delta^2 I &= \delta(\delta I) = \delta \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial w} \delta u + \frac{\partial F}{\partial w'} \delta u' \right) dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial w^2} (\delta u)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial w \partial w'} \delta u \delta u' + \frac{\partial^2 F}{\partial w'^2} (\delta u')^2 \right] dx.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Yleisesti voidaan kirjoittaa lauseke

$$I(u + \delta u) = I(u) + \delta I(u) + \frac{1}{2!} \delta^2 I(u) + \dots, \quad (2.15)$$

joka on analoginen funktion Taylorin kehitelmän kanssa. Yhtälön (2.13) mukaan funktionaalin ääriarvon olemassaolon välttämätön ehto on sen ensimmäisen variaation häviäminen. Täten ääriarvon laadun tutkiminen voidaan suorittaa tutkimalla funktionaalin toista variaatiota.

Yhden muuttujan funktion w tapauksessa, jos integrandifunktio F riippuu funktiosta w ja sen derivaatoista kertalukuun n saakka, on variaatioformulaatio muotoa

$$\min_{w \in \mathcal{A}} I(w) = \min_{w \in \mathcal{A}} \int_a^b F(x; w, w', w'', \dots, w^{(n)}) dx, \quad (2.16)$$

jossa $\mathcal{A}$ merkitsee luvallisten funktioiden joukkoa, eli funktioita joiden derivaatat ovat jatkuvia aina kertalukuun $2n$ saakka ja jotka toteuttavat reunaehdot w :lle ja sen derivaatoille kertalukuun $n - 1$ saakka. Funktionaalin (2.16) Eulerin yhtälö on

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial w'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial w''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial F}{\partial w^{(n)}} = 0. \quad (2.17)$$

Tarkastellaan seuraavassa useamman muuttujan funktioiden variaatioformulaatiota, ja käydään lävitse funktionaalin

$$I(w) = \int_A F(x, y; w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}) dA \quad (2.18)$$

Eulerin yhtälön johto tasoalueessa A jonka reunakäyrää merkitään S :llä. Käytetään seuraavia kompakteja merkintöjä osittaisderivaatoille:

$$w_{,x} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w_{,y} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w_{,xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{jne..} \quad (2.19)$$

Merkitään nyt varioitua funktiota

$$w(x, y) = u(x, y) + \epsilon \hat{u}(x, y), \quad (2.20)$$

jossa $\hat{u}(x, y)$ toteuttaa homogeeniset reunaehdot reunalla S ja otaksutaan funktion $u(x, y)$ antavan funktionaalille (2.18) stationäärisen arvon. Nyt varioitu funktionaali saa muodon

$$I(\epsilon) = \int_A F(x, y; u + \epsilon \hat{u}, u_{,x} + \epsilon \hat{u}_{,x}, u_{,y} + \epsilon \hat{u}_{,y}) dA. \quad (2.21)$$

Aivan vastaavasti kuin yksidimensioisessa tapauksessa, on ääriarvon edellytyksenä nyt ensimmäisen variaation häviäminen, eli

$$\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 \implies I(u) = \min_w I(w), \quad (2.22)$$

josta saadaan

$$\begin{aligned} \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} &= \int_A \left[\frac{\partial F}{\partial w} \frac{dw}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial(w_{,x})} \frac{d(w_{,x})}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial(w_{,y})} \frac{d(w_{,y})}{d\epsilon} \right] dA \\ &= \int_A \left[\frac{\partial F}{\partial w} \hat{u} + \frac{\partial F}{\partial(w_{,x})} \hat{u}_{,x} + \frac{\partial F}{\partial(w_{,y})} \hat{u}_{,y} \right] dA. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Jotta mielivaltainen, mutta variaatiotoimituksen ajaksi kiinnitetty funktio $\hat{u}(x, y)$ saataisiin yhteiseksi tekijäksi oheiseen lausekkeeseen, muokataan integrandin kahta viimeistä termiä:

$$\begin{aligned} &\int_A \left[\frac{\partial F}{\partial(w_{,x})} \hat{u}_{,x} + \frac{\partial F}{\partial(w_{,y})} \hat{u}_{,y} \right] dA \\ &= \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial(w_{,x})} \hat{u} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial(w_{,y})} \hat{u} \right) \right] dA \\ &\quad - \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial(w_{,x})} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial(w_{,y})} \right) \right] \hat{u} dA. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Nyt ensimmäiseen termiin voidaan soveltaa Gaussin⁴ lausetta kahdessa dimensiossa, (katso esim. K. Väisälä: *Vektorianalyysi*)

$$\int_A \nabla \cdot \vec{g} dA = \oint_S \vec{g} \cdot \vec{n} ds, \quad (2.25)$$

jossa $\vec{n}$ on reunakäyrän S ulkonormaali. Tällöin saadaan

$$\int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{u} \frac{\partial F}{\partial(w_{,x})} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\hat{u} \frac{\partial F}{\partial(w_{,y})} \right) \right] dA = \oint_S \hat{u} \left[\frac{\partial F}{\partial(w_{,x})} n_x + \frac{\partial F}{\partial(w_{,y})} n_y \right] ds = 0, \quad (2.26)$$

⁴Karl Friedrich Gauss (1777–1855), saksalainen matemaatikko.

jossa n_x, n_y ovat reunakäyrän yksikköulkonormaalien $\vec{n}$ komponentit. Kokoamalla nyt tulokset yhteen saadaan

$$\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} = \int_A \hat{u} \left[\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{,y}} \right) \right] dx dy = 0. \quad (2.27)$$

Aivan vastaavasti kuin yksidimensioisessakin tapauksessa voidaan todistaa lauseen 2.1 vastine useampidimensioiseen avaruuteen, jolloin funktionaalin (2.18) Eulerin yhtälöksi saadaan

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{,y}} \right) = 0, \quad (2.28)$$

joka on toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälö tuntemattoman funktion w ratkaisemiseksi tasoalueessa riittävillä reunaehdoilla.

Lopuksi voidaan todeta, että mikä tahansa differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa variaatiomuotoon. Eräs tapa tämän toteuttamiseksi voidaan konstruoida seuraavasti: Toteuttakoon funktio $u(x, y)$ osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$G(x, y; u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial y^m}) = 0 \quad (2.29)$$

ja tietyt sopivat reunaehdot. Tällöin voidaan määritellä funktionaali

$$I(w) = \int_A \left[G(x, y; w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^m w}{\partial y^m}) \right]^2 dA, \quad (2.30)$$

ja A on alue (x, y) tasossa jossa yhtälö $G = 0$ on ratkaistava ja jossa w on mikä tahansa funktio, joka toteuttaa u :lle asetetut reunaehdot. On selvää, että oheinen integrandi on aina positiivinen ja häviää silloin kun $w \equiv u$, joten I :n minimiarvo (nolla) saavutetaan kun $w \equiv u$. Funktio (2.30) ei kuitenkaan kuvaa mitään fysikaalista mielekästä suuretta.

Esimerkki 2.1 *Taivutetun pyörähdysymmetrisen laatan potentiaalienergian funktionaali on*

$$\Pi(w) = \int_A \left[\frac{1}{2} (M_r \kappa_r + M_\phi \kappa_\phi) - qw \right] dA, \quad (2.31)$$

jossa

$$\begin{aligned} M_r &= D(\kappa_r + \nu \kappa_\phi), & \kappa_r &= -\frac{d^2 w}{dr^2} = -w'', \\ M_\phi &= D(\kappa_\phi + \nu \kappa_r), & \kappa_\phi &= -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = -\frac{w'}{r}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

ja D on laatan taivutusjäykkyys ja ν materiaalin suppeamaluku. Johda pyö-

rähdysymmetrisen laatan Eulerin yhtälö.

Sijoitetaan momenttien lausekkeet muodonmuutosenergian lausekkeeseen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} U(w) &= \frac{1}{2} \int D (\kappa_r^2 + \kappa_\phi^2 + 2\nu\kappa_r\kappa_\phi) 2\pi r dr \\ &= \frac{1}{2} \int D \left[(w'')^2 + \frac{1}{r^2} (w')^2 + \frac{2\nu}{r} w'' w' \right] 2\pi r dr. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Korvataan $w \rightarrow w + \epsilon \hat{w}$, ja suoritetaan variaatio, eli

$$\left. \frac{d\Pi}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 2\pi \int \left\{ D \left[\left(w'' + \frac{\nu}{r} w' \right) \hat{w}'' + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} w' + \nu w'' \right) \hat{w}' \right] - q \hat{w} \right\} r dr = 0. \quad (2.34)$$

Otaksutaan sellaiset reunaehdot, jotka johtavat sijoitustermien häviämiseen osittaisintegroitaessa ja otaksutaan vielä, että laatan taivutusjäykkyys D on vakio, jolloin saadaan

$$\int \left\{ D \left[(rw'' + \nu w')'' - \left(\nu w'' + \frac{1}{r} w' \right)' \right] - qr \right\} \hat{w} dr = 0, \quad (2.35)$$

josta sieventämällä tulee

$$\int \left[D \left(w'''' + \frac{2}{r} w''' - \frac{1}{r^2} w'' + \frac{1}{r^3} w' \right) - q \right] \hat{w} r dr = 0. \quad (2.36)$$

Koska funktio $\hat{w}$ on mielivaltainen, saadaan Eulerin yhtälöksi

$$D \left(w'''' + \frac{2}{r} w''' - \frac{1}{r^2} w'' + \frac{1}{r^3} w' \right) = q. \quad (2.37)$$

Esimerkki 2.2 Johda Eulerin yhtälö funktionaalille

$$I(w) = \frac{1}{2} \int \int \left[a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + c \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (2.38)$$

jossa a, b ja c ovat vakioita. Milloin oheisen funktionaalin minimoinnista voidaan oikeutetusti puhua, ts. tutki funktionaalin toista variaatiota.

Suoritetaan variaatio, eli korvataan $w \rightarrow w + \epsilon \hat{w}$. Otaksutaan, että w :lle on annettu arvot koko alueen reunalla, joten variaation $\hat{w}$ on toteutettava homo-

geeniset reunaehdot. Saadaan siis

$$\begin{aligned}
 I(w + \epsilon \hat{w}) &= \frac{1}{2} \int \int (aw_{,x}^2 + 2bw_{,x}w_{,y} + cw_{,y}^2) dx dy \\
 &\quad + \epsilon \int \int [aw_{,x}\hat{w}_{,x} + b(w_x\hat{w}_{,y} + w_{,y}\hat{w}_x) + cw_{,y}\hat{w}_{,y}] dx dy \\
 &\quad + \frac{1}{2}\epsilon^2 \int \int (a\hat{w}_{,x}^2 + 2b\hat{w}_{,x}\hat{w}_{,y} + c\hat{w}_{,y}^2) dx dy, \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

jossa on merkitty osittaisderivaattoja lyhyesti esim. $\partial w / \partial x = w_{,x}$. Eulerin yhtälö saadaan ensimmäisen variaation avulla

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dI}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \int \int [(aw_{,x} + bw_{,y}) \hat{w}_{,x} + (bw_{,x} + cw_{,y}) \hat{w}_{,y}] dx dy \\
 &= \int \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(aw_{,x} + bw_{,y}) \hat{w}] + \frac{\partial}{\partial y} [(bw_{,x} + cw_{,y}) \hat{w}] \right\} dx dy \\
 &\quad - \int \int \left[\frac{\partial}{\partial x} (aw_{,x} + bw_{,y}) + \frac{\partial}{\partial y} (bw_{,x} + cw_{,y}) \right] \hat{w} dx dy \\
 &= \oint [(aw_{,x} + bw_{,y}) n_x + (bw_{,x} + cw_{,y}) n_y] \hat{w} ds \\
 &\quad - \int \int (aw_{,xx} + 2bw_{,xy} + cw_{,yy}) \hat{w} dx dy = 0. \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

Koska variaatio $\hat{w}$ toteuttaa homogeeniset reunaehdot, häviää reunaintegraalitermi ja variaation mielivaltaisuudesta seuraa Eulerin yhtälö

$$aw_{,xx} + 2bw_{,xy} + cw_{,yy} = 0. \quad (2.41)$$

Tutkitaan nyt funktionaalin ominaisuuksia hieman tarkemmin. Jotta funktio-naalilla varmasti olisi minimi on toisen variaation oltava aidosti positiivinen, eli

$$\delta^2 I = \epsilon^2 \left. \frac{d^2 I}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} = \epsilon^2 \int \int (a\hat{w}_{,x}^2 + 2b\hat{w}_{,x}\hat{w}_{,y} + c\hat{w}_{,y}^2) dx dy > 0 \quad (2.42)$$

Koska variaatio $\hat{w}$ on täysin mielivaltainen, on positiivisuuden edellytys, että integrandi on positiivinen kaikissa tarkastelualueen pisteissä (x, y) . Merkitään variaation $\hat{w}$ derivaatan arvoja pisteessä (x, y) seuraavilla symboleilla

$$s = \hat{w}_{,x}(x, y), \quad r = \hat{w}_{,y}(x, y). \quad (2.43)$$

Nyt toisen variaation positiivisuusvaatimus voidaan esittää

$$as^2 + 2bsr + cr^2 > 0. \quad (2.44)$$

Havaitaan lausekkeen olevan neliömuoto, joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix} > 0. \quad (2.45)$$

Jotta yllä oleva lauseke olisi positiivinen, on neliömuodon matriisin oltava positiivisesti definiitti, eli sen ominaisarvojen on oltava positiivisia. Ominaisarvot λ_i saadaan yhtälöstä

$$\det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{bmatrix} = 0, \quad (2.46)$$

josta seuraa

$$\lambda = \frac{1}{2}(a + c) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a + c)^2 - ac + b^2}. \quad (2.47)$$

Jotta molemmat ominaisarvot olisivat positiivisia, on oltava

$$\frac{1}{4}(a + c)^2 - ac + b^2 < \frac{1}{4}(a + c)^2 \quad (2.48)$$

josta seuraa

$$ac - b^2 > 0. \quad (2.49)$$

Oheisella ehtoyhtälöllä voidaan toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöitä luokitella. Yhtälö on elliptinen, mikäli minimointi onnistuu, eli kun $ac - b^2 > 0$ ja hyperbolinen kun $ac - b^2 < 0$. Rajatapauksena on parabolinen yhtälö kun $ac - b^2 = 0$. Paraboliseen yhtälöön liittyy kuitenkin tietty varaus. Mikäli esimerkiksi $c = b = 0$ ei vastaava yhtälö $w_{,xx} = 0$ ole parabolinen vaan elliptinen. Sen sijaan yhtälö $w_{,xx} + w_{,y} = 0$ olisi parabolinen.

2.2 Oleelliset ja luonnolliset reunaehdot

Kuten on jo mainittu, tarvitaan differentiaaliyhtälöiden ratkaisuun riittävä määrä reunaehtoja. Mikäli reunaehtoja ei ole asetettu, tai ne ovat puutteelliset, ei yksikäsitteistä ratkaisua voida löytää. Herääkin kysymys: mikä on kullekin yhtälölle riittävä määrä reunaehtoja ratkaisun yksikäsitteisyyden takaamiseksi? Variaatiomenetelmä antaa tähän vastauksen.

Tarkastellaan esimerkkinä taivutetun ohuen palkin yhtälöä (Eulerin-Bernoullin palkkimalli). Palkin potentiaalienergian funktionaali on

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} \int_0^L EI(v'')^2 dx - \int_0^L f v dx, \quad (2.50)$$

ja jonka Eulerin yhtälöksi saadaan

$$EIv'''' = f. \quad (2.51)$$

Suoritetaan yksityiskohtaisesti Eulerin yhtälön johto. Varioidaan taipumafunktiota $v \rightarrow v + \epsilon \hat{v}$, jossa $\epsilon \hat{v}$ on taipuman variaatiofunktio. Mitkä reunaehdot funktion $\hat{v}$ on toteutettava riippuu minimointiprobleemalle

$$\min \Pi(v), \quad v \in \mathcal{A} \quad (2.52)$$

asetettavista reunaehdoista, eli siitä millainen on kinemaattisesti luvallisten taipumafunktioiden joukko $\mathcal{A}$. Palataan $\hat{v}$:lle asetettaviin reunaehtovaatimuksiin kun käsitellään minimointiongelman spesifejä reunaehtotapauksia.

Stationäärisyysehdoista seuraa

$$\left. \frac{d\Pi}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_0^L (EI v'' \hat{v}'' - f \hat{v}) dx = 0. \quad (2.53)$$

Suorittamalla kaksi osittaisintegrointia saadaan tulokseksi⁵

$$EI [v''(L) \hat{v}'(L) - v''(0) \hat{v}'(0) - v'''(L) \hat{v}(L) + v'''(0) \hat{v}(0)] + \int_0^L (EI v'''' - f) \hat{v} dx = 0. \quad (2.54)$$

Mikäli nyt otaksutaan Eulerin yhtälön $EI v'''' = f$ toteutuvan, jää jäljelle sijoitus-termit reunoilta, joiden tulee hävitä, eli

$$v''(L) \hat{v}'(L) - v''(0) \hat{v}'(0) - v'''(L) \hat{v}(L) + v'''(0) \hat{v}(0) = 0. \quad (2.55)$$

Tutkitaan nyt erikseen neljää mahdollista reunaehtotapausta.

1. *Jäykästi kiinnitetyt reunat.* Tällöin taipumaviivalta vaaditaan

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, & v(L) &= 0, \\ v'(0) &= 0, & v'(L) &= 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Koska taipuman variaatio toteuttaa homogeeniset reunaehdot, $\hat{v}(0) = \hat{v}'(0) = \hat{v}(L) = \hat{v}'(L) = 0$ toteutuu reunatermien (2.55) häviäminen automaattisesti, joten lisäehtoja ei tarvita.

2. *Vapaasti tuetut reunat.* Tällöin taipumalta vaaditaan ainoastaan

$$v(0) = 0, \quad v(L) = 0. \quad (2.57)$$

Koska taipuman variaation derivaatat päätepisteissä ovat nyt mielivaltaiset,

⁵Huomaa, että sijoitustermi voidaan kirjoittaa muodossa:
 $M(0) \hat{v}'(0) - M(L) \hat{v}'(L) - Q(0) \hat{v}(0) + Q(L) \hat{v}(L).$

tarvitaan kaksi lisäehtoa, jotta reunatermit häviäisivät:

$$v''(0) = 0, \quad v''(L) = 0, \quad (2.58)$$

jotka täydentävät annetut siirtymäreunaehdot.

3. *Toinen pää jäykästi kiinnitetty ja toinen vapaa.* Olkoon palkki kiinnitetty pisteestä $x = 0$. Tällöin taipumalta vaadittavat reunaehdot ovat:

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0. \quad (2.59)$$

Vapaassa päässä ei taipumalle eikä kaltevuuskulmallekaan aseteta mitään ehtoja, joten taipuman ja sen derivaatan variaatioillekaan ei voida asettaa mitään vaatimuksia. Täten vaaditaan ehtojen (2.59) lisäksi

$$v''(L) = 0, \quad v'''(L) = 0. \quad (2.60)$$

4. *Molemmat päät vapaat.* Tällöin taipumalle ei aseteta mitään annettuja ehtoja kummassakaan päässä. Kuitenkin taipuman on toteutettava luonnollisesti seuraavat ehdot, jotta reunaehtotermit (2.55) häviäisivät:

$$\begin{aligned} v''(0) &= 0, & v''(L) &= 0, \\ v'''(0) &= 0, & v'''(L) &= 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Intuiitiivisesti voidaan päätellä, että tämä tapaus on hieman muita kolmea tapausta mutkikkaampi. Ilmeisestikään palkki ei voi leijua ilmassa annettujen kuormien alaisuudessa, vaan niiden on oltava tasapainossa itsensä kanssa, eli kuormafunktion f on toteutettava tasapainoehdot

$$\int_0^L f dx = 0, \quad \int_0^L x f dx = 0. \quad (2.62)$$

Kuten edellisestä esimerkistä voidaan havaita, vaaditaan ohuen palkin tapauksessa neljän reunaehdon toteutuminen, jotta probleeman ratkaisu olisi yksikäsitteinen. Annettuja reunaehtoja (2.56), (2.57) ja (2.59) täydentävät ns. luonnolliset reunaehdot (2.58), (2.60) ja (2.61), jotka tulevat luonnollisesti esiin variaatioformulaatiossa. Annettuja reunaehtoja kutsutaan usein oleellisiksi reunaehdoiksi tai Dirichletin reunaehdoiksi ja luonnollisia reunaehtoja Neumannin reunaehdoiksi. Huomaa erityisesti, että annettuja oleellisia reunaehtoja vastaavissa reunan pisteissä variaation on hävittävä.

2.3 Variaatiotehtävän likiratkaisumenetelmiä

Tämä kappale toimii johdatteluna elementtimenetelmään. Variaatioperiaatteiden käytöstä likiratkaisujen saamiseksi esitetään klassiset painotettujen jäännösten menetelmä, kollokaatiomenetelmä ja Galerkinin menetelmä soveltaen niitä yksiulotteiseen tasapainotyyppiseen esimerkkiongelmiaan.

2.3.1 Painotettujen jäännösten menetelmä

Olkoon ratkaistavana differentiaaliyhtälö (tavallinen tai osittainen)

$$Fu = f \quad (2.63)$$

alueessa Ω reunaehdoilla

$$Au = a \quad (2.64)$$

alueen Ω reunalla S . Oletetaan myös, että operaattorit F ja A ovat lineaarisia. Painotettujen jäännösten menetelmä tai jäännösformulaatio muodostetaan seuraavalla tavalla. Tuntematonta funktiota approksimoidaan yritteellä

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n \phi_i \alpha_i, \quad (2.65)$$

jossa ϕ_i :t ovat sopivasti valittuja paikkakoordinaateista riippuvia kantafunktioita ja α_i :t tuntemattomia parametreja. Yhtälöt (2.63) ja (2.64) kerrotaan painofunktiolla

$$w = \sum_{i=1}^n \psi_i w_i, \quad (2.66)$$

jossa ψ_i :t ovat paikkakoordinaateista riippuvia kantafunktioita ja w_i :t mielivaltaisia parametreja. Integroidaan näin saatu lauseke alueen tai reunanosan ylitse, eli

$$\int_{\Omega} w(F\tilde{u} - f) dV + \gamma \int_S w(A\tilde{u} - a) dS = 0, \quad (2.67)$$

jossa γ on mahdollisesti dimensiollinen painokerroin. Sijoittamalla painofunktion lauseke (2.66) yllä olevaan lausekkeeseen, saadaan

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \psi_i (F\tilde{u} - f) dV + \gamma \int_S \psi_i (A\tilde{u} - a) dS \right) w_i = 0. \quad (2.68)$$

Koska painokertoimet w_i ovat mielivaltaisia, on sulkulausekkeen sisällä olevien lausekkeiden hävittävä, täten yhtälö (2.68) muodostavaa itse asiassa n -kappaletta lineaar-

risia yhtälöitä

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} \psi_1 F \phi_j d\Omega + \gamma \int_S \psi_1 A \phi_j dS \right) \alpha_j &= \int_{\Omega} \psi_1 f d\Omega + \gamma \int_S \psi_1 a dS, \\
\sum_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} \psi_2 F \phi_j d\Omega + \gamma \int_S \psi_2 A \phi_j dS \right) \alpha_j &= \int_{\Omega} \psi_2 f d\Omega + \gamma \int_S \psi_2 a dS, \\
&\vdots \\
\sum_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} \psi_n F \phi_j d\Omega + \gamma \int_S \psi_n A \phi_j dS \right) \alpha_j &= \int_{\Omega} \psi_n f d\Omega + \gamma \int_S \psi_n a dS.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Tämä voidaan ilmaista kompaktisti

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} \alpha_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.70}$$

missä

$$\begin{aligned}
K_{ij} &= \int_{\Omega} \psi_i F \phi_j dV + \gamma \int_S \psi_i A \phi_j dS, \\
f_i &= \int_{\Omega} \psi_i f dV + \gamma \int_S \psi_i a dS,
\end{aligned} \tag{2.71}$$

ja josta tuntemattomat parametrit α_i voidaan ratkaista. On huomattava, että *lineaarisesti riippumattomia painofunktioita* on oltava n kappaletta, jotta ongelmalla olisi yksikäsitteinen ratkaisu. Mikäli yrite $\tilde{u}$ ei ole ongelman tarkka ratkaisu, jäännökset $R_{\Omega} = F\tilde{u} - f$ ja $R_S = A\tilde{u} - a$ eivät milloinkaan häviä identtisesti koko alueessa Ω ja reunalla S . Täten painotettujen jäännösten menetelmä on tulkittavissa systeemin (2.63), (2.64) heikennetyksi muodoksi, jossa yhtälön toteutumista pisteittäin jokaisessa kohdassa ei vaadita, vaan yhtäsuuruus saadaan integraalin mielessä koko alueen suhteen. Kirjallisuudessa käytetään usein termejä vahva muoto ja heikko muoto, jossa vahva muoto viittaa differentiaaliyhtälöön (2.63) ja heikko muoto puolestaan variaatioyhtälöön (2.67).

Yhtälöt (2.67) ovat jäännösten R_{Ω} ja R_S ortogonaalirelaatioita painofunktioiden ψ_i suhteen, kun skalaaritulona on integraali

$$\int_{\Omega} \psi_i R_{\Omega} d\Omega \quad \text{ja} \quad \int_S \psi_i R_S dS. \tag{2.72}$$

Matemaattisesti ilmaistuna likimääräisratkaisu $\tilde{u}$ on siten tarkan ratkaisun ortogonaaliprojektio yllä olevan pistetulon mielessä. Huomaa kuitenkin, että “kohtisuoruutta” mitataan painofunktion suhteen, joka ei välttämättä ole samassa funktioavaruudessa kuin itse yritefunktio.

Kuten yhtälöstä (2.67) havaitaan, ei menetelmän käyttö sellaisenaan vaadi painofunktioilta minkäänlaista jatkuvuutta. Ne voivat olla epäjatkuvia funktioita tai vaikkapa yleistettyjä funktioita, kuten esimerkiksi Diracin delta-funktio. Tuntemattoman funktion u approksimaation $\tilde{u}$ sileysominaisuuksien pitää olla sopusoinnussa operaattorin F korkeimman kertaluvun derivaatan kanssa. Jos F :n kertaluku on $2m$ on yritefunktion $\tilde{u}$ oltava vähintään $2m - 1$ kertaa jatkuvasti derivoituva (mikäli f on jatkuva), siis $\tilde{u} \in C_{2m-1}$.

Yritefunktioiksi kelpaavien funktioiden joukkoa voidaan laajentaa, mikäli yhtälön (2.67) ensimmäinen termi osittaisintegroidaan. Tällöin päädytään muotoa

$$\int_{\Omega} (G_1 \psi_i G_2 \tilde{u} - \psi_i f) dV + \int_S G_3 \psi_i G_4 \tilde{u} dS + \gamma \int_S \psi_i (A \tilde{u} - a) dS = 0 \quad (2.73)$$

olevaan yhtälöön, jossa $G_1 \dots G_4$ ovat differentiaalioperaattoreita (tai pelkästään algebrallisia operaattoreita), joiden kertaluku on pienempi kuin operaattorin F . Jos operaattori F on itseadjungoitu, niin pätee $G_1 = G_2$, ja joiden kertaluku on m . Havaitaan, että painofunktioilta vaaditaan nyt enemmän sileysominaisuuksia kuin muodon (2.67) tapauksessa. Tämä tuntuu kuitenkin luonnolliselta; jotainhan on maksettava siitä, että yritefunktioita voidaan valita vapaammin suuremmasta funktioluokasta.

Ongelmana on nyt löytää sopiva yrite funktion approksimoimiseen ja painofunktioiden valinta. Yritefunktion optimaalinen valinta perustuu tietenkin ongelman ratkaisun erityisluonteeseen. Mikäli tiedetään jotain ratkaisun tyypistä, voidaan yritefunktioiksi ottaa joitain samantapaisesti käyttäytyviä yksinkertaisia funktioita. Painofunktioiden valinta pitäisi pystyä automatisoimaan kullekin probleemalle optimaaliseksi. Tätä seikkaa käsitellään kuitenkin huonosti alan kirjallisuudessa. Koska asian perinpohjainen käsittely menee hieman liian pitkälle peruskurssin tarpeita silmälläpitäen, turvaudutaan standardiformulaation valintoihin. Asiasta enemmän kiinnostuneille lukijoille suositellaan perehtymistä artikkeleihin [41], [52].

Edellä esitetty ajatuskulku saattaa tuntua hyvin abstraktilta. Asian sovellustapa selvinnee kuitenkin seuraavasta esimerkistä.

Esimerkki 2.3 Tarkastellaan yksidimensioisen lämmönjohtumisyhtälön

$$-(ku')' = f \quad (2.74)$$

ratkaisua alueessa $\Omega = (0, L)$ reunaehdoin

$$u(0) = u_0, \quad q(L) = -ku'(L) = 0. \quad (2.75)$$

Pilkku suureen oikeassa yläkulmassa merkitsee derivointia paikkakoordinaatin x suhteen. Otaksutaan, että lämmönlähteen f antoisuus on vakio koko tarkasteltavalla alueella ja että lämmönjohtavuus k muuttuu lineaarisesti arvosta k_0

arvoon $2k_0$, joten $k(x) = k_0(1 + x/L)$. Suorita analyttinen ratkaisu ja likiratkaisu jäännösmenetelmällä.

Yhtälön tarkan ratkaisun löytäminen on triviaali toimenpide

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 \left\{ 1 + \frac{fL^2}{k_0 u_0} \left[2 \ln\left(1 + \frac{x}{L}\right) - \frac{x}{L} \right] \right\} \\ &= u_0 \left\{ 1 + \beta \left[2 \ln\left(1 + \frac{x}{L}\right) - \frac{x}{L} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

jossa on merkitty annetun lämpötilan u_0 , lämmönlähteen antoisuuden f ja lämmönjohtumiskertoimen k_0 suhdetta $f = \beta u_0 k_0 L^{-2}$, ja β on dimensioton vakio.

Ratkaistaan tehtävä likimääräisesti valitsemalla kaksiparametrinen yritefunktio, joka toteuttaa annetun lämpötilareunaehdon (oleellisen reunaehdon)

$$\tilde{u}(x) = u_0 + \alpha_1(x/L) + \alpha_2(x/L)^2 \quad (2.77)$$

ja alueen painofunktioiksi vakio $\psi_1 = 1$ ja lineaarinen termi $\psi_2 = (x/L)$. Kirjoitetaan painotettujen jäännösten formulaatio (2.67) esimerkkitehtävälle:

$$\int_0^L \psi_i [(k\tilde{u})' + f] dx + \gamma \psi_i [-k(L)\tilde{u}'(L)] = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.78)$$

Ongelmana on nyt oikeanpuoleisen reunaehdon (pisteessä $x = L$) painon γ hyvä valinta. Jotta esitetty muoto olisi dimensionaalisesti mielekäs, on lämpövuoreunaehdon painokertoimen oltava laaduton, kuten on myös kenttäalueen painokerroin. Täten voidaan valita yksinkertaisesti $\gamma = 1$. Sijoittamalla yhtälösystemiin valitut painokertoimet ja yritefunktio saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^L \left\{ \frac{k_0}{L^2} \left[\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \left(\frac{x}{L} \right) \right] + f \right\} dx - \frac{2k_0}{L} (\alpha_1 + 2\alpha_2) &= 0, \\ \int_0^L \left(\frac{x}{L} \right) \left\{ \frac{k_0}{L^2} \left[\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \left(\frac{x}{L} \right) \right] + f \right\} dx - \frac{2k_0}{L} (\alpha_1 + 2\alpha_2) &= 0, \end{aligned} \quad (2.79)$$

josta seuraa lineaarinen yhtälöryhmä kahden tuntemattoman kertoimen α_1 ja α_2 ratkaisemiseksi:

$$\frac{k_0}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} fL = \begin{Bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \beta \frac{u_0 k_0}{L}, \quad (2.80)$$

josta ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{5} \end{Bmatrix} \beta u_0. \quad (2.81)$$

Lämpötilafunktion approksimaatio jäännösmenetelmällä on siten

$$\tilde{u}(x) = \left[1 + \beta \left(\frac{x}{L} \right) - \frac{3}{5} \beta \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] u_0. \quad (2.82)$$

Ratkaisu on piirretty kuvaan 2.1. Mikäli reunatermiä ei oteta mukaan yhtälöihin ollenkaan, saadaan lineaarinen approksimaatio $\tilde{u}(x) = u_0 [1 - \beta(x/L)]$, mikä on kelvoton tulos.

2.3.2 Kollokaatiomenetelmät

Mikäli painofunktiot ψ_i valitaan Diracin delta-funktioiksi, eli

$$\psi_i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (2.83)$$

jossa $\mathbf{r}$ merkitsee paikkavektoria, saadaan pistekollokaatiomenetelmä. Toisin sanoen, jäännös (2.67) vaaditaan häviämään tietyissä pisteissä $\mathbf{r}_i$, joita kutsutaan kollokaatiomenetelmän kontrollipisteiksi.

On myös mahdollista jakaa alue Ω osa-alueisiin $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ ja valita painofunktioiksi

$$\psi_i = 1 \text{ alueessa } \Omega_i, \quad \psi_i = 0 \text{ muualla}, \quad (2.84)$$

jolloin saadaan menetelmä, jota kutsutaan osa-aluekollokaatiomenetelmäksi.

Esimerkki 2.4 Sovelletaan kollokaatiomenetelmää edellisen esimerkin tehtävään.

Käytetään samaa yritettä kuin edellä, ja valitaan kontrollipisteiksi välin kolmasosapisteet. Reunaehtoja varten käytetään samantyyppisiä painofunktioita kuin edellä (tehdään ainoastaan dimensiokorjaus $\gamma = L^{-1}$), joten ratkaisuyhtälöiksi saadaan ⁶

$$\begin{aligned} \int_0^L \delta(x - \frac{1}{3}L) \left[\frac{k_0}{L^2} \left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \frac{x}{L} \right) + f \right] dx - \frac{2k_0}{L^2} (\alpha_1 + 2\alpha_2) &= 0, \\ \int_0^L \delta(x - \frac{2}{3}L) \left[\frac{k_0}{L^2} \left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \frac{x}{L} \right) + f \right] dx - \frac{2k_0}{L^2} (\alpha_1 + 2\alpha_2) &= 0, \end{aligned} \quad (2.85)$$

josta seuraa

$$\frac{k_0}{L^2} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} f = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{\beta u_0 k_0}{L^2}. \quad (2.86)$$

Ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \beta u_0, \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}(x) = u_0 \left[1 + \beta \left(\frac{x}{L} \right) \right]. \quad (2.87)$$

Kollokaatiomenetelmän antama likiratkaisu on siis suora !!! Ei ole menetelmän huonoutta, että saatiin keho tulos, vaan päävastuu surkeasta ratkaisusta lankeaa nyt reunaehtojes painojen valinnalle. Suoritetaan laskelma uudestaan

⁶ Diracin delta-distributiohan poimii funktion arvon, mikäli se esiintyy integrandissa tulomuodossa kyseisen funktion kanssa, eli $\int_a^b \delta(x - c) f(x) dx = f(c)$, jossa piste c kuuluu väliin (a, b) .

valitsemalla kontrollipisteessä $x = L/3$ muodostetun yhtälön oikeanpuoleisen reunaehdon painoksi vaikkapa $\gamma = 0$. Tämä merkitsee sitä, että oikeanpuoleista reunaehtoa ei painoteta ollenkaan vasemmanpuoleisen kontrollipisteen kohdalla, jolloin saadaan

$$\frac{k_0}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \beta \frac{u_0 k_0}{L^2}, \quad (2.88)$$

josta ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \beta u_0, \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}(x) = u_0 \left[1 + \frac{2}{3} \beta \left(\frac{x}{L} \right) - \frac{1}{2} \beta \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]. \quad (2.89)$$

Tämäkään kollokaatiomenetelmän antama approksimaatio ei ole kovin hyvä. On mielenkiintoista havaita, että jättämällä reunatermi kokonaan pois päädytään lineaariseen ratkaisuun, joka on sama kuin painotettujen jäännösten menetelmässä, jossa reunatermi on myös jätetty pois.

2.3.3 Pienimmän neliön menetelmä

Pienimmän neliön keinossa painofunktioiksi valitaan yksinkertaisesti jäännöstermi itse, eli

$$w = R_\Omega, \quad \text{alueessa } \Omega \quad \text{ja} \quad w = R_S \quad \text{reunalla } S, \quad (2.90)$$

jolloin painotettujen jäännösten variaatiomuoto saadaan näyttämään seuraavalta:

$$\min_{\tilde{u}} \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} (F\tilde{u} - f)^2 dV + \gamma^2 \int_S (A\tilde{u} - a)^2 dS \right], \quad (2.91)$$

jossa kerroin γ pitää huolen dimensionaalisuuden oikeellisuudesta ja puolikas lausekkeen edessä on valittu mukavuussyistä.

Esimerkki 2.5 Tutkitaan edellinen esimerkkitehtävä myös pienimmän neliön keinolla käyttäen samaa yritefunktiota.

Minimoitava funktionaali on nyt

$$I(\tilde{u}) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[(k\tilde{u}')' + f \right]^2 dx + \frac{1}{2} \gamma^2 [k(L)\tilde{u}'(L)]^2. \quad (2.92)$$

Sijoittamalla yritefunktio, on funktionaali kahden parametrin α_1 ja α_2 funktio

$$I(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{k_0}{L^2} \left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \frac{x}{L} \right) + f \right]^2 dx + \frac{\gamma^2}{2} \left[\frac{2k_0}{L} (\alpha_1 + 2\alpha_2) \right]^2. \quad (2.93)$$

Minimin välttämätön ehto on osittaisderivaattojen häviäminen näiden parametrien suhteen, eli

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial \alpha_1} &= \frac{k_0^2}{L^4} \int_0^L \left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \frac{x}{L} \right) dx + \frac{k_0}{L^2} \int_0^L f dx + \gamma^2 \frac{4k_0^2}{L^2} (\alpha_1 + 2\alpha_2) = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial \alpha_2} &= \frac{k_0^2}{L^4} \int_0^L \left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \frac{x}{L} \right) \left(2 + 4\frac{x}{L} \right) dx + \frac{k_0}{L^2} \int_0^L f \left(2 + 4\frac{x}{L} \right) dx \\ &\quad + \gamma^2 \frac{8k_0^2}{L^2} (\alpha_1 + 2\alpha_2) = 0.\end{aligned}\quad (2.94)$$

Suorittamalla integroinnit saadaan yhtälösystemi

$$\frac{k_0}{L^2} \begin{bmatrix} 1 + 4\gamma^2 L & 4(1 + 2\gamma^2 L) \\ 4(1 + 2\gamma^2 L) & \frac{52}{3} + 16\gamma^2 L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -4 \end{Bmatrix} \beta \frac{u_0 k_0}{L^2}. \quad (2.95)$$

Mikäli valitaan oikeanpuoleisen reunaehdon painoksi $\gamma = 0$, tulee approksiimaatioksi lineaarinen lauseke $\tilde{u}(x) = u_0 [1 - \beta(x/L)]$, joten ratkaisun parantamiseksi on syytä valita $\gamma \neq 0$. Lasketaan tehtävä painokertoimen arvolla $\gamma^2 = L^{-1}$, jolloin parametrien arvoiksi ja ratkaisuksi saadaan $\alpha_1 = \frac{11}{17}\beta u_0$ ja $\alpha_2 = -\frac{6}{17}\beta u_0$, joten

$$\tilde{u}(x) = u_0 \left[1 + \frac{11}{17}\beta \left(\frac{x}{L} \right) - \frac{7}{17}\beta \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]. \quad (2.96)$$

Likiratkaisu ei ole erityisen hyvä, ja se on piirretty kuvaan 2.1.

2.3.4 Galerkinin menetelmä

Galerkinin mukaan on saanut nimensä menettely, jossa painofunktioiksi valitaan samat kantafunktiot kuin ratkaisuyritteelle, eli

$$\psi_i = \phi_i. \quad (2.97)$$

Menetelmää voidaan tietenkin soveltaa muotoon (2.67) tai siitä osittaisintegroimalla saatuun muotoon (2.73).

Esimerkki 2.6 Ratkaistaan jo tutuksi tullut 1-dimensioinen esimerkkit tehtävä vielä Galerkinin keinolla. Tarkastellaan lisäksi muodon (2.73) reunatermejä huolellisemmin.

Ratkaistaan tehtävä ensin käyttäen muotoa (2.67). Yhtälöiksi saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^L \phi_1 \left[(k\tilde{u}')' + f \right] dx - \gamma k(L) \tilde{u}'(L) &= 0, \\ \int_0^L \phi_2 \left[(k\tilde{u}')' + f \right] dx - \gamma k(L) \tilde{u}'(L) &= 0,\end{aligned}\quad (2.98)$$

josta havaitaan ylimmäisen olevan identtinen jäännösmenetelmällä ratkaistun

tehtävän toisen yhtälön kanssa, mikä on luonnollista, koska käytettiin samaa yritettä ja painofunktiota (x/L). Suorittamalla alimmaisen yhtälön integrointi saadaan yhtälösystemi muotoon

$$\frac{k_0}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - 2\gamma & \frac{7}{3} - 4\gamma \\ \frac{1}{3} - 2\gamma & \frac{5}{3} - 4\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{Bmatrix} \beta \frac{u_0 k_0}{L}, \quad (2.99)$$

Otaksumalla painokertoimelle arvo $\gamma = 1$, saadaan ratkaisuksi $\alpha_1 = \frac{11}{13}\beta u_0$ ja $\alpha_2 = -\frac{6}{13}\beta u_0$, joten

$$\tilde{u}(x) = u_0 \left[1 + \frac{11}{13}\beta \left(\frac{x}{L} \right) - \frac{6}{13}\beta \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]. \quad (2.100)$$

Tulos on piirretty kuvaan 2.1 ja se on paras tähänastisista. Mikäli painoker-toimeksi valitaan $\gamma = 0$ saadaan tulos: $\alpha_1 = -\beta u_0, \alpha_2 = 0$. Ratkaisu on lineaarinen approksimaatio, joka ei ole kelvollinen.

Toinen tapa soveltaa Galerkinin keinoa saadaan kun suoritetaan osittaisin-tegrointi painotetusta kenttäyhtälöstä, jolloin päädytään yhtälöihin

$$\int_0^L \phi_i \left[(k\tilde{u})' + f \right] dx - \gamma k(L)\tilde{u}'(L) = 0 \quad (2.101)$$

$$\Rightarrow \int_0^L k\phi_i' \tilde{u}' dx - \left| \int_0^L \phi_i (k\tilde{u}') + \gamma k(L)\tilde{u}'(L) = \int_0^L f \phi_i dx. \quad (2.102) \right.$$

Havaitaan, että osittaisintegrointi toi mukanaan informaation luonnollisesta reunaehdosta ja sen mahdollisesta painosta. Kun valitaan $\gamma = 1$, niin oleellista reunaehto vastava termi häviää ratkaisuyhtälöstä, joka siten yksinkertaistuu muotoon

$$\int_0^L k\phi_i' \tilde{u}' dx = \int_0^L f \phi_i dx. \quad (2.103)$$

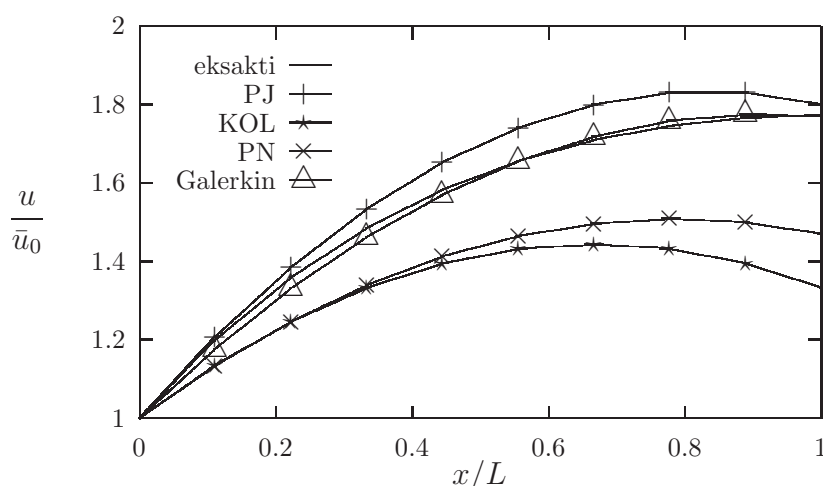
Sijoittamalla interpolaatioiden lausekkeet ja suorittamalla integrointi päädy-tään yhtälösystemiin

$$\frac{k_0}{L} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \beta \frac{u_0 k_0}{L}. \quad (2.104)$$

Yhtälön ratkaisu on luonnollisestikin sama kuin (2.100), jossa lähtökohtana oli Galerkinin keino osittaisintegroimaton muoto. Tämä likimääräisratkaisu on piirretty kuvaan 2.1 ja havaitaan sen approksimoivan erinomaisesti analyyt-tistä ratkaisua, ottaen huomioon yrittien karkeus.

2.3.5 Rayleighin-Ritzin menetelmä

Rayleighin ja Ritzin menetelmä, tai lyhyesti pelkkä Ritzin menetelmä ei oikeastaan eroa Galerkinin menetelmästä. Ritzin menetelmäksi kutsutaan likiratkaisumenetel-



Kuva 2.1 Yksidimensioisen esimerkkitehtävän analyttinen ratkaisu (yhtenäinen viiva) ja neljä erilaista likiratkaisua (PJ = painotettujen jäännösten menetelmä, KOL = kollokaatiomenetelmä, ja PN = pienimmän neliön menetelmä). Piirretty β :n arvolla $\beta = 2$.

mää, jossa lähdetään liikkeelle minimoitavasta funktionaalista. Täten Ritzin ja Galerkinin menetelmän antamat likiratkaisut ovat identtiset.

On kuitenkin huomattava, että Galerkinin menetelmän soveltaminen ei ole rajoittunut vain ongelmiin, jotka voidaan pukea sellaiseen variaatiomuotoon, joka on seurauksena funktionaalin minimoimisesta, joten Galerkinin menetelmää voidaan pitää yleisämpänä.

2.3.6 Muutamia huomautuksia

Lasketusta esimerkistä voisi vetää sen johtopäätöksen, että Galerkinin keino on se ainoa oikea. Näin ei kuitenkaan ole asianlaita kaikissa ongelmissa, katso myös harjoitustehtävä 8. Voidaan kuitenkin osoittaa, että se on optimaalinen tietyille ryhmälle differentiaaliyhtälöitä (osittaisia tai tavallisia), nimittäin elliptisille yhtälöille, joukkoon johon juuri kyseinen stationäärinen lämmönjohtumisyhtälö kuuluu. Virtausmekaniikassa vallitsevat yhtälöt ovat usein hyperbolisluonteisia, ja tällöin Galerkinin menetelmä saattaa tuottaa pahasti oskilloivia tuloksia.

Tässä esitettyä Galerkinin menetelmää kutsutaan myös Bubnovin-Galerkinin menetelmäksi erotuksena ns. Petrovin-Galerkinin menetelmälle, jossa painofunktiona käytetään eri tavalla valittuja kantafunktioita kuin itse ratkaisuyritteelle. Tätä menetelmää on sovellettu menestyksellisesti juuri virtausmekaniikassa. Asiasta kiinnostuneelle lukijalle suositellaan lisälukemisenä artikkeleja [41], [52].

Edellisissä esimerkeistä voitaneen myös päätellä, ettei painofunktioiden konstruointi ole aivan triviaali toimenpide. Eräs mahdollinen keino saada hyvää informaatiota soveliaista reunaehtopainoista on käyttää Lagrangen kertojamenetelyä ja

identifioida määräämättömän kertojan fysikaalinen tulkinta.

Tässä luvussa ei ole otettu suuremmin kantaa kelvollisten painofunktioiden valintaan, eikä menetelmän mahdolliseen suppenemiseen eli konvergenssiin, kun kantafunktioiden lukumäärää kasvatetaan. Likimenetelmien suppenemiseen palataan kuitenkin myöhemmin itse elementtimenetelmän yhteydessä.

2.4 Yhteenveto

Funktionaalin ääriarvon etsiminen on ekvivalentti funktionaalin varioinnin tuloksena syntyvän differentiaaliyhtälön ratkaisun kanssa.

Variaatiolaskenta mahdollistaa likiratkaisumenetelmien konstruoinnin. Painotettujen jäännösten menetelmä on peruseriaatteeltaan seuraavanlainen: (i) ratkaistava ongelma kerrotaan testi- eli painofunktiolla ja (ii) integroidaan tarkastelualueen yli. Ratkaistavalle funktiolle valitaan sopiva yrite. Mikäli yritefunktiioon kohdistuvien derivointioperaatioiden lukumäärää halutaan vähentää suoritetaan sopiva määrä osittaisintegrointeja. Galerkinin keino saadaan kun painofunktion kannaksi valitaan sama kanta kuin yritefunktiolle.

2.5 Harjoitustehtäviä

1. Määritä variaatiolaskentaa soveltamalla sen käyrän yhtälö, joka muodostaa lyhimmän tien Euklidisen avaruuden tason kahden pisteen välille.
2. Ratkaise klassinen brakistokroniongelma, eli sen tasokäyrän yhtälö joka vakio-painovoimakentässä johtaa massapartikkelin nopeimpaan laskuun kahden tason pisteen välillä.

3. Etsi funktionaalin

$$I(y) = \int_a^b x^2 (y')^2 dx$$

extremaalit. Määrää lisäksi pisteiden $(1, 1)$ ja $(3, \frac{1}{2})$ kautta kulkeva extremaali. Mika on kyseisen funktionaalin fysikaalinen tulkinta ?

4. Etsi funktionaalin

$$I(y, z) = \int_0^{\pi/2} [(y')^2 + (z')^2 + 2yz] dx$$

ekstremaali, joka toteuttaa reunaehdot: $y(0) = 0, y(\pi/2) = 1, z(0) = 0, z(\pi/2) = -1$. Mikä on kyseisen funktionaalin fysikaalinen tulkinta ?

5. Yksidimensioisen stationäärisen lämmönjohtumisyhtälön energiefunktionaali on

$$I(w) = \int_a^b \left[\frac{1}{2} k(w')^2 - fw \right] dx,$$

jossa k on lämmönjohtavuuskerroin (oletetaan vakioksi) ja f on ulkoinen lämmönlähde. Näytä, että vastaava Eulerin yhtälö on $-ku'' = f$. Näytä myös, että samaan differentiaaliyhtälöön päädytään mikäli funktionaaliksi valitaan

$$J(w) = \int_a^b (kw'' + f)^2 dx.$$

6. Muodosta vapaasti tuetun yksiaukkoisen kimmoisalla alustalla olevan taivutetun ja puristetun palkin Eulerin yhtälö lähtien potentiaalienergian Π lausekkeesta

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(w'')^2 - P(w')^2 + k(w)^2] dx - \int_0^L f w dx.$$

Tutki myös kokonaispotentiaalienergian funktionaalin toista variaatiota.

7. Olkoon ratkaistavana yllä olevaan potentiaalienergian lausekkeeseen liittyvä minimointitehtävä (ilman puristavaa voimaa P) seuraavin reunaehdoin:

- (a) $v(0) = 0$
- (b) $v(0) = v_0$,
- (c) $v'(L) = \phi_L$,
- (d) $Q(0) = -EIv'''(0) = F$.

Mikä on kinemaattisesti luvallisten funktioiden joukko $\mathcal{A}$? Mitkä ovat taipuman variaatiolle asetettavat reunaehtovaatimukset?

8. Ratkaise yhtälö

$$-ku'' - cu = fx,$$

(k, c, f ovat vakioita, $c = \beta kL^{-2}$ jossa β dimensioton vakio) reunaehdoilla $u(0) = u(L) = 0$ analyttisesti ja likimääräisesti

- (a) pistekollokaatiomenetelmällä valitsemalla kontrollipiste alueen keskelle,
- (b) osa-aluekollokaatiomenetelmällä valitsemalla osa-alueeksi koko väli $(0, L)$,
- (c) pienimmän neliön keinolla ja
- (d) Galerkinin menetelmällä

käyttäen yksiparametristä yritettä $\tilde{u}(x) = \alpha_1 \sin \pi x / L$. Suorita laskelmat β :n arvoilla 1 ja 100.

9. Ratkaise Galerkinin menetelmällä Poissonin yhtälö

$$-k\Delta u = f,$$

(eli stationäärinen lämmönjohtumisyhtälö) suorakaiteen muotoisessa alueessa $(x, y) \in (0, a) \times (0, b)$. Reunaehdot ovat homogeeniset, eli $u = 0$ reunaviivalla, ja $k, \bar{f}$ ovat

vakioita koko alueessa. Käytä approksimaatiota

$$\tilde{u}(x, y) = \alpha_1(x^2 - ax)(y^2 - by).$$

10. Yksiaukkoisen vapaasti tuetun taivutetun ohuen palkin taipuman analyyttinen lauseke tasan jakautuneesta kuormasta f on

$$v(x) = \frac{fL^4}{24EI} \left(\frac{x}{L} \right) \left[\left(\frac{x}{L} \right)^3 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 1 \right],$$

välillä $x \in (0, L)$. Ratkaise tehtävä likimääräisesti Galerkinin menetelmällä käyttämällä trigonometrista sarjamuotoista yritettä

$$\tilde{v}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

ja minimoimalla potentiaalienergia

$$\Pi(\tilde{v}) = \frac{1}{2} \int_0^L EI(\tilde{v}'')^2 dx - \int_0^L f\tilde{v} dx.$$

Suppeneeko sarjaratkaisu kohti analyyttistä ratkaisua? Määritä virhe keskipisteen taipumassa kun otetaan mukaan vain sarjan muutama ensimmäinen termi.

Luku 3

Johdatus elementtimenetelmään

Luvun tarkoituksena on esitellä elementtimenetelmän perusosat ja tarkastella interpolaatiofunktioiden muodostamista yksidimensioisessa tapauksessa. Elementtimenetelmän h - ja p -version peruseriaatteet esitetään. Tavanomaisen elementtimenetelmän ongelmista käsitellään esimerkkinä diffuusio-konvektioyhtälön tapaus. Luvun lopussa annetaan lyhyt johdatus stabiloituihin formulaatioihin.

3.1 Malliprobleema

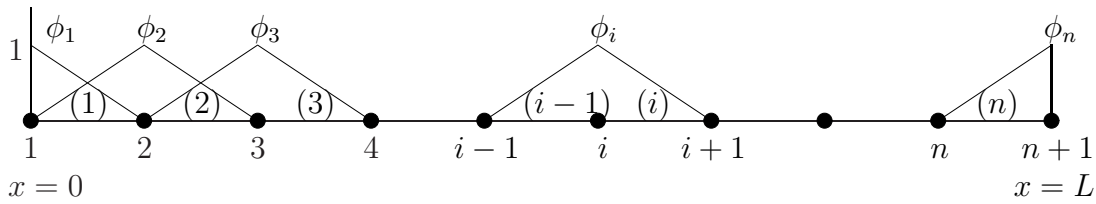
Elementtimenetelmä voidaan johtaa edellä esitetyistä periaatteista, eli painotettujen jäännösten menetelmästä tai sen eri muunnoksista. Ainoa ero klassisten variaatiomenetelmien ja elementtimenetelmän välillä on se, että klassisissa menetelmissä interpoloivat kantafunktiot ovat määritellyt koko tarkasteltavassa alueessa, kun taas elementtimenetelmässä interpoloivat funktiot määritellään paikallisesti osa-alueen eli elementin sisällä, josta myös menetelmän nimi äärellisten elementtien menetelmä. Ratkaisu saadaan kokoamalla kunkin elementin osuudet globaaliin yhtälösystemiin.

Tarkastellaan asiaa yksidimensioisen lämmönjohtumisyhtälön (tai aksiaalisesti kuormitetun sauvan) tapauksessa. Olkoon ratkaistavana probleema

$$-(ku')' = f \quad (3.1)$$

alueessa $\Omega = \{x|x \in (0, L)\}$ reunaehdoilla $u(0) = u(L) = 0$. Valitaan yhtälöiden muodostamistavaksi Galerkinin menetelmä, jolloin malliprobleeman (3.1) heikko muoto eli variaatiomuoto saadaan kun kyseinen differentiaaliyhtälö kerrotaan puolittain testifunktioilla $\hat{u}$ ja integroidaan ratkaisualueen ylitse

$$-\int_0^L \hat{u}(ku')' dx = \int_0^L \hat{u} f dx. \quad (3.2)$$



Kuva 3.1 Elementtimenetelmän paloittain lineaariset kantafunktiot.

Osittaisintegroimalla vasemmanpuoleinen termi saadaan

$$\int_0^L \hat{u}' k u' dx - \left|_0^L \hat{u} k u' \right| = \int_0^L \hat{u} f dx. \quad (3.3)$$

Koska variaation $\hat{u}$ on toteutettava homogeeniset reunaehdot, päädytään muotoon

$$\int_0^L \hat{u}' k u' dx = \int_0^L \hat{u} f dx. \quad (3.4)$$

Elementtimenetelmä poikkeaa klassisista painotetun jäännösten menetelmän variaatioista ainoastaan siinä, että kantafunktiot määritellään vain osassa aluetta Ω . Yhtälöstä (3.4) havaitaan, että testifunktioille $\hat{u}$ ja itse ratkaisuyritteelle $\tilde{u}$ riittää valita funktiot jotka ovat vain C_0 -jatkuvia. Toisin sanoen edes ensimmäisen derivaatan jatkuvuudelle ei aseteta ehtoja. Tällaisten interpolaatiefunktioiden muodostaminen onnistuu mutkattomasti jopa useammassa kuin yhdessä dimensiossa. Kuvassa 3.1 on käytetty paloittain lineaarisia kantafunktioita, ja ratkaisuyrite voidaan kirjoittaa muodossa

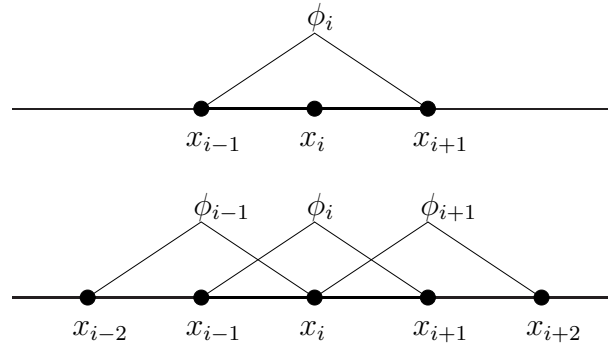
$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \phi_i(x). \quad (3.5)$$

Huomaa, että tuntemattomilla parametreilla on suureen u arvot solmuissa i , joten voidaan kirjoittaa $\alpha_i = u_i$.

Galerkinin menetelmässä testi- eli painofunktioille valitaan myös sama kanta ϕ_i . Kuten kuvasta 3.2 voidaan havaita, on solmuun i liittyvää testifunktiota $\hat{u} = \phi_i \hat{u}_i$ vastaava osa integraalia (3.4):

$$\begin{aligned} \hat{u}_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d\phi_i}{dx} k \frac{d\phi_{i-1}}{dx} dx u_{i-1} + \hat{u}_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{d\phi_i}{dx} k \frac{d\phi_i}{dx} dx u_i + \hat{u}_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\phi_i}{dx} k \frac{d\phi_{i+1}}{dx} dx u_{i+1} \\ = \hat{u}_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i f dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Koska painofunktion arvo solmussa $\hat{u}_i$ on mielivaltainen, on se voitu supistaa pois yllä olevasta yhtälöstä. Merkitään osavälin $(i) = \{x | x \in (x_i, x_{i+1})\}$ pituutta symbolilla



Kuva 3.2 Solmuun i liittyvä painofunktio ϕ_i , ja välille (x_{i-1}, x_{i+1}) liittyvät yritefunktion kantapolynomit.

$h^{(i)} = x_{i+1} - x_i$, jolloin

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_{i-1}}{dx} &= -\frac{1}{h^{(i-1)}} & \text{kun } x \in (x_{i-1}, x_i), & \quad \frac{d\phi_i}{dx} = -\frac{1}{h^{(i)}} & \text{kun } x \in (x_i, x_{i+1}), \\ \frac{d\phi_i}{dx} &= \frac{1}{h^{(i-1)}} & \text{kun } x \in (x_{i-1}, x_i), & \quad \frac{d\phi_{i+1}}{dx} = \frac{1}{h^{(i)}} & \text{kun } x \in (x_i, x_{i+1}). \end{aligned}$$

Olettamalla lähdetermin vakioisuus integraalista (3.6) saadaan

$$k \left[-\frac{1}{h^{(i-1)}} u_{i-1} + \left(\frac{1}{h^{(i-1)}} + \frac{1}{h^{(i)}} \right) u_i - \frac{1}{h^{(i)}} u_{i+1} \right] = \frac{1}{2} f(h^{(i-1)} + h^{(i)}). \quad (3.7)$$

Käytettäessä paloittain lineaarisia kantafunktioita kytkeytyvät yksidimensioises-
sa ongelmassa ainoastaan tuntemattomat u_{i-1} , u_i ja u_{i+1} toisiinsa. Tämä johtaa nau-
hamaiseen kerroinmatriisiin, joka kyseisessä tehtävässä on tridiagonaalinen.

Edellä kuvattu ratkaisutapa on kätevä käsinlaskussa. Vielä systemaattisempi tie-
tokonelaskentaan soveltuva lähestymistapa elementtimenetelmään saadaan koko-
amalla systeemi yhtälön alkioit elementteittäin. Merkitään alueen Ω toisistaan eriäviä
osa-alueita $\Omega^{(e)} = \{x | x \in (x_1^{(e)}, x_2^{(e)})\}$. Mikäli jako suoritetaan n :ään elementtiin,
katso kuva 3.1, niin integraalin additiivisuuteen nojautuen yhtälö (3.4) saa muodon

$$\sum_{e=1}^n \int_{\Omega^{(e)}} \hat{u}' k u' dx = \sum_{e=1}^n \int_{\Omega^{(e)}} \hat{u} f dx. \quad (3.8)$$

Tämä muoto toimii elementtimenetelmän perustana. Tarkastellaan seuraavassa hie-
man yksityiskohtaisemmin ja systemaattisemmin elementtimenetelmän interpola-
tiofunktioita ja elementtikohtaista kokoamisprosessia.

3.2 Elementtimenetelmän perusosat

3.2.1 Yleistä

Tietyn elementtityypin määrittely vaatii kolmen perusasian selventämistä:

1. elementin muodon eli geometrian (jana, kolmio, nelikulmio, tetraedri, särmiö, jne.),
2. interpoloivien funktioiden ja
3. elementin vapaiden parametrien eli vapausasteiden määrittelyn.

Nämä kolme seikkaa määräävät ns. solmujen lukumäärän ja sijainnin. Riippuen siitä, millaiset kantafunktiot ja vapausasteet on valittu, ei kaikkia vapausasteita voi välttämättä assosoida tiettyihin solmuihin tai paikkaan yksikäsitteisesti. Tähän seikkaan tullaan palaamaan vielä myöhemmin.

3.2.2 Interpolaatiofunktiot

Elementin alueella kuvataan haluttua suuretta interpolaatiofunktioilla, joita kutsutaan myös muotofunktioiksi. Interpolaatiofunktiot voidaan jakaa ainakin kahteen ryhmään:

1. tavanomaisiin, eli solmuihin sidottuihin ja
2. hierarkisiin interpolaatiofunktioihin.

Interpolaation muodostavat kantafunktiot voitaisiin periaatteessa valita miltei mielivaltaisesti. Tavallisesti käytetään kuitenkin yksinkertaisia polynomeja. Tavanomaisille interpolaatiofunktioille on ominaista, että kaikki kantafunktiot muuttuvat polynomin asteen p kasvaessa. Hierarkisessa kantajärjestelmässä interpolaatiopolynomin asteen kasvattaminen ei muuta vanhoja alhaisempaa astetta olevia kantafunktioita.

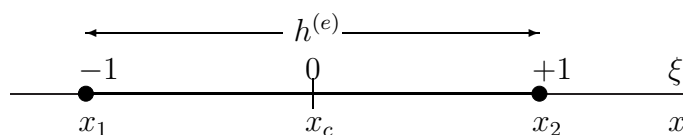
Aloitetaan tarkastelu yksidimensioisesta janaelementistä. Otetaan käyttöön paikallinen koordinaatisto, jonka koordinaattia merkitään kirjaimella ξ ja joka määritellään alueessa $\xi \in (-1, 1)$. Täten muunnos rakennekoordinaatistosta eli globaalista x -koordinaatistosta paikalliseen eli elementin lokaaliin ξ -koordinaatistoon voidaan ilmaista yhtälönä

$$\xi = 2 \frac{x - x_c}{h}, \quad (3.9)$$

jossa x_c on elementin keskipisteen globaali rakennekoordinaatti ja h on janaelementin pituus, katso kuva 3.3.

Yksinkertaisin mahdollinen polynomimuotoinen kantafunktiojärjestelmä on varmasti

$$\phi_i = x^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$



Kuva 3.3 Janaelementti.

Tämä ei ole sellaisenaan kuitenkaan käyttökelpoinen, sillä näin muodostettu kanta on numeerisesti mahdollisimman pahanlaatuinen ja äärellisellä laskentatarkkuudella operoitaessa pyöristysvirheet hyvin äkkiä saastuttavat tulokset kelvottomiksi. Havainnollistetaan tätä esimerkillä.

Esimerkki 3.1 *Approksimoidaan funktiota $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ välillä $(0, 1)$ käyttäen polynomikantaa (3.10) ja pienimmän neliön keinoa. Mikä on virhe tuloksissa, kun käytetään kuudennen asteen interpolaatiota ja reaali-luvuille käytetään 32-bittistä esitystä, mikä merkitsee operoimista seitsemällä-kahdeksalla merkitsevällä numerolla.*

Approksimaatio on siis

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) f_i, \quad (3.11)$$

jossa f_i :t ovat vielä määräämättömiä kertoimia. Minimoitava virhefunktio on

$$E(f_i) = \frac{1}{2} \int_0^L [f(x) - \tilde{f}(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[f(x) - \sum_{i=1}^n \phi_i f_i \right]^2 dx. \quad (3.12)$$

Kertoimien f_i ratkaisuyhtälöt ovat

$$\frac{\partial E}{\partial f_j} = \int_0^L \left[f(x) - \sum_{i=1}^n \phi_i f_i \right] \phi_j dx = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.13)$$

joka kirjoitettuna matriisimuodossa on

$$\begin{bmatrix} (\phi_1, \phi_1) & (\phi_1, \phi_2) & \dots & (\phi_1, \phi_n) \\ (\phi_2, \phi_1) & (\phi_2, \phi_2) & \dots & (\phi_2, \phi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_n, \phi_1) & (\phi_n, \phi_2) & \dots & (\phi_n, \phi_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (f, \phi_1) \\ (f, \phi_2) \\ \vdots \\ (f, \phi_n) \end{Bmatrix}, \quad (3.14)$$

jossa on merkitty integraalimuotoista sisätuloa kaarisulkeilla $(\cdot, \cdot)$. Suoritta-

mallalla integroinnit saadaan tulokseksi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \end{Bmatrix}, \quad (3.15)$$

jossa kerroinmatriisi $\mathbf{A}$ on surullisenkuuluista Hilbertin matriisi. Ratkaisu on esitetty seuraavassa taulukossa.

	tarkka arvo	numeerinen arvo	suhteellinen virhe %
f_1	1.00000000	1.00052619	0.05261898
f_2	1.00000000	0.98027061	1.97293762
f_3	1.00000000	1.18187832	18.18783188
f_4	1.00000000	0.31600904	68.39909363
f_5	1.00000000	2.22156572	122.15657043
f_6	1.00000000	-0.03333282	103.33328247
f_7	1.00000000	1.33333324	33.33332443

3.2.2.1 Solmuihin sidotut Lagrangen kantapolynomit

Suosittelavia tapoja estää edellisen esimerkin kaltainen pyöristysvirheräjähdys on käyttää esimerkiksi Lagrangen polynomeja tai ns. ortogonaalipolynomijärjestelmiä interpolaatiofunktioina.

Lagrangen astetta p oleva polynomi määritellään

$$l_k^p(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \cdots (\xi - \xi_{k-1})(\xi - \xi_{k+1}) \cdots (\xi - \xi_p)}{(\xi_k - \xi_0)(\xi_k - \xi_1) \cdots (\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k+1}) \cdots (\xi_k - \xi_p)}, \quad (3.16)$$

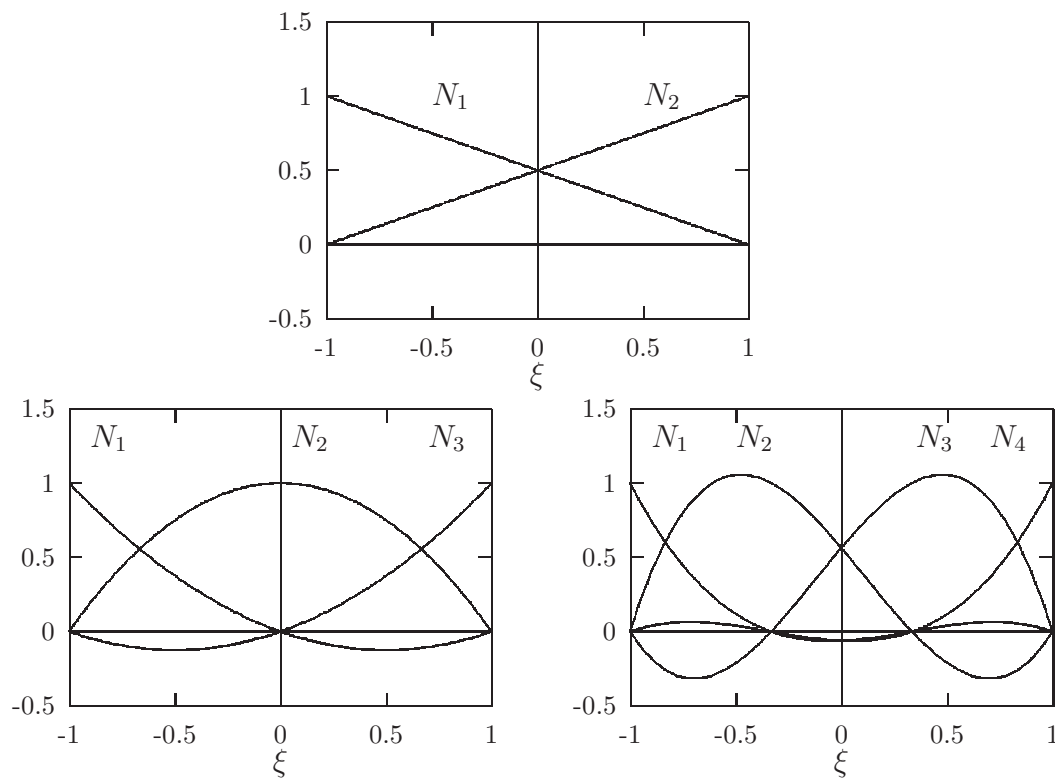
joka antaa yksikköarvon pisteessä $\xi = \xi_k$ ja leikkaa koordinaattiakselin p :ssä pisteessä $\xi_i, i = 0, 1, \dots, p$ ($i \neq k$).

Lineaarinen interpolaatio välillä ($\xi_0 = -1, \xi_1 = 1$) saadaan, kun asetetaan $\xi_k = \xi_0$ ja $\xi_k = \xi_1$ vuoron perään, eli

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= l_0^1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \\ N_2(\xi) &= l_1^1(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Paraboliseksi interpolaatioksi saadaan ($\xi_0 = -1, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1$)

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= l_0^2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1), \\ N_2(\xi) &= l_1^2(\xi) = 1 - \xi^2, \\ N_3(\xi) &= l_2^2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi), \end{aligned} \quad (3.18)$$



Kuva 3.4 Lineaariset, paraboliset ja kuubiset Lagrangen interpolaatiopolynomit.

ja kuubiset Lagrangen polynomit ovat ($\xi_0 = -1, \xi_1 = -1/3, \xi_2 = 1/3, \xi_3 = 1$)

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi) &= l_0^3(\xi) = -\frac{9}{16}(\xi + \frac{1}{3})(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1), \\
 N_2(\xi) &= l_1^3(\xi) = \frac{27}{16}(\xi + 1)(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1), \\
 N_3(\xi) &= l_2^3(\xi) = -\frac{27}{16}(\xi + 1)(\xi + \frac{1}{3})(\xi - 1), \\
 N_4(\xi) &= l_3^3(\xi) = \frac{9}{16}(\xi + 1)(\xi + \frac{1}{3})(\xi - \frac{1}{3}).
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Lineaariset, paraboliset ja kuubiset interpolaatiopolynomit on piirretty kuvaan 3.4.

Kuten havaitaan, voidaan Lagrangen polynomien avulla muodostaa kokonainen perhe interpolaatiofunktioita. Jos näitä funktioita käytetään elementtimenetelmässä, puhutaan Lagrangen elementtiperheestä.

3.2.2.2 Hierarkinen kantapolynomijärjestelmä

Uudempi tapa konstruoida interpolaatiofunktioita on käyttää hierarkisia kantafunktioita [31]. Eräs mahdollinen järjestelmä saadaan kun valitaan

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi), \quad N_i(\xi) = \psi_{i-1}(\xi), \quad i = 3, 4, \dots, p + 1, \tag{3.20}$$

jossa ψ_j määritellään Legendren polynomien P_{j-1} integraalien avulla:

$$\psi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t) dt, \quad j = 2, 3, \dots \quad (3.21)$$

Legendren polynomit $P_n(\xi)$ ovat Legendren differentiaaliyhtälön

$$(1 - \xi^2)y'' - 2\xi y' + n(n+1)y = 0, \quad -1 < \xi < 1 \quad (3.22)$$

ratkaisuja, kun $n = 0, 1, 2, \dots$ ja jossa pilkku tarkoittaa derivointia ξ :n suhteen. Kaksi ensimmäistä polynomia ovat

$$P_0(\xi) = 1 \quad \text{ja} \quad P_1(\xi) = \xi, \quad (3.23)$$

josta korkeamman asteen polynomit voidaan generoida Bonnetin rekursiokaavan

$$(n+1)P_{n+1}(\xi) = (2n+1)\xi P_n(\xi) - nP_{n-1}(\xi), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

avulla, josta seuraa

$$\begin{aligned} P_2(\xi) &= \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1), & P_3(\xi) &= \frac{1}{2}(5\xi^3 - 3\xi), \\ P_4(\xi) &= \frac{1}{8}(35\xi^4 - 30\xi^2 + 3), & P_5(\xi) &= \frac{1}{8}(63\xi^5 - 70\xi^3 + 15\xi) \quad \text{jne..} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Erittäin hyödyllisiä ovat myös palautuskaavat derivaatoille:

$$nP'_{n+1}(\xi) = (2n+1)\xi P'_n(\xi) - (n+1)P'_{n-1}(\xi), \quad (3.26a)$$

$$(2n+1)P_n(\xi) = P'_{n+1}(\xi) - P'_{n-1}(\xi). \quad (3.26b)$$

Yllä olevien Legendren polynomien rekursiokaavojen perusteella on helppo johtaa rekursiokaava interpolaatiofunktioille $\psi(\xi)$

$$\psi_j(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(2j-1)}} [P_j(\xi) - P_{j-2}(\xi)]. \quad (3.27)$$

Hierarkisen järjestelmän (3.21) ensimmäiset ns. solmottomat kantafunktiot ovat siis

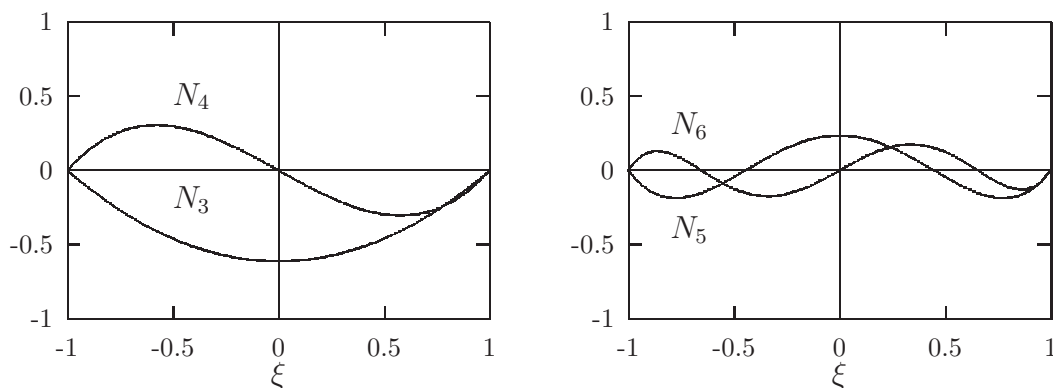
$$N_3(\xi) = \psi_2(\xi) = \frac{\sqrt{6}}{4}(\xi^2 - 1), \quad (3.28a)$$

$$N_4(\xi) = \psi_3(\xi) = \frac{\sqrt{10}}{4}(\xi^3 - \xi), \quad (3.28b)$$

$$N_5(\xi) = \psi_4(\xi) = \frac{\sqrt{14}}{16}(5\xi^4 - 6\xi^2 + 1), \quad (3.28c)$$

$$N_6(\xi) = \psi_5(\xi) = \frac{\sqrt{18}}{16}(7\xi^5 - 10\xi^3 + 3\xi), \quad \text{jne..} \quad (3.28d)$$

jotka ovat piirrettyinä kuvassa 3.5. Kantafunktioita N_1 ja N_2 kutsutaan solmuinterpolaatiofunktioiksi tai ulkoisiksi interpolaatiofunktioiksi tai ulkoisiksi muodoiksi,



Kuva 3.5 Hierarkisen järjestelmän (3.21) sisäisiä interpolaatiofunktioita.

kun taas kantafunktioita $N_i, i = 3, 4, \dots$ kutsutaan sisäisiksi interpolaatiofunktioiksi tai sisäisiksi muodoiksi tai “kuplamuodoiksi”. Kantafunktiot (3.20) ovat erityisen sopivia elementtimenetelmän interpolaatiofunktioiksi erityisesti tietokoneimplementointia silmälläpitäen, sillä ne muodostavat numeerisesti stabiilin kantafunktioiden joukon ja niiden ohjelmointi onnistuu kätevästi rekursiokaavan avulla mielivaltaiselle asteluvulle p .

Legendren polynomien yksi mielenkiintoisista ominaisuuksista on ortogonaalisuus

$$\int_{-1}^1 P_i(\xi) P_j(\xi) d\xi = \begin{cases} \frac{2}{2i+1}, & \text{jos } i = j \\ 0, & \text{jos } i \neq j. \end{cases} \quad (3.29)$$

Tästä aiheutuen on yhtälön (3.21) avulla määritellyillä interpolaatiofunktioilla seuraavanlainen sovellutuksia silmälläpitäen tärkeä ortogonaalisuusominaisuus:

$$\int_{-1}^1 \frac{d\psi_i}{d\xi} \frac{d\psi_j}{d\xi} d\xi = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j, \\ 0, & \text{jos } i \neq j. \end{cases} \quad (3.30)$$

3.3 Malliprobleema elementtimenetelmällä

Palataan uudestaan esimerkkiongelmahan (3.1) ja sen variaatiomuotoon (3.4), joka on perusta elementtimenetelmän diskreeteille yhtälöille. Kirjoitetaan heikko muoto uudelleen näkyviin:

$$\int_0^L ku' \hat{u}' dx = \int_0^L f \hat{u} dx. \quad (3.31)$$

Otetaan käyttöön yksinkertaisin mahdollinen C_0 -interpolaatio eli lineaariset polynomit

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (3.32)$$

Ratkaisua siis approksimoidaan kunkin elementin alueella kaavalla

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x)^{(e)} &= \tilde{u}(\xi(x))^{(e)} = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi(x)) u_i \\ &= N_1(\xi) u_1 + N_2(\xi) u_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi) u_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi) u_2,\end{aligned}\quad (3.33)$$

jossa u_i :t ovat tuntemattomia parametreja eli u :n approksimaation arvoja solmupisteissä. Kun painofunktiolle $\hat{u}$ valitaan myös samat kantafunktiot (3.32) ja jaetaan alue N :ään elementtiin, saadaan heikon muodon (3.31) diskreetti vastine kirjoitettua muotoon

$$\sum_{e=1}^N \sum_{j=1}^2 \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} k \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx u_j = \sum_{e=1}^N \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} f N_i dx, \quad i = 1, 2. \quad (3.34)$$

Integroinnit voidaan suorittaa elementtikohtaisesti paikallisessa ξ -koordinaatistossa, jolloin yhtälössä (3.34) olevissa integraaleissa suoritetaan muuttujan vaihto $x \rightarrow \xi$, jolloin rajat muuttuvat $x_1^{(e)} \rightarrow -1$ ja $x_2^{(e)} \rightarrow +1$ ja saadaan lausekkeet

$$\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} k \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx = \int_{-1}^1 k \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} J^{-1} d\xi, \quad (3.35a)$$

$$\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} f N_i dx = \int_{-1}^1 f N_i J d\xi, \quad (3.35b)$$

jossa $J = dx/d\xi = \frac{1}{2}h^{(e)} = \frac{1}{2}(x_2^{(e)} - x_1^{(e)})$. Huomaa, että derivaatoille pätee

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} = \frac{1}{J} \frac{d}{d\xi} = \frac{2}{h^{(e)}} \frac{d}{d\xi}. \quad (3.36)$$

Yhtälö (3.34) voidaan kirjoittaa matriisimuodossa seuraavasti:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.37)$$

jossa globaali rakennekoordinaatiston jäykkyysmatriisi $\mathbf{K}$ ja kuormitusvektori $\mathbf{f}$ kootaan paikallisista elementtien osuuksista

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_{e=1}^N \mathbf{K}^{(e)}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{A}_{e=1}^N \mathbf{f}^{(e)}. \quad (3.38)$$

Elementtimatriisin $\mathbf{K}^{(e)}$ ja vektoreiden $\mathbf{u}^{(e)}$ ja $\mathbf{f}^{(e)}$ komponenttiesitykset ovat

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}^{(e)} = \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad (3.39)$$

joissa

$$K_{ij}^{(e)} = \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 k \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} d\xi, \quad f_i = \frac{1}{2} h^{(e)} \int_{-1}^1 f N_i d\xi. \quad (3.40)$$

Ottamalla käyttöön matriisimerkinnät

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{u}^{(e)}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{d}{dx} \mathbf{N}, \quad \mathbf{D} = k \quad (3.41)$$

voidaan elementin jäykkyysmatriisi ja kuormitusvektori kirjoittaa yleisessä muodossa

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} f \mathbf{N}^T dV. \quad (3.42)$$

Yllä olevasta jäykkyysmatriisin esityksestä havaitaan yhteys aivan alussa mainittuun fysikaalisten ilmiöiden matemaattisen mallin perusstruktuuriin, katso kuva 1.2. Tässä siis matriisi $\mathbf{B}$ välittää diskreetissä muodossa kinemaattisen yhteyden; matriisi $\mathbf{D}$ vastaavasti materiaalilain ja koska kyseessä on itseadjungoitu yhtälö $\mathbf{B}^T$ on tasapaino-operaattorin diskreetti vastine.

Mikäli otaksutaan k vakioksi elementin alueella ja käytetään lineaarisia interpolaatiopolynomeja (3.32), saadaan jäykkyysmatriisiksi (tai johtavuusmatriisiksi)

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Kvadraattista interpolaatiota (3.18)

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x)^{(e)} &= \tilde{u}(\xi(x))^{(e)} = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi(x)) u_i = N_1(\xi) u_1 + N_2(\xi) u_2 + N_3(\xi) u_3 \\ &= \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) u_1 + (1 - \xi^2) u_2 + \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) u_3 \end{aligned} \quad (3.44)$$

käytettäessä saadaan jäykkyysmatriisiksi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k}{3h^{(e)}} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Mikäli käytetään hierarkista kantaa (3.20) saadaan yksinkertainen jäykkyysmatriisi, jossa ensimmäinen 2×2 lohko on identtinen matriisin (3.43) kanssa ja ortogonaalisuuden (3.30) perusteella tulee sisäisten muotojen kontribuutioksi vain diago-

naalitermit

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Esimerkki 3.2 Mikäli kuormitustermi on $f(x) = -f_c(x/L) \ln(x/L)$ (f_c on vakio) ja lämmönjohtavuus k on vakio koko alueessa $(0, L)$, niin määritä lämpötilajakauma malliprobleemalle, kun alue jaetaan tasavälisesti kolmeen lineaariseen elementtiin. Määritä likiratkaisusta myös lämpövuon arvot.

Kaikkien elementtien jäykkyysmatriisit ovat samanlaisia, koska k on vakio ja elementit ovat yhtä pitkiä. Ne saadaan yhtälöstä (3.43) sijoittamalla $h^{(e)} = L/3$. Systemin globaali jäykkyysmatriisi kootaan, kun ensin identifoidaan paikallisia vapausasteita vastaavat globaalit vapausastenumerot:

	elem. 1		elem. 2		elem. 3	
paikalliset vapausasteet	1	2	1	2	1	2
globaalit vapausasteet	-	1	1	2	2	-

Globaalin eli rakennekoordinaatiston jäykkyysmatriisin alkiot ovat siten:

$$K_{11} = K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)}, \quad K_{12} = K_{12}^{(2)}, \quad K_{22} = K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)}, \quad (3.47)$$

johon sijoittamalla arvot saadaan

$$\mathbf{K} = \frac{3k}{L} \begin{bmatrix} 1+1 & -1 \\ -1 & 1+1 \end{bmatrix} = \frac{3k}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Kuormitusvektorin termit ovat

$$f_1 = f_2^{(1)} + f_1^{(2)}, \quad f_2 = f_2^{(2)} + f_1^{(3)}, \quad (3.49)$$

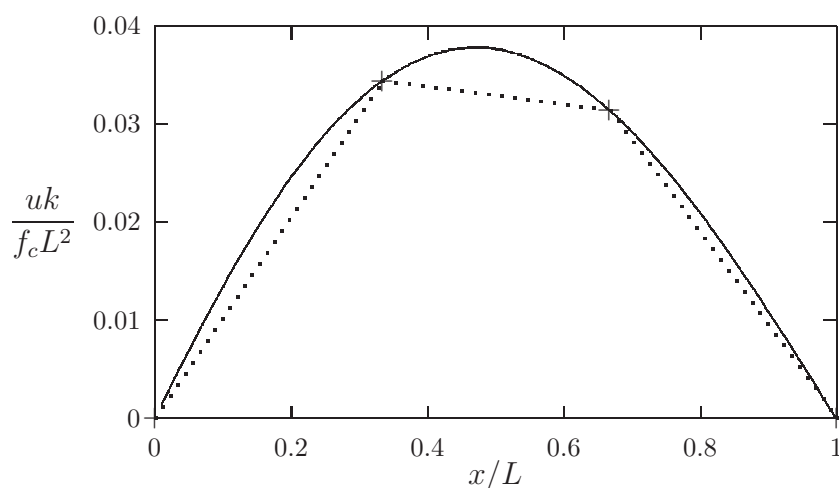
jossa yksittäiset alkiot ovat

$$f_2^{(1)} = -\frac{1}{6}f_cL \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{6}\right) \ln\left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{6}\right) \frac{1}{2}(1+\xi) d\xi, \quad (3.50a)$$

$$f_1^{(2)} = -\frac{1}{6}f_cL \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}(1-\xi) d\xi, \quad (3.50b)$$

$$f_2^{(2)} = -\frac{1}{6}f_cL \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}(1+\xi) d\xi, \quad (3.50c)$$

$$f_1^{(3)} = -\frac{1}{6}f_cL \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6}\xi + \frac{5}{6}\right) \ln\left(\frac{1}{6}\xi + \frac{5}{6}\right) \frac{1}{2}(1-\xi) d\xi, \quad (3.50d)$$



Kuva 3.6 Esimerkkiongelman tarkka ratkaisu (yhtenäinen viiva) ja elementtimenetelmällä laskettu (katkoviiva) käyttäen kolmea lineaarista elementtiä.

jossa on käytetty yhtälön (3.9) käännteistä muotoa

$$x = \frac{1}{2}h^{(e)}\xi + x_c^{(e)}. \quad (3.51)$$

Suorittamalla integroinnit saadaan kuormitusvektoriksi ja ratkaisuksi

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 0.11197 \\ 0.08539 \end{Bmatrix} f_c L \quad (3.52)$$

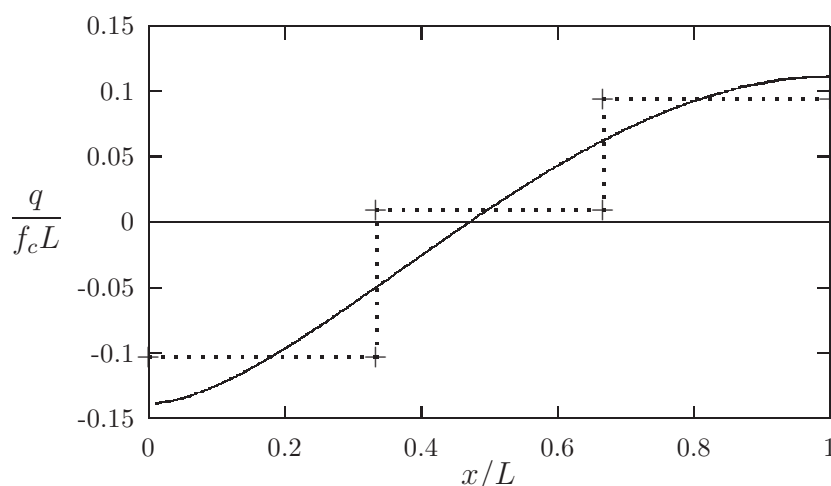
$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathbf{u} &= \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} = \frac{L}{9k} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.11197 \\ 0.08539 \end{Bmatrix} f_c L \\ &= \begin{Bmatrix} 0.034371 \\ 0.031417 \end{Bmatrix} \frac{f_c L^2}{k}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Tarkka ratkaisuhan on

$$u(x) = \frac{f_c L^2}{6k} \left(\frac{x}{L} \right) \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 \left(\ln \frac{x}{L} - \frac{5}{6} \right) + \frac{5}{6} \right], \quad (3.54)$$

ja alla olevassa taulukossa on vertailtu analyyttisen ja elementtimenetelmän antamia tuloksia tietyissä pisteissä (kerrottava tekijällä $f_c L^2/k$), katso myös kuvaa 3.6.

	solmu 1 ($x/L = 1/3$)	keskipiste ($x/L = 1/2$)	solmu 2 ($x/L = 2/3$)
tarkka	0.034371	0.037643	0.031417
FEM	0.034371	0.032894	0.031417



Kuva 3.7 Esimerkkiongelman lämpövuon tarkka ratkaisu (yhtenäinen viiva) ja elementtimenetelmällä laskettu (katkoviiva) käyttäen kolmea lineaarista elementtiä.

Havaitaan, että elementtimenetelmän antamat tulokset yhtyvät solmupisteissä tarkkaan ratkaisuun, eli elementtiapproksimaatio on tarkan ratkaisun interpolantti. Tämän paremmin ei voisi käydä. Tietenkin asia herättää heti kysymyksen: “Miksi näin?”. Ratkaisu on yksinkertainen, kun havaitaan käytettyjen interpolaatiofunktioiden olevan ratkaistavan differentiaaliyhtälön homogeenisen osan yleinen ratkaisu. Lineaariset funktiot toteuttavat siis yhtälön

$$-ku'' = 0. \quad (3.55)$$

Tämä havainto pätee yleisemminkin. Mikäli elementin interpolaatiofunktioiksi valitaan funktiot, joista voidaan konstruoida ratkaistavan differentiaaliyhtälön homogeenisen osan täydellinen ratkaisu, saadaan solmupisteissä tarkan ratkaisun arvot riippumatta siitä millainen kuormitustermi f on. Tuloksen on ensimmäisenä havainnut ja todistanut tiettävästi P. Tong julkaisussaan [54] vuonna 1969. Selitys miksi homogeenisen osan tarkan ratkaisun toteutuminen riittää yritefunktioille on seuraava. Koska kuorma/lähdetermi diskretoitaessa siirretään pistekuormiksi solmuihin, on elementtimenetelmäratkaisu oikeastaan homogeenisen osan ratkaisua kussakin elementissä erikseen. Mikäli nyt homogeenisen osan tarkka ratkaisu pystytään konstruoimaan interpolaatiofunktioilla, saadaan myös ratkaistavalle ongelmalle tarkat arvot juuri solmupisteissä, eli elementin interpolaatiofunktioit ovat myös tarkan ratkaisun interpolantteja.

Valitettavasti tätä strategiaa voidaan menestyksellisesti soveltaa vain yksidimensioisiin ongelmiin ja niissäkin usein vain vakioehtoisiin tapauksiin.

Tarkastellaan vielä lämpövuon $q = -ku'$ jakautumista. Käytetyssä elementtimenetelmäapproksimaatiossa tämä suure on nyt vakio kunkin elementin

sisällä, eli

$$\tilde{q}^{(e)} = -k^{(e)} \frac{1}{h^{(e)}} \left(u_2^{(e)} - u_1^{(e)} \right) = \frac{k^{(e)}}{h^{(e)}} \left(u_1^{(e)} - u_2^{(e)} \right) \quad (3.56)$$

Analyttisestä ratkaisusta saadaan lämpövuolle lauseke

$$q(x) = -f_c L \left[\frac{5}{36} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \left(\ln \frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (3.57)$$

Elementtimenetelmän antamaa approksimaatiota lämpövuolle on verrattu analyttiseen kuvassa 3.7.

Esimerkki 3.3 Ratkaistaan luvun 2.3 esimerkkiongelman, eli probleema

$$-(ku')' = f, \quad (3.58)$$

reunaehdoilla $u(0) = u_0$ ja $q(L) = -ku'(L) = 0$ ja jossa $k = k(x) = k_0(1 + x/L)$ ja kuormitustermi $f = \beta u k_0 L^{-2}$ on vakio (β on dimensioton vakio).

Materiaaliparametrille k voidaan ottaa elementin alueella lineaaristen interpolatiofunktioiden avulla ilmaistu lauseke

$$k(\xi) = k_1 N_1(\xi) + k_2 N_2(\xi) = \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1) \xi], \quad (3.59)$$

jossa k_1, k_2 ovat k :n arvot elementin päätepisteissä. Sijoitettaessa tämä elementtimatriisin lausekkeeseen saadaan

$$K_{ij}^{(e)} = \frac{1}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1) \xi] \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} d\xi. \quad (3.60)$$

Käytetään aluksi kahta lineaarista elementtiä. Elementin jäykkymatriisiksi saadaan siten

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k_1 + k_2}{2h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

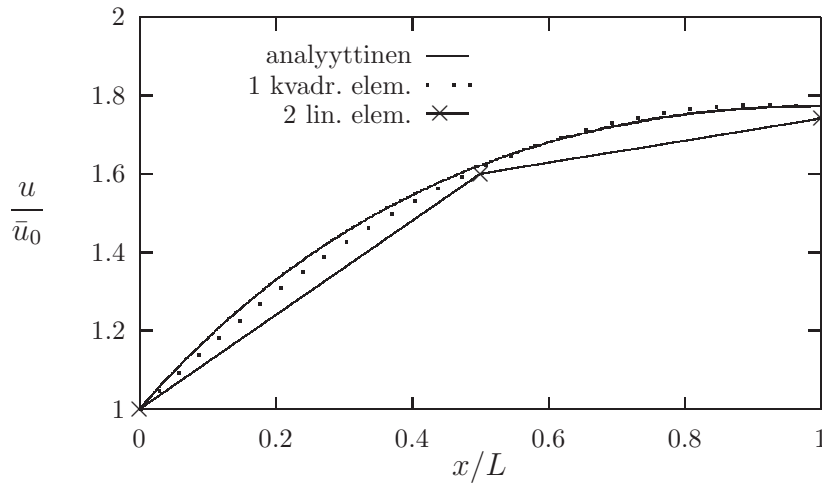
Sijoittamalla arvot saadaan kyseisen ongelman elementtien osuuksiksi

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{5k_0}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(2)} = \frac{7k_0}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{f}^{(2)} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} fL. \quad (3.63)$$

Kokoamalla yhtälöt saadaan systeemi

$$\frac{k_0}{2L} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -5 & 12 & -7 \\ 0 & -7 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} fL = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\beta u_0 k_0}{L}, \quad (3.64)$$



Kuva 3.8 Esimerkkiongelman tarkka ratkaisu (yhtenäinen viiva) ja elementtimenetelmällä laskettu (katkoviiva) käyttäen kahta lineaarista tai yhtä kvadraattista elementtiä. Ratkaisut vakion β arvolla $\beta = 2$.

josta ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{2}{35} \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \beta + \frac{5}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) u_0 = \begin{Bmatrix} 1 + \frac{3}{10}\beta \\ 1 + \frac{13}{35}\beta \end{Bmatrix} u_0. \quad (3.65)$$

Ratkaisu on piirretty kuvaan 3.8.

Ratkaistaan tehtävä vielä käyttäen yhtä kvadraattista elementtiä. Elementtimatriisin alkiot ovat

$$\begin{aligned} K_{11}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \left[\frac{1}{2}(2\xi - 1) \right]^2 d\xi = \frac{11k_1 + 3k_2}{6h^{(e)}}, \\ K_{12}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \frac{1}{2}(2\xi - 1)(-2\xi) d\xi = -\frac{6k_1 + 2k_2}{3h^{(e)}}, \\ K_{13}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \frac{1}{2}(2\xi - 1)\frac{1}{2}(1 + 2\xi) d\xi = \frac{k_1 + k_2}{6h^{(e)}}, \\ K_{22}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] 4\xi^2 d\xi = \frac{8(k_1 + k_2)}{3h^{(e)}}, \\ K_{23}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] (-2\xi)\frac{1}{2}(1 + 2\xi) d\xi = -\frac{2k_1 + 6k_2}{3h^{(e)}}, \\ K_{33}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \left[\frac{1}{2}(1 + 2\xi) \right]^2 d\xi = \frac{3k_1 + 11k_2}{6h^{(e)}}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

jossa k_1 ja k_2 ovat k :n arvot elementin päätepisteissä. Elementin kuormitus-

vektori on vastaavasti

$$f_1^{(e)} = \frac{1}{2}fh^{(e)} \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\xi(\xi-1)d\xi = \frac{1}{6}fh^{(e)}, \quad (3.67a)$$

$$f_2^{(e)} = \frac{1}{2}fh^{(e)} \int_{-1}^1 (1-\xi^2)d\xi = \frac{2}{3}fh^{(e)}, \quad (3.67b)$$

$$f_3^{(e)} = \frac{1}{2}fh^{(e)} \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\xi(1+\xi)d\xi = \frac{1}{6}fh^{(e)}. \quad (3.67c)$$

Yhtälösystemiksi saadaan

$$\frac{k_0}{L} \begin{bmatrix} \frac{17}{6} & -\frac{10}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{10}{3} & 8 & -\frac{14}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{14}{3} & \frac{25}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} fL = \frac{1}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\beta u_0 k_0}{L}, \quad (3.68)$$

josta ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{9}{104} \begin{bmatrix} \frac{25}{6} & \frac{14}{3} \\ \frac{14}{3} & 8 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{6} \begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \beta + \begin{Bmatrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \right) u_0 = \begin{Bmatrix} 1 + \frac{4}{13}\beta \\ 1 + \frac{5}{13}\beta \end{Bmatrix} u_0. \quad (3.69)$$

Tämäkin ratkaisu on piirretty kuvaan 3.8. Ratkaisu on tietenkin identtinen kuvassa 2.1 olevan Galerkinin menetelmän ratkaisun kanssa. Huomaa, että yhdellä kvadraattisella elementillä laskettaessa saatiin parempi tulos kuin kahdella lineaarisella elementillä.

Lasketaan tehtävä vielä käyttäen yhtä elementtiä ja hierarkista menettelyä. Demonstroidaan asiaa käyttämällä vain kvadraattista kuplamuotoa. Interpolatiopolynomit ovat siten

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi), \quad N_3 = \frac{\sqrt{6}}{4}(\xi^2-1), \quad (3.70)$$

ja niiden derivaatat ξ :n suhteen

$$\frac{dN_1}{d\xi} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{dN_2}{d\xi} = \frac{1}{2}, \quad \frac{dN_3}{d\xi} = \frac{\sqrt{6}}{2}\xi. \quad (3.71)$$

Koska materiaalivakio (lämmönjohtavuus) k on paikkakoordinaatin funktio, ei hierarkisen muodon ortogonaalisuus (3.30) toteudu. Laskettavana on siten

termejä

$$\begin{aligned}
K_{13}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{6}}{2} \xi d\xi = -\frac{\sqrt{6}(k_2 - k_1)}{6h^{(e)}}, \\
K_{23}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \frac{1}{2} \frac{\sqrt{6}}{2} \xi d\xi = \frac{\sqrt{6}(k_2 - k_1)}{6h^{(e)}}, \\
K_{33}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\xi\right)^2 d\xi = \frac{k_1 + k_2}{h^{(e)}}, \\
f_3^{(e)} &= \frac{1}{2} f h^{(e)} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{6}}{4} (\xi^2 - 1) d\xi = -\frac{\sqrt{6}}{6} f h^{(e)}. \quad (3.72)
\end{aligned}$$

Mikäli k muuttuu lineaarisesti, on jäykkyyismatriisi hierarkista kvadraattista muotoa käyttävälle elementille seuraava

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k_1 + k_2}{2h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{\sqrt{6}}{3}\alpha \\ -1 & 1 & \frac{\sqrt{6}}{3}\alpha \\ -\frac{\sqrt{6}}{3}\alpha & \frac{\sqrt{6}}{3}\alpha & 2 \end{bmatrix} \quad \text{jossa} \quad \alpha = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}, \quad (3.73)$$

vastaten solmupisteparametreja $u_1^{(e)}, u_2^{(e)}, \Delta u_0^{(e)}$. Sijoittamalla probleman arvot saadaan

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_2 \\ \Delta u_0^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{Bmatrix} \beta u_0, \quad (3.74)$$

josta ratkaisu on

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} u_2 \\ \Delta u_0^{(1)} \end{Bmatrix} &= \frac{3}{13} \begin{bmatrix} 3 & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{Bmatrix} \beta + \begin{Bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{Bmatrix} \right) u_0 \\
&= \begin{Bmatrix} 1 + \frac{5}{13}\beta \\ -\frac{\sqrt{6}}{13}\beta \end{Bmatrix} u_0. \quad (3.75)
\end{aligned}$$

Elementin solmun 2 arvo yhtyy tavanomaisella parabolisella elementillä laskettuun tulokseen, kuten pitääkin. Tarkistetaan vielä elementin keskipistessä u :n arvo, joka tulee olemaan

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(\tfrac{1}{2}L) &= N_1(0)u_1 + N_2(0)u_2 + N_3(0)\Delta u_1^{(1)} \\
&= \tfrac{1}{2}u_0 + \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{5}{13}\beta)u_0 - \tfrac{\sqrt{6}}{13}\beta u_0(-\tfrac{\sqrt{6}}{4}) = (1 + \tfrac{4}{13}\beta)u_0. \quad (3.76)
\end{aligned}$$

Tämäkin tulos on sama kuin tavanomaisella parabolisella elementillä laskettaessa saatu keskisolmun arvo.

Mainittakoon vielä, että koska interpolaatiopolynomeista ei nyt voida konstruoida ratkaistavan ongelman homogeenisen osan yleistä ratkaisua, eivät solmupistearvot ole tarkkoja.

Esimerkki 3.4 Ratkaise elementtimenetelmällä stationäärinen 1-dimensioinen diffuusio-konvektioyhtälö

$$-ku'' + \rho cvu' = f, \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0, \quad (3.77)$$

kun k, ρ, c, v ja f ovat positiivisia vakioita. Käytä kolmea lineaarista elementtiä ja suorita ratkaisu Pécletin luvun $P = \rho cvL/k$ arvoilla $P = 10$ ja $P = 100$.

Kerrotaan differentiaaliyhtälö painofunktiolla $\hat{u}$ ja integroidaan alueen yli. Painofunktioiden on toteutettava homogeeniset reunaehdot, sillä funktion u arvot on annettu kummassakin päässä. Suoritetaan ns. diffusiotermin osittaisintegrointi, jossa sijoitustemi häviää painofunktiolta vaadittavien reunaehtojen perusteella, eli

$$\begin{aligned} -k \int_0^L \hat{u}(x) u''(x) dx + \rho cv \int_0^L \hat{u}(x) u'(x) dx &= \int_0^L \hat{u}(x) f dx, \\ \Rightarrow k \int_0^L \hat{u}'(x) u'(x) dx + \rho cv \int_0^L \hat{u}(x) u'(x) dx &= \int_0^L \hat{u}(x) f dx. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Elementtimenetelmässä otaksutaan elementin alueella interpolaatio

$$u = \sum_i N_i u_i, \quad (3.79)$$

ja Galerkinin keinosssa painofunktiolle valitaan sama kanta, eli $\hat{u}_i = N_i$. Tehdävän variaatiomuodossa on korkeintaan ensimmäisen kertaluvun derivaattoja, joten C_0 -jatkuvuus on riittävä. Lineaariset interpolaatiofunktiot ovat

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (3.80)$$

Siirretään tarkastelu elementin alueella paikalliseen ξ -koordinaatistoon, jolloin on huomattava, että

$$dx = \frac{h}{2} d\xi \quad \text{ja} \quad \frac{d}{dx} = \frac{2}{h} \frac{d}{d\xi}, \quad (3.81)$$

missä h on elementin pituus. Täten elementin jäykkyyismatriisille ja kuorma-vektorille saadaan kaavat

$$K_{ij}^{(e)} = k \int_{x_1}^{x_2} N_{i,x} N_{j,x} dx + \rho cv \int_{x_1}^{x_2} N_i N_{j,x} dx \quad (3.82)$$

$$= \frac{2k}{h} \int_{-1}^1 N'_i N'_j d\xi + \rho cv \int_{-1}^1 N_i N'_j d\xi, \quad (3.83)$$

$$f_i^{(e)} = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 N_i f d\xi, \quad (3.84)$$

jossa pilkku symbolin oikeassa yläkulmassa merkitsee nyt derivointia paikalli-

sen ξ -koordinaatin suhteen. Merkitään jäykkyysmatriisin osia

$$A_{ij} = \frac{2k}{h} \int_{-1}^1 N'_i N'_j d\xi, \quad B_{ij} = \rho cv \int_{-1}^1 N_i N'_j d\xi. \quad (3.85)$$

$\mathbf{A}$ matriisi on jo entuudestaan tuttu, ja se on

$$\mathbf{A} = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

Matriisi $\mathbf{B}$ saadaan integroimalla termit

$$\begin{aligned} B_{11} &= \rho cv \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-\xi)(-\frac{1}{2})d\xi = -\rho cv \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1-\xi)d\xi = -\frac{1}{2}\rho cv, \\ B_{12} &= \rho cv \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-\xi)\frac{1}{2}d\xi = \frac{1}{2}\rho cv, \\ B_{21} &= \rho cv \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1+\xi)(-\frac{1}{2})d\xi = -\rho cv \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1+\xi)d\xi = -\frac{1}{2}\rho cv, \\ B_{22} &= \rho cv \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1+\xi)\frac{1}{2}d\xi = \frac{1}{2}\rho cv. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Elementin jäykkyysmatriisi on siten

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho cv}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.88)$$

Huomaa, että kulkeutumistermiä vastaava elementtimatriisi $\mathbf{B}$ ei riipu elementin pituudesta.

Tehtävässä pyydettiin jakamaan alue kolmeen yhtäpitkään elementtiin, joten $h = L/3$ ja kaikilla elementeilla on sama jäykkyysmatriisi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{3k}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho cv}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad e = 1, 2, 3. \quad (3.89)$$

Otetaan käyttöön dimensioton Pécletin luku $P = \rho cvL/k$, josta $k/L = \rho cv/P$, jolloin elementtien jäykkyysmatriisiksi saadaan

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{3\rho cv}{P} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho cv}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad e = 1, 2, 3. \quad (3.90)$$

Koko rakenteen yhtälöryhmäksi saadaan

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \end{Bmatrix}. \quad (3.91)$$

Ratkaistaan tehtävä ensin Pécletin luvulla $P=1$. Yhtälöryhmäksi saadaan

$$\rho cv \begin{bmatrix} 6 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} fL, \quad (3.92)$$

josta ratkaisuksi saadaan $u_2 = \frac{34}{327}fL/\rho cv \approx 0.1040fL/\rho cv$ ja $u_3 = \frac{40}{327}fL/\rho cv \approx 0.1223fL/\rho cv$.

Vastaavasti Pécletin luvulla $P = 10$ yhtälöryhmä on

$$\frac{\rho cv}{10} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} fL, \quad (3.93)$$

josta ratkaisuksi saadaan $u_2 = \frac{10}{39}fL/\rho cv \approx 0.2564fL/\rho cv$ ja $u_3 = \frac{35}{39}fL/\rho cv \approx 0.8974fL/\rho cv$.

Pécletin luvulla $P = 100$ kulkeutuminen eli konvektio dominoi ratkaisua ja yhtälöryhmäksi saadaan

$$\frac{\rho cv}{100} \begin{bmatrix} 6 & 47 \\ -53 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} fL, \quad (3.94)$$

josta ratkaisuksi saadaan $u_2 = -\frac{4100}{7581}fL/\rho cv \approx -0.5408fL/\rho cv$ ja $u_3 = \frac{5900}{7581}fL/\rho cv \approx 0.7783fL/\rho cv$.

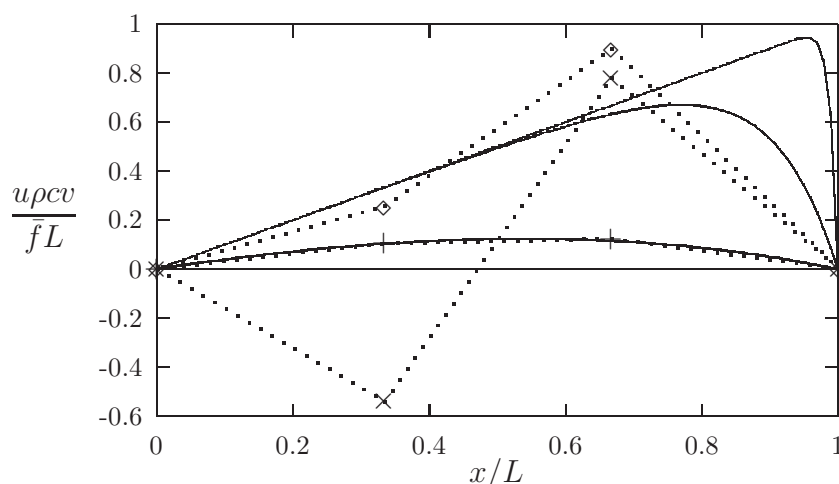
Ratkaisu alkaa siten heittelehtiä, eli numeerinen ratkaisumenetelmä on epästabili kyseiselle tehtävälle suurilla Pécletin luvun arvoilla. Edellä esitetyt elementtimenetelmäratkaisut on piirretty analyttisten ratkaisujen kanssa kuvaan 3.9.

Ratkaisun epästabilius voidaan välttää käyttämällä reunahäiriön luona tiheämpää elementtiverkkoa, tai ottamalla käyttöön erilaiset painofunktiot, jotka ottavat huomioon tehtävän luonteen. Tätä selvitetään seuraavassa kappaleessa.

3.4 Diffuusio-konvektioyhtälön numeerinen ratkaisu

Kuten esimerkkinä lasketusta yksidimensioisesta diffuusio-konvektiyhtälöstä havaitaan, toimii standardi elementtimenetelmäformulaatio (eli Galerkinin menetelmä) huonosti, kun konvektion osuus on hallitseva diffuusion verrattuna. Ongelmalle on esitetty useita parannusehdotuksia ja seuraavassa tarkastellaan esimerkinomaisesti keinotekoisien diffuusion lisäämistä yhtälöön, joka on ekvivalentti toispuoleisen (ylävirta) differenssimenetelmän soveltamiseen ongelman aiheuttavaan konvektiotermiin. Samalla tuodaan esille elementtimenetelmän ja differenssimenetelmän välinen yhteys kyseisessä esimerkkitehtävässä.

Tarkastellaan nyt elementtimenetelmällä muodostettuja diskreettejä yhtälöitä. Otaksutaan, että ratkaisualue on jaettu yhtäpitkiin lineaarisesti interpoloituihin ele-



Kuva 3.9 Tasavälisellä kolmen lineaarisen elementin verkolla ratkaistu diffuusio-konvektioyhtälö Pécletin luvun arvoilla $P = \rho cvL/k = 1, 10, 100$. Analyttiset ratkaisut on piirretty kuvaan yhtenäisellä viivalla.

mentteihin, joiden pituus olkoon h . Systemin tasapainoyhtälö on siten muotoa

$$\left(\frac{k}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} + \frac{\rho cv}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \end{Bmatrix} = fh \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{Bmatrix}. \quad (3.95)$$

Täten mielivaltaista sisäpistettä i vastaava yhtälö on muotoa

$$\frac{k}{h^2}(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}) + \frac{\rho cv}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) = f, \quad (3.96)$$

jossa vasemmanpuoleinen sulkulauseke on operaattorin $-d^2/dx^2$ keskeisdifferenssiapproksimaatio ja oikeanpuoleinen sulkulauseke vastaavasti keskeisdifferenssiapproksimaatio operaattorille d/dx . Johtopäätöksenä voitaisiin siten todeta tavanomaisen elementtimenetelmän ottavan huomasti huomioon kyseisen ongelman erityispiirteen, eli kulkeutumisen. Kun kulkeutuminen eli konvektio on hallitseva johtumiseen eli diffuusioon verrattuna ($\rho cv \gg k/h$), ei alavirran puolella olevien pisteiden $i+1, i+2, \dots$ merkitys ratkaisuun ole tietenkään sama kuin ylävirran puoleisten pisteiden $\dots i-2, i-1$, sillä ”informaatio” tulee ylävirran suunnasta. Jotta asia korjaantuisi ja numeeriseen ratkaisumenetelmään saataisiin enemmän painotusta ylävirran puolelle, lienee soveliaista käyttää konvektiotermille toispuoleista differenssi-

lauseketta

$$\frac{d}{dx} \sim \frac{1}{h}(u_i - u_{i-1}), \quad (3.97)$$

tai jollain tavalla kombinoitua versiota keskeis- ja ylävirtadifferenssilausekkeista

$$\frac{d}{dx} \sim \frac{\alpha}{h}(u_i - u_{i-1}) + \frac{1-\alpha}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}), \quad (3.98)$$

jossa $\alpha \in [0, 1]$ on parametri, jonka optimaalinen arvo arvattavastikin riippuu Pécletin luvusta P . Optimaalisella arvolla voidaan tässä yhteydessä tarkoittaa arvoa, joka tekee numeerisesta menetelmästä stabiilin (ei heilahteluja) sekä on kyseisellä interpolaatiolla mahdollisimman tarkka.

Ylävirtadifferenssilauseke (3.97) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{1}{h}(u_i - u_{i-1}) = \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{1}{2h}(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}), \quad (3.99)$$

eli ensimmäisen derivaatan keskeisdifferenssilausekkeeksi ja verkkoparametrissa h riippuvan toisen kertaluvun differentiaalioperaattorin

$$-\frac{h}{2} \frac{d^2}{dx^2} \quad (3.100)$$

keskeisdifferenssilausekkeiden summaksi. Differenssikaava (3.98) voidaan vastaavasti kirjoittaa muodossa

$$\frac{d}{dx} \sim \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{\alpha}{2h}(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}), \quad (3.101)$$

jolloin alkuperäinen differenssiyhtälö (3.96) muuntuu muotoon

$$\frac{k + \frac{1}{2}\alpha\rho cvh}{h^2}(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}) + \frac{\rho cv}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) = f, \quad (3.102)$$

joka siis vastaisi keskeisdifferenssimenetelmän tai tavanomaisen elementtimenetelmän soveltamista yhtälöön

$$-(k + \frac{1}{2}\alpha\rho cvh)u'' + \rho cvu' = f. \quad (3.103)$$

Toisin sanoen ylävirtapainotus metkitsee tavanomaisen elementtimenetelmän painofunktiolla keinotekoisien diffuusion lisäämistä, eli lämmönjohtavuuden lauseketta kasvatetaan verkkoparametrissa h riippuvalla lausekkeella: $k \rightarrow k + \frac{1}{2}\alpha\rho cvh$. Yhtälöstä (3.103) voidaan havaita siihen perustuvan numeerisen menetelmän olevan konsistentti alkuperäisen differentiaaliyhtälön

$$-ku'' + \rho cvu' = f \quad (3.104)$$

kanssa, eli elementtiverkkoa tihennettäessä ($h \rightarrow 0$) yhtälö (3.103) lähestyy yhtälöä (3.104).

Analysoidaan nyt hieman differenssilausekkeitä (3.96) ja (3.98). Aloitetaan lausekkeesta (3.96) johon sijoitetaan yrite $u_i = \lambda^i$. Kahden vierekkäisen pisteen i ja $i + 1$ lausekkeet ovat siten

$$\begin{aligned} -\lambda^{i+1} + 2\lambda^i - \lambda^{i-1} + \frac{\rho cv h}{2k}(\lambda^{i+1} - \lambda^{i-1}) &= \frac{fh^2}{k}, \\ -\lambda^{i+2} + 2\lambda^{i+1} - \lambda^i + \frac{\rho cv h}{2k}(\lambda^{i+2} - \lambda^i) &= \frac{fh^2}{k}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Vähennetään alempi lauseke ylemmästä ja merkitään diskreettiä Pécletin lukua $P_h = \rho cv h/k$, jolloin jakamalla puolittain termillä λ^{i-1} saadaan yhtälö

$$(1 - \frac{1}{2}P_h)\lambda^3 + (\frac{1}{2}P_h - 3)\lambda^2 + (\frac{1}{2}P_h + 3)\lambda - (1 + \frac{1}{2}P_h) = 0. \quad (3.106)$$

Helposti havaitaan yhden juurista olevan $\lambda = 1$, jolloin jäljelle jää polynomi yhtälö

$$(1 - \frac{1}{2}P_h)\lambda^2 - 2\lambda + 1 + \frac{1}{2}P_h = 0, \quad (3.107)$$

jonka juuret ovat $\lambda = 1$ ja $\lambda = (1 + \frac{1}{2}P_h)/(1 - \frac{1}{2}P_h)$. Jotta numeerisessa ratkaisussa ei esiintyisi epäfysikaalista oskillointia on kaikkien juurien oltava positiivisia, joten saadaan ehtoyhtälö

$$P_h < 2 \quad \implies \quad h < \frac{2k}{\rho cv} \quad \implies \quad \frac{h}{L} < \frac{2k}{\rho cv L} = \frac{2}{P}. \quad (3.108)$$

Esimerkkinne tapauksessa $P = 10$ saavutettaisiin heilahtelematon ratkaisu käyttämällä vähintään viittä elementtiä.

Ylävirtapainotteisen differenssilausekkeen (3.98) tapauksessa analyysi on aivan vastaava; korvataan vain P_h lausekkeella $P_h/(1 + \frac{1}{2}\alpha P_h)$, jolloin saadaan ehtoyhtälö

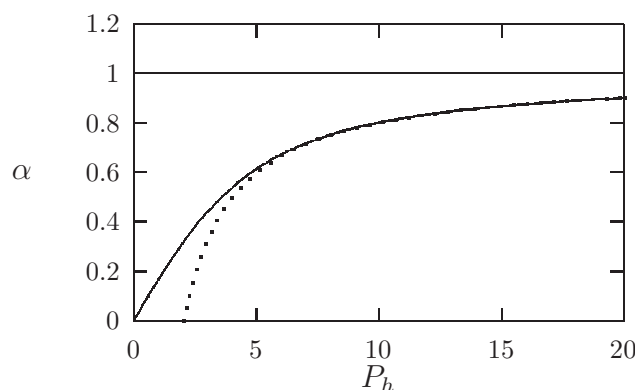
$$\frac{P_h}{1 + \frac{1}{2}\alpha P_h} < 2 \quad \implies \quad \alpha > 1 - \frac{2}{P_h}, \quad \alpha_{cr} = 1 - \frac{2}{P_h}. \quad (3.109)$$

Mikäli nyt α -parametri valitaan oheisen epäyhtälön mukaisesti, saadaan kaikilla verkontiheyksillä stabiili ratkaisu.

Voidaan osoittaa, että valitsemalla

$$\alpha_{opt} = \coth(\frac{1}{2}P_h) - \frac{2}{P_h} \quad (3.110)$$

saadaan kyseisen vakiokertoimisen yksidimensioisen diffuusio-konvektioyhtälön (3.104) tapauksessa u :lle solmupisteissä tarkka ratkaisu. Parametrin α kriittinen (3.109) ja optimaalinen arvo (3.110) on piirretty kuvaan 3.10 diskreetin Pécletin luvun funk-



Kuva 3.10 Keinotekoisien diffuusion voimakkuuden määräävän parametrin kriittisen ($\alpha_{cr} \cdots$) ja optimaalisen arvon ($\alpha_{opt} \text{ —}$) riippuvuus diskreetistä Pécletin luvusta P_h .

tiona.

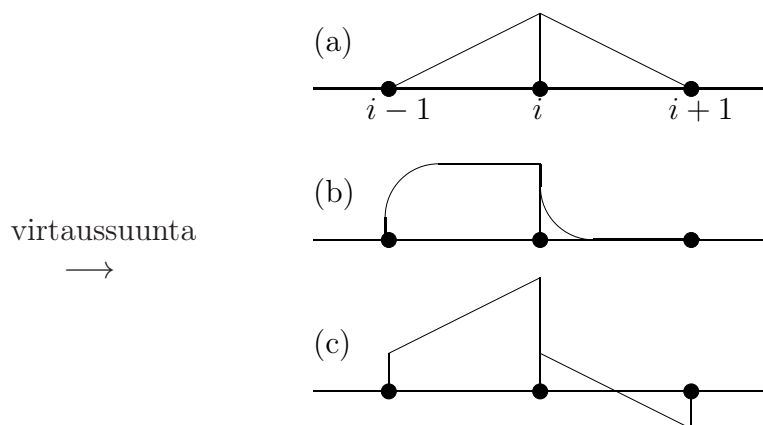
Useampiulotteisessa tapauksessa on keinotekoista diffuusiota lisättävä vain virtauksen suunnassa. Tällöin ei numeeriseen menetelmään aiheuteta ns. valediffuusiota virtausta vastaan kohtisuorassa suunnassa. Galerkinin menetelmää voidaan systemaattisesti soveltaa, mikäli painofunktiot valitaan ylävirtapainotteisesti kuvan 3.11 mukaisesti, jolloin puhutaan Petrovin-Galerkinin menetelmästä erotukseksi tavanomaisesta Galerkinin menettelystä, jota nimitetään Bubnovin-Galerkinin menetelmäksi.¹ Konvektio-diffuusioyhtälön tapauksessa hyvin toimivan menettelyn nimi koko komeudessaan olisi: virtaviiva-ylävirta-Petrov-Galerkin (engl. SUPG = Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin) menetelmä.² Kuvassa keskellä esiintyvät painofunktiot voidaan laskentateknisesti korvata helpommilla *epäjatkuvilla* painofunktioilla. Tällöin joudutaan elementtien reunoilla tapahtuvat painofunktioiden hyppy ottamaan huomioon ratkaisuyhtälöissä. Asiasta kiinnostuneelle lukijalle suositellaan tutustumista artikkeleihin [41], [52] ja niiden lähdeviitteisiin.

Epäyhtälöstä (3.109) havaitaan, että menetelmä on aina stabiili mikäli valitaan $\alpha = 1$. Tämä on järkevää ainoastaan hyvin suurilla Pécletin luvun arvoilla, sillä kyseinen tapaus vastaa toispuoleisen differenssiosamäärän käyttöä, joka on tarkkuudeltaan vain ensimmäistä kertalukua (keskeisdifferenssimenetelmän tarkkuus on toista kertalukua) Tämän voi lukija todeta laskemalla esimerkkitehtävän Pécletin luvun arvolla $P = 1$ käyttämällä keinotekoista diffuusiota ja parametrin arvoa $\alpha = 1$ ja vertaamalla laskettuihin standardin Galerkinin menetelmän antamiin tuloksiin.

Mainittakoon vielä, että diffuusio-konvektioyhtälöön, jonka vakiokertoaminen yk-

¹I.G. Bubnov (1879-1919): Venäläinen insinööri, joka sovelsi painotettujen jäännösten menettelyä elastisuusteorian yhtälöiden likiratkaisuun 1913 ja menettelyn yleisti Pietarissa vaikuttanut B.G. Galerkin (1871-1945) vuonna 1915. G.I. Petrov (1912-?) yleisti Galerkinin menettelyä 1940 siten, että painofunktioina voidaan käyttää eri funktioita kuin interpolaatiosfunktioina.

²Kutsutaan myös virtaviivadiffuusiomenetelmäksi.



Kuva 3.11 Solmuun i liittyvät (a) tavanomaisen Galerkinin menetelmän painofunktiot, (b) Petrovin-Galerkinin menetelmän optimaaliset painofunktiot ja (c) laskentateknisesti edulliset Petrovin-Galerkinin menetelmän epäjatkuvat painofunktiot.

sidimension muoto on esitetty yhtälössä (3.104), ei voida liittää fysikaalisesti mielekästä funktionaalia, jolla olisi minimiomaisuus ja jonka Eulerin yhtälö se olisi.

3.5 Stabiloidut formulaatiot

Petrovin-Galerkinin keinossa painofunktioita muuttamalla saadaan diffuusio-konvektioyhtälön numeerinen ratkaisu stabiiliksi. Toinen tapa on täydentää standardi Galerkinin (Bubnov-Galerkin) menetelmää sopivilla funktioilla, jotka tässä esityksessä rajataan vain lokaaleiksi, kunkin elementin sisällä vaikuttaviksi polynomeiksi.

Diffuusio-konvektioyhtälön numeerisen ratkaisun ongelmat esiintyvät, kun ratkaisun luonnetta hallitsee konvektio. Tällöin ratkaisussa voi esiintyä hyvin pienille alueille keskittyviä reunahäiriöitä. Toisin sanoen ratkaisun luonnetta karakterisoi kaksi mittaskaalaa, pitkän skaalan pituus on ratkaisualueen dimension luokkaa $\sim L$ ja lyhyen, reunahäiriön leveys vain $\sim L \ln P/P$, katso esimerkkiä 1.1. Voidaankin päätellä, että mikäli elementin koko on paljon ratkaisulle olennaista reunahäiriön mittaskaalaa pienempi, ei standardi Galerkinin keino pysty sitä kunnolla ratkaisemaan.

Stabiloiduissa formulaatioissa tuo ”ratkaisematon” mittaskaala pyritään vangitsemaan paikallisesti elementin alueella määritellyillä kuplamuodoilla. Tarkastellaan stationääristä diffuusio-konvektioyhtälöä (1.30):

$$-ku'' + \rho cvu' = f, \quad u(0) = u(L) = 0, \quad (3.111)$$

ja symbolien merkitys on kuten esimerkeissä 1.1 ja 3.4. Merkitään kenttäyhtälön

jäännöstä eli residuaalia symbolilla R , eli

$$R(u) \equiv -ku'' + \rho cvu' - f, \quad (3.112)$$

joka tietenkin häviää identtisesti mikäli u on yhtälön (1.30) ratkaisu. Stabiloitu formulaatio saadaan kun alkuperäiseen heikkoon muotoon

$$k \int_0^L \hat{u}' \tilde{u}' dx + \rho cv \int_0^L \hat{u} \tilde{u}' dx = \int_0^L \hat{u} f dx, \quad (3.113)$$

lisätään sopivasti painotettu jäännös- eli residuaalitermi, esimerkiksi

$$k \int_0^L \hat{u}' \tilde{u}' dx + \rho cv \int_0^L \hat{u} \tilde{u}' dx + \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} \tau (-k \hat{u}'' + \rho cv \hat{u}') R(\tilde{u}) dx = \int_0^L \hat{u} f dx, \quad (3.114)$$

missä τ on ns. stabilointi tai viritysparametri. Summalauseke korostaa termien elementtikohtaisuutta ja käytettäessä esimerkiksi lineaarisia interpolaatiofunktioita on $\hat{u}'' = \tilde{u}'' \equiv 0$ kunkin elementin alueella.

Ottamalla käyttöön lyhennysmerkintä

$$L(u) = -ku'' + \rho cvu' \quad (3.115)$$

diffuusio-konvektioyhtälön operaattorille, voidaan variaatioformulaation (3.114) stabilointitermi kirjoittaa muodossa

$$S = \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} \tau L(\hat{u}) R(\tilde{u}) dx. \quad (3.116)$$

Toinen yhtä mahdollinen vaihtoehto olisi

$$S = - \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} \tau L^*(\hat{u}) R(\tilde{u}) dx, \quad (3.117)$$

missä L^* tarkoittaa operaattorin L adjunganttia, eli diffuusio-konvektioyhtälön (1.30) tapauksessa $L^*(u) = -ku'' - \rho cvu'$.

Variaatiomuoto (3.114) voidaan kirjoittaa muodossa

$$k \int_0^L \hat{u}' \tilde{u}' dx + \rho cv \int_0^L \hat{u} \tilde{u}' dx + S = \int_0^L \hat{u} f dx, \quad (3.118)$$

missä stabilointitermi S on joko yhtälön (3.116) tai (3.117) mukainen. Täten standardi Galerkinin menetelmään vain lisätään ”sopivia” termejä.

Tarkastellaan seuraavassa miten edellä esitettyihin stabiloituihin formulaatioihin päädytään rikastuttamalla elementtiapproksimaatiota $\tilde{u}$ elementtikohtaisilla kupla-

muodoilla, sekä miten stabilointiparametrin τ arvo voidaan määrittää.

Lisätään lineaariseen interpolaatiofunktioiden muodostamaan yritefunktiioon elementtikohtaiset kuplamuodot, joten approksimaatio on

$$\tilde{u} = u_L + u_B, \quad (3.119)$$

missä alaindeksi L viittaa interpolaation lineaariseen ja B kuplamuoto-osaan. Sijoitetaan yrite (3.119) Galerkinin variaatiomuotoon (3.113), jolloin saadaan

$$k \int_0^L (\hat{u}'_L + \hat{u}'_B)(u'_L + u'_B) dx + \rho cv \int_0^L (\hat{u}_L + \hat{u}_B)(u'_L + u'_B) dx = \int_0^L (\hat{u}_L + \hat{u}_B) f dx. \quad (3.120)$$

Koska testifunktiot ovat mielivaltaisia homogeeniset reunaehdot toteuttavia funktioita, valitaan ensin $\hat{u}_L = 0$, jolloin ryhmittelemällä saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} (k \hat{u}'_B u'_B + \rho cv \hat{u}_B u'_B) dx &= \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} (\hat{u}_B f - k \hat{u}'_B u'_L - \rho cv \hat{u}_B u'_L) dx \\ &= \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} \hat{u}_B (f + k u''_L - \rho cv u'_L) dx \\ &= - \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} \hat{u}_B R(u_L) dx. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Tämä voidaan ratkaista kuplamuotojen u_B suhteen, ja merkitään ratkaisua symbolisesti

$$u_B = M_B(f - Lu_L), \quad (3.122)$$

missä M_B on lineaarinen operaattori. Sijoittamalla ratkaisu (3.122) heikkoon muotoon (3.120) ja asettamalla nyt $\hat{u}_B = 0$ saadaan

$$\begin{aligned} k \int_0^L \hat{u}'_L u'_L dx + \rho cv \int_0^L \hat{u}_L u'_L dx &= \int_0^L \hat{u}_L f dx - \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} (\hat{u}'_L u'_B + \rho cv \hat{u}_L u'_B) dx \\ &= \int_0^L \hat{u}_L f dx + \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} (k \hat{u}''_L + \rho cv \hat{u}'_L) u_B dx \\ &= \int_0^L \hat{u}_L f dx - \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} L^*(\hat{u}_L) M_B[f - L(u_L)] dx \\ &= \int_0^L \hat{u}_L f dx + \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} L^*(\hat{u}_L) M_B[R(u_L)] dx. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Havaitaan, että saadaan muotoa (3.117) oleva stabilointitermi ja että stabilointiparametri τ määräytyy jollain tavalla operaattorista M_B .

Mikä on operaattori M_B ? Tarkastelemalla kuplamuodon ratkaisuyhtälöä (3.121), joka on siis

$$-ku_B'' + \rho cvu_B' = -(L(u_L) - f), \quad \text{alueessa } I^{(e)} \quad (3.124)$$

reunaehdoilla $u_B(x_1^{(e)}) = u_B(x_2^{(e)}) = 0$. Havaitaan, että M_B määrittelee diffuusio-konvektioyhtälön Greenin funktion $G(x, \xi)$ elementin alueella.

Elementtikohtaisen kuplamuodon ratkaisu voidaan siten kirjoittaa Greenin funktion $G(x, \xi)$ avulla seuraavasti

$$u_B^{(e)}(x) = \int_{I^{(e)}} G^{(e)}(x, \xi) [f - L(u_L(\xi))] d\xi. \quad (3.125)$$

Elementtikohtainen Greenin funktio on taas diffuusio-konvektioyhtälön ratkaisu pistemäiselle lämmönlähteelle kohdassa $\xi \in I^{(e)}$:

$$-kG''(x, \xi) + \rho cvG'(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad \text{alueessa } I^{(e)} \quad (3.126)$$

homogeenisin reunaehdoin $G^{(e)}(x_1^{(e)}, \xi) = G^{(e)}(x_2^{(e)}, \xi) = 0$.

Tarkastellan elementin (e) osuutta stabilointitermiin

$$S = - \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} L^*(\hat{u}_L) M_B [R(u_L)] dx \quad (3.127)$$

yksityiskohtaisesti. Käytettäessä lineaarisia interpolaatiofunktioita pätee

$$R(u_L) = \rho cvu_L' - f = f_1 = \text{vakio}, \quad (3.128a)$$

$$L^*(\hat{u}_L) = -\rho cv\hat{u}_L' = f_2 = \text{vakio}, \quad (3.128b)$$

jolloin stabilointitermistä saadaan

$$S^{(e)} = -f_2 \int_{I^{(e)}} M_B(f_1) dx = - \int_{I^{(e)}} f_2 dx \frac{1}{h^{(e)}} \int_{I^{(e)}} M_B(f_1) dx \quad (3.129)$$

jolloin vertaamalla tätä muotoon (3.117) saadaan

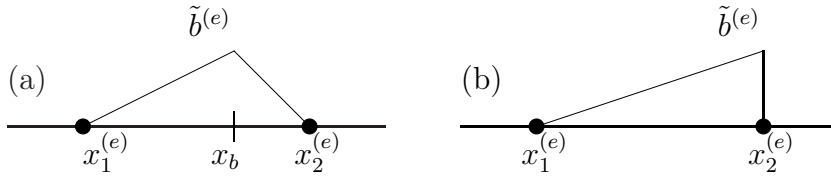
$$\tau = \frac{1}{h^{(e)}} \int_{I^{(e)}} M_B(f_1) dx. \quad (3.130)$$

Yhtälön (3.124) mukaan seuraa siis

$$M_B(f_1) = b^{(e)}, \quad (3.131)$$

missä $b^{(e)}$ on ratkaisu elementtikohtaiselle probleemalle

$$-k(b^{(e)})'' + \rho cv(b^{(e)})' = f_1, \quad b^{(e)}(x_1^{(e)}) = b^{(e)}(x_2^{(e)}) = 0. \quad (3.132)$$



Kuva 3.12 Näennäisesti jäännöksetön kuplamuotoehdoka.

Stabilointiparametrin arvo saadaan siten kuplan $b^{(e)}$ integraalina

$$\tau = \frac{1}{h^{(e)}} \int_{I^{(e)}} b^{(e)} dx. \quad (3.133)$$

Ensi näkemältä stabilointiparametrin (3.133) ratkaisu tuntuu yhtä työläältä kuin alkuperäisen ongelman ratkaisukin. On kuitenkin huomattava, että stabilointiparametrin arvon laskennassa tarvitaan vain kuplamuodon integraalia, ja sitä varten voidaan elementtikohtainen ongelma (3.132) ratkaista likimääräisesti. Yhtälön (3.124) toteuttavaa kuplamuotoa sanotaan *jäännöksettömäksi* kuplamuodoksi ja sen yhtälön (3.132) likimääräistä kuplamuotoa $\tilde{b}$ *näennäisesti jäännöksettömäksi* (englanniksi “pseudo residual-free bubble”).

Ongelmana on nyt miten valita sopiva kuplamuoto. Otetaan kuplamuodoksi hattufunktio $\tilde{b}$, jonka huippu asetetaan pisteeseen $x_b \in (x_1^{(e)}, x_2^{(2)})$, katso kuvaa 3.12. Määritellään $\tilde{b} = \beta B$, missä B on hattufunktio, joka saa arvon 1 pisteessä x_b . Ongelmana on nyt määrittää parametri β ja kuplamuodon huipun paikkakoordinaatti x_b .

Tarkastellaan nyt vain konvektion dominoimaa tilannetta jolloin elementin Pécletin luku on suuri: $P_h = \rho cv h/k \gg 1$. Tällöin voidaan yhtälöstä (1.30) diffuusiotermi pudottaa pois miltei koko alueella. Rajatapauksenahan saadaan puhdas konvektioyhtälö, jonka ratkaisu reunaehdolla $u(x_1^{(e)}) = 0$ on $u(x) = fx/(\rho cv)$, ja tätä vastaava kuplamuoto olisi kolmio, jossa reunalla $x_2^{(e)}$ on hyppy, katso kuvaa 3.12b.

Stabilointiparametrin (3.133) arvoksi saadaan

$$\tau = \frac{1}{h^{(e)}} \int_{I^{(e)}} b^{(e)} dx = \frac{f_1}{2\rho cv}. \quad (3.134)$$

Tutkitaan nyt millaisen muutoksen variaatiomuodon (3.118) stabilointitermi (3.127)

$$S = - \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} L^*(\hat{u}_L) M_B [R(u_L)] dx \quad (3.135)$$

tuottaa standardiformulaatioon nähden. Kirjoitetaan residuaalin ja adjungantin lausek-

keet (3.128) uudelleen näkyviin:

$$R(u_L) = \rho cv u'_L - f = f_1 = \text{vakio} = \rho cv \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{h^{(e)}} - f, \quad (3.136)$$

$$L^*(\hat{u}_L) = -\rho cv \hat{u}'_L = f_2 = \text{vakio} = \rho cv \frac{u_1^{(e)} - u_2^{(e)}}{h^{(e)}}. \quad (3.137)$$

Elementtikohtainen stabilointitermi on siten

$$S^{(e)} = -\frac{1}{2} (\hat{u}_1^{(e)} - \hat{u}_2^{(e)}) \left(\rho cv \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{h^{(e)}} - f \right) h^{(e)} \quad (3.138)$$

Stabilointitermillä on täten vaikutus niin elementin jäykkyyismatriisiin kuin elementin kuormavektoriinkin:

$$\begin{aligned} S^{(e)} &= \frac{1}{2} \rho cv (\hat{u}_2^{(e)} - \hat{u}_1^{(e)}) (u_2^{(e)} - u_1^{(e)}) + \frac{1}{2} h^{(e)} f (\hat{u}_1^{(e)} - u_2^{(e)}) \\ &= \frac{1}{2} \rho cv \begin{Bmatrix} \hat{u}_1^{(e)} \\ \hat{u}_2^{(e)} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} h^{(e)} f (\hat{u}_1^{(e)} - u_2^{(e)}), \end{aligned} \quad (3.139)$$

missä $P_h = \rho cv h^{(e)} / k$ elementin Pécletin luku. Täten tulos vastaa toispuoleisen differenssimenetelmän käyttöä konvektiotermille, eli α parametrin arvoa $\alpha = 1$ yhtälöissä (3.98) ja (3.103). Menetelmä on siten hyvin stabiili, mutta mikäli diffuusion osuus on merkitsevä, ei tarkkuus ole paras mahdollinen. Tällöin kuplamuodon ratkaisussa ei diffuusiotermejä voi unohtaa.

Yhtälö (3.132) voidaan yksidimensioisessa ja vakiokertoimisessa tapauksessa ratkaista analyttisesti. Tällöin stabilointiparametrille saadaan lauseke

$$\tau = \frac{h^{(e)}}{2\alpha} \left(\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \quad \text{missä} \quad \alpha = \frac{\rho cv h^{(e)}}{2k}, \quad (3.140)$$

tai elementin Pécletin luvun P_h avulla ilmaistuna

$$\tau = \frac{h^{(e)}}{P_h} \left(\coth \frac{1}{2} P_h - \frac{2}{P_h} \right) \quad \text{missä} \quad P_h = \frac{\rho cv h^{(e)}}{k} \quad (3.141)$$

3.6 Yhteenveto

Luvussa käsiteltiin yksidimensioisessa tapauksessa elementtimenetelmän rakenneosat. Elementtimenetelmän perustana olevan interpolaation konstruomiseksi esitetään sekä tavanomainen solmuihin sidottu että hierarkinen kantafunktiojärjestelmä. Solmuihin sidottu kantafunktiojärjestelmä toimii perustana ns. elementtimenetelmän h -versiossa, jossa ratkaisun parantaminen tapahtuu elementtien lukumäärää lisäämällä, eli pienentämällä elementin kokoa h . Hierarkinen kantafunktiojärjes-

telmä on pohjana p -elementtimenetelmässä, jossa ratkaisun paraneminen tapahtuu pääsääntöisesti interpolaatiopolynomin astetta p korottamalla. Hierarkisessa kanta-funktiojärjestelmässä interpolaation asteen korottaminen ei vaikuta alhaisasteisempiin kantafunktioihin, toisin kuin solmuihin sidotussa järjestelmässä.

Elementtimenetelmän ongelmatapauksista esitellään diffuusio-konvektioyhtälö, jossa toimiva elementtiaprosimaatio saadaan muuttamalla painofunktioita siten, että probleeman luonne tulee paremmin huomioon otetuksi. Lisäksi esitetään stabi-loitujen elementtimenetelmien perusteet.

3.7 Harjoitustehtäviä

1. Suorita esimerkin funktion $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ interpolaation etsintä käyttäen Legendren polynomeja $P_n(x)$.
2. Osoita interpolaatiofunktioiden rekursiokaava (3.27) paikkansa pitäväksi.
3. Totea polynomien $\psi_2(\xi), \psi_3(\xi), \psi_4(\xi)$ (3.21) ortogonaalisuusominaisuus (3.30).
4. Johda palautuskaava interpolaatiofunktioiden ψ_j derivaatoille.
5. Ratkaise esimerkkit tehtävä 3.4 käyttäen yhtä elementtiä ja hierarkisia interpolaatio-funktioita aina neljänteen asteeseen saakka.
6. Ratkaise esimerkkit tehtävä 3.4 käyttäen kolmea lineaarista elementtiä. Konstruoi ele-menttiverkko siten, että reunahäiriökohtaan tulevan elementin pituus on häiriövyö-hykkeen luokkaa, kaksi muuta elementtiä voivat olla yhtäpitkiä.
7. Ratkaise stationaarinen 1-dimensiainen diffuusio-reaktioyhtälö

$$-ku'' + cu = 0, \quad u(0) = 0, u(L) = \bar{u}_L,$$

kun k, c ovat positiivisia vakioita $c = \beta^2 k L^{-2}$ elementtimenetelmällä, jakamalla alue kolmeen yhtäpitkään lineaariseen elementtiin. Suorita laskelmat β :n arvoilla 1 ja 100.

Suorita laskelmat myös käyttäen jäykkyysmatriisin termille

$$\int c \hat{u} u dx$$

lumpattua muotoa. Matriisin luppauksella tarkoitetaan seuraavaa:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} & 0 \\ 0 & a_{21} + a_{22} \end{bmatrix}.$$

Mitä voit sanoa tuloksista?

8. Ratkaise stationaarinen 1-dimensiainen diffuusio-konvektioyhtälö

$$-ku'' + \rho c v u' = f, \quad u(0) = u(L) = 0,$$

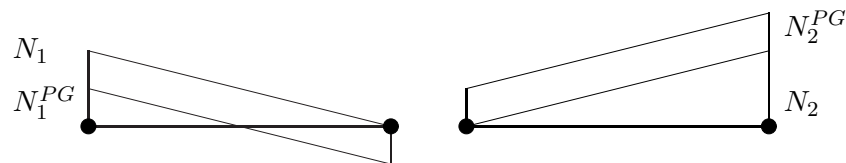
kun k, ρ, c, v ja f ovat positiivisia vakioita. Ratkaise tapaus jossa suhde $P = \rho cvL/k = 100$ seuraavilla keinoilla (käytä lineaarisia interpolaatiofunktioita):

- Käytä standardi elementtimenetelmää (Bubnov-Galerkin) ja jaa alue kolmeen yhtäpitkään elementtiin.
- Kuten edellä, mutta jaa alue kolmeen elementtiin siten, että reunahäiriön kohdalle oikeaan reunaan tulee kaksi $5L/100$:n pituista elementtiä.
- Jaa alue kolmeen yhtäpitkään elementtiin ja käytä ylävirtapainotteisia painofunktioita eli ns. Petrovin-Galerkinin menetelmää. Petrovin-Galerkinin menetelmän painofunktiot määritellään seuraavasti:

$$w_{PG} = w + \frac{1}{2}\alpha h w_{,x}$$

missä w on tavanomainen painofunktio ja vakio α määritellään lausekkeella

$$\alpha = \begin{cases} P_h/6 & \text{kun } P_h \leq 6, \\ 1 & \text{kun } P_h > 6, \end{cases} \quad P_h = \frac{\rho cvh}{k}.$$



Mitä voit sanoa tuloksista?

- Kuinka moneen tasapituiseen lineaariseen elementtiin ratkaisualue olisi jaettava jotta standardi Galerkinin menetelmällä saataisiin heilahtelematon tulos edellisessä tehtävässä?
- Toista edelliset tehtävät käyttäen kvadraattista elementtiä.
- Näytä, että ratkaisemalla kuplamuoto $b^{(e)}$ analyttisesti yhtälöstä (3.132) päädytään stabilointitermiin, joka on ekvivalentti optimaalisen ylävirtapainotuksen kanssa (3.110).

Luku 4

Elementtimenetelmä tasoalueessa

Elementtimenetelmän yleistys useampiulotteisiin tapauksiin on sängen suora-
viivaista. Kaksidimensionaalisuus mahdollistaa erilaisia elementtigeometrioita,
joista tässä luvussa esitetään kolmio ja nelikulmio. Geometrian kuvaaminen
mahdollistaa mielivaltaisten alueiden analysoimisen. Isoparametrisissa
elementeissä elementin geometriaa kuvataan samoilla interpolaatiofunktioilla
kuin itse ratkaistavaa suuretta. Luvussa sovelletaan elementtimenetelmää
kvasiharmonisen yhtälön ratkaisuun.

4.1 Kvasiharmoninen yhtälö

Elementtimenetelmää olisi tuskin kehitetty alkua pidemmälle, jollei sen yleistäminen
useampiulotteisiin tapauksiin ja mutkikkaisiin geometrioihin olisi ollut mahdollista.
Tarkastellaan seuraavassa ns. kvasiharmonisen yhtälön

$$-\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla u) + cu = f \quad (4.1)$$

ratkaisua elementtimenetelmällä. Tällä yhtälöllä on näennäisestä yksinkertaisuudesta
huolimatta suuri merkitys fysikaalisten ongelmien mallinnuksessa. Taulukossa 4.1
on esitetty yhtälön (4.1) tärkeimpiä sovellutusalueita ja suureiden merkityksiä. Mikäli
yhtälön (4.1) kerroin c on negatiivinen vakio ja lähdetermi $f = 0$, on yhtälö
ominaisarvotehtävä, jota kutsutaan myös Helmholtzin yhtälöksi.

Otetaan esimerkkinä kvasiharmonisesta yhtälöstä lämmön siirtymistä johtumalla
kuvaava osittaisdifferentiaaliyhtälö, jossa lämmönlähde ei riipu lämpötilasta itsestään
($c = 0$)

$$-\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla u) = f \quad (4.2)$$

kaksidimensioisessa alueessa Ω reunaehdoilla

$$u = u_s, \quad \text{reunan } S \text{ osalla } S_u, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_s, \quad \text{reunan } S \text{ osalla } S_q. \quad (4.4)$$

Taulukko 4.1 Kvasiharmonisen yhtälön $-\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla u) + cu = f$ sovellutusalueita.

Fysikaalinen ongelma	Suure	Suureen tulkinta	Materiaalilain nimitys
lämmönjohtuminen ($c = 0$)	u $\mathbf{D}$ f	lämpötila lämmönjohtavuudet lämmönlähteen antoisuus	$\mathbf{q} = -\mathbf{D} \nabla u$ = lämpövuoto Fourier
diffuusio ($c = 0$)	u $\mathbf{D}$ f	konsentraatio diffuusiokertoimet lähteen antoisuus	$\mathbf{q} = -\mathbf{D} \nabla u$ = vuoto Fick
suotovirtaus ($c = 0$)	u $\mathbf{D}$ f	hydraulinen korkeus vedenläpäisykertoimet virtauslähteen antoisuus	$\mathbf{q} = -\mathbf{D} \nabla u$ = virtavuo Darcy
sähkökenttä ($c = 0$)	u $\mathbf{D}$ f	jännite sähkönjohtavuudet sähkövarauksen antoisuus	$\mathbf{q} = -\mathbf{D} \nabla u$ = virrantiheys Ohm
kitkattoman ja kokoonpuristumattoman nesteen pyörteetön virtaus ($c = 0$)	u $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ f	nopeuspotentiaali virtauslähteen antoisuus	$\mathbf{v} = -\nabla u$ = nopeusvektori (1)
kalvon taipuma ($c = 0$)	u $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ $f = p/S$	poikittainen taipuma paine/kalvon jännitys	
massiivipoikkileikkausten vapaa vääntö ($c = 0$) (B. de St. Venant/L. Prandtl)	u $\mathbf{D} = G^{-1} \mathbf{I}$ $f = 2\theta$	Prandtlin jännitysfunktio G =leikkausmoduuli θ = vääntymä	
matalan veden seisova aaltoliike (Seiche-aalto) $f = 0$	u $\mathbf{D} = h\mathbf{I}$ $c = -\frac{4\pi^2}{gT^2}$ T	aallonkorkeus perustilaan h = veden syvyys perustilassa g = painovoiman kiihtyvyys värähdysliikkeen jaksonaika	
akustiset värähtelyt $f = 0$	u $c = -(w/v)^2$ v	paineen muutos perustilaan w = aaltoliikkeen taajuus aallon nopeus väliaineessa	

(1) ei ole materiaalilaki

Lämpövuoto $\mathbf{q}$ on yhteydessä lämpötilan gradienttiin konstitutiivisen yhteyden

$$\mathbf{q} = -\mathbf{D} \nabla u, \quad (4.5)$$

välityksellä. Yhtälö (4.2) voidaan siis kirjoittaa myös muodossa

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = f, \quad (4.6)$$

josta kertomalla painofunktioilla $\hat{u}$ ja integroimalla alueen Ω yli seuraa

$$\int_{\Omega} \hat{u} \nabla \cdot \mathbf{q} dA = \int_{\Omega} \hat{u} f dA. \quad (4.7)$$

Osittaisintegroimalla ja käyttämällä Gaussin lausetta ensimmäiseen termiin, saadaan muoto

$$\oint_S \hat{u} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} (\nabla \hat{u})^T \mathbf{q} dA = \int_{\Omega} \hat{u} f dA. \quad (4.8)$$

Ottamalla huomioon se, että testifunktio häviää reunan osalla S_u ($u_s = 0$) ja lämpövuoto on annettu reunan osalla S_q ($\mathbf{q} = \mathbf{q}_s$) sekä sijoittamalla yhtälöön materiaalilaki (4.5), päädytään lopulliseen muotoon

$$\int_{\Omega} (\nabla \hat{u})^T \mathbf{D} \nabla u dA = \int_{\Omega} \hat{u} f dA - \int_{S_q} \hat{u} \mathbf{q}_s \cdot \mathbf{n} ds, \quad (4.9)$$

joka on yhtälön (4.2) heikko muoto. Otetaan käyttöön elementtimenetelmän mukainen kantafunktiojärjestelmä $N_i(x, y)$, $i = 1, \dots, n$, missä n on solmupisteiden lukumäärä ratkaisualueessa. Funktio u ja painofunktio $\hat{u}$ voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa kantafunktioista N_i seuraavasti:

$$u = \mathbf{N} \mathbf{u}, \quad \hat{u} = \mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}, \quad (4.10)$$

missä pystyvektorit $\mathbf{u}$ ja $\hat{\mathbf{u}}$ sisältävät u :n ja $\hat{u}$:n vapausasteet, jotka ovat tässä tapauksessa suureiden solmupistearvot koko alueessa Ω . Käytetään gradienttioperaattorin diskreetille vastineelle merkintää

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N}. \quad (4.11)$$

Suorakulmaisessa kaksiulotteisessa karteesisessä koordinaatistossa gradienttioperaattori on muotoa

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right]^T, \quad (4.12)$$

jolloin

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{N} \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{N} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{N}_{,x} \\ \mathbf{N}_{,y} \end{array} \right]. \quad (4.13)$$

Nyt heikko muoto (4.9) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\hat{\mathbf{u}}^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \mathbf{u} - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T f dA + \int_{S_q} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s \cdot \mathbf{n} ds \right) = 0. \quad (4.14)$$

Koska painofunktiot ovat mielivaltaisia, on oltava

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \mathbf{u} - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T f dA + \int_{S_q} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s \cdot \mathbf{n} ds = \mathbf{0}. \quad (4.15)$$

Koska elementtimenetelmän kantafunktiot ovat paikallisia vain elementin alueella $\Omega^{(e)}$ määriteltyjä funktioita, voidaan integrointi suorittaa elementteittäin ja merkitään elementin jäykkyysmatriisia

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA. \quad (4.16)$$

Osittamalla diskreetti gradienttimatriisi $\mathbf{B}$ elementin paikallisten solmujen mukaan seuraavasti

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_m], \quad (4.17)$$

voidaan diffuusioyhtälön heikko muoto lausua myös muodossa

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^N \sum_{j=1}^m \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dA u_j \\ &= \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^{(e)}} N_i f dA - \sum_{e(S_q)} \int_{S_q^{(e)}} N_i \mathbf{q}_s \cdot \mathbf{n} ds, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.18)$$

missä m on yksittäisen elementin solmupisteiden lukumäärä. Viimeisessä lausekkeessa summaus suoritetaan niiden elementtien yli, joiden reunaviiva osuu kappaleen reunan osalle S_q .

4.2 Lineaarinen kolmioelementti

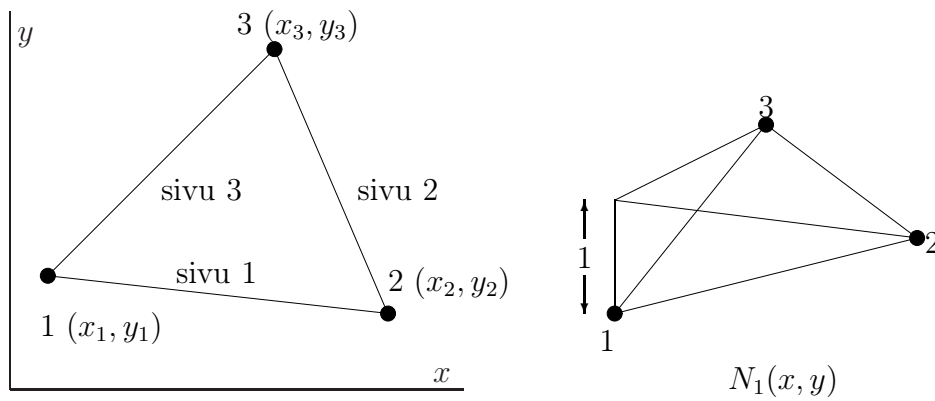
Yksinkertaisin mahdollinen kaksidimensioinen elementti on lineaarinen kolmioelementti, katso kuva 4.1. Lineaarisen funktion kuvaamiseen tarvitaan kolme parametria, joten funktion u interpolaatio voidaan kirjoittaa muodossa

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha}, \quad (4.19)$$

jossa

$$\mathbf{P} = [1 \quad x \quad y], \quad \boldsymbol{\alpha} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \right\}. \quad (4.20)$$

Sijoittamalla interpolaatioyhtälöön solmujen koordinaattien arvot ja vastaava funktion u arvo päädytään kolmen tuntemattoman yhtälöryhmään, josta kertoimet α



Kuva 4.1 Lineaarinen kolmioelementti.

voidaan ratkaista, eli

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}. \quad (4.21)$$

Interpolaatio elementin e alueella voidaan nyt kirjoittaa interpolaatiofunktioiden

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

avulla muodossa

$$u = \mathbf{N}\mathbf{u}^{(e)}. \quad (4.23)$$

Matriisin $\mathbf{A}$ käänteismatriisin muodostaminen onnistuu helposti, ja se on

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}\mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

missä A on kolmion 1-2-3 pinta-ala

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2) = \frac{1}{2}(x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21}), \quad (4.25)$$

jossa on käytetty merkintää $x_{ij} = x_i - x_j$ ja $y_{ij} = y_i - y_j$. Yhtälö (4.23) voidaan nyt kirjoittaa auki muodossa

$$u(x, y) = N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 + N_3(x, y)u_3, \quad (4.26)$$

jossa lineaariset interpolaatiofunktiot ovat

$$N_1 = (a_1 + b_1x + c_1y)/2A, \quad (4.27a)$$

$$N_2 = (a_2 + b_2x + c_2y)/2A, \quad (4.27b)$$

$$N_3 = (a_3 + b_3x + c_3y)/2A, \quad (4.27c)$$

sekä vakiot

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2, & b_1 &= y_2 - y_3, & c_1 &= x_3 - x_2, \\ a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= x_1 - x_3, \\ a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1, & b_3 &= y_1 - y_2, & c_3 &= x_2 - x_1. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Havaitaan, että indeksit vakioiden a_i, b_i ja c_i lausekkeissa muodostavat syklisen permutaation solmunumeroiden suhteen.

Palataan nyt hieman taaksepäin muotoon (4.15) tai (4.18). Siinä ovat elementtien osuudet ovat

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dA. \quad (4.29)$$

Gradienttimatriisi $\mathbf{B}$ saa kolmisolmuisen elementin tapauksessa muodon

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Koska interpolaatiofunktiot N_1, N_2 ja N_3 ovat lineaarisia funktioita, on matriisi $\mathbf{B}$ kolmisolmuisen lineaarisen kolmioelementin tapauksessa vakiomatriisi

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

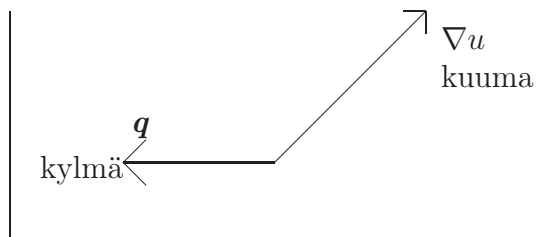
Tarkastellaan nyt hieman yksityiskohtaisemmin konstitutiivista yhteyttä eli materiaalilakia, joka sitoo toisiinsa lämmönjohtumisyhtälön tapauksessa lämpötilagradientin ja lämpövuon muodossa

$$\mathbf{q} = -\mathbf{D} \nabla u. \quad (4.32)$$

Fysikaalisten syiden vuoksi lämpö virtaa kuumemmasta kohti kylmempää aluetta, josta seuraa miinusmerkki yllä olevaan yhtälöön. Siitä seuraa myös, että lämpötilagradientin ja lämpövuovektorin sisätulo on negatiivinen, eli ne muodostavat tylpän kulman keskenään

$$(\nabla u) \cdot \mathbf{q} = (\nabla u)^T \mathbf{q} < 0, \quad (4.33)$$

joka on havainnollistettu myös kuvassa 4.2. Sijoittamalla yllä olevaan epäyhtälöön



Kuva 4.2 Lämpövuovektori $\mathbf{q}$ ja lämpötilagradientti ∇u .

materiaalilaki (4.32) seuraa epäyhtälö

$$(\nabla u)^T \mathbf{D} \nabla u > 0 \quad \forall \nabla u \neq 0, \quad (4.34)$$

joka osoittaa konstitutiivisen matriisin $\mathbf{D}$ olevan positiivisesti definitin. Energiaargumenttien perusteella se on myös symmetrinen eli

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^T, \quad (4.35)$$

ja sen yleinen muoto kahdessa dimensiossa on:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{xy} & k_{yy} \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

jossa k_{xx} , k_{xy} ja k_{yy} ovat lämmönjohtumiskertoimia. Mikäli koordinaattiakselit yhtyvät materiaalin pääsuuntiin, saadaan ortotrooppisen aineen konstitutiivinen yhteys

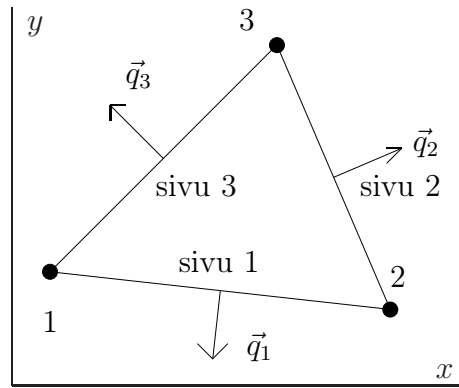
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{yy} \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Materiaalia kutsutaan isotrooppiseksi, mikäli sen ominaisuudet ovat jokaisessa suunnassa samanlaiset. Tällöin materiaalilaki yksinkertaistuu muotoon

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = k \mathbf{I}. \quad (4.38)$$

Koordinaatiston muunnoksella voidaan matriisin $\mathbf{D}$ täysi muoto (4.36) aina saattaa diagonaaliseen muotoon (4.37). Tämä on laskentateknisesti edullista, sillä tällöin jäykkyyismatriisia muodostettaessa suoritettavien kertolaskujen määrä vähenee huomattavasti.

Kolmisolmuisen lineaarisen kolmioelementin jäykkyyismatriisi voidaan kvasihar-



Kuva 4.3 Kolmion sivujen numerointi ja lämpövuon normaalikomponentit.

monisen yhtälön tapauksessa kirjoittaa auki eksplisiittisesti:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA = \int_{\Omega^{(e)}} (k_{xx} \mathbf{N}_{,x}^T \mathbf{N}_{,x} + k_{yy} \mathbf{N}_{,y}^T \mathbf{N}_{,y}) dA \\ &= \frac{k_{xx}}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_1 b_2 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ b_1 b_3 & b_2 b_3 & b_3^2 \end{bmatrix} + \frac{k_{yy}}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_1 c_2 & c_2^2 & c_2 c_3 \\ c_1 c_3 & c_2 c_3 & c_3^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Kuormitusvektori on tasan jakautuneen lämmönlähteen ja reunoille tasan jakautuneen lämpövuon tapauksessa

$$\mathbf{f}^{(e)} = \frac{f A^{(e)}}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} q_{n1} s_1 + q_{n3} s_3 \\ q_{n1} s_1 + q_{n2} s_2 \\ q_{n2} s_2 + q_{n3} s_3 \end{Bmatrix}, \quad (4.40)$$

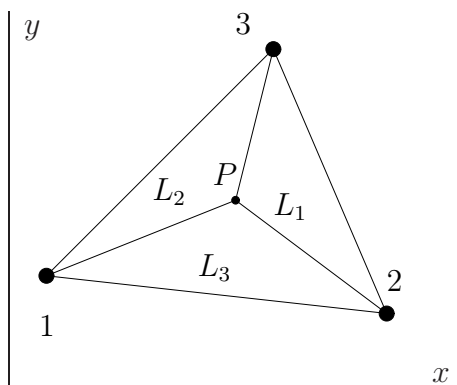
jossa q_{ni} viittaa reunaehtona annetun lämpövuon normaalikomponenttiin sivulla i , ja vastaavasti s_i on sivun i pituus, katso kuva 4.3.

4.3 Alakoordinaatit

Ajatellaan kolmio 1-2-3 jaetuksi kolmeen osa-alueeseen joiden pinta-alat ovat A_1 , A_2 ja A_3 ja jotka kohtaavat pisteessä P , katso kuva 4.4. Kolmion luonnolliset eli alakoordinaatit ¹ määritellään suhteina

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_2}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A}, \quad (4.41)$$

¹Kutsutaan myös barysentrisiksi koordinaateiksi.



Kuva 4.4 Alakoordinaatit.

jossa A on kolmion 1-2-3 pinta-ala. Koordinaatit L_1 , L_2 ja L_3 eivät ole riippumattomia, sillä niitä sitoo rajoiteyhtälö

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1. \quad (4.42)$$

Alakoordinaatit voidaan tulkita myös etäisyysuhteina. Esimerkiksi koordinaatin L_1 tasa-arvoviivat on piirretty kuvaan 4.4. Jokainen näistä viivoista on yhdensuuntainen sen sivun kanssa josta koordinaatin mittausta alkaa.

Tarkastellaan lähemmin koordinaatin L_1 lauseketta. Mielivaltaisen, kolmion 1-2-3 alueella olevan pisteen P koordinaatit ovat (x, y) . Kolmion P -2-3 alaksi saadaan

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} |[(x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j}] \times [(x_3 - x)\vec{i} + (y_3 - y)\vec{j}]| \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x & y_2 - y & 0 \\ x_3 - x & y_3 - y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y], \end{aligned} \quad (4.43)$$

joten alakoordinaatin L_1 lauseke on

$$L_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{1}{2A} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] = \frac{1}{2A} (a_1 + b_1 x + c_1 y). \quad (4.44)$$

Se on täsmälleen sama kuin aikaisemmin johdettu lineaarisen interpolaatiofunktion lauseke (4.27). Vastaavasti voidaan myös johtaa alakoordinaateille L_2 ja L_3 samanlainen kaava ja tulos voidaan kirjoittaa yleisessä muodossa

$$L_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y). \quad (4.45)$$

Nyt lukijalle helposti herää kysymys onko alakoordinaateista mitään etua ensin esitettyyn lähestymistapaan nähden. Lineaarisen kolmioelementin tapauksessa ne eivät tuo mitään erikoista formulaatioon, mutta korkeamman asteen elementtien

yhteydessä ne helpottavat käsittelyä huomattavasti.

4.4 Korkeamman asteen kolmioelementtejä

Tasoalueessa lineaarisen funktion esittäminen vaatii kolme parametriä, kvadraattisen muodon kuvaaminen vastaavasti kuusi ja kuubisen kymmenen parametria. Funktion u interpolointi kvadraattisella tai kuubisella esityksellä voitaisiin kirjoittaa muodoissa

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2, \\ u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Mikäli nyt otetaan käyttöön Lagrangen tyylinen interpolaatio tarvitaan joko kuusi tai kymmenen pistettä, joiden kautta kyseinen interpolaatio voidaan pakottaa kulkemaan. Vastaavasti, kuten lineaarisenkin elementin tapauksessa, voidaan solmuinterpolaatiofunktioit konstruoida kirjoittamalla nämä yhtälöt, jolloin päädytään lineaariseen, tyyppiä (4.21) olevaan yhtälösystemiin

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \quad (4.47)$$

jossa $\mathbf{A}$ on solmupisteiden koordinaateista riippuva vakiomatriisi ja josta parametrit $\boldsymbol{\alpha}$ voidaan, ainakin muodollisesti, helposti ratkaista.

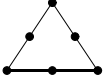
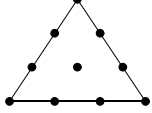
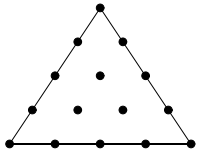
Edellä kuvattu menettely on kuitenkin epäkäytännöllisen hankala. Miellyttävämpi tapa konstruoida interpolaatiofunktioit on kirjoittaa ne auki suoraan kuten yksidimensioisissa tapauksessakin käyttäen hyväksi joitain tunnettuja polynomeja.

Kolmioelementit sallivat täydellisen tiettyä astetta olevan polynomin käytön kenttäsuureen interpolaatiossa. Kuvassa 4.5 on esitetty interpolaatiossa olevien kantapolynomien ja solmukonfiguraation suhdetta aina asteeseen neljä saakka. Havaitaan, että kolmannen ja sitä korkeamman asteen elementteissä joudutaan käyttämään sisäsolmuja. Niiden mukaantulo ei kuitenkaan ole haitallista, vaan päinvastoin edullista, sillä niihin liittyvät vapausasteet on mahdollista kondensoida elementtitasolla pois globaalisesta yhtälösystemistä.

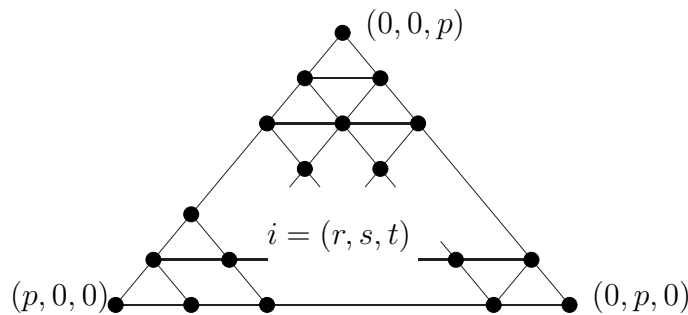
Tarkastellaan yleistä tapausta, jossa kolmioelementin alueella interpolaatioon käytetään täydellistä astetta p olevaa polynomia. Elementin solmupisteet voidaan määrittää kuvan 4.6 mukaisesti jakamalla kukin sivu p :n osaan. Tarkastellaan mielivaltaista solmua i , jonka kuvaamiseen tarvittavien alakoordinaattien arvot olkoot $L_{1(i)}$, $L_{2(i)}$ ja $L_{3(i)}$. Määritellään solmuun i liittyvä interpolaatiofunktio

$$N_i(L_1, L_2, L_3) = l_r^r(L_1)l_s^s(L_2)l_t^t(L_3), \quad (4.48)$$

jossa l_r^r , l_s^s ja l_t^t ovat Lagrangen astetta r , s ja t olevia interpolaatiopolynomeja (3.16), jossa nyt ξ :n tilalla argumenttina on alakoordinaatit L_i . Lukukolmikun r, s, t arvoja

Pascalin kolmio	polynomin aste p n		kolmioelementtien solmukonfiguraatiot
1	0	1	
x y	1	3	
x^2 xy y^2	2	6	
x^3 x^2y xy^2 y^3	3	10	
x^4 x^3y x^2y^2 xy^3 y^4	4	15	

Kuva 4.5 Lagrangen tyyppisen kolmioelementin interpolaatio ja solmukonfiguraatio. Kolmioelementissä on solmuja sama määrä kuin interpolaatiossa termijä ($n = (p + 1)(p + 2)/2$).



Kuva 4.6 Astetta p oleva kolmioelementti.

sitoo tietenkin ehto

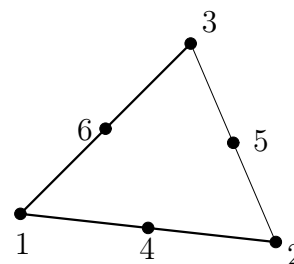
$$r + s + t = p. \quad (4.49)$$

Suoritetaan yksityiskohtainen interpolaatiofunktioiden johto kvadraattiselle elementille. Solmuun 1 liittyvä funktio on kaavan (4.48) mukaan

$$N_1 = l_2^2(L_1). \quad (4.50)$$

Funktion N_1 kulku voidaan mieltää yksiulotteisena paraabelina pitkin reunaviivaa 1-2 tai 1-3, se kumpaa ajatellaan on yhdentekevää. Funktio saa tunnetut arvot solmupisteissä, eli arvon 1 solmuissa 1 ja arvon 0 solmuissa 2 ja 4, mikäli tutkitaan kulkua viivalla 1-2. Vastaavasti alakoordinaatin L_1 arvot ovat $1, \frac{1}{2}, 0$. Täten interpolaatiofunktion N_1 kulku voidaan konstruoida mainittujen kolmen pisteen kautta. Kirjoitetaan funktion N_1 interpolaatiodata vielä taulukon muodossa.

Lagrange interpolatiopisteen # (k)	0	1	2
elementin solmun #	2	4	1
alakoordinaatin L_1 arvo $L_{1(k)}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$N_1(L_1, L_2, L_3) = l_2^2(L_1)$	0	0	1



Nyt voidaan funktio N_1 kirjoittaa

$$N_1 = l_2^2(L_1) = \frac{(L_1 - L_{1(0)})(L_1 - L_{1(1)})}{(L_{1(2)} - L_{1(0)})(L_{1(2)} - L_{1(1)})} = \frac{L_1(L_1 - \frac{1}{2})}{1 \cdot \frac{1}{2}} = L_1(2L_1 - 1). \quad (4.51)$$

Vastaavasti saadaan kaikille kolmion kärkien interpolaatiofunktioille samanlainen lauseke, joten parabolisen kolmioelementin solmufunktioille voidaan kirjoittaa

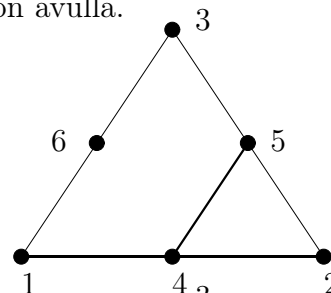
$$N_i = L_i(2L_i - 1). \quad (4.52)$$

Sivujen keskiolosolmujen lausekkeet saadaan samalla tavalla, esimerkiksi

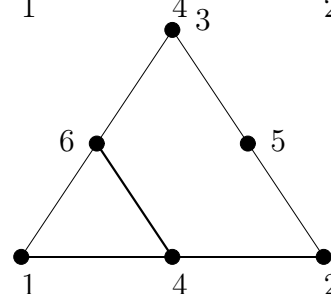
$$N_4 = l_1^1(L_1)l_1^1(L_2). \quad (4.53)$$

Tämä on siis lineaarinen polynomi kummankin koordinaatin L_1 ja L_2 suhteen. Lausekkeen muodon ymmärtämiseksi on syytä kuvitella funktion N_4 kulkua pitkin linjoja 4-5 ja 4-6, joita pitkin interpolaatiopolynomit $l_1^1(L_1)$ ja $l_1^1(L_2)$ voidaan konstruoida. Havainnollistetaan asiaa uudelleen taulukon avulla.

Lagrange interpolatiopisteen # (k)	0	1
elementin solmun #	4	5
alakoordinaatin L_1 arvo $L_{1(k)}$	$\frac{1}{2}$	0
$N_4(L_1, L_2, L_3) = l_1^1(L_1)l_1^1(L_2)$	1	0



Lagrange interpolatiopisteen # (k)	0	1
elementin solmun #	4	6
alakoordinaatin L_2 arvo $L_{2(k)}$	$\frac{1}{2}$	0
$N_4(L_1, L_2, L_3) = l_1^1(L_1)l_1^1(L_2)$	1	0



Muodostetaan nyt lauseke

$$N_4 = l_1^1(L_1)l_1^1(L_2) = 4L_1L_2. \quad (4.54)$$

Muiden sivujen keskiolosolmujen lausekkeet ovat vastaavanlaisia, joten kvadraattisen

elementin kuusi interpolaatiofunktioita ovat:

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1), \quad (4.55a)$$

$$N_2 = L_2(2L_2 - 1), \quad (4.55b)$$

$$N_3 = L_3(2L_3 - 1), \quad (4.55c)$$

$$N_4 = 4L_1L_2, \quad (4.55d)$$

$$N_5 = 4L_2L_3, \quad (4.55e)$$

$$N_6 = 4L_1L_3. \quad (4.55f)$$

Elementin jäykkyyismatriisia muodostettaessa tarvitaan derivaattojen lausekkeita koordinaattien x ja y suhteen. Ne on helppo muodostaa ketjuderivoinnin avulla seuraavaan tapaan:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial L_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_3}, \quad (4.56a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial L_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial y} \frac{\partial}{\partial L_3}, \quad (4.56b)$$

jossa

$$\frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A}, \quad \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2A}. \quad (4.57)$$

Vakiot b_i ja c_i on annettu yhtälöissä (4.28).

Yleinen lauseke interpolaatiofunktion (4.48) osuudelle $l_q^q(L_k)$ on

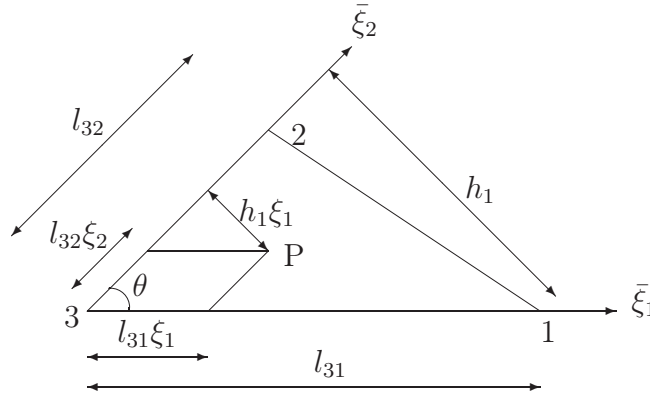
$$l_q^q(L_k) = \begin{cases} \prod_{j=1}^q \frac{pL_k - j + 1}{j} & \text{kun } q \geq 1, \\ 1 & \text{kun } q = 0. \end{cases} \quad (4.58)$$

Alakoordinaattien potenssien integraaleja tarvitaan elementtimatriiseja ja vektoreita muodostettaessa, jossa seuraava kaava on hyödyllinen

$$\int_{\Omega^{(e)}} L_1^i L_2^j L_3^k dA = 2A^{(e)} \frac{i!j!k!}{(2+i+j+k)!}, \quad A^{(e)} = \text{ala}(\Omega^{(e)}). \quad (4.59)$$

Yllä oleva kaava voidaan johtaa seuraavasti. Alakoordinaatit on määritelty pintaalojen suhteina

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\text{kolmion } 3P2 \text{ pinta-ala}}{\text{kolmion } 123 \text{ pinta-ala}} \\ &= \frac{\bar{\xi}_1}{l_{31}} = \frac{l_{32}h_1\xi_1\frac{1}{2}}{l_{32}h_1\frac{1}{2}} = \xi_1 \end{aligned} \quad (4.60)$$



Koska kaikki alakoordinaatit eivät ole riippumattomia, niille pätee ehdot

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \Rightarrow L_3 = 1 - L_1 - L_2 \text{ ja reunalla 1-2: } L_1 + L_2 = 1. \quad (4.61)$$

Differentiaalinen alaelementti dA on

$$dA = l_{31}dL_1 \sin \theta l_{32}dL_2 = l_{31}h_2dL_1dL_2 = 2A^{(e)}dL_1dL_2, \quad (4.62)$$

missä $A^{(e)}$ on kolmion 123 pinta-ala. Täten on

$$\int_{\Omega^{(e)}} L_1^i L_2^j L_3^k dA = 2A^{(e)} \int_0^1 L_1^i \left[\int_0^{1-L_1} L_2^j (1 - L_1 - L_2)^k dL_2 \right] dL_1. \quad (4.63)$$

Integroimalla alakoordinaatin L_2 yli antaa tuloksen

$$\begin{aligned} & \int_0^{1-L_1} L_2^j (1 - L_1 - L_2)^k dL_2 = \\ & -\frac{1}{k+1} \Big|_0^{1-L_1} L_2^j (1 - L_1 - L_2)^{k+1} + \frac{j}{k+1} \int_0^{1-L_1} L_2^{j-1} (1 - L_1 - L_2)^{k+1} dL_2 = \\ & \frac{j}{k+1} \left[-\frac{1}{k+2} \Big|_0^{1-L_1} L_2^{j-1} (1 - L_1 - L_2)^{k+2} + \frac{j-1}{k+2} \int_0^{1-L_1} L_2^{j-2} (1 - L_1 - L_2)^{k+2} dL_2 \right] = \\ & \frac{j}{k+1} \frac{j-1}{k+2} \dots \frac{j-j+1}{k+j} \int_0^{1-L_1} L_2^{j-j} (1 - L_1 - L_2)^{k+j} dL_2 = \\ & \frac{j!k!}{(k+j)!} \frac{-1}{k+j+1} \Big|_0^{1-L_1} (1 - L_1 - L_2)^{k+j+1} = \frac{j!k!}{(k+j+1)!} (1 - L_1)^{k+j+1}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Integroimalla alakoordinaatin yli L_1 , saadaan

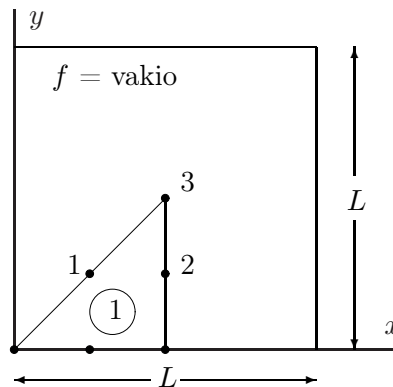
$$\begin{aligned}
 & \frac{j!k!}{(k+j+1)!} \int_0^1 L_1^i (1-L_1)^{k+j+1} dL_1 \\
 &= \frac{j!k!}{(k+j+1)!} \frac{i}{k+j+2} \cdots \frac{i-i+1}{k+j+i+1} \int_0^1 L_1^{i-i} (1-L_1)^{k+j+i+1} dL_1 \\
 &= \frac{j!k!}{(k+j+1)!} \frac{i!}{(k+j+2) \cdots (k+j+i+2)} \Big|_0^1 [-(1-L_1)^{k+j+i+2}] \\
 &= \frac{i!j!k!}{(k+j+i+2)!}.
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Kokoamalla tulokset yhteen saadaan tulos (4.59).

4.5 Esimerkkejä diffuusioyhtälön ratkaisusta tasoalueessa

Esimerkki 4.1 Määritä lämpötilajakauma oheisessa neliön muotoisessa alueessa käyttäen yhtä parabolista elementtiä alueen kahdeksasosalle. Oletetaan, että materiaali on isotrooppista ja sen lämmönjohtavuuskerroin k on vakio koko alueessa. Otaksutaan lisäksi homogeeniset reunaehtot ja että lämmönlähteen antoisuus on vakio.

globaali solmu #	1	2	3
elementin solmu #	6	5	3



Lasketaan elementin jäykkyyismatriisin ja kuormavektorin lausekkeet:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA = \int_{\Omega^{(e)}} (k_{xx} \mathbf{N}_{,x}^T \mathbf{N}_{,x} + k_{yy} \mathbf{N}_{,y}^T \mathbf{N}_{,y}) dA, \tag{4.66}$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T f dA - \int_{S_q^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{nyt } \mathbf{q}_s \equiv \mathbf{0}). \tag{4.67}$$

Interpolaatiofunktio matriisi $\mathbf{N}$ on kvadraattiselle elementille muotoa

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 \end{bmatrix}, \tag{4.68}$$

jossa interpolaatiofunktio on annettu yhtälöissä (4.55). Tarvitaan derivaattojen lausekkeita:

$$\begin{aligned}
 N_{i,x} &= \frac{\partial}{\partial x} [L_i (2L_i - 1)] = (4L_i - 1) \frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A^{(e)}} (4L_i - 1), \\
 N_{i+3,x} &= \frac{\partial}{\partial x} (4L_i L_{i+}) = 4 \left(L_i \frac{\partial L_{i+}}{\partial x} + L_{i+} \frac{\partial L_i}{\partial x} \right) = \frac{2}{A^{(e)}} (L_i b_{i+} + L_{i+} b_i), \\
 N_{i,y} &= \frac{c_i}{4A^{(e)}} (2L_i - 1), \\
 N_{i+3,y} &= \frac{2}{A^{(e)}} (L_i c_{i+} + L_{i+} c_i), \quad i = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

Merkintä $i+$ tarkoittaa elementin solmunumeroa, joka seuraa solmua i vastapäivään kierrettäessä.

Jäykkyysmatriisin termi $K_{11}^{(e)}$ on siten:

$$\begin{aligned}
 K_{11}^{(e)} &= \frac{1}{4(A^{(e)})^2} \int_{\Omega^{(e)}} (k_{xx} b_1^2 + k_{yy} c_1^2) (16L_1^2 - 8L_1 + 1) dA \\
 &= \frac{1}{4(A^{(e)})^2} (k_{xx} b_1^2 + k_{yy} c_1^2) 2A^{(e)} \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4A^{(e)}} (k_{xx} b_1^2 + k_{yy} c_1^2),
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

jossa on käytetty kaavaa (4.59) integrointien suorittamiseen.

Suorittamalla muiden termien integrointi samaan tapaan, saadaan kvadraattisen elementin jäykkyysmatriisiksi (vastaten solmupistevapausasteita $u_1, u_2, \dots, u_6$):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^{(e)} &= \frac{k_{xx}}{A^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}b_1^2 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b_1b_2 & 0 & \frac{1}{3}b_1b_3 \\ & \frac{1}{4}b_2^2 & 0 & \frac{1}{3}b_1b_2 & \frac{1}{3}b_2b_3 & 0 \\ & & \frac{1}{4}b_3^2 & 0 & \frac{1}{3}b_2b_3 & \frac{1}{3}b_1b_3 \\ & & & \frac{2}{3}B_{12} & \frac{1}{3}B_{213} & \frac{1}{3}B_{123} \\ & & & & \frac{2}{3}B_{23} & \frac{1}{3}B_{312} \\ & & & & & \frac{2}{3}B_{13} \end{bmatrix} \\
 &+ \frac{k_{yy}}{A^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}c_1^2 & 0 & 0 & \frac{1}{3}c_1c_2 & 0 & \frac{1}{4}c_1c_3 \\ & \frac{1}{4}c_2^2 & 0 & \frac{1}{3}c_1c_2 & \frac{1}{2}c_2c_3 & 0 \\ & & \frac{1}{4}c_3^2 & 0 & \frac{1}{3}c_2c_3 & \frac{1}{3}c_1c_3 \\ & & & \frac{2}{3}C_{12} & \frac{1}{3}C_{213} & \frac{1}{3}C_{123} \\ & & & & \frac{2}{3}C_{23} & \frac{1}{3}C_{312} \\ & & & & & \frac{2}{3}C_{13} \end{bmatrix}, \tag{4.71}
 \end{aligned}$$

jossa on käytetty lyhennysmerkintöjä

$$B_{ij} = b_i^2 + b_i b_j + b_j^2, \tag{4.72a}$$

$$C_{ij} = c_i^2 + c_i c_j + c_j^2, \tag{4.72b}$$

$$B_{ijk} = b_i(b_1 + b_2 + b_3) + 2b_j b_k, \tag{4.72c}$$

$$C_{ijk} = c_i(c_1 + c_2 + c_3) + 2c_j c_k. \tag{4.72d}$$

Kuormitusvektoriksi saadaan

$$\mathbf{f}^{(e)} = \frac{1}{3}fA^{(e)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (4.73)$$

Rakenteen jäykkyyismatriisi on siten

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} K_{66}^{(1)} & K_{65}^{(1)} & K_{63}^{(1)} \\ & K_{55}^{(1)} & K_{53}^{(1)} \\ & & K_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \\ &= \frac{k}{A^{(1)}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(B_{13} + C_{13}) & \frac{1}{3}(B_{312} + C_{312}) & \frac{1}{3}(b_1b_3 + c_1c_3) \\ & \frac{2}{3}(B_{23} + C_{23}) & \frac{1}{3}(b_2b_3 + c_2c_3) \\ & & \frac{1}{12}(b_3^2 + c_3^2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Määritetään vakiot

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3 = -\frac{1}{2}L, \\ b_2 &= y_3 - y_1 = \frac{1}{2}L, \\ b_3 &= y_1 - y_2 = 0, \\ c_1 &= x_3 - x_2 = 0, \\ c_2 &= x_1 - x_3 = -\frac{1}{2}L, \\ c_3 &= x_2 - x_1 = \frac{1}{2}L, \end{aligned} \quad (4.75)$$

ja lasketaan termit

$$B_{13} = b_1^2 + b_1b_3 + b_3^2 = \frac{1}{4}L^2, \quad (4.76a)$$

$$C_{13} = c_1^2 + c_1c_3 + c_3^2 = \frac{1}{4}L^2, \quad (4.76b)$$

$$B_{321} = b_3(b_1 + b_2 + b_3) + 2b_1b_2 = -\frac{1}{2}L^2, \quad (4.76c)$$

$$C_{321} = c_3(c_1 + c_2 + c_3) + 2c_1c_2 = 0. \quad (4.76d)$$

Kolmion pinta-alahan on $\frac{1}{8}L^2$, joten yhtälösystemiksi saadaan

$$k \begin{bmatrix} 16 & -8 & 0 \\ -8 & 16 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}fL^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.77)$$

Ratkaisuksi saadaan siten $u_1 = \frac{7}{160}fL^2/k$, $u_2 = \frac{9}{160}fL^2/k$, $u_3 = \frac{12}{160}fL^2/k = 0,075fL^2/k$.

Keskipisteen tarkka ratkaisu on

$$u_3 = \frac{16}{\pi^4} \frac{fL^2}{k} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin(\frac{1}{2}m\pi) \sin(\frac{1}{2}n\pi)}{(m^2 + n^2)mn} \approx 0.07367fL^2/k. \quad (4.78)$$

joten virhe siinä on noin 1,8 %.

Määritetään vielä lämpövuoto x -akselilla. Lämpötilan approksimaatio elementin

alueella on

$$\begin{aligned} u &= N_3 u_3^{(1)} + N_5 u_5^{(1)} + N_6 u_6^{(1)} = N_3 u_3 + N_5 u_2 + N_6 u_1 \\ &= \left(\frac{3}{40} N_3 + \frac{9}{160} N_5 + \frac{7}{160} N_6 \right) \frac{\bar{f} L^2}{k}, \end{aligned} \quad (4.79)$$

josta lämpövuon reunalla 1-2 (elementin solmunumeroita) saadaan

$$q_{n1} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_1, \quad (4.80)$$

jossa $\mathbf{n}_1$ on elementin sivun 1 yksikkönormaali $\mathbf{n}_1 = -\vec{j}$. Täten lämpövuoksi elementin reunalla 1 saadaan

$$q_{n1} = k \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.81)$$

Määritetään interpolaatiofunktioiden N_3 , N_5 ja N_6 derivaatat

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_3}{\partial y} &= \frac{c_3}{2A^{(1)}}(4L_3 - 1) = -\frac{2}{L}, \\ \frac{\partial N_5}{\partial y} &= \frac{2}{A^{(1)}}(L_2 c_3 + L_3 c_2) = \frac{8}{L} L_2, \\ \frac{\partial N_6}{\partial y} &= \frac{2}{A^{(1)}}(L_3 c_1 + L_1 c_3) = \frac{8}{L} L_1, \end{aligned} \quad (4.82)$$

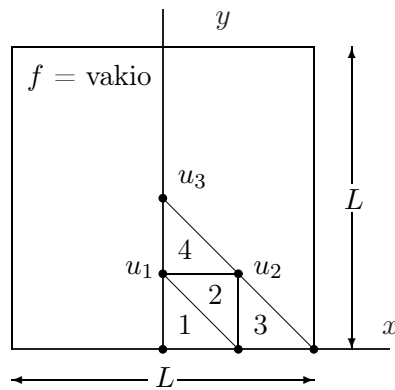
jossa on otettu huomioon että alakoordinaatti L_3 saa arvon nolla pitkin reunaa 1. Interpolaatiofunktioiden L_1 ja L_2 lausekkeet reunalla 1 ovat

$$L_1 = 1 - 2\frac{x}{L}, \quad L_2 = 2\frac{x}{L}, \quad (4.83)$$

joten lämpövuon lauseke pitkin reunaviivaa 1 on

$$q_{n1} = \left[-\frac{3}{20} + \frac{9}{160} 16x + \frac{7}{160} 8(1 - 2x) \right] \bar{f} L = \frac{1}{5}(1 + x) \bar{f} L. \quad (4.84)$$

Esimerkki 4.2 Ratkaise elementtimenetelmällä lämmönjohtumisongelma neliöalueessa (sivun pituus L) kun kuormituksena on tasa-antoinen lämmönlähde ($f(x, y) = f = \text{vakio}$). Reunaehdot ovat homogeeniset, eli $u = 0$ koko reunalla. Käytä hyväksesi symmetriaa oheisen kuvan mukaisesti ja ratkaise tehtävä käyttäen neljää lineaarista elementtiä. Määritä myös lämpövuon reunalla $y = 0$. Materiaali on isotrooppista ja sen lämmönjohtavuuskerroin on k .



Havaitaan, että elementtimatriisit elementeistä 1, 3 ja 4 ovat identtiset. Täten riittää muodostaa vain elementit 1 ja 2. Kolmioelementin lausekkeissa ovat b_i ja c_i vakiot

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3, & c_1 &= x_3 - x_2 \\ b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= x_1 - x_3 \\ b_3 &= y_1 - y_2, & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (4.85)$$

on määritetty alla olevaan taulukkoon

i	elementit 1,3,4		elementti 2	
	b_i	c_i	b_i	c_i
1	$-L/4$	$-L/4$	0	$-L/4$
2	$L/4$	0	$L/4$	$L/4$
3	0	$L/4$	$-L/4$	0

Kaikkien elementtien pinta-ala on $A^{(e)} = L^2/32$ ja elementtimatriisit ovat seuraavat:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(1)} &= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(2)} &= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Elementtien paikallisten solmupisteiden ja kuvan globaalien solmunumeroiden välillä on seuraavan taulukon mukainen yhteys.

elem.	solmu		
	1	2	3
1	-	-	1
2	-	2	1
3	-	-	2
4	1	2	3

Taulukosta voidaan nyt lukea globaalin jäykkyyismatriisin elementtialkiot:

$$\begin{aligned}
K_{11} &= K_{33}^{(1)} + K_{33}^{(2)} + K_{11}^{(4)}, \\
K_{12} &= K_{32}^{(2)} + K_{12}^{(4)}, \\
K_{13} &= K_{13}^{(4)}, \\
K_{22} &= K_{22}^{(2)} + K_{33}^{(3)} + K_{22}^{(4)}, \\
K_{23} &= K_{23}^{(4)}, \\
K_{33} &= K_{33}^{(4)},
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Globaali jäykkyyismatriisi on siten

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \tag{4.89}$$

jonka käänteismatriisi on

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}. \tag{4.90}$$

Rakenteen kuormitusvektori on

$$\begin{aligned}
f_1 &= f_3^{(1)} + f_3^{(2)} + f_1^{(4)} = 3 \cdot \frac{1}{3} f \frac{1}{32} L^2 = \frac{1}{32} f L^2, \\
f_2 &= \frac{1}{32} f L^2, \\
f_3 &= \frac{1}{96} f L^2.
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Solmupisteiden lämpötiloiksi saadaan

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{11}{192} \frac{f L^2}{k} \approx 0.0573 \frac{f L^2}{k}, \\
u_2 &= \frac{17}{384} \frac{f L^2}{k} \approx 0.0443 \frac{f L^2}{k}, \\
u_3 &= \frac{5}{64} \frac{f L^2}{k} \approx 0.0781 \frac{f L^2}{k}.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Keskipisteen tarkka ratkaisu on $u_3 = 0.07367 f L^2 / k$, joten virhe on noin 6 %.

Lämpövuoto määritellään Fourierin lämmönjohtumislain mukaan seuraavasti

$$\vec{q} = -k\nabla u. \quad (4.93)$$

Nyt kysyttiin lämpövuotoa reunalla 1-2, jonka normaalin suunta on negatiivisen y -akselin suunta, eli $\vec{n} = -\vec{j}$, joten lämpövuoto reunalla 1-2 saadaan lausekkeesta

$$q_{n_{12}} = \vec{q} \cdot \vec{n} = k \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.94)$$

Elementissä 1 on lämpötilaratkaisu muotoa

$$u = N_3 u_1 = \frac{1}{2A}(a_3 + b_3 x + c_3 y)u_1, \quad (4.95)$$

joten

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{c_3}{2A}u_1 = \frac{L}{4} \frac{32}{2L^2} \frac{11}{192} \frac{fL^2}{k} = \frac{11}{48} \frac{fL}{k} = 0.2292 \frac{fL}{k}, \quad (4.96)$$

ja

$$\vec{q}_{n_{12}} = -\frac{11}{48} fL \vec{j}. \quad (4.97)$$

Vastaavasti elementille 3:

$$u = N_3 u_2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{c_3}{2A}u_2 = \frac{17}{96} \frac{fL}{k} = 0.1771 \frac{fL}{k}, \quad (4.98)$$

$$\vec{q}_{n_{12}} = -\frac{17}{96} fL \vec{j}. \quad (4.99)$$

Vuoto on tietenkin vakio jokaisessa elementissä erikseen, koska kysymyksessä on lineaarinen kolmioelementti.

Esimerkki 4.3 Määritä ja piirrä edellisen tehtävän lämpötilan tasa-arvokäyrät $u_{\max}/3$ ja $2u_{\max}/3$, jossa $u_{\max}$ on keskipisteen lämpötila.

Lasketuista solmupistearvoista voidaan päätellä, että tasa-arvoviiva $\frac{2}{3}u_3$ leikkaa elementit 1, 2 ja 4. Vastaavasti tasa-arvoviiva $\frac{1}{3}u_3$ leikkaa elementit 1, 2 ja 3.

Käydään jokainen elementti lävitse. Aloitetaan elementistä 4. Interpolaatio on

$$u(x, y) = N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 + N_3(x, y)u_3, \quad (4.100)$$

jossa

$$N_i = L_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y). \quad (4.101)$$

Vakiot b_i ja c_i ovat jo määritetyt edellisessä tehtävässä. Vakiot a_i on määri-

tettävä kussakin elementissä erikseen, sillä

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2, \\ a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3, \\ a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Elementissä 4 vakioden arvot ovat $a_1 = L^2/8$, $a_2 = 0$, $a_3 = -L^2/16$. Ratkaisutavana on siis suora, joka toteuttaa

$$N_1 \frac{u_1}{u_3} + N_2 \frac{u_2}{u_3} + N_3 = \frac{u}{u_3}. \quad (4.103)$$

Sijoittamalla lukuarvot saadaan

$$\frac{2}{3} = N_1 \frac{11}{15} + N_2 \frac{17}{30} + N_3. \quad (4.104)$$

Elementissä 4 alakoordinaattien lausekkeet ovat

$$\begin{aligned} N_1 &= 16 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \frac{x}{L} - \frac{1}{4} \frac{y}{L} \right) = 2 - 4\xi - 4\eta, \\ N_2 &= 16 \frac{1}{4} \frac{x}{L} = 4\xi, \\ N_3 &= 16 \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{4} \frac{y}{L} \right) = -1 + 4\eta, \end{aligned} \quad (4.105)$$

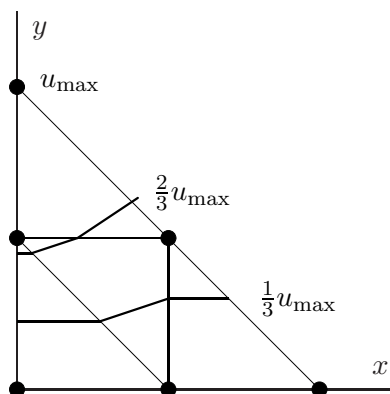
jossa on merkitty $\xi = x/L$ ja $\eta = y/L$. Yhtälöstä (4.104) saadaan

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= (2 - 4\xi - 4\eta) \frac{11}{15} + 4\xi \frac{17}{30} + 4\eta - 1 \\ \Rightarrow 0 &= -10\xi + 16\eta - 3. \end{aligned} \quad (4.106)$$

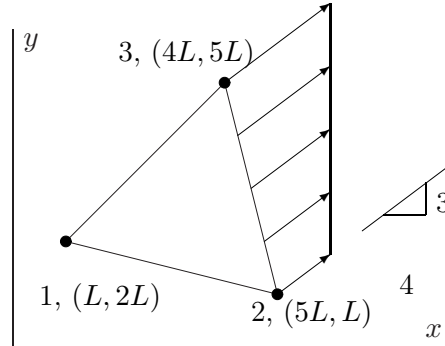
Ratkaistaan nyt yllä olevan suoran leikkauspisteet elementin 4 reunaviivojen $\eta = \frac{1}{4}$ ja $\eta = \frac{1}{2} - \xi$ kanssa. Saadaan ratkaisut

$$\xi = \frac{1}{10}, \quad \eta = \frac{1}{4}, \quad \text{ja} \quad \xi = \frac{5}{26} \approx 0.1923, \quad \eta = \frac{4}{13} \approx 0.3077. \quad (4.107)$$

Vastaavalla tavalla käydään muut elementit lävitse ja saadaan oheisen kuvan mukainen tasa-arvoviivasto.



Esimerkki 4.4 Määritä oheisen lineaarisen tasoelementin kuormitusvektori kun lämpövuoto muuttuu lineaarisesti arvosta q_1 arvoon q_2 reunalla 2 (solmuväli $2 - 3$).



Kuvion perusteella vuovektori reunalla 2 on

$$\vec{q}_1 = q_1 \left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \right), \quad \text{solmussa 1,} \quad (4.108)$$

$$\vec{q}_2 = q_2 \left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \right), \quad \text{solmussa 2,} \quad (4.109)$$

ja reunan 2 normaalivektori on

$$\vec{n}_2 = \frac{4}{\sqrt{17}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{j}. \quad (4.110)$$

Vuon normaalikomponentit reunan 2 alku ja loppupisteessä 1 ja 2 ovat

$$q_{1n} = \vec{q}_1 \cdot \vec{n}_2 = \frac{1}{5} \frac{19}{\sqrt{17}} q_1, \quad q_{2n} = \vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2 = \frac{1}{5} \frac{19}{\sqrt{17}} q_2. \quad (4.111)$$

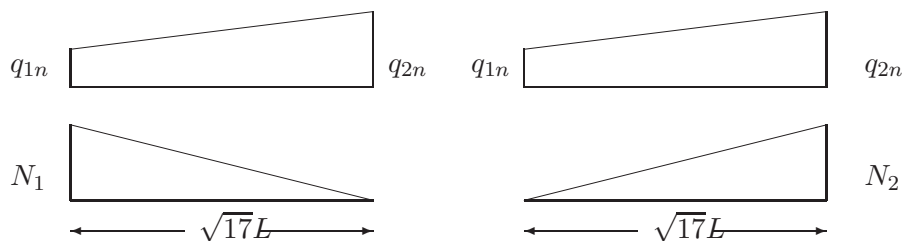
Elementin kuormitusvektorin komponentit ovat

$$f_i = - \int_{S_2} \vec{q} \cdot \vec{n}_2 N_i ds. \quad (4.112)$$

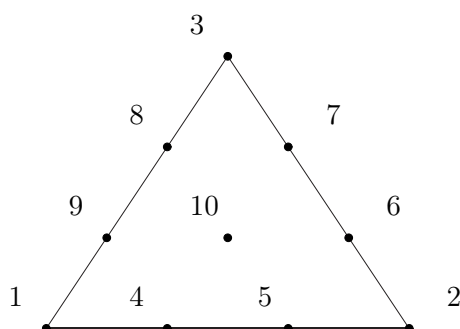
Solmua 1 vastaava termi on tietenkin nolla ja muut ovat (suoritetaan integrointi Simpsonin kaavalla):

$$f_2 = -\frac{1}{2} q_{1n} \sqrt{17} L - \frac{1}{6} (q_{2n} - q_{1n}) \sqrt{17} L = -\left(\frac{19}{30} q_2 + \frac{19}{15} q_1 \right) L, \quad (4.113)$$

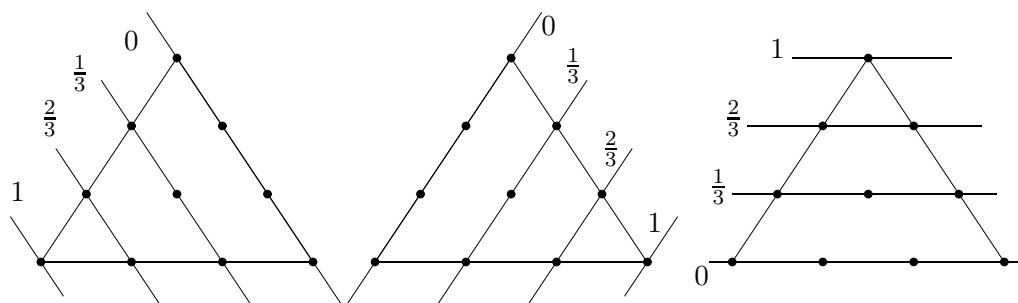
$$f_3 = -\frac{1}{2} q_{1n} \sqrt{17} L - \frac{1}{3} (q_{2n} - q_{1n}) \sqrt{17} L = -\left(\frac{16}{15} q_2 + \frac{8}{15} q_1 \right) L. \quad (4.114)$$



Esimerkki 4.5 Määritä kuubisen elementin solmuihin sidotut interpolaatiofunktiot N_1, N_4, N_5 ja N_{10} .



Koordinaattien L_1, L_2 ja L_3 tasa-arvoviivat ovat seuraavanlaiset.



Interpolaatiofunktioilla on arvo $N_i = 0$ kaikissa muissa salmuissa paitsi solmussa i .

Solmu 1: Etsitään kolme tasa-arvoviiva, jotka kulkevat kaikkien muiden, paitsi solmun 1, kautta.

$$\begin{aligned}
 &L_1 = 0, L_1 = \frac{1}{3}, L_1 = \frac{2}{3} \\
 \Rightarrow &N_1 = c_1 L_1 (L_1 - \frac{1}{3}) (L_1 - \frac{2}{3}), \text{ ja sillä on arvo 1 solmussa 1, eli } N_1(1, 0, 0) = 1 \\
 \Rightarrow &c_1 \cdot 1(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{2}{3}) = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{9}{2} \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_1 = \frac{9}{2} L_1 (L_1 - \frac{1}{3}) (L_1 - \frac{2}{3}) \quad (4.16)$$

Solmu 4:

$$\begin{aligned}
 &L_1 = 0, L_1 = \frac{1}{3}, L_2 = 0 \\
 \Rightarrow &N_4 = c_4 L_1 (L_1 - \frac{1}{3}) L_2, N_4(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0) = 1 \Rightarrow c_4 = \frac{27}{2} \quad (4.117) \\
 \Rightarrow &N_4 = \frac{27}{2} L_1 (L_1 - \frac{1}{3}) L_2 \quad (4.118)
 \end{aligned}$$

Solmu 5:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= 0, L_2 = 0, L_3 = \frac{1}{3} \\
 \Rightarrow N_5 &= c_5 L_1 L_2 (L_2 - \frac{1}{3}), N_5(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0) = 1 \Rightarrow c_5 = \frac{27}{2} \quad (4.119) \\
 \Rightarrow N_5 &= \frac{27}{2} L_1 L_2 (L_2 - \frac{1}{3}) \quad (4.120)
 \end{aligned}$$

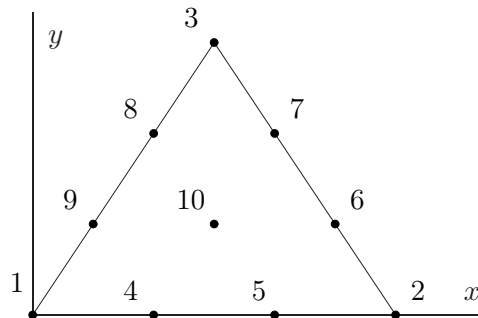
Solmu 10:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= 0, L_2 = 0, L_3 = 0 \\
 \Rightarrow N_{10} &= c_{10} L_1 L_2 L_3, N_{10}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 1 \Rightarrow c_{10} = 27 \quad (4.121) \\
 \Rightarrow N_{10} &= 27 L_1 L_2 L_3 \quad (4.122)
 \end{aligned}$$

Esimerkki 4.6 Ratkaisun stationäärinen lämmönsiirto-ongelma

$$-k(u_{,xx} + u_{,yy}) = f = \text{vakio}$$

tasasivuisessa kolmiossa homogeenisilla oleellisilla reunaehdoilla $u = 0$. Käytä yhtä kuubista elementtiä ja määritä myös lämpövuon lauseke reunalla 1-2. Kolmion sivun pituus on L .



Käyttäen yhtä kuubista elementtiä on ratkaistavana vain yksi tuntematon, u_{10} , joka voidaan ratkaista yhtälöstä

$$K_{10,10} u_{10} = f_{10}, \quad (4.123)$$

jossa

$$K_{10,10} = k \int_A (N_{10,x} N_{10,x} + N_{10,y} N_{10,y}) dA, \quad (4.124)$$

ja edellisen esimerkin mukaan on solmuun 10 liittyvä interpolaatiofunktio:

$N_{10} = 27L_1L_2L_3$. Lasketaan tarvittavat derivaatat:

$$\begin{aligned} N_{10,x} &= 27 \left(\frac{\partial L_1}{\partial x} L_2 L_3 + \frac{\partial L_2}{\partial x} L_1 L_3 + \frac{\partial L_3}{\partial x} L_1 L_2 \right) \\ &= \frac{27}{2A} (b_1 L_2 L_3 + b_2 L_1 L_3 + b_3 L_1 L_2) \\ N_{10,y} &= \frac{27}{2A} (c_1 L_2 L_3 + c_2 L_1 L_3 + c_3 L_1 L_2). \end{aligned} \quad (4.125)$$

Kerroinmatriisiin alkioille saadaan lauseke

$$\begin{aligned} K_{10,10} &= \left(\frac{27}{2A} \right)^2 k \int_A [(b_1 L_2 L_3 + b_2 L_1 L_3 + b_3 L_1 L_2)^2 \\ &\quad + (c_1 L_2 L_3 + c_2 L_1 L_3 + c_3 L_1 L_2)^2] dA \\ &= \left(\frac{27}{2A} \right)^2 k \int_A (b_1^2 L_2^2 L_3^2 + b_2^2 L_1^2 L_3^2 + b_3^2 L_1^2 L_2^2 + 2b_1 b_2 L_1 L_2 L_3^2 \\ &\quad + 2b_1 b_3 L_1 L_2^2 L_3 + 2b_2 b_3 L_1^2 L_2 L_3 + \text{c-termit}) dA, \\ &\quad \text{käytetään kaavaa } \int_A L_1^i L_2^j L_3^k dA = \frac{2A^{(e)} i! j! k!}{(2+i+j+k)!}, \quad 0! = 1 \\ &= k \frac{27^2}{2A} \left(b_1^2 \frac{2!2!}{6!} + b_2^2 \frac{4}{6!} + b_3^2 \frac{4}{6!} + 2b_1 b_2 \frac{2}{6!} + \dots \right) \\ &= k \frac{27^2}{2A} [(b_1^2 + c_1^2) + (b_2^2 + c_2^2) + (b_3^2 + c_3^2) \\ &\quad + b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 + c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3] \frac{4}{6!} \\ &= \frac{81}{40} \frac{k}{A} (b_1^2 + c_1^2 + b_2^2 + c_2^2 + b_3^2 + c_3^2 + b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 + c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3). \end{aligned} \quad (4.126)$$

$$(4.127)$$

Kuormatermiksi saadaan

$$f_{10} = \int_A f 27 L_1 L_2 L_3 dA = 54A f \frac{1}{5!} = \frac{9}{20} f A. \quad (4.128)$$

Lasketaan kertoimet ja elementin pinta-ala:

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} L & c_1 &= x_3 - x_2 = -\frac{L}{2} \\ b_2 &= y_3 - y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} L & c_2 &= x_1 - x_3 = -\frac{L}{2} \\ b_3 &= y_1 - y_2 = 0 & c_3 &= x_2 - x_1 = L \\ A &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} L^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 \end{aligned} \quad (4.129)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow K_{10,10} &= \frac{81}{40} \frac{4}{\sqrt{3}} \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] k \\ &= \frac{243}{20\sqrt{3}} k\end{aligned}\quad (4.130)$$

Ratkaisuyhtälö on siten

$$\Rightarrow \frac{243}{20\sqrt{3}} k u_{10} = \frac{9\sqrt{3}}{80} L^2 f, \quad \text{jonka ratkaisu on} \quad u_{10} = \frac{1}{36} \frac{f L^2}{k}. \quad (4.131)$$

Lämpötilajakauma elementin alueella on siten: $u = N_{10} u_{10} = 27 L_1 L_2 L_3 u_{10}$. Lämpövuon lauseke on $\vec{q} = -k \nabla u = -k(u_{,x} \vec{i} + u_{,y} \vec{j})$. Lämpövuon normaali-komponentti on $q_n = \vec{q} \cdot \vec{n}$. Reunalla 1-2 on $\vec{n} = -\vec{j}$ ja $L_3 = 0$, siten

$$\begin{aligned}q_n &= k u_{,y} = k u_{10} 27 \left(\frac{\partial L_1}{\partial y} L_2 L_3 + \frac{\partial L_2}{\partial y} L_1 L_3 + \frac{\partial L_3}{\partial y} L_1 L_2 \right) \\ &= k u_{10} 27 L_1 L_2 \frac{\partial L_3}{\partial y} = 27 k u_{10} \frac{c_3}{2A} L_1 L_2 = \frac{3}{2\sqrt{3}} f L L_1 L_2.\end{aligned}\quad (4.132)$$

Koska $L_1 = 1 - x/L$ ja $L_2 = x/L$ lämpövuon normaalikomponentin lausekkeeksi saadaan

$$q_n = \frac{3}{2\sqrt{3}} f L \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right). \quad (4.133)$$

Esimerkki 4.7 Ratkaise massiivipoikkileikkauksisen sauvan vääntöjäyhyys siirtymämenetelmällä De Saint-Venantin vapaan väännön teorian mukaisesti.

De Saint-Venant otaksui siirtymätilan olevan muotoa

$$\begin{aligned}u &= -y\phi = -yz\theta, \\ v &= x\phi = xz\theta, \\ w &= \theta\psi(x, y),\end{aligned}\quad (4.134)$$

missä ϕ on vääntökulma, $\theta = d\phi/dz$ vääntymä ja $\psi(x, y)$ poikkileikkauksen käyrästymäfunktio. Sauvan akselin z suuntaisen tasapainoehdon

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \quad (4.135)$$

perusteella saadaan soveltamalla Hooken lakia

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = G\theta(\psi_{,x} - y), \quad (4.136)$$

$$\tau_{zy} = G\gamma_{zy} = G\theta(\psi_{,y} + x). \quad (4.137)$$

Täten saadaan Laplacen yhtälö käyrästymäfunktiolle:

$$\psi_{,xx} + \psi_{,yy} = 0. \quad (4.138)$$

Jos sauvan reunalla ei ole kuormitusta, niin reunaehto on

$$\tau_n = \tau_{zn}n_x + \tau_{zy}n_y = 0, \quad (4.139)$$

missä n_x ja n_y ovat reunan normaalivektorin komponentit. Lausumalla jännityskomponentit siirtymien avulla reunaehto saadaan muotoon

$$(\psi_{,x} - y)n_x + (\psi_{,y} + x)n_y = 0. \quad (4.140)$$

Suoritetaan vääntöprobleeman likiratkaisu Galerkinin keinolla minimoimalla potentiaalienergian funktionaali

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A G(\gamma_{zx}^2 + \gamma_{zy}^2) dA = \frac{1}{2} \int_A G[(\psi_{,x} - y)^2 + (\psi_{,y} + x)^2] dA. \quad (4.141)$$

Minimin välttämätön ehto on

$$\delta\Pi = \int_A G[(\psi_{,x} - y)\delta\psi_{,x} + (\psi_{,y} + x)\delta\psi_{,y}] dA = 0, \quad (4.142)$$

eli

$$\int_A G(\psi_{,x}\delta\psi_{,x} + \psi_{,y}\delta\psi_{,y}) dA + \int_A G(-y\delta\psi_{,x} + x\delta\psi_{,y}) dA = 0, \quad (4.143)$$

missä toinen termi saadaan osittaisintegroimalla muotoon

$$\begin{aligned} \int_A G(-y\delta\psi_{,x} + x\delta\psi_{,y}) dA &= \int_A G[(-y\delta\psi)_{,x} + (x\delta\psi)_{,y}] dA \\ &= \int_{\partial A} G(-yn_x + xn_y) \delta\psi ds. \end{aligned} \quad (4.144)$$

Sijoittamalla interpolaatio $\psi(x, y) = \sum N_i(x, y)\psi_i$ saadaan elementin jäykkyysmatriisin alkioiksi lauseke

$$K_{ij} = \int_A G(N_{i,x}N_{j,x} + N_{i,y}N_{j,y}) dA. \quad (4.145)$$

Vastaavasti kuormavektorin lauseke on

$$f_i = \int_{\partial A} G(yn_x - xn_y) N_i ds. \quad (4.146)$$

Huomaa, että yhtälön (4.138) reunaehdot (4.139) ovat luonnolliset. Mikäli käyristymäfunktion arvoa ei sidota, on globaali jäykkyysmatriisi singulaarinen ja käyristymäfunktion arvo on vakiota vaille yksikäsitteisesti määrätty. Singulaarisen systeemin käsittelyltä välttyään, mikäli käyristymäfunktion arvo sidotaan jossain poikkileikkauksen pisteessä.

Vääntöjäyhyys I_t voidaan laskea yhtälöstä

$$\begin{aligned} I_t &= \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)^2 \right] dA \\ &= \int_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA = I_p - \sum_i \psi_i f_i. \end{aligned} \quad (4.147)$$

4.6 Nelikulmioelementtejä

4.6.1 Elementtiperheet

Nelikulmioelementit tarjoavat vielä kolmioelementtejäkin yksinkertaisemman tavan konstruoida interpolaatiofunktioita. Tarkastellaan vain C_0 -jatkuvia elementtejä. Tässä luvussa käsitellään myös geometrian parametrissa kuvaamista interpolaatiofunktioiden avulla. Näin voidaan helposti mallintaa geometrisesti monimutkaisia alueita. Tällaisten elementtien jäykkyysmatriisiin ja kuormavektorin analyttinen muodostaminen ei aina ole mahdollista, vaan joudutaan käyttämään numeerista integrointia, joten myös yleisimmät käytössä olevat numeeriset integrointimenetelmät esitellään.

Tarkastellaan interpolaatiopolynomeja ns. perusneliössä, joka määritellään luonnollisten koordinaattien ξ ja η avulla seuraavasti: $(\xi, \eta) \in (-1, 1) \times (-1, 1)$. Yksinkertaisin tapa konstruoida kaksidimensioisia interpolaatiofunktioita on käyttää suoraan yksidimensioisia Lagrangen polynomeja tulomuodossa eli

$$N_i(\xi, \eta) = l_a^{p_1}(\xi) l_b^{p_2}(\eta), \quad (4.148)$$

jossa p_1 ja p_2 ovat interpolaation asteet ξ ja η suunnissa. Mikäli interpolaation aste on sama kummassakin suunnassa ($p_1 = p_2 = p$), pitää Lagrangen tyyppinen elementti sisällään kaikki termit, joissa toisen tekijän asteluku on pienempi tai yhtäsuuri kuin p . Kaksidimensioiseen Lagrangen interpolaatioon tulevat termit on piirretty Pascal² kolmioon kuvassa 4.7, ja elementin solmukonfiguraatioita on esitetty kuvassa 4.9.

Havaitaan, että interpolaation asteen kasvaessa elementtien sisäisten solmujen määrä kasvaa merkittävästi. Tätä on usein pidetty Lagrangen elementtien haittana, koska tällöin myös vapausastemäärä tarpeettomasti kasvaa, sillä approksimaatio-teoreettiselta kannalta Lagrangen elementissä on ‘turhia’ vapausasteita. Elementin tarkkuusominaisuudet pysyvät kertaluokalleen samoina, kun mukana ovat kaikki astetta p olevat polynomit. Lisätermit, jotka ovat esimerkiksi astetta p kummankin koordinaatin suhteen, eivät siten vaikuta ratkaisevasti elementin approksimaatio-ominaisuuksiin. Näillä termeillä on kuitenkin suuri merkitys elementin käyttäytymi-

²Blaise Pascal (1632–1662): ranskalainen filosofi, fyysikko, matemaatikko ja kirjailija. 1654 Pascal kävi läpi vaikean henkisen kriisin jonka jälkeen hän keskittyi uskonnollisiin kysymyksiin.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 1 & & \\
& & & \xi & & \eta & \\
& & \xi^2 & & \xi\eta & & \eta^2 \\
& \xi^3 & & \xi^2\eta & & \xi\eta^2 & & \eta^3 \\
\xi^4 & & \xi^3\eta & & \xi^2\eta^2 & & \xi\eta^3 & & \eta^4 \\
& \xi^4\eta & & \xi^3\eta^2 & & \xi^2\eta^3 & & \xi\eta^4 \\
& & \xi^4\eta^2 & & \xi^3\eta^3 & & \xi^2\eta^4 \\
& & & \xi^4\eta^3 & & \xi^3\eta^4 \\
& & & & \xi^4\eta^4 & &
\end{array}$$

Kuva 4.7 Lagrangen interpolaatio asteeseen neljä saakka.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 1 & & \\
& & & \xi & & \eta & \\
& & \xi^2 & & \xi\eta & & \eta^2 \\
& \xi^3 & & \xi^2\eta & & \xi\eta^2 & & \eta^3 \\
\xi^4 & & \xi^3\eta & & \xi^2\eta^2 & & \xi\eta^3 & & \eta^4 \\
& \xi^4\eta & & & & & \xi\eta^4 \\
& & & & & &
\end{array}$$

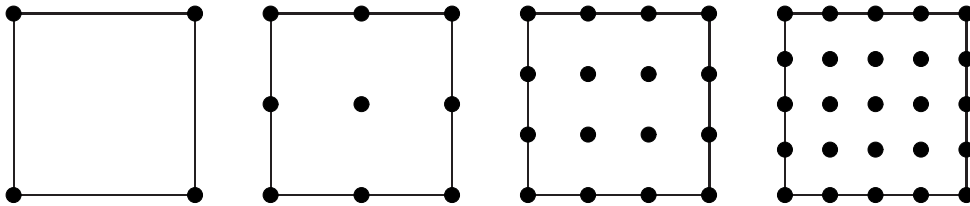
Kuva 4.8 Serendipity interpolaatio asteeseen neljä saakka.

seen, kun tarkastellaan ns. isoparametrisia elementtejä, joten ei ole syytä unohtaa Lagrangen elementtejä kahdessa (tai kolmessa) dimensiossa.

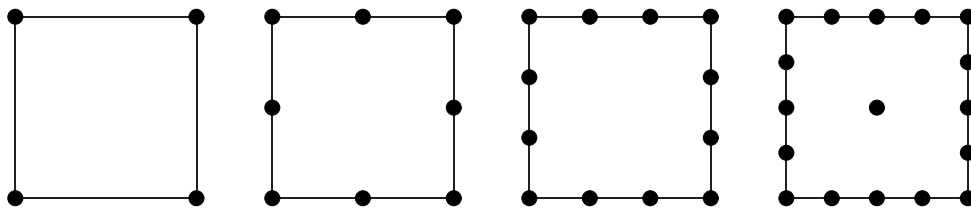
On mahdollista konstruoida elementtiperhe, jossa on vähemmän vapausasteita kuin vastaavissa Lagrangen elementeissä ja jonka interpolaatiofunktioit sisältävät täydellisen astetta p olevan polynomin kahdessa dimensiossa. Tämä elementtiperhe kulkee nimellä Serendipity. Siinä kanta konstruoidaan polynomeista, jotka ovat vähintään astetta p ja jota täydennetään polynomeilla, jotka ovat muotoa $\xi^p\eta$ ja $\xi\eta^p$. Tällainen kanta on piirretty kuvaan 4.8 ja elementtien solmukonfiguraatioita kuvaan 4.10.

4.6.2 Parametrinen kuvaus

Tähän asti on elementtien geometria otaksuttu joko suorista sivuista koostuviksi kolmioksi tai nelikulmioksi. Geometriaa voidaan myös interpoloida kuten itse ratkaistavaa funktiota. Mikäli elementissä on m solmua, voidaan yksinkertaisesti kirjoittaa



Kuva 4.9 Lagrangen nelikulmioelementtien solmukonfiguraatioita.



Kuva 4.10 Serendipity-nelikulmioelementtien solmukonfiguraatioita.

kaksidimensioisessa alueessa

$$x = \sum_{i=1}^m N_i^*(\xi, \eta) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^m N_i^*(\xi, \eta) y_i, \quad (4.149)$$

jossa x_i ja y_i ovat elementin solmujen koordinaatit. Interpolaatiofunktioita N_i^* voidaan hyvällä syyllä kutsua muotofunktioiksi. Mikäli muotofunktiot N_i^* ovat identtiset ratkaistavan funktion (tai funktioiden) interpolaatiossa käytettyjen funktioiden kanssa, käytetään elementistä nimitystä *isoparametrinen*. Mikäli elementin geometriaa kuvataan muotofunktioilla, jotka ovat matalampaa astetta kuin itse ratkaistavan suureen interpolaatiopolynomit, on elementti *aliparametrinen* (engl. subparametric). Vastaavasti käytetään nimitystä *yliparametrinen* (engl. superparametric), mikäli geometriaa kuvataan tarkemmin kuin itse ratkaistavia suureita.

Isoparametrinen elementtien käyttökelpoisuudesta ja suosioista johtuen käytetään termiä muotofunktio yleisesti myös itse ratkaistavana olevan funktion interpolaatiofunktioista.

Tarkastellaan ensin asian havainnollistamiseksi yksinkertaista parabolista janaelementtiä. Peruselementti on jana ξ -koordinaatistossa välillä $(-1, 1)$. Merkitään elementin koordinaatteja globaalissa x -koordinaatistossa x_1, x_2 ja x_3 (3=keskisolmu). Elementin geometrian kuvaus on siten

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) x_i = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)x_1 + \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)x_2 + (1 - \xi^2)x_3. \quad (4.150)$$

Elementin jäykkyyso-matriisin ja kuormavektorin integrointia varten tarvitaan derivaatan lausekkeita x -koordinaatin suhteen:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} = \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} \frac{d}{d\xi} = J^{-1} \frac{d}{d\xi}, \quad (4.151)$$

jossa J on kuvauksen (4.150) mittakaavatekijä. Jotta kuvaus olisi yksikäsitteinen ja säilyttäisi suuntaisuuden, on mittakaavatekijän oltava aina positiivinen

$$J > 0. \quad (4.152)$$

Tämä ehto asettaa rajoituksia elementin solmujen sijoitteluun eli siis keskisolmun sijaintiin päätesolmuihin nähden.

Esimerkki 4.8 Tutki parabolisen isoparametrisen janaelementin keskisolmun sijainnin sallittua aluetta.



Yleisyyttä menettämättä voidaan tutkia tilannetta, jossa elementin päätesolmuilla on arvot $x_1 = 0$ ja $x_2 = L$. Geometrian kuvaus on siten lausuttavissa kaavalla

$$x = N_2 L + N_3 x_3, \quad (4.153)$$

ja ehto kuvauksen yksikäsitteisyydelle on

$$J = \frac{dx}{d\xi} = N_{2,\xi} L + N_{3,\xi} x_3 = \left(\frac{1}{2} + \xi\right) L - 2\xi x_3 > 0, \quad (4.154)$$

josta seuraa

$$2\xi x_3 < \left(\frac{1}{2} + \xi\right) L. \quad (4.155)$$

Tutkitaan erikseen tapaukset $\xi > 0$ ja $\xi < 0$, jolloin saadaan epäyhtälöt

$$x_3 < \frac{\frac{1}{2} + \xi}{2\xi} L = f(\xi)L, \quad (4.156)$$

$$x_3 > \frac{\frac{1}{2} + \xi}{2\xi} L = f(\xi)L. \quad (4.157)$$

Funktion $f(\xi)$ derivaatta on aina negatiivinen, joten f on monotonisesti laskeva funktio. Täten pätee

$$x_3 < f(1)L < f(\xi)L, \quad f(1)L = \frac{3}{4}L, \quad (4.158)$$

$$x_3 > f(-1)L > f(\xi)L, \quad f(-1)L = \frac{1}{4}L. \quad (4.159)$$

Elementin keskisolmu ei siten saa sijaita elementin reunaneljänneksen alueella.

4.6.3 Bilineaarinen interpolaatio

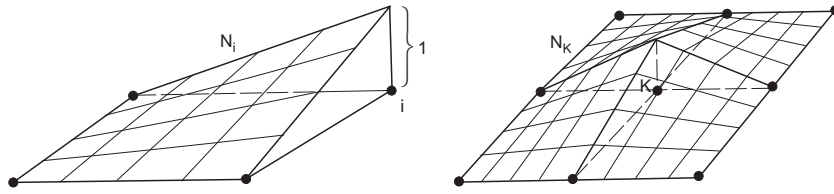
Lagrangen ja Serendipity-tyyppisten elementtiperheiden alimman asteen jäsen on bilineaarisesti interpoloitu elementti. Siinä kantafunktioina ovat $1, \xi, \eta$ ja $\xi\eta$. Interpolaatiofunktioit ovat siten

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad (4.160a)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \quad (4.160b)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad (4.160c)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta), \quad (4.160d)$$



Kuva 4.11 Lineaarinen interpolaatio tasoalueessa.

jotka voidaan kirjoittaa lyhyesti yleisessä muodossa

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta), \quad (4.161)$$

jossa ξ_i ja η_i ovat peruselementin solmun i koordinaatit. Elementin interpolaatiofunktio N_1 on esitetty kuvassa 4.11.

Mikäli myös elementin geometriaa interpoloidaan funktioilla (4.161), on tuloksena isoparametrinen bilineaarinen elementti. Kuvauksen munnosmatriisi saadaan, kun tarkastellaan funktion

$$u(x, y) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \quad (4.162)$$

derivaattojen lausekkeita peruselementin koordinaattien ξ ja η suhteen:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (4.163)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad (4.164)$$

joka voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

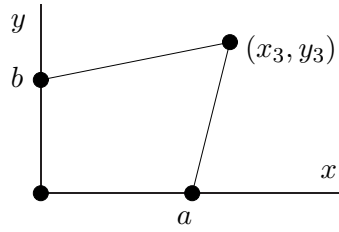
$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} \quad \text{eli} \quad \mathbf{u}_{,\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J}^T \mathbf{u}_{,\mathbf{x}}, \quad (4.165)$$

jossa $\mathbf{J}$ on geometriakuvauksen Jacobin matriisi.³ Jotta kuvaus olisi yksikäsitteinen, on Jacobin matriisin determinantin oltava nollasta eroava ja jotta kuvaus säilyttäisi suuntaisuutensa on sen oltava positiivinen, eli vaaditaan

$$\det \mathbf{J} = J > 0. \quad (4.166)$$

Esimerkki 4.9 Tutki oheisen bilineaarisen isoparametrisen elementin solmun 3 sijainnin sallittua aluetta.

³Monissa elementimenetelmää käsittelevissä kirjoissa kutsutaan $\mathbf{J}$:n transpoosia parametrin kuvauksen Jacobin matriisiksi. Tässä esityksessä noudatetaan kuitenkin yleisempää käytäntöä, missä kuvauksen $x_i = f_i(y_j)$ Jacobin matriisi määritellään $J_{ij} = \partial f_i / \partial y_j$.



Elementin geometrian kuvaus kaavoja (4.160) käyttäen on

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i = N_2 a + N_3 x_3 \\ &= \frac{1}{4}(1 + \xi) [(1 - \eta)a + (1 + \eta)x_3], \end{aligned} \quad (4.167)$$

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i = N_3 y_3 + N_4 b \\ &= \frac{1}{4}(1 + \eta) [(1 + \xi)y_3 + (1 - \xi)b]. \end{aligned} \quad (4.168)$$

Mittakaavatekijän muodostamista varten tarvitaan derivaattojen lausekkeet, jotka ovat

$$x_{,\xi} = \frac{1}{4} [(1 - \eta)a + (1 + \eta)x_3], \quad (4.169)$$

$$y_{,\xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta)(y_3 - b), \quad (4.170)$$

$$x_{,\eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(x_3 - a), \quad (4.171)$$

$$y_{,\eta} = \frac{1}{4} [(1 + \xi)y_3 + (1 - \xi)b], \quad (4.172)$$

Ehto kuvauksen yksikäsitteisyydelle on

$$\det \mathbf{J} = x_{,\xi} y_{,\eta} - y_{,\xi} x_{,\eta} > 0, \quad (4.173)$$

josta seuraa epäyhtälö

$$(1 + \xi)ay_3 + (1 + \eta)bx_3 - (\xi + \eta)ab > 0. \quad (4.174)$$

Yhtälö

$$(1 + \xi)ay_3 + (1 + \eta)bx_3 - (\xi + \eta)ab = 0 \quad (4.175)$$

esittää laskevaa suoraa, joka leikkaa koordinaattiakselit pisteissä

$$x_3 = 0, \quad y_3 = \frac{\xi + \eta}{1 + \xi} b = f_1(\xi, \eta)b, \quad (4.176)$$

$$y_3 = 0, \quad x_3 = \frac{\xi + \eta}{1 + \eta} a = f_2(\xi, \eta)a. \quad (4.177)$$

Ehdon (4.174) nojalla on oltava voimassa

$$y_3 > f_1(\xi, \eta)b \quad \text{kun} \quad x_3 = 0, \quad (4.178)$$

$$x_3 > f_2(\xi, \eta)a \quad \text{kun} \quad y_3 = 0. \quad (4.179)$$

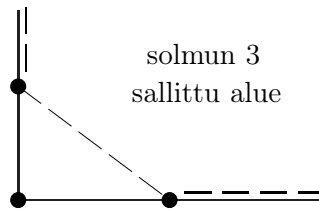
Funktioiden f_1 ja f_2 maksimiavot ovat 1, kun $(\xi, \eta) \in (-1, 1) \times (-1, 1)$, ja koska ehto (4.174) määrittelee suoran, on solmun 3 sallittu alue määriteltävissä epäyhtälöillä

$$y_3 > b \quad \text{kun} \quad x_3 = 0, \quad (4.180)$$

$$x_3 > a \quad \text{kun} \quad y_3 = 0, \quad (4.181)$$

$$y_3 > b - \frac{b}{a}x_3 \quad \text{kun} \quad 0 < x_3 < a. \quad (4.182)$$

Solmun 3 on sijaattava siten, että kuvanelikulmio on konvekksi, ts. siinä ei ole sisäänpistäviä kulmia. Sallittu alue on piirretty alla olevaan kuvaan.



4.6.4 Bikvadraattinen ja korkeamman asteen interpolaatio

Kvadraattisia elementtejä ovat bikvadraattinen 9-solmuinen Lagrangen elementti ja 8-solmuinen Serendipity eli ns. supistettu bikvadraattinen elementti. Numeroidaan elementin solmut kuvan 4.12 mukaisesti. Lagrangen elementin interpolaatiofunktioit ovat siten

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi - 1)\eta(\eta - 1), \quad (4.183a)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi + 1)\eta(\eta - 1), \quad (4.183b)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi + 1)\eta(\eta + 1), \quad (4.183c)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi - 1)\eta(\eta + 1), \quad (4.183d)$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)\eta(\eta - 1), \quad (4.183e)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)(1 - \eta^2), \quad (4.183f)$$

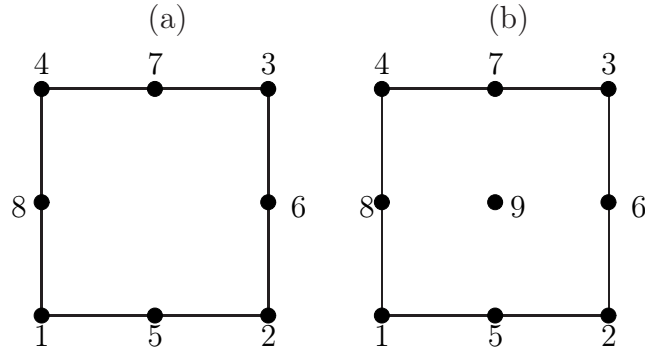
$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)\eta(\eta + 1), \quad (4.183g)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)(1 - \eta^2), \quad (4.183h)$$

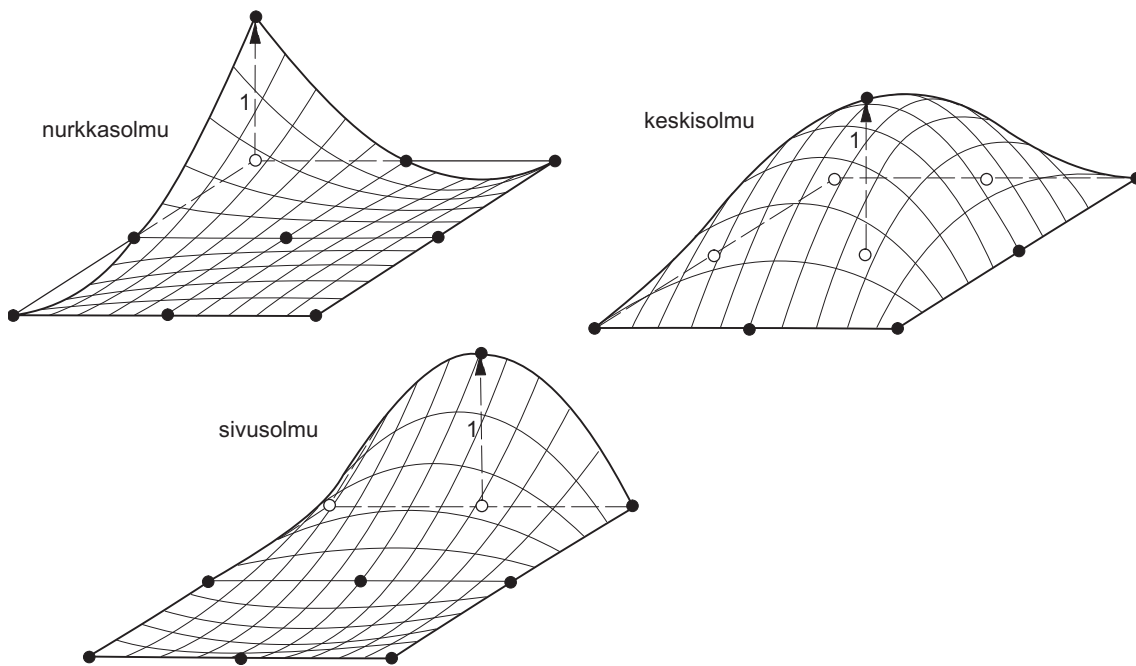
$$N_9(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2), \quad (4.183i)$$

joista muutamia on esitetty kuvassa 4.13.

Supistettu bikvadraattinen eli 8-solmuinen elementti muodostetaan helpoimmin seuraavasti. Lähtökohtana on havainto, että sivusolmuille 5-8 voidaan ottaa Lagrangen tyyppinen interpolaatio, joka on solmun sivun suunnassa kvadraattinen ja sivua



Kuva 4.12 Kvadraattisten elementtien solmunumerointi: (a) Serendipity, (b) Lagrange.



Kuva 4.13 Lagrangen bikvadraattisia interpolaatiofunktioita.

vastaan kohtisuorassa suunnassa lineaarinen

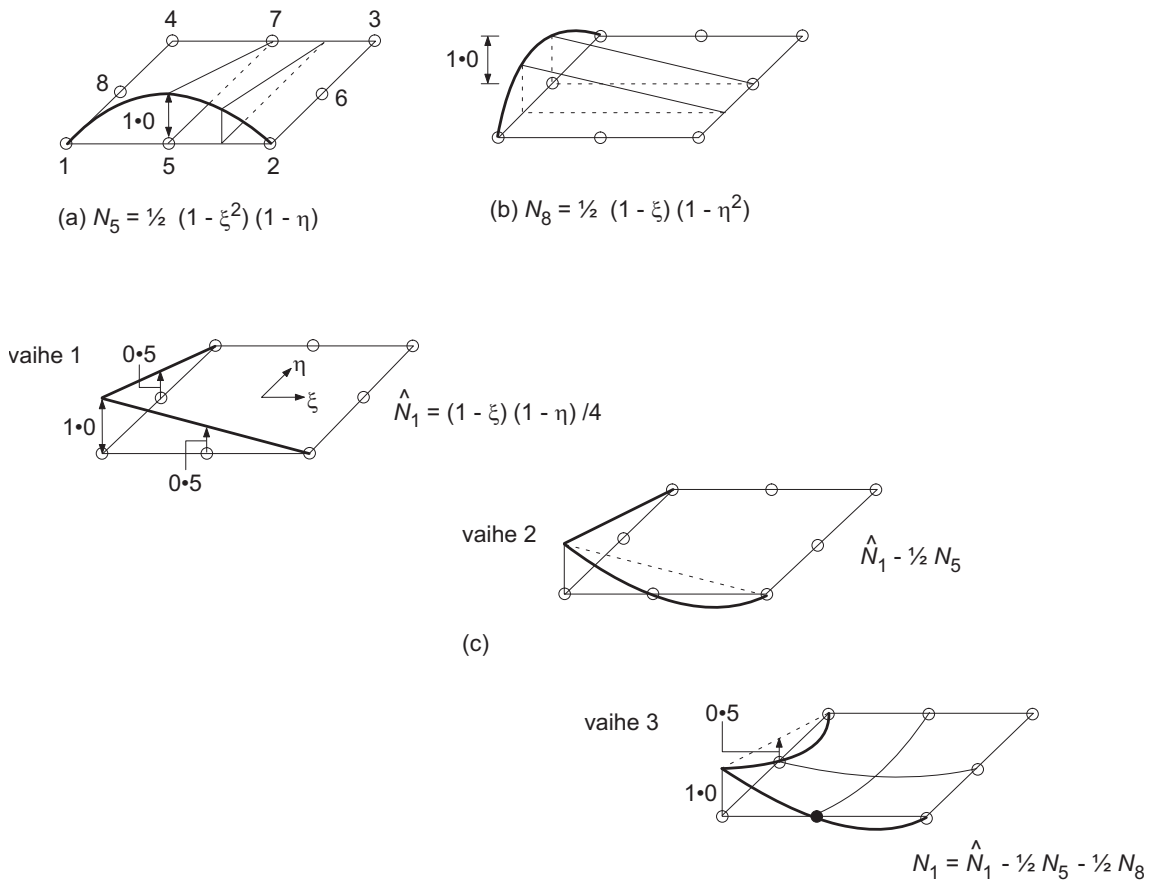
$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta), \quad (4.184a)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2), \quad (4.184b)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta), \quad (4.184c)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2). \quad (4.184d)$$

Nurkkasolmuja 1-4 vastaavat interpolaatiofunktioita voidaan konstruoida bilineaarisista $\hat{N}_i$ ja edellä esitetyistä interpolaatiofunktioista. Tutkitaan esimerkkinä solmun 1 interpolaatiota. Bilineaarinen interpolaatio $\hat{N}_1$ saa arvon $\frac{1}{2}$ solmuissa 5 ja 8, joi- ta vastaavat funktiot (4.184a) ja (4.184d) saavat arvot 1. Mikäli nyt bilineaarisesta



Kuva 4.14 Serendipity-tyyppisen elementin interpolaatiofunktion N_1 muodostaminen.

funktiosta $\hat{N}_1$ vähennetään sopivasti N_5 :n ja N_8 :n osuus, saadaan haluttu solmujen 5 ja 8 interpolaation arvo:

$$N_1 = \hat{N}_1 - \frac{1}{2} N_5 - \frac{1}{2} N_8. \quad (4.185)$$

Näin saatu interpolaatiofunktio on piirretty kuvaan 4.14. Kvadraattisen Serendipity-elementin nurkkasolmuihin liittyviksi interpolaatiofunktioiksi saadaan yleisesti

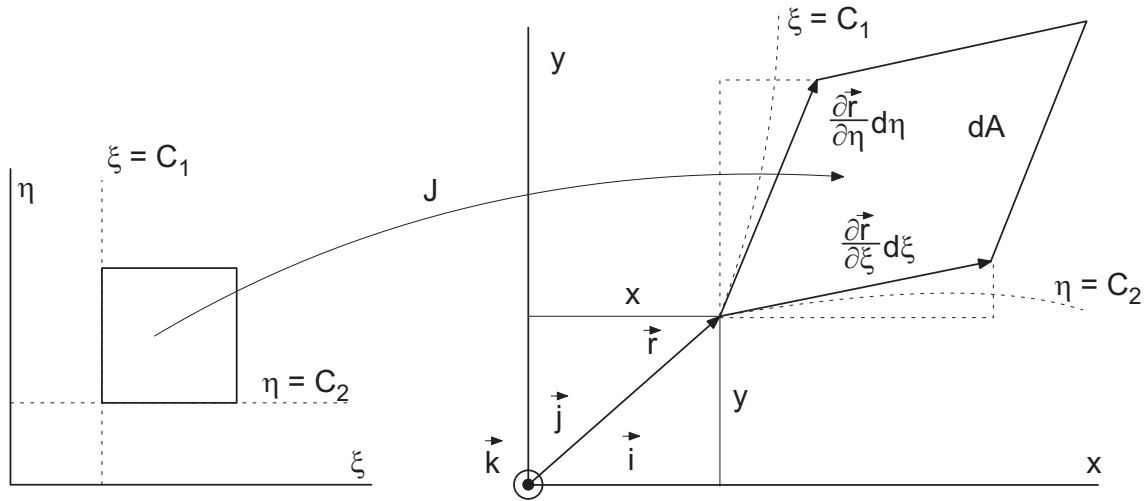
$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (4.186)$$

Aivan vastaavalla tekniikalla voidaan muodostaa korkeamman asteen Serendipity-tyyppisiä interpolaatioita, esimerkiksi kuubiset interpolaatiofunktiot ovat:

$$N_i = \frac{1}{32} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) [9(\xi^2 + \eta^2) - 10], \quad \text{kulmasolmuille,} \quad (4.187)$$

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + \xi_i \xi) (1 - \eta^2) (1 + 9\eta_i \eta), \quad \text{sivusolmuille } \xi_i \pm 1 \text{ ja } \eta_i = \pm \frac{1}{3}, \quad (4.188)$$

ja muita sivusolmuja vastaavat interpolaatiot saadaan vaihtamalla muuttujia. Nel-



Kuva 4.15 Parametrinen kuvaus.

jännän asteen Serendipity-interpolointiin tulee polynomin täydellisyysvaatimuksen takia mukaan yksi keskiisolmu. Tähän keskiisolmuun liittyvä interpolatioksi voidaan asettaa $(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$, joka on nolla elementin reunoilla.

4.7 Elementtimatriisien muodostaminen

Elementin jäykkyysmatriisi on yleisessä muodossa kirjoitettuna

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega. \quad (4.189)$$

Kahdessa dimensiossa integrointi suoritetaan alan yli, joten $d\Omega = dA$. Parametrisen kuvauksen välityksellä integrointi elementin alan $\Omega^{(e)}$ yli suoritetaan perusneliössä $(\xi, \eta) \in (-1, 1) \times (-1, 1)$, jolloin (4.189) muuntuu muotoon

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} J d\xi d\eta, \quad (4.190)$$

jossa J on geometriakuvauksen Jacobin matriisin determinantti eli mittakaavatekijä.

Johdetaan seuraavaksi (ξ, η) -tason alkion $d\xi d\eta$ ja (x, y) -tason alkion dA välinen muunnoskaava

$$dA = \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta = J d\xi d\eta. \quad (4.191)$$

Tarkastellaan kuvan 4.15 kuvausta (ξ, η) -tasosta (x, y) -tasoon. Suora $\xi = C_1 = \text{vakio}$ kuvautuu (x, y) -tason käyräksi $\xi = C_1$ ja vastaavasti suora $\eta = C_2$ kuvautuu

käyräksi. Alkioiden dx, dy ja $d\xi, d\eta$ välinen yhteys on ketjusäännön nojalla

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad (4.192)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta, \quad (4.193)$$

eli

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad (4.194)$$

Merkitään (x, y) -tason paikkavektoria $\mathbf{OP}$

$$\mathbf{r} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad (4.195)$$

missä $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ ovat koordinaattiakselien suuntaiset yksikkövektorit. Käyrien $\xi = C_1$ ja $\eta = C_2$ tangentialvektorit ovat

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} d\xi = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{j} \right) d\xi \quad (4.196)$$

$$\vec{b} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} d\eta = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{j} \right) d\eta \quad (4.197)$$

Pinta-ala-alkio dA muodostetaan vektoritulona

$$dA = |\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{k}, \quad (4.198)$$

missä $\vec{k}$ on (x, y) -tasoa vastaan kohtisuora yksikkövektori. Kaavasta (4.198) seuraa

$$dA = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_{,\xi} & y_{,\xi} & 0 \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & 0 \end{vmatrix} d\xi d\eta = (x_{,\xi} y_{,\eta} - x_{,\eta} y_{,\xi}) d\xi d\eta, \quad (4.199)$$

eli

$$dA = \det \mathbf{J} d\xi d\eta = J d\xi d\eta. \quad (4.200)$$

Esimerkki 4.10 Muodosta suorakaiteen muotoisen isoparametrisen bilineaarisen elementin jäykkyyismatriisi kvasiharmoniselle yhtälölle.

Geometrian interpolaatio on

$$x = (N_2 + N_3)a = \frac{1}{2}(1 + \xi)a, \quad y = (N_3 + N_4)b = \frac{1}{2}(1 + \eta)b. \quad (4.201)$$

Kuvauksen Jacobin matriisin transpoosi supistuu diagonaalimatriisiksi

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}b \end{bmatrix}, \quad (4.202)$$

jonka käänteismatriisi on yksinkertaisesti

$$(\mathbf{J}^T)^{-1} = \mathbf{J}^{-T} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b} \end{bmatrix}, \quad (4.203)$$

ja determinantti

$$J = \det \mathbf{J} = \frac{1}{4}ab. \quad (4.204)$$

Kvasiharmonisen yhtälön jäykkymatriisille on johdettu lauseke

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} (k_{xx} \mathbf{N}_{,x}^T \mathbf{N}_{,x} + k_{yy} \mathbf{N}_{,y}^T \mathbf{N}_{,y}) dA, \quad (4.205)$$

joka tässä tapauksessa muuntuu muotoon

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(k_{xx} \frac{4}{a^2} \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi} + k_{yy} \frac{4}{b^2} \mathbf{N}_{,\eta}^T \mathbf{N}_{,\eta} \right) \frac{1}{4} abd\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(k_{xx} \frac{b}{a} \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi} + k_{yy} \frac{a}{b} \mathbf{N}_{,\eta}^T \mathbf{N}_{,\eta} \right) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (4.206)$$

Elementtimatriisin yksittäinen alkio on siis

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(k_{xx} \frac{b}{a} N_{i,\xi} N_{j,\xi} + k_{yy} \frac{a}{b} N_{i,\eta} N_{j,\eta} \right) d\xi d\eta. \quad (4.207)$$

Suorittamalla integroinnit, päädytään lopputulokseen

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k_{xx}b}{6a} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{k_{yy}a}{6b} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.208)$$

Esimerkki 4.11 Muodosta kvasiharmonisen yhtälön bilineaarisen isoparametrisen elementin alkion $K_{11}^{(e)}$ lauseke yleisessä tapauksessa.

Elementin alkion 11 lauseke on

$$K_{11}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} (k_{xx} N_{1,x}^2 + k_{yy} N_{1,y}^2) dA. \quad (4.209)$$

Siirrytään peruselementin (ξ, η) koordinaatistoon, jolloin tarvitaan globaalien koordinaattiakselien suhteen ilmoitettujen derivaattojen lausekkeet ilmaistuna luonnollisten koordinaattien avulla, eli joudutaan kääntämään yhteys (4.165)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{x_{,\xi}y_{,\eta} - y_{,\xi}x_{,\eta}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.210)$$

jossa J_{ij} :t ovat Jacobin matriisin komponentit. Lauseke (4.209) saa siten muodon

$$K_{11}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[k_{xx} \left(\frac{J_{22}N_{1,\xi} - J_{21}N_{1,\eta}}{J} \right)^2 + k_{yy} \left(\frac{-J_{12}N_{1,\xi} + J_{11}N_{1,\eta}}{J} \right)^2 \right] J d\xi d\eta, \quad (4.211)$$

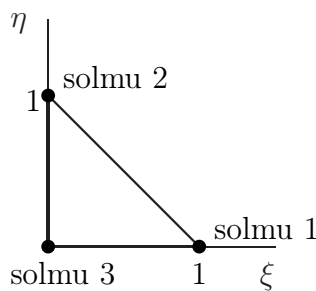
jossa $J = \det \mathbf{J}$. Yllä olevan kaltaiset isoparametrisen elementin jäykkyyshä matriisin alkiot integroidaan yleensä numeerisesti. Tähän seikkaan palataan myöhemmissä luvuissa.

4.8 Parametriset kolmioelementit

Aivan vastaavaan tapaan kuin nelikulmioelementtien tapauksessa voidaan kolmioelementtien geometria kuvata parametrisesti. Mikäli interpolaatiopolynomit lausutaan alakoordinaattien suhteen, on muistettava että vain kaksi kolmesta alakoordinaatista ovat riippumattomia. Toisaalta alakoordinaatit L_1 ja L_2 voidaan assosoida alla olevan kuvan 4.16 mukaisen peruskolmion luonnollisiin koordinaatteihin ξ ja η . Lineaariset interpolaatiofunktiot ovat siten

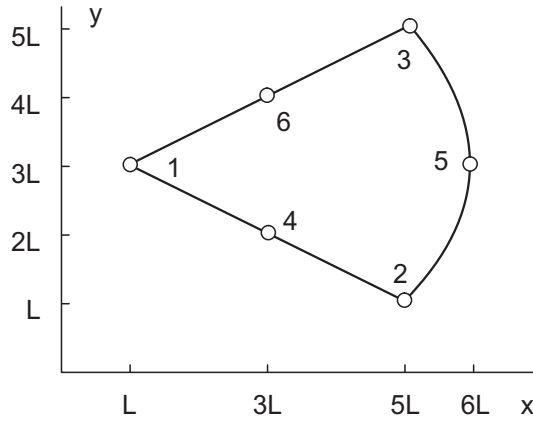
$$N_1 = L_1 = \xi, \quad N_2 = L_2 = \eta, \quad N_3 = L_3 = 1 - \xi - \eta. \quad (4.212)$$

Parametrin kolmioelementin käsittely selvinnee seuraavasta esimerkistä.



Kuva 4.16 Peruskolmio.

Esimerkki 4.12 Määritä oheisen kvadraattisen isoparametrin kolmioelementin lämpötilan gradientti kaarevalla reunalla, kun elementin solmulämpötilat ovat $u_1 = 0, u_2 = u_3 = 4\Delta, u_4 = u_6 = 2\Delta, u_5 = 5\Delta$.



Koska elementti on isoparametrinen interpoloidaan geometriaa samoilla funktioilla kuin lämpötilaakin, eli

$$x = \sum_{i=1}^6 N_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^6 N_i y_i, \quad u = \sum_{i=1}^6 N_i u_i,$$

missä x_i ja y_i ovat solmun i koordinaatit, u_i solmupistelämpötilat. Kvadraattiset interpolaatiofunktio $N_i, i = 1, \dots, 6$ ovat:

$$N_i = L_i(2L_i - 1), \quad N_{3+i} = 4L_i L_{i+} \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.213)$$

Korjoittamalla (ξ, η) -koordinaattien avulla ne ovat

$$N_1 = \xi(2\xi - 1), \quad (4.214)$$

$$N_2 = \eta(2\eta - 1), \quad (4.215)$$

$$N_3 = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta), \quad (4.216)$$

$$N_4 = 4\xi\eta, \quad (4.217)$$

$$N_5 = 4\eta(1 - \xi - \eta), \quad (4.218)$$

$$N_6 = 4\xi(1 - \xi - \eta). \quad (4.219)$$

Aivan vastaavalla tavalla kuin isoparametrysten nelikulmioelementtien yhteydessä, saadaan tarvittavat derivaatat rakennekoordinaatiston koordinaattien (x, y) suhteen ketjuderivoimalla. Geometriakuvauksen Jacobin matriisin transpoosi on

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.220)$$

Intepolaatiofunktioiden derivaatat reunalla 2, jolla $\xi \equiv 0$, ovat:

$$\begin{aligned} N_{1,\xi} &= -1, & N_{1,\eta} &= 0, \\ N_{2,\xi} &= 0, & N_{2,\eta} &= 4\eta - 1, \\ N_{3,\xi} &= -3 + 4\eta, & N_{3,\eta} &= 4\eta - 3, \\ N_{4,\xi} &= 4\eta, & N_{4,\eta} &= 0, \\ N_{5,\xi} &= -4\eta, & N_{5,\eta} &= 4 - 8\eta, \\ N_{6,\xi} &= 4 - 4\eta, & N_{6,\eta} &= 0. \end{aligned} \quad (4.221)$$

Jacobin matriisin muodostamisessa tarvittavien geometriaintepolaatioiden derivaatat reunalla 2 ovat:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i = -4(1 + \eta)L, \quad (4.222)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i = 4(1 - 2\eta)L, \quad (4.223)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i = -2L, \quad (4.224)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i = -4L. \quad (4.225)$$

Jacobin matriisi laskettuna reunalla 2 on

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} -4(1 + \eta) & -2 \\ 4(1 - 2\eta) & -4 \end{bmatrix} L, \quad \det \mathbf{J} = 24L^2, \quad (4.226)$$

ja sen käänteismatriisi on

$$(\mathbf{J}^T)^{-1} = \frac{1}{24L} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4(2\eta - 1) & -4(1 + \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (J^{-1})_{11} & (J^{-1})_{21} \\ (J^{-1})_{12} & (J^{-1})_{22} \end{bmatrix} \quad (4.227)$$

Nyt voidaan laskea gradientin termit

$$\begin{aligned} u_{,x} &= \frac{\partial u}{\partial x} = (J^{-1})_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + (J^{-1})_{21} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ &= (J^{-1})_{11} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} u_i + (J^{-1})_{21} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} u_i \\ &= \sum_{i=1}^6 \left[(J^{-1})_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + (J^{-1})_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] u_i \\ &= \frac{\Delta}{24L} \{ 2(4\eta - 1)4 + [-4(4\eta - 3) + 2(4\eta - 3)]4 + \\ &\quad + (-4 \cdot 4\eta)2 + [-4(-4\eta) + 2(4 - 8\eta)]5 + [-4(4 - 4\eta)]2 \} \\ &= \frac{\Delta}{L}. \end{aligned} \quad (4.228)$$

Gradientin x -komponentti on vakio koko reunalla 2. Tämä on oikein, sillä annettu lämpötilakenttä on $u(x, y) = \Delta x/L$, joten gradientti on vakio koko alueessa. Totea, että gradientin y -komponentti häviää identtisesti laskemalla tehtävä loppuun.

4.9 Hierarkinen interpolaatio kahdessa dimensiossa

4.9.1 Nelikulmioelementit

Hierarkisia interpolaatiofunktioita voidaan muodostaa useilla tavoilla. Seuraavassa esitetään kuitenkin vain yksi mahdollinen järjestelmä, jonka peruselementtinä on bilineaarinen nelikulmioelementti. Interpolaatiofunktiot voidaan luokitella kolmeen kategoriaan: solmuinterpolaatiofunktiot, sivumuodot ja sisäiset muodot. Seuraavassa esitetään yksi tapa konstruoida Serendipity-tyyppinen hierarkinen kantajärjestelmä.

1. *Solmumuotofunktiot* ovat tavanomaiset bilineaariset interpolaatiofunktiot:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (4.229)$$

2. *Sivumuotoja* on astetta p olevalla elementillä $4(p-1)$ kappaletta ($p \geq 2$), jotka liittyvät elementin sivujanoihin. Sivuuun 1, katso kuva 4.16, liittyvät sivumuodot ovat

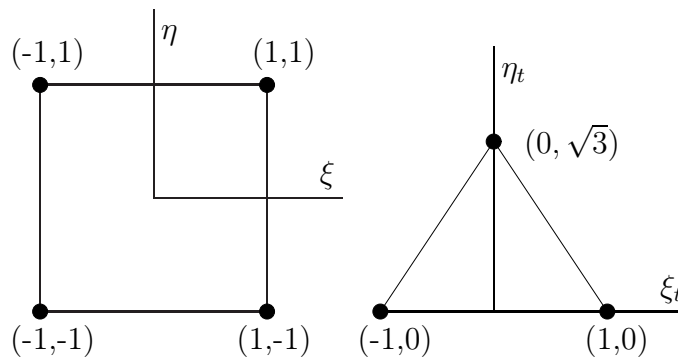
$$N_i^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)\psi_i(\xi), \quad i = 2, \dots, p, \quad (4.230)$$

missä funktiot $\psi_i(\xi)$ on määritelty yhtälöillä (3.21). Vastaavasti muut sivumuodot ovat

$$\begin{aligned} N_i^{(2)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \xi)\psi_i(\eta), \\ N_i^{(3)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \eta)\psi_i(\xi), \\ N_i^{(4)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi)\psi_i(\eta), \quad i = 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (4.231)$$

3. *Sisäisiä muotoja* on p -asteisessa Serendipity-tyyppisessä hierarkisessa interpolaatiossa $(p-2)(p-3)/2$ kappaletta ($p \geq 4$). Nämä voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\begin{aligned} N_1^{(0)} &= \psi_2(\xi)\psi_2(\eta), \\ N_2^{(0)} &= \psi_3(\xi)\psi_2(\eta), \\ N_3^{(0)} &= \psi_2(\xi)\psi_3(\eta), \\ N_4^{(0)} &= \psi_4(\xi)\psi_2(\eta), \\ N_5^{(0)} &= \psi_3(\xi)\psi_3(\eta), \\ N_6^{(0)} &= \psi_2(\xi)\psi_4(\eta), \quad \text{jne.} \end{aligned} \quad (4.232)$$



Kuva 4.17 Perusneliö ja peruskolmio.

4.9.2 Kolmioelementit

Hierarkiset interpolaatiofunktiot kolmiolle on kätevintä lausua alakoordinaattien avulla. Kolmion hierarkiset interpolaatiofunktiot on myös hyvä konstruoida siten, että ne sopivat yhteen vastaavan nelikulmioelementin hierarkisten muotojen kanssa. Määritellään tasasivuinen ns. peruskolmio ja lineaariset alakoordinaatit kolmion luonnollisten koordinaattien ξ_t ja η_t avulla, katso kuva 4.17:

$$L_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \xi_t - \frac{1}{\sqrt{3}} \eta_t \right), \quad (4.233a)$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \xi_t - \frac{1}{\sqrt{3}} \eta_t \right), \quad (4.233b)$$

$$L_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \eta_t. \quad (4.233c)$$

1. *Solmuinterpolaatiofunktiot* ovat samat kuin jo aikaisemmin esitetyt lineaarisen kolmioelementin interpolaatiofunktiot (4.233).
2. *Sivumuotoja* on $3(p-1)$ kappaletta, ja ne on konstruoitu siten, että ne sopivat yhteen nelikulmioelementin hierarkisten interpolaatiofunktioiden kanssa. Nelikulmioelementin sivumuodot laskettuna sivuilla ovat funktiot ψ_i (3.21). Koska ψ_i :t ovat funktioita, jotka häviävät sivun päätepisteissä $\xi = \pm 1$, termi $1 - \xi^2$ voidaan jakaa pois. Määritellään uudet funktiot

$$\frac{1}{4}(1 - \xi^2)\phi_i(\xi) = \psi_i(\xi), \quad i = 2, 3, \dots, p. \quad (4.234)$$

Esimerkiksi

$$\phi_2(\xi) = -\sqrt{6}, \quad \phi_3(\xi) = -\sqrt{10}\xi, \quad \phi_4(\xi) = -\sqrt{\frac{7}{8}}(5\xi^2 - 1). \quad (4.235)$$

Sivuihin 1,2,3 liittyvät interpolaatiomuodot voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} N_i^{(1)} &= L_1 L_2 \phi_i(L_2 - L_1), \\ N_i^{(2)} &= L_2 L_3 \phi_i(L_3 - L_2), \\ N_i^{(3)} &= L_1 L_3 \phi_i(L_1 - L_3), \quad i = 2, 3, \dots, p. \end{aligned} \quad (4.236)$$

3. *Sisäiset muodot* voidaan määritellä alakoordinaattien ja Legendren polynomien P_i tuloina. Astetta p olevalla elementillä (sisältäen kaikki astetta p olevat monomit) on $(p-1)(p-2)/2$ sisäistä muotoa, jotka saadaan seuraavaan tapaan:

$$\begin{aligned} N_1^{(0)} &= L_1 L_2 L_3, \\ N_2^{(0)} &= L_1 L_2 L_3 P_1(L_2 - L_1), \\ N_3^{(0)} &= L_1 L_2 L_3 P_1(2L_3 - 1). \end{aligned} \quad (4.237)$$

4.10 Yhteenveto

Luvussa esitettiin kolmio- ja nelikulmioelementtien interpolaatiofunktioiden muodostamisperiaatteet. Parametrinen kuvaus mahdollistaa kaarevareunaiset elementit. Isoparametrisessa elementissä sekä geometriaa että ratkaistavia funktioita kuvataan samoilla interpolaatiofunktioilla, ja ne ovatkin kaikkein yleisimmin käytettyjä elementtejä.

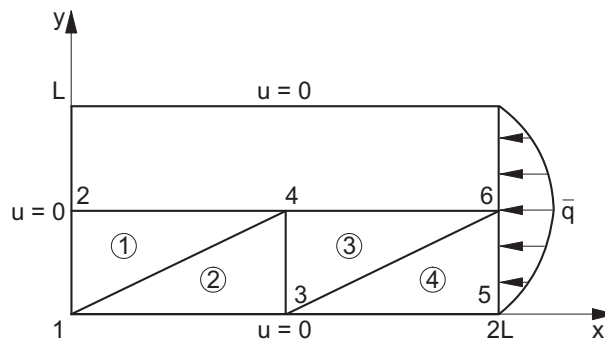
4.11 Harjoitustehtäviä

1. Johda heikko muoto (4.9):

$$\int_{\Omega} (\nabla \hat{u})^T \mathbf{D} \nabla u dA = \int_{\Omega} \hat{u} \bar{f} dA - \int_{S_q} \hat{u} \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} ds$$

komponenttimuodossa.

2. Ratkaise kuvan kaksidimensiainen lämmönjohtumistehtävä käyttäen lineaarisia kolmioelementtejä kuvan mukaisesti ottaen huomioon tehtävän symmetria. Materiaalin otaksutaan olevan isotrooppista ja sen lämmönjohtavuus on k . Kuormituksena on parabolisesti jakautunut lämpövuoto $\vec{q} = -4\bar{q}_c(y/L)(1 - y/L)\vec{i}$. reunalla $x = L$.



3. Määritä homogeenisesta isotrooppisesta aineesta valmistetun neliöpoikkileikkauksisen (sivun pituus L) sauvan vääntöjäykkyys käyttäen lineaarisia kolmioelementtejä ja sivulla 92 olevan esimerkin kaltaista neljän elementin verkkoa. Prandtin voimamenetelmän mukainen vääntötehtävä palautuu probleemaksi

$$-\Phi_{,xx} - \Phi_{,yy} = 2G\theta, \quad (4.238)$$

jossa $\Phi(x,y)$ on jännitysfunktio, joka saa reunalla arvon $\Phi = 0$. Vääntöjäyhyys saadaan yhtälöstä

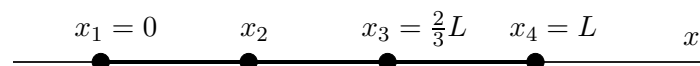
$$I_t = \frac{2}{G\theta} \int_{\Omega} \Phi(x,y) dA. \quad (4.239)$$

Määritä myös leikkausjännitysten jakaantuminen alueessa kun kuormitus on vääntymä $\theta = 1/L$. Leikkausjännitysten lausekkeet ovat

$$\tau_{zx} = \Phi_{,y}, \quad \tau_{zy} = -\Phi_{,x}. \quad (4.240)$$

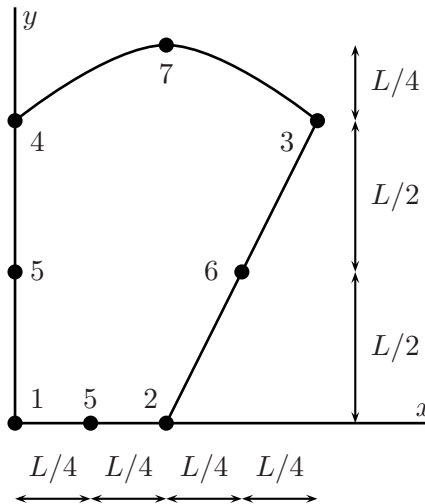
Voit käyttää hyväksesi sivulla 92 lasketun esimerkin tietoja soveltuvin osin.

4. Ratkaise edellinen tehtävä esimerkin 4.7 mukaisesti siirtymämenetelmällä. Käytä lineaarisia kolmioelementtejä ja sivulla 92 olevan esimerkin kaltaista neljän elementin verkkoa. Vertaa tulosta edellisen tehtävän ratkaisuun.
5. Määritä kuubisen isoparametrisen janaelementin solmun 2 sallittu alue kun muut solmut ovat kohdissa $x_1 = 0, x_3 = 2L/3, x_4 = L$.



6. Määritä kvadraattisen isoparametrisen janaelementin derivaatan lauseke globaalin koordinaatin x funktiona. Elementin solmupisteiden koordinaatit ovat $x_1 = 0, x_2 = \alpha L, x_3 = L$ ($\alpha > 0$). Missä rajoissa parametri α voi vaihdella? Interpoloitavan funktion lauseke on $u(x) = u_3(x/L)^2 = \alpha^2 u_3 N_2 + u_3 N_3$, missä $N_2 = 1 - \xi^2, N_3 = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)$. Piirrä isoparametrisen elementin derivaatan lauseke koordinaatin x funktiona α :n arvoilla $\alpha = 1/4$ ja $\alpha = 1/3$. Mitä voit sanoa tarkkuudesta?
7. Totea, että luvussa 4.9.1 esitetty kanta on Serendipity-tyyppinen.

8. Miten luvussa 4.9.1 esitettyä kantaa olisi muutettava, jotta saataisiin Lagrangen tyyppinen hierarkinen interpolaatio.
9. Oheisen redusoidun bikvadraattisen elementin solmupistelämpötilat ovat: $u_1 = u_2 = u_5 = 0, u_3 = 2\bar{u}, u_4 = \bar{u}, u_6 = 5/8\bar{u}, u_7 = 35/16\bar{u}, u_8 = 1/2\bar{u}$. Materiaali otaksutaan isotrooppiseksi ja sen lämmönjohtavuus on k . Määritä lämpövuovektori $\vec{q} = -k\nabla u$ solmussa 4.

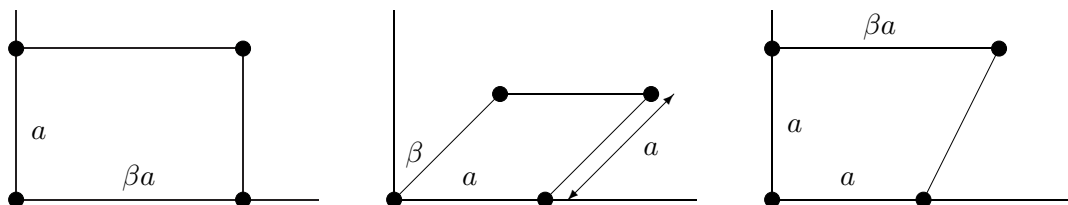


10. Nelikulmioelementin interpolaatio voidaan lausua muodossa

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 \quad (4.241)$$

Muodosta nelikulmioelementin interpolaatiofunktioiden $N_1 \dots N_4$ lausekkeet opetusmonisteen luvun 4.2 tyyliin. Elementin solmutkoordinaatit ovat $(0, 0); (a, 0); (2a, a); (a, a)$. Onko näin konstuoitu elementti yhteensopiva. Tarkastele u :n lauseketta y :n funktiona oikealla reunalla.

11. Muodosta oheisten isoparametrinen bilineaarisesti interpoloitujen nelikulmioelementtien geometriakuvauksen Jacobin matriisit. Määritä myös Jacobin matriisin ominaisarvot ja häiriöalttius (spektraalinormissa) parametrin β funktiona. Laske myös elementtien pinta-alat.

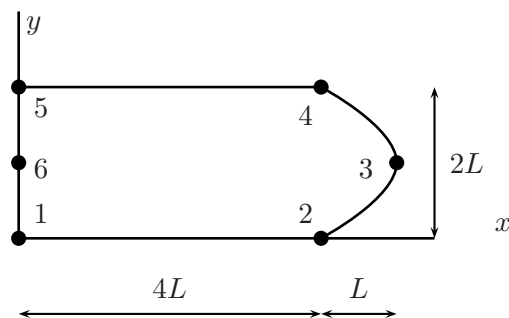


12. Muodosta isoparametrinen nelisolmuisen kolmioelementin solmuihin sidottujen interpolaatiofunktioiden lausekkeet $N_1 \dots N_4$. Muodosta geometriakuvauksen Jacobin

matriisi kolmiolle jonka solmujen koordinaatit ovat $(0,0); (a, -\frac{1}{2}a); (\beta a, 0); (a, \frac{1}{2}a)$. Laske myös Jacobin matriisin ominaisarvot ja häiriöalttius (spektraalinormissa) β :n funktiona sekä elementin pinta-ala. Mitkä ovat β :n sallitut arvot?

13. Muodosta Lagrangen tyyppiset kuusisolmuisen suorakaide-elementin interpolaatiofunktio $N_1, \dots, N_6$ perusneliössä, $(\xi, \eta) \in (-1, 1)$, kun interpolaatio on lineaarinen ξ -koordinaation suhteen ja kvadraattinen η -koordinaatin suhteen.

Laske muodonmuutokset oheisen isoparametrisen tasomuodonmuutostilan elementin linjalla $y = L$ kun solmupistesiertymät ovat: $u_1 = u_2 = u_5 = u_6 = v_1 = v_5 = v_6 = 0$ ja $u_3 = -5\Delta, u_4 = -8\Delta, v_2 = 8\Delta, v_3 = \frac{25}{2}\Delta, v_4 = 8\Delta$.



Luku 5

Mekaniikan variaatioperiaatteita

Luvussa tarkastellaan virtuaalisien työn ja potentiaalienergian minimin periaatetta kiinteän aineen mekaniikassa. Näytetään, että virtuaalisen työn ja potentiaalienergian minimin periaate ovat ekvivalentteja, mikäli materiaalia voidaan kuvata tilafunktiolla, muodonmuutosenergialla, ja mikäli ulkoiset voimat voidaan johtaa potentiaalista. Virtuaalisen työn periaate on siten yleis-pätevämpi ja sitä voidaan käyttää elementtimenetelmän perustana olevana heikona muotona. Lisäksi näytetään, että virtuaalisen työn periaate on ekvi-valentti tasapainoehtojen ja mekaanisten eli jännitysreunaehtojen kanssa.

5.1 Johdanto

Tarkastellaan seuraavassa eräitä mekaniikan keskeisiä variaatioperiaatteita, kuten virtuaalisen työn ja potentiaalienergian minimin periaatteita sekä niistä johdettuja modifioituja menetelmiä. Käsittely on tavoitehakuista, eli variaatioperiaatteet esitetään siten, että ne soveltuvat suoraan nykyisin käytössä olevien yleisten elementtimenetelmäformulaatioiden perustaksi, ja tämän vuoksi m.m. komplementaarisen virtuaalisen työn ja komplementaarienergian minimin periaatteet jätetään vaille huomiota. Johdatus esitettäviin variaatioperiaatteisiin suoritetaan yleisen kolmiulotteisen pienten siirtymien elastisuusteorian yhtälöiden avulla, jonka lisäksi rajoitutaan staattisiin tapauksiin. Mikäli lukija haluaa syventää tietojaan mekaniikan variaatioperiaatteista, on K. Washizun *Variational Methods in Elasticity and Plasticity* [32] ja C. Lanczosin *The Variational Principles of Mechanics* [19] teokset mitä suositeltavimpia.

Kerrataan aluksi kolmiulotteisen elastostatiikan perusyhtälöt. Tarkastellaan kappaletta $\mathcal{B}$, jonka rajoittamaa aluetta merkitään Ω :llä ja sen reunapintaa Γ :llä ($\Gamma = \partial\Omega$). Jaetaan reunapinta vielä kahteen toisistaan erilliseen osaan Γ_u ja Γ_t siten, että $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$. Lineaarisen elastisuusteorian perusyhtälösystemi muodostuu täten seuraavista relaatioista.

1. *Tasapainoyhtälöt*: Kappaleeseen $\mathcal{B}$ vaikuttavat pinnalle jakautuneet traktiovoimat $\mathbf{t}$ ja tilavuusvoimat $\mathbf{f}$. Jotta kappale olisi tasapainossa on resultoivan

voiman hävittävä, eli

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} dV = \mathbf{0}. \quad (5.1)$$

Traktiovektori $\mathbf{t}$ määritellään jännitysmatriisin $\boldsymbol{\sigma}$ ja pinnan yksikkönormaalien $\mathbf{n}$ avulla seuraavasti

$$\mathbf{t} = \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}, \quad (5.2)$$

missä jännitysmatriisi komponenteittain kirjoitettuna on

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Huomaa, että määritelmä (5.2) kiinnittää jännitysmatriisin indeksien merkityksen: ensimmäinen indeksi kertoo pinnan normaalin- ja toinen jännityskomponentin suunnan.¹ Sijoitetaan tämä resultanttimuotoiseen tasapainoyhtälöön (5.1), saadaan

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} dV = \mathbf{0}. \quad (5.4)$$

Sovelletaan Gaussin lauseen, eli divergenssiteoreeman yleistystä, jolloin päädytään yhtälöön

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{f}) dV = \mathbf{0}, \quad (5.5)$$

mistä saadaan tasapainoyhtälön (5.1) paikallinen muoto

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T = \mathbf{f}. \quad (5.6)$$

Komponenttimuodossa kirjoitettuna tasapainoyhtälöt ovat

$$\begin{cases} -\sigma_{x,x} - \tau_{yx,y} - \tau_{zx,z} = f_x, \\ -\tau_{xy,x} - \sigma_{y,y} - \tau_{zy,z} = f_y, \\ -\tau_{xz,x} - \tau_{yz,y} - \sigma_{z,z} = f_z. \end{cases} \quad (5.7)$$

Matriisiin $\mathbf{A}$ kohdistuva divergenssioperaattori määritellään siten

$$(\operatorname{div} \mathbf{A})_i = \sum_j \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}, \quad (5.8)$$

missä on määritelty $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$. Liikemäärän momentin taseen pe-

¹Jännitysmatriisin komponenttien järjestys voitaisiin määritellä myös toisinpäin: ensimmäinen indeksi kertoisi komponentin suunnan ja toinen pinnan normaalin suunnan. Tällöin traktiovektori voidaan kirjoittaa muodossa $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$. Itse asiassa tämä määrittely on yleisempi alan modernissa kirjallisuudessa.

riiateesta seuraa Cauchyn kontinuumimallin jännitysmatriisin symmetrisyys, täten siis $\tau_{xy} = \tau_{yz}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ ja $\tau_{zx} = \tau_{xz}$.

2. Muodonmuutos-siirtymä yhteydet:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym grad } \mathbf{u}, \quad (5.9)$$

missä siirtymävektorin $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$ gradientti ja matriisin symmetrinen osa määritellään yhtälöillä

$$\text{grad } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{,x} & u_{,y} & u_{,z} \\ v_{,x} & v_{,y} & v_{,z} \\ w_{,x} & w_{,y} & w_{,z} \end{bmatrix}, \quad \text{sym } \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \quad (5.10)$$

josta seuraa

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} & \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) & \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,x}) \\ \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) & v_{,y} & \frac{1}{2}(v_{,z} + w_{,y}) \\ \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,x}) & \frac{1}{2}(v_{,z} + w_{,y}) & w_{,z} \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

3. Jännitys-muodonmuutos yhteydet:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{tai kääntäen} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{C} : \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.12)$$

Mikäli materiaalin otaksutaan noudattavan isotrooppista, lineaarikimmoista mallia, on voidaan materiaalioperaattorit lausua muodossa

$$\mathcal{D} : \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.13)$$

tai kääntäen

$$\mathcal{C} : \boldsymbol{\sigma} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} + \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{\sigma}, \quad (5.14)$$

missä λ ja μ ovat Lamén vakiot joiden suhde kimmokertoimeen E , leikkausmoduuliin G ja Poissonin vakioon ν on seuraava

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (5.15)$$

4. Mekaaniset reunaehdot:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_S \quad \text{reunalla} \quad \Gamma_t. \quad (5.16)$$

5. *Kinemaattiset (geometriset) reunaehtot:*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S \quad \text{reunalla} \quad \Gamma_u. \quad (5.17)$$

Edellä esitetty merkintatapa on varsin kompakti, erityisesti mikäli käytetään indeksinotaatiota ja Einsteinin summaussääntöä, jossa lausekkeessa kahdesti esiintyvien indeksien suhteen suoritetaan summaus. Tämän esityksen tarpeita silmälläpitäen se ei kuitenkaan ole tarpeen.

Mikäli jännitys- ja muodonmuutosmatriisiin alkiot kootaan vektoreiksi

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \end{bmatrix}^T \quad (5.18)$$

ja

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} \end{bmatrix}^T, \quad (5.19)$$

voidaan edellä esitetyt tasapainoyhtälöt, kinemaattiset relaatiot ja konstitutiivinen yhteys (materiaalimalli) esittää seuraavalla tavalla.

1. *Tasapainoyhtälöt:*

$$-\mathbf{G}^T \mathbf{s} = \mathbf{f}. \quad (5.20)$$

2. *Muodonmuutos-siirtymä yhteydet:*

$$\mathbf{e} = \mathbf{G}\mathbf{u}. \quad (5.21)$$

Tasapaino-operaattori on

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

ja jonka transpoosi välittää kuvauksen siirtymiltä muodonmuutoksille.

3. *Konstitutiivinen malli:*

$$\mathbf{s} = \mathbf{D}\mathbf{e} \quad (5.23)$$

Lineaarielastisen, isotrooppisen ainemallin jäykkyyismatriisi (kimmomatriisi)

on muotoa

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

5.2 Virtuaalisen työn periaate

Aloitetaan sovellutusten kannalta ehkä tärkeimmästä ja samalla vanhimmasta ² mekaniikan variaatioperiaatteesta, eli virtuaalisen työn periaatteesta, jota kutsutaan myös nimellä virtuaalisten siirtymien periaate. Oletetaan kappaleen $\mathcal{B}$ olevan tasapainossa ulkoisten tilavuusvoimien ja reunaehtojen suhteen. Tällöin jännityskomponentit $\sigma_x, \sigma_y, \dots$, ja τ_{zx} toteuttavat tasapainoehdot (5.6) kappaleen jokaisessa kohdassa, eli

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T = \mathbf{f}, \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad (5.25)$$

ja mekaaniset reunaehdot reunapinnan osalla Γ_t

$$\mathbf{t} - \mathbf{t}_s = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma_t. \quad (5.26)$$

Otaksutaan nyt, että kappale kokee mielivaltaisen kuvitteellisen eli *virtuaalisen* muutoksen $\delta \mathbf{u} = [\delta u, \delta v, \delta w]^T$ tasapainossa olevaan siirtymätilaan $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$ nähden.

Tällöin on tasapainoehtojen perusteella voimassa

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot (-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T - \mathbf{f}) dV + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{t}_s) dS = 0, \quad (5.27)$$

jossa dV ja dS ovat kappaleen $\mathcal{B}$ differentiaalinen tilavuusalkio ja pinta-ala-alkio.

Valitaan nyt virtuaalinen siirtymäkenttä mielivaltaisesti mutta kuitenkin siten, että geometriset eli kinemaattiset reunaehdot toteutuvat reunan osalla Γ_u , eli

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (x, y, z) \in \Gamma_u. \quad (5.28)$$

Käyttämällä identiteettiä ($\mathbf{v}$ on vektori ja $\mathbf{A}$ matriisi)

$$\operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = \operatorname{grad}(\mathbf{v}) : \mathbf{A} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{A}, \quad (5.29)$$

²Virtuaalisen työn periaatteen lienee ensimmäisenä formuloinut Jean Bernoulli (1667-1748) vuonna 1725. Menettelyä, jota voitaisiin kutsua virtuaalisten siirtymien periaatteeksi, käytti kuitenkin jo Leonardo da Vinci (1452-1519) analysoidessaan taljojen ja vipuvarsien muodostamaa systeemiä.

missä kaksoispistetulo määritellään

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_i \sum_j A_{ij} B_{ij}, \quad (5.30)$$

saadaan lausekkeen (??) ensimmäistä termiä muokattua

$$\int_{\Omega} [\text{grad } \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma}^T - \text{div}(\delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T) - \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}] dV + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{t}_S) dS = 0. \quad (5.31)$$

Käyttämällä divergenssiteoreemaa saadaan

$$\int_{\Omega} (\text{grad } \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma}^T - \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) dV - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{t}_S) dS = 0. \quad (5.32)$$

Ottamalla huomioon jännitysmatriisiin symmetrisyys ja virtuaalisen siirtymän häviäminen reunan Γ_u osalla, saadaan

$$\int_{\Omega} \text{sym grad } \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_S dS = 0. \quad (5.33)$$

Ottamalla huomioon muodonmuutoksen määritelmä (5.9) saadaan virtuaalisen työn yhtälö muotoon

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_S dS = 0, \quad (5.34)$$

missä symmetrinen virtuaalinen muodonmuutosmatriisi $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym grad } \delta \mathbf{u}$ sisältää komponentit

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_x &= \delta u_{,x}, & \delta \varepsilon_y &= \delta v_{,y}, & \delta \varepsilon_z &= \delta w_{,z}, \\ \delta \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(\delta u_{,y} + \delta v_{,x}), & \delta \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}(\delta w_{,y} + \delta v_{,z}), & \delta \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2}(\delta u_{,z} + \delta w_{,x}). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Komponenttimuodossa virtuaalisen työn yhtälö (5.34) on pitkäkö lauseke

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV \\ & - \int_{\Omega} (f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w) dV - \int_{\Gamma_t} (t_{Sx} \delta u + t_{Sy} \delta v + t_{Sz} \delta w) dS = 0, \end{aligned} \quad (5.36)$$

missä liukumien γ_{ij} määritellään

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}. \quad (5.37)$$

Yhtälöt (5.28), (5.34) ja (5.35) ovat virtuaalisen työn periaatteen matemaattinen asu. Periaate pätee mielivaltaisille infinitesimaalisille virtuaalisille siirtymille, jotka toteuttavat kinemaattiset reunaehdot. Edellä esitetty päättelyketju voidaan

myös kääntää. Siten virtuaalisen työn periaate on ekvivalentti *tasapainoyhtälöiden ja mekaanisten reunaehtojen muodostaman systeemin kanssa*. Lisäksi on syytä huomauttaa että periaate pätee *riippumatta* siitä millaisia ovat materiaalia kuvaavat lait eli jännitysten ja venymien väliset yhteydet.

Sanallisesti virtuaalisen työn yhtälö (VTY) voidaan esittää seuraavasti: *Otak- sutaan että mekaaninen systeemi on tasapainossa siihen vaikuttavien ulkoisten voimien ja geometrysten rajoitteiden alaisena. Siten systeemiin vaikuttavien ulkoisten ja sisäisten voimien virtuaalisten töiden summa kaikkien geometriset rajoitteet to- teuttavien infinitesimaalisten siirtymien suhteen häviää.*

5.3 Potentiaalienergian minimin periaate

Johdetaan potentiaalienergian minimin periaate juuri esitetystä virtuaalisen työn periaatteesta. Materiaalilaista (5.12) voidaan johtaa tilafunktio $U(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{zx})$ siten, että

$$\delta U = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \dots + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}, \quad (5.38)$$

jossa muodonmuutosenergiafunktio U ³ on lineaarisen isotrooppisesti kimmoisan aineen tapauksessa

$$U = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \mu (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2} \mu (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2). \quad (5.39)$$

Voidaan todeta, että muodonmuutosenergiafunktio on aina positiivinen, mikäli venymät ovat nollasta eroavia, eli

$$U(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} > 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}, \quad (5.40)$$

joten materiaalin jäykkyysmatriisilta $\mathbf{D}$ vaaditaan aidosti positiivista definiittisyyttä. Huomaa, että tämä asettaa rajoituksia materiaalivakioiden välille. Myöhempää tarvetta silmälläpitäen kirjoitetaan $U = U(u, v, w)$, sillä venymät $\boldsymbol{\varepsilon}$ voidaan lausua siirtymien u, v ja w funktioina kinemaattisten yhteyksien (5.9) avulla.

Kun muodonmuutosenergiafunktion olemassaolo on taattu, voidaan virtuaalisen työn yhtälön (5.34) ensimmäisen termin integrandi kirjoittaa muotoon

$$\sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \dots + \tau_{zx} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) = \delta U(u, v, w) \quad (5.41)$$

muistaen, että $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$ ovat todellisen ratkaisun jännityskomponentit ja $\delta u, \delta v$ ja δw ovat virtuaaliset muutokset todellisiin siirtymäkomponentteihin nähden. Täten

³Tarkkaan ottaen pitäisi puhua muodonmuutosenergiatiheydestä, tai muodonmuutosenergiasta tilavuusyksikköä kohden.

virtuaalisen työn periaate (5.34) voidaan nyt muuntaa muotoon

$$\begin{aligned} \delta \int_{\Omega} U(u, v, w) dV - \int_V (f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w) dV \\ - \int_{\Gamma_t} (t_{sx} \delta u + t_{sy} \delta v + t_{sz} \delta w) dS = 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Tämä lauseke on hyödyllinen niissä kimmoteorian tehtävissä, joissa ulkoiset kuorimitukset eivät ole johdettavissa potentiaalfunktiosta.

Seuraavaksi otaksutaan, että tilavuusvoimat $\mathbf{f}$ ja pintavoimat $\mathbf{t}_S$ ovat johdettavissa potentiaalfunktioista V_f ja V_t siten, että

$$-\delta V_f = -\frac{\partial V_f}{\partial u} \delta u - \frac{\partial V_f}{\partial v} \delta v - \frac{\partial V_f}{\partial w} \delta w = f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w, \quad (5.43a)$$

$$-\delta V_t = -\frac{\partial V_t}{\partial u} \delta u - \frac{\partial V_t}{\partial v} \delta v - \frac{\partial V_t}{\partial w} \delta w = t_{sx} \delta u + t_{sy} \delta v + t_{sz} \delta w. \quad (5.43b)$$

Tällöin voidaan variaatioperiaate (5.42) muuntaa muotoon

$$\delta \Pi = 0, \quad (5.44)$$

jossa

$$\Pi = \int_{\Omega} [U(u, v, w) + V_f(u, v, w)] dV + \int_{\Gamma_t} V_t(u, v, w) dS \quad (5.45)$$

on kokonaispotentiaalienergia. Periaate (5.44) ilmoittaa, että *kaikkien kinemaattisesti luvallisten siirtymien u , v ja w joukossa todelliset siirtymät antavat kokonaispotentiaalienergialle stationäärisen arvon.*⁴

Otaksutaan, että tilavuusvoimat (f_x, f_y, f_z) , pintavoimat (t_{sx}, t_{sy}, t_{sz}) ja annetut siirtymät (u_S, v_S, w_S) ovat määrättyjä ja säilyttävät suuntansa sekä suuruutensa variaation tapahtuessa. Siten potentiaalit (5.43) voidaan kirjoittaa muodossa

$$-V_f = f_x u + f_y v + f_z w, \quad (5.46a)$$

$$-V_t = t_{sx} u + t_{sy} v + t_{sz} w, \quad (5.46b)$$

jolloin päädytään systeemin (5.6), ... , (5.17) variaatioperiaatteeseen, jota kutsutaan potentiaalienergian minimin periaatteeksi: *Kaikkien mahdollisten kinemaattisesti luvallisten siirtymätilojen joukosta todelliset siirtymät antavat kokonaispotentiaalienergialle*

$$\Pi = \int_{\Omega} U(u, v, w) dV - \int_{\Omega} (f_x u + f_y v + f_z w) dV - \int_{\Gamma_t} (t_{sx} u + t_{sy} v + t_{sz} w) dS \quad (5.47)$$

⁴Sana "kokonais" jätetään usein jatkossa pois ja käytetään vain termiä potentiaalienergia kokonaispotentiaalienergian sijasta.

absoluuttisen minimin.

Näytetään nyt, että potentiaalienergia (5.47) todella saavuttaa minimin luvallisten siirtymäkenttien joukossa. Olkoon todellinen siirtymätila u, v, w ja siitä varioimalla saatu mielivaltainen kinemaattiset reunaehdot toteuttava siirtymätila u^*, v^*, w^* , eli $u^* = u + \delta u, v^* = v + \delta v, w^* = w + \delta w$. Tarkastellaan potentiaalienergian lauseketta

$$\Pi(u^*, v^*, w^*) = \Pi(u, v, w) + \delta\Pi + \delta^2\Pi, \quad (5.48)$$

jossa $\delta\Pi$ on potentiaalienergian siirtymien suhteen lineaarinen ensimmäinen variaatio ja $\delta^2\Pi$ on siirtymien suhteen kvadraattinen toinen variaatio. Koska todellinen siirtymätila antaa funktionaalille stationääriarvon yhtälön (5.44) mukaan, häviää potentiaalienergian ensimmäinen variaatio ja koska muodonmuutosenergiafunktio U on positiivinen, katso epäyhtälöä (5.40), toteuttaa toinen variaatio epäyhtälön

$$\delta^2\Pi = \int_V U(\delta u, \delta v, \delta w) dV \geq 0, \quad (5.49)$$

jossa yhtäsuuruus tulee kyseeseen ainoastaan, kun virtuaalisista siirtymistä derivoidut muodonmuutoskomponentit ovat identtisesti nollia. Tämä taas on mahdollista vain, mikäli virtuaalinen siirtymätila kuvaa jäykän kappaleen liikettä, eli reunaehdot ovat riittämättömiä yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolon takaamiseen. Täten mikäli jäykän kappaleen liike on siirtymäreunaehdoin estetty, pätee potentiaalienergialle epäyhtälö

$$\Pi_{\text{luvallinen}} \geq \Pi_{\text{todellinen}}, \quad (5.50)$$

jossa alaindeksit viittaavat siirtymätiloihin. Koska virtuaalisen siirtymän suuruudelle ei ole asetettu mitään vaatimuksia, voidaan todeta, että potentiaalienergian absoluuttinen minimi saavutetaan todellisten siirtymien arvoilla.

5.4 Muunnoksia potentiaalienergian minimin periaatteesta

Potentiaalienergian minimin periaatteen (5.45) soveltaminen vaatii siirtymäfunktioilta tietynasteista säännöllisyyttä sekä kinemaattisten reunaehtojen toteuttamista. Numeerisia menetelmiä silmälläpitäen on joissakin tapauksissa edullista lieventää näitä vaatimuksia. Kertauksena voidaan kirjoittaa potentiaalienergian minimin periaate seuraavasti: etsitään minimi potentiaalienergialle

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} [U(\mathbf{u}) - \mathbf{f}^T \mathbf{u}] dV - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_S^T \mathbf{u} dS \quad (5.51)$$

side-ehdoilla

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S, \quad \text{reunalla } \Gamma_u. \quad (5.52)$$

Mikäli halutaan päästä eroon side-ehdoista, jotka siis rajaavat kinemaattisesti luovallisten siirtymäfunktioiden joukkoa, voidaan ne ottaa mukaan potentiaalienergian funktionaaliin (5.51) Lagrangen kertojien avulla, jolloin saadaan muunnettu funktionaali

$$\Pi^{m1}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = \int_{\Omega} [U(\mathbf{u}) - \mathbf{f}^T \mathbf{u}] dV - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_S^T \mathbf{u} dS - \int_{\Gamma_u} \mathbf{p}^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S) dS, \quad (5.53)$$

jossa $\mathbf{p}$ on Lagrangen kertojista koostuva vektori. Nyt funktionaalin (5.53) varioitavina muuttujina ovat riippumattomat suureet $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{p}$ ilman mitään side-ehdota.

Funktionaalin (5.53) stationaarisuusehdosta seuraa, että Lagrangen kertojat ovatkin traktiokomponentit pinnalla Γ_u , eli

$$\mathbf{p} = \mathbf{t}(\mathbf{u}) \quad \text{reunalla } \Gamma_u. \quad (5.54)$$

Kaavan (5.54) perusteella Lagrangen kertojat voidaan eliminoida funktionaalista (5.53) ja uusi modifioitu funktionaali voidaan kirjoittaa muodossa

$$\Pi^{m2}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} [U(\mathbf{u}) - \mathbf{f}^T \mathbf{u}] dV - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_S^T \mathbf{u} dS - \int_{\Gamma_u} \mathbf{t}(\mathbf{u})^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S) dS, \quad (5.55)$$

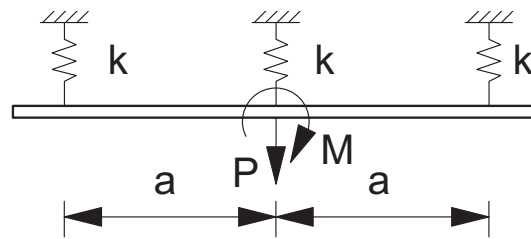
jossa varioitavana suureena on vain siirtymävektori $\mathbf{u}$ ilman mitään side-ehdota.

Elementtimenetelmässä approksimoidaan tuntemattomia siirtymäfunktioita paikallisesti kunkin elementin alueella tietynasteisilla polynomeilla. Jotta funktionaalien, esimerkiksi (5.45), (5.47), (5.53) tai (5.55) integraalilausekkeet olisivat määriteltäviä, on jatkuvuusominaisuuksien oltava voimassa elementin rajapintojen yli. Tämä saattaa joissain tapauksissa johtaa monimutkaisiin ja hankaliin ehtoihin, joita pitäisi pystyä lieventämään. Eräs mahdollinen tapa on konstruoida modifioituja funktionaaleja, joissa jatkuvuusvaatimukset ovat lievemät. Tähän asiaan palataan vielä lyhyesti laattaelementtien yhteydessä, mutta asiasta kiinnostuneet voivat tutustua muunnettuihin variaatioperiaatteisiin esimerkiksi Washizun teoksen luvuista 13.4-13.5 [32].

5.5 Harjoitustehtäviä

1. Kuvan massatonta, jäykkää sauvaa kuormittavat pistemomentti M ja pistekuorma P . Jousien jäykköysvakio on k . Ratkaise tasapainotilaa vastaavat jousivoimat soveltamalla

- (a) virtuaalisen työn periaatetta ja
- (b) potentiaalienergian minimin periaatetta.



2. Johda muodonmuutosenergian lausekkeet

- (a) tasoristikkosauvalle,
- (b) Eulerin-Bernoullin tasopalkille,
- (c) tasojännitystilassa olevalle levyalkiolle ja
- (d) Kirchhoffin laatta-alkiolle.

Materiaalin otaksutaan noudattavan lineaarisesti kimmoisan isotrooppisen aineen mallia eli Hooken lakia.

3. Näytä, että Lagrangen kertojen $\mathbf{p}$ fysikaalinen tulkinta funktionaalissa (5.53) on traktiovektori.

Luku 6

Kontinuumielementtejä

Kontinuumielementtien muodostaminen on melko suoraviivainen yleistys kaksidimensioisen lämmönjohtumisyhtälön tapauksesta. Elastisuusprobleeman ratkaisu elementtimenetelmällä tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilassa on samankaltainen, ainoa ero on materiaalin jäykkyysmatriisissa. Elementtimenetelmän perustana oleva heikko muoto on virtuaalisen työn yhtälö.

6.1 Tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilan elementit

Tarkastellaan nyt kimmoteorian yhtälöitä (x, y) -tasossa. Kaksi erilaista tapausta voidaan erotella:

1. *tasojännitystilasta*, jossa tason pinnan normaalin suuntainen jännityskomponentti häviää, eli $\sigma_z \equiv 0$, (myös $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$) sekä
2. *tasomuodonmuutostilasta*, jossa vastaavasti tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa muodonmuutoskomponentti häviää: $\epsilon_z \equiv 0$ (myös $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$).

Aloitetaan tasomuodonmuutostilan käsittelyllä. Nollasta eroavat muodonmuutos- ja jännityskomponentit karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa ovat

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T. \quad (6.1)$$

Tasomuodonmuutostilan konstitutiivinen yhteys saadaan suoraan yleisestä kolmi-dimensioisesta materiaalista, katso luku 5.1, jättämällä nollamuodonmuutoksia ja -jännityksiä vastaavat sarakkeet kirjoittamatta. Kimmoisan isotrooppisen aineen tapauksessa on tasomuodonmuutostilan konstitutiivinen yhtälö seuraavanlainen:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (6.2)$$

Yllä oleva materiaalilaki kirjoitetaan usein muodossa jossa jännityskomponentti σ_z jätetään merkitsemättä jännitysvektoriin $\mathbf{s}$, eli tällöin

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (6.3)$$

Tasomuodonmuutostilaa vastaava virtuaalisen työn yhtälö on (yksikön paksuista levyä kohden)

$$\int_{\Omega} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dA = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} dA + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}_S ds, \quad (6.4)$$

missä siirtymävektori $\mathbf{u}$ pitää sisällään x ja y -akselin suuntaiset siirtymäkomponentit $u:n$ ja $v:n$. Muodonmuutoskomponenttien virtuaaliset muutokset ovat

$$\delta \epsilon_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x}, \quad \delta \epsilon_y = \frac{\partial \delta v}{\partial y}, \quad \delta \gamma_{xy} = \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x}. \quad (6.5)$$

Kinemaattinen yhteys voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \text{eli} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{G}\mathbf{u}. \quad (6.6)$$

Virtuaalisille siirtymille ja virtuaalisille muodonmuutoksille pätee tietenkin yhtälö $\delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{G}\delta \mathbf{u}$. Ottamalla huomioon kinemaattinen yhteys (6.6) ja materiaalilaki (6.3) saadaan virtuaalisen työn yhtälö muotoon

$$\int_{\Omega} (\mathbf{G}\delta \mathbf{u})^T \mathbf{D}\mathbf{G}\mathbf{u} dA = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} dA + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}_S ds. \quad (6.7)$$

Virtuaalisen työn yhtälö sisältää siirtymien ensimmäisiä derivaattoja. Täten elementtimenetelmän interpolaatiofunktioiksi kelpaavat C_0 -jatkuvat polynomit. Olkoon käytössä elementti, jossa on m solmua ja interpoloidaan molempia siirtymäkompo-

nentteja samanlaisilla funktioilla, eli

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^m N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_m & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{N} \mathbf{u}^{(e)}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Sijoittamalla tämä siirtymäotaksuma virtuaalisen työn yhtälöön saadaan elementti-kohtaisiksi lausekkeiksi

- sisäisten jännitysten tekemälle virtuaaliselle työlle

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^{(e)T} \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{GN})^T \mathbf{DGN} d\mathbf{A} \mathbf{u}^{(e)} &= \delta \mathbf{u}^{(e)T} \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{DB} d\mathbf{A} \mathbf{u}^{(e)} \\ &= \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \end{aligned} \quad (6.9)$$

- ja ulkoisten voimien tekemälle virtuaaliselle työlle

$$\delta \mathbf{u}^{(e)T} \left(\int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dA + \int_{\Gamma_t^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t}_S ds \right) = \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)}, \quad (6.10)$$

missä elementin kuormavektoriin tulee termi reunakuormituksesta mikäli elementin jokin reuna on reunan osalla Γ_t .

Siirtymä-muodonmuutosmatriisi $\mathbf{B}$ voidaan lohkoa solmukohtaisiin osiin seuraavasti:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{B}_m \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

missä

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

Derivaatat globaalien x, y -koordinaattien suhteen saadaan derivaattoina peruselementin luonnollisten koordinaattien suhteen kuten on aiemmin esitetty.

Tasojännitystilän elementti on täysin tasomuodonmuutostilan elementin kaltainen. Ainoa ero on se, että materiaalin jäykkyyismatriisi on erilainen. Tasojännitystilän ehtosta $\sigma_z = 0$ voidaan muodonmuutoskomponentti ϵ_z ratkaista

$$\lambda \epsilon_x + \lambda \epsilon_y + (\lambda + 2\mu) \epsilon_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_z = -\frac{\lambda(\epsilon_x + \epsilon_y)}{\lambda + 2\mu}. \quad (6.13)$$

Sijoittamalla tämä takaisin kolmidimensioiseen konstitutiiviseen yhtälöön, saadaan

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} + 2\mu & \bar{\lambda} & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (6.14)$$

missä on merkitty

$$\bar{\lambda} = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu}. \quad (6.15)$$

Siirtymä-muodonmuutosmatriisi $\mathbf{B}$ on identtinen tasomuodonmuutostilan elementin kanssa.

6.2 Pyörähdysymmetrisen tilan elementti

Pyörähdysymmetrisesti kuormitetun pyörähdysymmetrisen kappaleen ratkaisu muistuttaa tasomuodonmuutostilan ratkaisua. Pyörähdyskappale muodostuu, kun rz -tason alue pyörähtää z -akselin ympäri. Pyörähdysymmetristä kappaletta voidaan tutkia vain tarkastelemalla halkileikkauksen puolikasta.

Merkitään rz -tason siirtymiä symboleilla u ja w aivan vastaten tasojännitys- ja tasomuodonmuutostehtävissä tason xy siirtymiä u ja v . Muodonmuutoskomponenttien lausekkeet sylinterikoordinaatistossa ovat

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,r} \\ w_{,z} \\ r^{-1}u \\ u_{,z} + w_{,r} \end{Bmatrix}. \quad (6.16)$$

Konstitutiivinen laki saadaan suoraan kolmiulotteisen tilan materiaalilaista ja on muotoa

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix}. \quad (6.17)$$

Otaksumalla siirtymille samanlainen interpolaatio kuin tasotehtävissäkin (6.8) saadaan siirtymä-muodonmuutosmatriisiksi

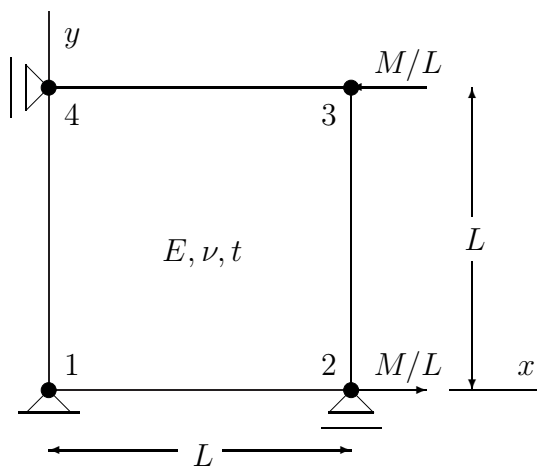
$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_m], \quad (6.18)$$

missä

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,r} & 0 \\ 0 & N_{i,z} \\ r^{-1}N_i & 0 \\ N_{i,z} & N_{i,r} \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

6.3 Esimerkkejä

Esimerkki 6.1 Määritä oheisen yhdestä bilineaarisesti interpoloidusta taso-jännitystilan elementistä muodostetun rakennemallin siirtymät ja jännitystila. Rakenne on kuormitettu momenttikuormalla M joka voidaan aikaansaada kahdella pistekuormalla solmuissa 2 ja 3. Rakenteen materiaalin kimmokerroin ja suppeamaluku olkoot E ja ν . Ota huomioon symmetria ja antisymmetria aktiivien vapausasteiden (u_2, u_3, v_3, v_4) välillä, jolloin tehtävään jää ainoastaan kaksi tuntematonta solmupistesiirtymää. Reunaehdothan ovat $u_1 = v_1 = v_2 = u_4 = 0$.



Havaitaan, että solmujen 2 ja 3 vaakasiirtymät ovat toistensa vastalukuja samaten kuin solmujen 3 ja 4 pystysiirtymät, eli

$$u_3 = -u_2, \quad v_4 = -v_3. \quad (6.20)$$

Ryhmitetään nyt elementin vapausasteet seuraavasti:

$$\mathbf{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{bmatrix}^T. \quad (6.21)$$

Vapausasteita u_2, u_3, v_3 ja v_4 vastaava yhtälösystemi on

$$\begin{bmatrix} K_{33} & K_{35} & K_{36} & K_{38} \\ K_{53} & K_{55} & K_{56} & K_{58} \\ K_{63} & K_{65} & K_{66} & K_{68} \\ K_{83} & K_{85} & K_{86} & K_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_{x2} \\ \bar{f}_{x3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

Ottamalla nyt huomioon vapausasteita sitovat yhteydet, saadaan ratkaistavaksi kahden tuntemattoman systeemi

$$\begin{bmatrix} K_{33} - K_{35} & K_{36} - K_{38} \\ K_{63} - K_{65} & K_{66} - K_{68} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_{x2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

Oletetaan materiaalin jäykkyysmatriisin olevan muotoa

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Jäykkyysmatriisin solmuihin i ja j liittyvä lohko on siten

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j t dA, \quad (6.25)$$

jossa solmuun i liittyvä muodonmuutos-siirtymämatriisi $\mathbf{B}$ on

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}, \quad (6.26)$$

joten

$$\mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} D_{11} N_{i,x} N_{j,x} + D_{33} N_{i,y} N_{j,y} & D_{12} N_{i,x} N_{j,y} + D_{33} N_{i,y} N_{j,x} \\ D_{12} N_{i,y} N_{j,x} + D_{33} N_{i,x} N_{j,y} & D_{22} N_{i,y} N_{j,y} + D_{33} N_{i,x} N_{j,x} \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

Nyt geometrian kuvaus on yksinkertainen

$$x = (N_2 + N_3)L = \frac{1}{2}(1 + \xi)L, \quad y = (N_3 + N_4)L = \frac{1}{2}(1 + \eta)L, \quad (6.28)$$

josta kuvauksen Jacobiaani ja sen käänteismatriisi ovat

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}L \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{J} = \frac{1}{4}L^2, \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

josta seuraa derivaattojen muunnoksille yhtälöt

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (6.30)$$

Tarvitaan interpolaatiofunktioiden derivaattoja paikallisten koordinaattien suh-

teen

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), & N_{1,\xi} &= -\frac{1}{4}(1-\eta), & N_{1,\eta} &= -\frac{1}{4}(1-\xi), \\
 N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), & N_{2,\xi} &= \frac{1}{4}(1-\eta), & N_{2,\eta} &= -\frac{1}{4}(1+\xi), \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), & N_{3,\xi} &= \frac{1}{4}(1+\eta), & N_{3,\eta} &= \frac{1}{4}(1+\xi), \\
 N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), & N_{4,\xi} &= -\frac{1}{4}(1+\eta), & N_{4,\eta} &= \frac{1}{4}(1-\xi).
 \end{aligned}$$

Tarvittavat jäykkyyismatriisin alkiot saadaan nyt

$$\begin{aligned}
 K_{33} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{11}N_{2,x}^2 + D_{33}N_{2,y}^2) J d\xi d\eta \\
 &= \frac{1}{3}t(D_{11} + D_{33}), \tag{6.31a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{35} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{11}N_{2,x}N_{3,x} + D_{33}N_{2,y}N_{3,y}) J d\xi d\eta \\
 &= (\frac{1}{6}D_{11} - \frac{1}{3}D_{33})t, \tag{6.31b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{36} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{12}N_{2,x}N_{3,y} + D_{33}N_{2,y}N_{3,x}) J d\xi d\eta \\
 &= \frac{1}{4}t(D_{12} - D_{33}), \tag{6.31c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{38} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{12}N_{2,x}N_{4,y} + D_{33}N_{2,y}N_{4,x}) J d\xi d\eta \\
 &= \frac{1}{4}t(D_{12} + D_{33}), \tag{6.31d}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{65} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{12}N_{3,x}N_{3,y} + D_{33}N_{3,y}N_{3,x}) J d\xi d\eta \\
 &= \frac{1}{4}t(D_{12} + D_{33}), \tag{6.31e}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{66} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{22}N_{3,y}^2 + D_{33}N_{3,x}^2) J d\xi d\eta \\
 &= \frac{1}{3}t(D_{22} + D_{33}), \tag{6.31f}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{68} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{22}N_{3,y}N_{4,y} + D_{33}N_{3,x}N_{4,x}) J d\xi d\eta \\
 &= (\frac{1}{6}D_{22} + \frac{1}{3}D_{33})t. \tag{6.31g}
 \end{aligned}$$

Tarvittavat matriisialkiot ovat siten

$$\begin{aligned}
 K_{33} - K_{35} &= \frac{1}{3}t(D_{11} + D_{33}) - \frac{1}{6}tD_{11} + \frac{1}{3}tD_{33} \\
 &= (\frac{1}{6}D_{11} + \frac{2}{3}D_{33})t, \tag{6.32a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{36} - K_{38} &= \frac{1}{4}t(D_{12} - D_{33}) + D_{12} - D_{33} \\
 &= -\frac{1}{2}tD_{33}. \tag{6.32b}
 \end{aligned}$$

Isotrooppisesti kimmoisan aineen tapauksessa materiaalivakiot ovat

$$D_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad D_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}, \tag{6.33}$$

jolloin siirtymien u_2 ja v_3 ratkaisuyhtälöiksi saadaan

$$\frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\nu & -\frac{1}{4}(1-\nu) \\ -\frac{1}{4}(1-\nu) & \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M/L \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6.34)$$

Ratkaisu on siten

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{M}{ELt} \frac{1-\nu^2}{\left(\frac{3}{16} - \frac{5}{24}\nu + \frac{7}{144}\nu^2\right)} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\nu & \frac{1}{4}(1-\nu) \\ \frac{1}{4}(1-\nu) & \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.35)$$

Lasketaan muutamalla eri ν :n arvolla

$$\nu = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{Bmatrix} \frac{M}{ELt} = \begin{Bmatrix} 2.6666 \\ 1.3333 \end{Bmatrix} \frac{M}{ELt}, \quad (6.36)$$

$$\nu = 0.25 \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.821 \\ 1.270 \end{Bmatrix} \frac{M}{ELt}. \quad (6.37)$$

Siirtymätila on siten

$$\begin{aligned} u &= N_2 u_2 - N_3 u_2 = \frac{1}{4} [(1+\xi)(1-\eta) - (1+\xi)(1+\eta)] u_2 \\ &= -\frac{1}{2}(1+\xi)\eta u_2, \end{aligned} \quad (6.38a)$$

$$\begin{aligned} v &= N_3 v_3 - N_4 v_3 = \frac{1}{4} [(1+\xi)(1+\eta) - (1-\xi)(1+\eta)] v_3 \\ &= \frac{1}{2}(1+\eta)\xi v_3. \end{aligned} \quad (6.38b)$$

Venymät saadaan määritelmän mukaan

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{L} \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\eta \frac{u_2}{L}, \quad (6.39a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2}{L} \frac{\partial v}{\partial \eta} = \xi \frac{v_3}{L}, \quad (6.39b)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2}{L} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \\ &= \left[-(1+\xi) \frac{u_2}{L} + (1+\eta) \frac{v_3}{L} \right]. \end{aligned} \quad (6.39c)$$

Havaitaan, että elementtiin syntyy liukumia vaikka kyseessä on puhdas taivutustila. Jännitykset saadaan konstitutiivisen lain kautta, ja ovat

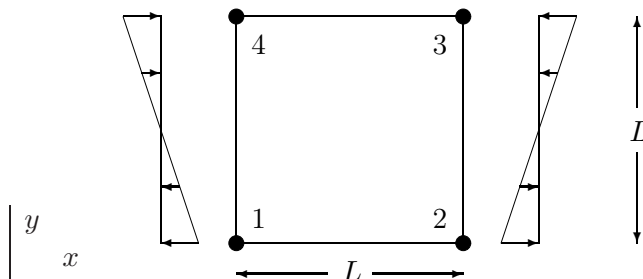
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(-\eta \frac{u_2}{L} + \nu \xi \frac{v_3}{L} \right), \quad (6.40a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\xi \frac{v_3}{L} - \nu \eta \frac{u_2}{L} \right), \quad (6.40b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[-(1+\xi) \frac{u_2}{L} + (1+\eta) \frac{v_3}{L} \right]. \quad (6.40c)$$

Esimerkki 6.2 Määritä jännitykset kuvan bilineaarisessa tasojännitystilan ele-

mentissä, jota kuormittaa lineaarisesti jakautunut reunakuormitus joka on staattisesti samanarvoinen taivutusmomentin M kanssa. Ota huomioon symmetria ja antimetria vapausasteiden välillä. Kimmokerroin olkoon E ja suppeamaluku $\nu = 0$.



Koska suppeamaluku on nolla ei kappaleeseen synny siirtymiä y -akselin suunnassa, eli $v \equiv 0$. Symmetrian perusteella taas $u_2 = u_4 = -u_1 = -u_3$, joten siirtymätila kuvataan lausekkeella

$$u = (-N_1 + N_2 - N_3 + N_4)u_2. \quad (6.41)$$

Virtuaalisen työn yhtälö

$$t \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dA = \int_{\Gamma_t} t_{Sx} \delta u ds, \quad (6.42)$$

supistuu nyt muotoon ($\epsilon_y = v_{,y} \equiv 0, \sigma_x = E\epsilon_x = Eu_{,x}, \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = Gu_{,y}$):

$$Et \int_{\Omega} (\epsilon_x \delta \epsilon_x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy}) dA = \int_{\Gamma_t} t_{Sx} \delta u ds. \quad (6.43)$$

Venymien lausekkeet ovat

$$\epsilon_x = \frac{2}{L} (-N_{1,\xi} + N_{2,\xi} - N_{3,\xi} + N_{4,\xi}) u_2, \quad (6.44)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{L} (-N_{1,\eta} + N_{2,\eta} - N_{3,\eta} + N_{4,\eta}) u_2. \quad (6.45)$$

Tarvittavat interpolaatiofunktioiden derivaatat lokaalien koordinaattien suhteen ovat

$$\begin{aligned} N_{1,\xi} &= -\frac{1}{4}(1-\eta), & N_{1,\eta} &= -\frac{1}{4}(1-\xi), \\ N_{2,\xi} &= \frac{1}{4}(1-\eta), & N_{2,\eta} &= -\frac{1}{4}(1+\xi), \\ N_{3,\xi} &= \frac{1}{4}(1+\eta), & N_{3,\eta} &= \frac{1}{4}(1+\xi), \\ N_{4,\xi} &= -\frac{1}{4}(1+\eta), & N_{4,\eta} &= \frac{1}{4}(1-\xi). \end{aligned} \quad (6.46)$$

Täten venymien lausekkeet ovat paikallisten koordinaattien avulla lausuttuna

seuraavat

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{u_2}{2L} [(1 - \eta) + (1 - \eta) - (1 + \eta) - (1 + \eta)] u_2 \\ &= -2\eta \frac{u_2}{L},\end{aligned}\quad (6.47a)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{u_2}{2L} [(1 - \xi) - (1 + \xi) - (1 + \xi) + (1 - \xi)] u_2 \\ &= -2\xi \frac{u_2}{L}.\end{aligned}\quad (6.47b)$$

Virtuaalisten venymien lausekkeet ovat vastaavasti

$$\delta\epsilon_x = -2\eta \frac{\delta u_2}{L}, \quad (6.48a)$$

$$\delta\gamma_{xy} = -2\xi \frac{\delta u_2}{L}. \quad (6.48b)$$

Lasketaan reunakuorman tekemä virtuaalinen työ. Reunakuormituksen maksimi-intensiteetti saadaan momentin M avulla

$$\bar{t}_m = 6 \frac{M}{L^2}. \quad (6.49)$$

Virtuaalinen siirtymä δu on reunalla 2:

$$\delta u(1, \eta) = (N_2 - N_3)\delta u_2 = -\eta\delta u_2. \quad (6.50)$$

Reunalla 2 virtuaalisen työn lauseke on

$$\int_{\Gamma_2} t_{Sx} \delta u ds = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 (-\eta t_m)(-\eta\delta u_2) d\eta = \frac{1}{3} t_m L \delta u_2. \quad (6.51)$$

Jännitysten tekemä virtuaalinen työ on

$$\begin{aligned}& Et \int_A (\epsilon_x \delta\epsilon_x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \delta\gamma_{xy}) dA \\ &= \delta u_2 \frac{1}{4} L^2 Et \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{4\eta^2}{L^2} + \frac{1}{2} \frac{4\xi^2}{L^2} \right) d\xi d\eta u_2 = \delta u_2 2Et u_2.\end{aligned}\quad (6.52)$$

Siirtymä u_2 voidaan siten ratkaista yhtälöstä

$$2Et u_2 = \frac{2}{3} t_m L \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{1}{3} \frac{t_m L}{Et} = 2 \frac{M}{EtL}. \quad (6.53)$$

Elementin jännitykset ovat

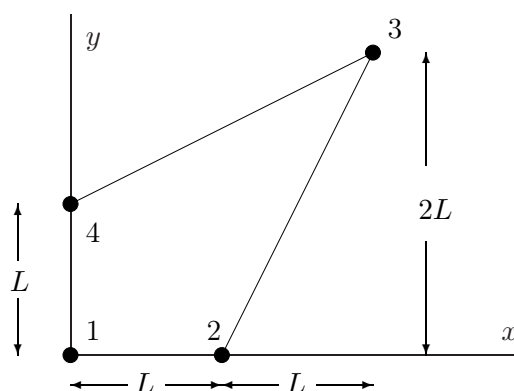
$$\begin{aligned}\sigma_y &\equiv 0, \\ \sigma_x &= E\epsilon_x = -E2\eta \frac{u_2}{L} = -4 \frac{M}{tL^2} \eta,\end{aligned}\quad (6.54)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = -E\xi \frac{u_2}{L} = -2 \frac{M}{tL^2} \xi. \quad (6.55)$$

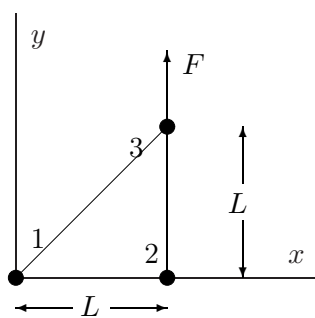
Normaalijännityksille saatiin oikeat arvot, mutta elementtiin syntyy leikkausmuodonmuutosta ja siten leikkausjännityksiä puhtaan taivutuksen tapauksessa. Tämä johtuu bilineaarisesta interpolaatiosta, joka ei pysty kuvaamaan taivutustilaa korrektisti. Se vaatisi parabolisen siirtymätilan, tässä tapauksessa siis parabolisen v -komponentin.

6.4 Harjoitustehtäviä

1. Kirjoita tasomuodonmuutos- ja tasojännitystilan kimmoisen isotrooppisen aineen materiaalin jäykkyyismatriisit kimmokertoimen E ja suppeamaluvun ν avulla.
2. Muodosta tasojännitystilaa vastaavan lineaarisen kolmioelementin jäykkyyismatriisin eksplisiittinen lauseke.
3. Muodosta tasomuodonmuutostilaa vastaavan lineaarisen kolmioelementin jäykkyyismatriisin eksplisiittinen lauseke.
4. Muodosta tasojännitystilaa vastaavan bilineaarisesti interpoloidun elementin jäykkyyismatriisin eksplisiittinen lauseke.
5. Määritä oheisen tasojännitystilassa olevan levyelementin jännitykset elementin keskipisteessä ($\xi = \eta = 0$), kun solmupistesiirtymät ovat: $u_1 = u_4 = v_1 = v_2 = v_3 = 0, u_2 = v_4 = \Delta, u_3 = 2\Delta$. Elementin paksuus olkoon t ja materiaalia kuvataan lineaarisesti kimmoisalla isotrooppisella mallilla, jonka parametrit ovat E ja ν .



6. Oheista lineaarista *tasomuodonmuutostilan* kolmioelementtiä kuormittaa pystysuora pistevoima F solmussa 3. Solmujen 1 ja 2 vapausasteet ovat sidotut ($\equiv 0$). Ratkaise tehtävä, eli määritä elementin siirtymä- ja jännitystila. Materiaalivakiot olkoon E ja ν . Mitä tapahtuu kun $\nu \rightarrow 0,5$ ja miksi?



Luku 7

Numeerinen integrointi

Luvussa esitetään elementtimenetelmässä yleisimmin käytössä olevat kvadratuurit, eli numeeriset integrointikaavat. Kvadratuurit muodostetaan korvaamalla integroitava funktio sen interpolaatiopolynomilla. Mikäli kvadratuuripisteet valitaan tasavälisesti saadaan Newtonin-Cotesin kvadratuuri, mitä elementtimenetelmässä käytetään vain dimensioreduktiomallien, eli palkkien, laattojen ja kuorien jäykkyysmatriisin paksuussuuntaisessa integroinnissa.

Jäykkyysmatriisin kokoamiseen tarvittava laskentatyön määrä on suoraan verrannollinen integrointipisteiden lukumäärään. Täten on suotavaa, että elementtimatriisien ja voimavektoreiden integrointi suoritetaan mahdollisimman alhaisasteisella kvadratuurilla. Usein käytetään myös ali-integrointia. Ali-integrointi tai valikoiva ali-integrointi voi joissain tapauksissa johtaa parempiin tuloksiin kuin täysi integrointi. Valitettavasti näin ei aina ole, vaan ali-integrointi johtaa usein nollaenergiamuotojen syntymiseen ja ratkaisun epästabiiliuteen.

7.1 Johdanto

Isoparametrusten elementtien jäykkyysmatriisit ja kuormavektorit joudutaan yleensä muodostamaan numeerisella integroinnilla. Myös muissa tapauksissa numeerinen integrointi voi olla tarpeen. Materiaaliominaisuudet tai elementin paksuus voivat muuttua paikan mukana siten, että tarkka integrointi on hankalaa. Integrointikaavoista käytetään myös nimitystä kvadratuuri.

Yksiulotteisessa tapauksessa lausutaan integroitava funktio luonnollisen koordinaatin ξ avulla välillä $[-1, 1]$. Funktion f integraali

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad (7.1)$$

voidaan määrittää numeerisesti kaavalla

$$I \approx \sum w_i f(\xi_i), \quad (7.2)$$

missä ξ_i :t ovat integrointipisteet ja w_i :t ovat pisteisiin ξ_i liittyvät painokertoimet. Integraali I voidaan esittää tarkasti kaavalla

$$I = \sum w_i f(\xi_i) + R, \quad (7.3)$$

missä R on jäännös. Integraalin (7.1) laskemiseksi pyritään kehittämään kaavoja, joihin liittyvä jäännös on mahdollisimman pieni numeeriseen laskutyöhön nähden.

Kaava (7.2) voidaan yleistää välittömästi kaksiulotteiseen tapaukseen:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i w_j f(\xi_i, \eta_j). \quad (7.4)$$

7.2 Newton-Cotes menetelmä

Valitaan integrointipisteiden paikat ξ_i etukäteen ja integroitavaa funktiota approksimoidaan Lagrangen interpolaatiopolynomeilla, eli

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^n l_i^{n-1} f(\xi_i), \quad (7.5)$$

missä

$$l_i^{n-1}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \cdots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \cdots (\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \cdots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \cdots (\xi_i - \xi_n)}. \quad (7.6)$$

l_i^{n-1} on $n - 1$ asteinen polynomi, joka saa arvon 1 pisteessä ξ_i ja $l_i^{n-1}(\xi_j) = 0$, kun $i \neq j$.

Integraali $I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$ on likimäärin

$$I \approx \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=1}^n l_i^{n-1}(\xi) f(\xi_i) \right) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i), \quad (7.7)$$

missä

$$w_i = \int_{-1}^1 l_i^{n-1}(\xi) d\xi. \quad (7.8)$$

Newtonin-Cotesin kaava (7.7) integroi tarkasti $(n - 1)$ -asteisen polynomin, mikäli n on parillinen ja n -asteisen polynomin mikäli n on pariton. Jäännöksen R lausekkeelle voidaan johtaa tulos

$$R = C \left(\frac{2}{n-1} \right)^{n+2} \frac{d^{n+1} f}{d\xi^{n+1}}, \quad n \text{ pariton}, \quad (7.9)$$

$$R = C \left(\frac{2}{n-1} \right)^{n+1} \frac{d^n f}{d\xi^n}, \quad n \text{ parillinen}, \quad (7.10)$$

missä C on funktiosta f riippumaton vakio. Virheen kaavoista havaitaan, että on syytä käyttää paritonta integrointipisteiden määrää. Huomaa myös, että virhe-estimaatin käyttö edellyttää integroitavalta funktiolta riittävää sileyttä.

Esimerkki 7.1 Kirjoitetaan eksplisiittisesti kahden ja kolmen pisteen Newton-Cotesin kaavat.

Valitaan kahden pisteen integrointikaavassa integrointipisteiden paikoiksi $\xi_1 = -1$ ja $\xi_2 = 1$. Lagrangen interpolaatiopolynomit ovat

$$l_1^1 = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad l_2^1 = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (7.11)$$

Kaavasta (7.7) seuraa $w_1 = w_2 = 1$, joten

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) = f(-1) + f(1), \quad (7.12)$$

Lauseke voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = 2 \frac{1}{2} [f(-1) + f(1)], \quad (7.13)$$

joka on nimeltään trapetsikaava.

Kolmen pisteen tapauksessa valitaan integrointipisteiksi $\xi_1 = -1, \xi_2 = 0$ ja $\xi_3 = 1$, ja vastaavat Lagrangen interpolaatiopolynomit ovat

$$l_1^2 = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)}, \quad (7.14a)$$

$$l_2^2 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)}, \quad (7.14b)$$

$$l_3^2 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}, \quad (7.14c)$$

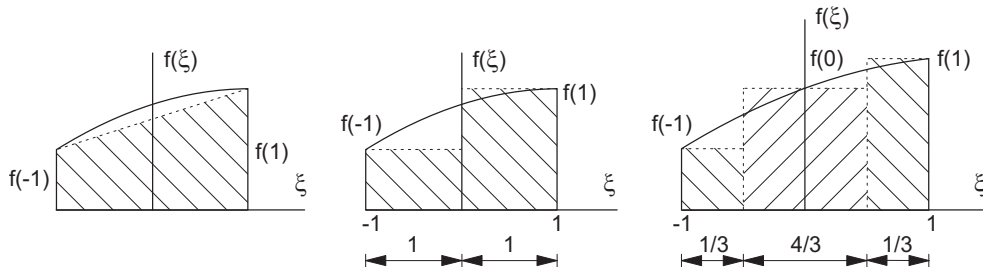
Kaavan (7.7) perusteella painokertoimiksi saadaan $w_1 = \frac{1}{3}, w_2 = \frac{4}{3}$ ja $w_3 = \frac{1}{3}$. Tällöin integraalin arvoksi saadaan

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1), \quad (7.15)$$

mikä on kolmen pisteen Simpsonin kaava, katso kuvaa 7.1.

7.3 Gaussin-Legendren menetelmä

Gaussin-Legendren menetelmässä sekä integrointipisteet ξ_i että painokertoimet w_i pyritään valitsemaan optimaalisesti siten, että menetelmä integroisi tarkasti mahdollisimman korkea-asteisen polynomin.



Kuva 7.1 Numeerinen integrointi kahden (a,b) ja kolmen pisteen Newton-Cotesin kaavoilla (c).

Tarkastellaan $(2n - 1)$ -asteista polynomia

$$p(\xi) = a_1 + a_2\xi + a_3\xi^2 + \cdots + a_{2n-1}\xi^{2n-2} + a_{2n}\xi^{2n-1}, \quad (7.16)$$

missä on $2n$ termiä. Integroimalla polynomi tulee

$$I = \int_{-1}^1 p(\xi) d\xi = 2a_1 + \frac{2}{3}a_3 + \cdots + \frac{2}{2n-1}a_{2n-1}. \quad (7.17)$$

Sovellettaessa määritelmää (7.2), saadaan

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 p(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n p(\xi_i) w_i \\ &= a_1 \sum_{i=1}^n w_i + a_2 \sum_{i=1}^n w_i \xi_i + a_3 \sum_{i=1}^n w_i \xi_i^2 + \cdots + a_{2n-1} \sum_{i=1}^n w_i \xi_i^{2n-2} + a_{2n} \sum_{i=1}^n \xi_i^{2n-1}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Vertaamalla kaavoja (7.17) ja (7.18) havaitaan, että

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i &= 2, \quad \sum_{i=1}^n w_i \xi_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n w_i \xi_i^2 = \frac{2}{3}, \cdots \\ \sum_{i=1}^n w_i \xi_i^{2n-2} &= \frac{2}{2n-1}, \quad \sum_{i=1}^n w_i \xi_i^{2n-1} = 0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Polynomissa (7.16) on $2n$ termiä. Kaavoissa (7.19) on $2n$ ehtoa, joiden avulla voidaan määrittää kaavan (7.18) $2n$ tuntematonta: n painokerrointa w_i ja n integroimis pistettä (Gaussin pistettä) ξ_i .

Voidaan osoittaa, että n -pisteisen Gaussin-Legendren kvadratuurin integrointipisteiden paikka määräytyy astetta n olevan Legendren polynomin nollakohtien perusteella, ja painokertoimiksi saadaan yleisesti lauseke

$$w_i = \frac{2(1 - \xi_i^2)}{[nP_{n-1}(\xi_i)]^2}. \quad (7.20)$$

Gaussin-Legendren n :n pisteen menetelmä integroi tarkasti $(2n - 1)$ -asteisen polynomin, joten menetelmä on tarkempi kuin Newton-Cotesin kvadratuuri. Jäännöksen R lausekkeeksi voidaan johtaa

$$R = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} \frac{d^{2n}f}{d\xi^{2n}}. \quad (7.21)$$

Esimerkki 7.2 Määritetään Gaussin-Legendren menetelmän painokertoimet ja integroimispisteiden paikat kun $n = 2, 3$.

Kahden integrointipisteen tapauksessa yhtälöistä (7.19) seuraa

$$w_1 + w_2 = 2, \quad w_1\xi_1 + w_2\xi_2 = 0, \quad w_1\xi_1^2 + w_2\xi_2^2 = \frac{2}{3}, \quad w_1\xi_1^3 + w_2\xi_2^3 = 0. \quad (7.22)$$

Symmetrian perusteella $w_1 = w_2$ ja $\xi_1 = -\xi_2$, jolloin ratkaisuksi saadaan

$$w_1 = w_2 = 1, \quad \xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (7.23)$$

Tapauksessa $n = 3$ saadaan ehdot

$$w_1 + w_2 + w_3 = 2 \quad (7.24a)$$

$$w_1\xi_1 + w_2\xi_2 + w_3\xi_3 = 0 \quad (7.24b)$$

$$w_1\xi_1^2 + w_2\xi_2^2 + w_3\xi_3^2 = \frac{2}{3} \quad (7.24c)$$

$$w_1\xi_1^3 + w_2\xi_2^3 + w_3\xi_3^3 = 0 \quad (7.24d)$$

$$w_1\xi_1^4 + w_2\xi_2^4 + w_3\xi_3^4 = \frac{2}{5} \quad (7.24e)$$

$$w_1\xi_1^5 + w_2\xi_2^5 + w_3\xi_3^5 = 0 \quad (7.24f)$$

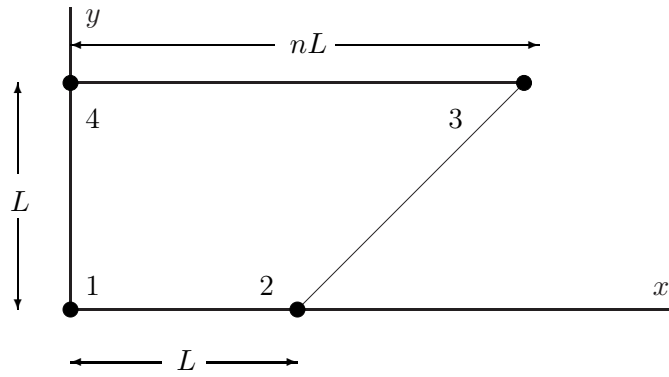
Symmetrian perusteella $\xi_3 = -\xi_1, \xi_2 = 0$ ja $w_1 = w_3$, jolloin ratkaisuksi saadaan

$$\xi_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad w_1 = \frac{5}{9}, \quad w_2 = \frac{8}{9}, \quad w_3 = \frac{5}{9}. \quad (7.25)$$

Esimerkki 7.3 Tutki virhettä suhteen n funktiona ($n = 2, 3, 5, 10$) integraalissa

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{\det(\mathbf{J})} d\xi d\eta \quad (7.26)$$

kun se integroidaan numeerisesti yhden pisteen, 2×2 -pisteen ja 3×3 -pisteen Gaussin kaavoilla.



Määritetään geometriakuvauksen Jakobiaani, jota varten tarvitaan siirtymien interpolaatioiden lausekkeet:

$$x = (N_2 + nN_3)L = \frac{1}{4}(1 + \xi)[1 - \eta + n(1 + \eta)]L, \quad (7.27a)$$

$$y = (N_3 + N_4)L = \frac{1}{2}(1 + \eta)L \quad (7.27b)$$

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + n + (n-1)\eta & 0 \\ (1 + \xi)(n-1) & 2 \end{bmatrix} L \quad (7.28)$$

$$\det \mathbf{J} = \frac{1}{8}L^2 [1 + n + (n-1)\eta] = \frac{1}{8}L^2(a_0 + a_1\eta). \quad (7.29)$$

Lasketaan integraali ensin tarkasti

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{\det \mathbf{J}} d\xi d\eta = \frac{16}{L^2} \int_{-1}^1 \frac{d\eta}{a_0 + a_1\eta} \\ &= \frac{16}{L^2} \left| \frac{1}{a_1} \ln(a_0 + a_1\eta) \right|_{-1}^1 = \frac{16}{L^2} \left| \frac{1}{n-1} \ln(1 + n + (n-1)\eta) \right|_{-1}^1 \\ &= \frac{16}{L^2} \frac{1}{n-1} \ln n \end{aligned} \quad (7.30)$$

Koska integrandi on vakio ξ -koordinaatin suunnassa, voidaan tarkastella vain numeerista integrointia η -koordinaatin suunnassa. Gaussin-Legendren kaavoilla laskettuna saadaan seuraavat tulokset:

1. Yhden pisteen kaavalla $w_1 = 2, \eta_1 = 0$:

$$I \approx L^{-2} \frac{32}{1+n} \quad (7.31)$$

2. Kahden pisteen kaavalla $w_1 = w_2 = 1, \eta_1 = -1/\sqrt{3}, \eta_2 = 1/\sqrt{3}$:

$$I \approx L^{-2} 16 \left[\frac{1}{1+n - \frac{1}{\sqrt{3}}(n-1)} + \frac{1}{1+n + \frac{1}{\sqrt{3}}(n-1)} \right] \quad (7.32)$$

3. Kolmen pisteen kaavalla $w_1 = w_3 = 5/9, w_2 = 8/9, \eta_1 = -\sqrt{3/5}, \eta_2 =$

$$0, \eta_3 = \sqrt{3/5}:$$

$$I \approx L^{-2} 16 \frac{1}{9} \left[\frac{5}{1+n-\sqrt{3/5}(n-1)} + \frac{8}{1+n} + \frac{5}{1+n+\sqrt{3/5}(n-1)} \right] \quad (7.33)$$

Kootaan tulokset taulukkoon:

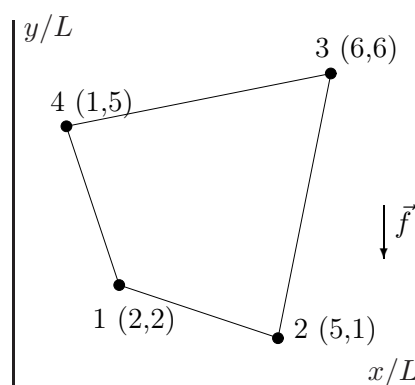
	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 10$
1×1	10.666	8.0000	5.3333	2.9090
2×2	11.077	8.7772	6.2608	3.7446
3×3	11.0899	8.7890	6.4107	3.9939
tarkka	11.0904	8.7889	6.4378	4.0935

Havaitaan, että virhe integraalin numeerisen arvon määrittämisessä Gaussin-Legenderen kvadratuurilla kasvaa elementin vääristymän lisääntyessä. Huomaa, että oheinen integraali on seurausta laskettaessa muodon

$$\int_{\Omega} N_{i,x} N_{j,x} dA \quad (7.34)$$

tyyppisiä lausekkeita. Täten on syytä välttää elementtien liiallista vääristämistä.

Esimerkki 7.4 Määritetään oheisen kuvan mukaisen bilineaarisen elementin tilavuusvoimia vastaava vektori $\bar{\mathbf{f}}^{(e)}$ käyttäen numeerista integrointia.



$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{f} t J d\xi d\eta, \quad (7.35)$$

kun

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{Bmatrix}, \quad (7.36)$$

missä ρ on materiaalin tiheys ja g maan vetovoiman kiihtyvyys.

Jacobin matriisi on kuvan elementille

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 4 + \eta & \eta \\ \xi & 4 + \xi \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

ja determinantti $J = \det \mathbf{J} = (4 + \xi + \eta)L^2$. Solmuun i liittyvä osuus, (2×1) -vektori, on

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = t\rho g \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i J \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} d\xi d\eta, \quad (7.38)$$

missä N_i on määritelty kaavalla (4.161).

Sovelletaan nyt Gaussin-Legendren kvadratuurikaavoja ensin solmuun 1 liittyvään integraaliin

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_1 J d\xi d\eta &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(4 + \xi + \eta) d\xi d\eta L^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(4 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(4 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(4 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(4 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] L^2 \\ &= \frac{10}{3} L^2. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Samalla tavalla saadaan

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_2 J d\xi d\eta = 4L^2, \quad (7.40)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_3 J d\xi d\eta = \frac{14}{3} L^2, \quad (7.41)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_4 J d\xi d\eta = 4L^2. \quad (7.42)$$

Tilavuusvoimista $f_x = 0$ ja $f_y = \rho g$ aiheutuva voimavektori on siten

$$\mathbf{f}^{(e)} = -\frac{2\rho g t L^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 6 & 0 & 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}^T. \quad (7.43)$$

7.4 Gaussin-Lobatto menetelmä

Gaussin-Lobatto integroimiskaava eroaa Gaussin-Legendren kvadratuureista ai-noastaan siinä, että välin päätepisteet valitaan aina myös integroimispisteiksi. Muut kvadratuuripisteet samaten kuin integroimispisteisiin liittyvät painot määritetään

vastaavaan tapaan kuin Gaussin-Legendren menettelyssä. Koska kahden integroimispuoleen paikka on ennalta määrätty, tarvitaan Gaussin-Lobattoon menettelyssä yksi integroimispuole enemmän kuin vastaavassa Gaussin-Legendren menetelmässä tietynasteisen polynomin tarkkaan integrointiin. Integroimispuoleiden paikkoja kutsutaan myös Lobattoon puoleiksi.

Esimerkki 7.5 Määritetään sen Gaussin-Lobattoon kvadratuurin integroimispuoleiden paikat ja painojen arvot, joka integroi tarkasti viidennen asteen polynomin.

Integroimispuoleita tarvitaan siis neljä. Symmetrian perusteella on määritettävänä vain yhden puolen paikka ja kaksi painokerrointa. Kaavaa (7.18) vastaava yhtälö on

$$I = w_1 p(-1) + w_2 p(-\xi_2) + w_2 p(\xi_2) + w_1 p(1). \quad (7.44)$$

Vertaamalla lauseketta yhtälöön (7.19) saadaan

$$2w_1 + 2w_2 = 2, \quad 2w_1 + 2w_2 \xi_2^2 = \frac{2}{3}, \quad 2w_1 + 2w_2 \xi_2^4 = \frac{2}{5}, \quad (7.45)$$

josta saadaan ratkaisuksi

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{1}{5}}, \quad w_1 = \frac{1}{6}, \quad w_2 = \frac{5}{6}. \quad (7.46)$$

7.5 Numeerinen integrointi kolmioelementissä

Alakoordinaateista riippuvat funktiot integroidaan kaavalla

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} f(L_1, L_2, L_3) dL_2 dL_1 = \sum_{i=1}^n 2w_i A f(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}) + R, \quad (7.47)$$

missä $L_3 = 1 - L_1 - L_2$, w_i :t ovat integroimispuoleisiin i liittyvät painokertoimet, n on integroimispuoleiden lukumäärä, R on jäännöstermi ja A on elementin pinta-ala. Taulukkoon (7.1) on koottu joitakin kolmioalueen integroimiskaavoja.

7.6 Isoparametrinen elementtien integrointi

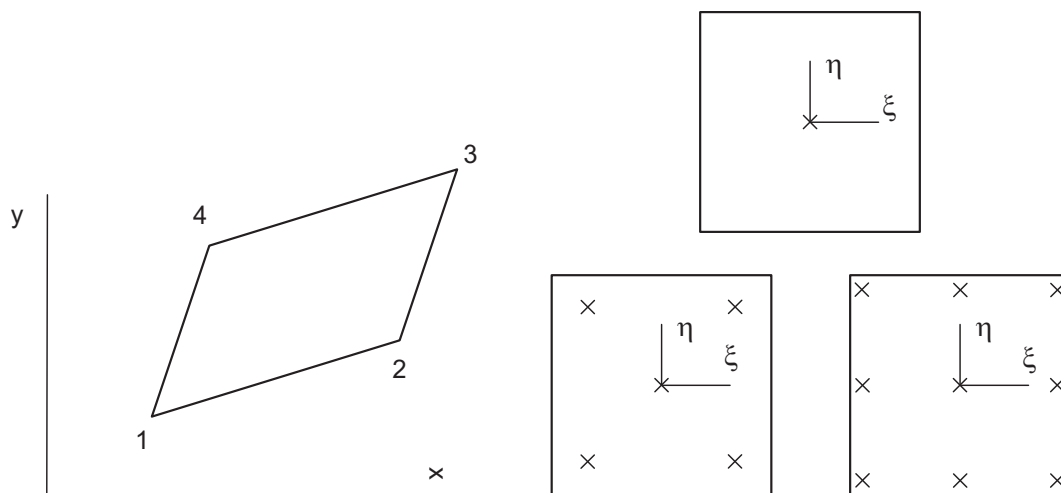
7.6.1 Yleistä

Gaussin menetelmä soveltuu yhtä hyvin yksi-, kaksi- ja kolmiulotteisiin tehtäviin. Integroimispuoleiden lukumäärä on tavallisesti sama eri suunnissa (2- ja 3-ulotteisissa tapauksissa). Sensijaan integroimispuoleiden lukumäärän valinta on monitahoinen tehtävä.

Nelisolmuisen suorakaiteen tai myös kuvan 7.2 vinokaiteen tapauksessa Jacobin determinantti J on vakio, ja siirtymä-muodonmuutosmatriisiin $\mathbf{B}$ -alkiot riippuvat

Taulukko 7.1 Kolmioalueen integroimispisteitä ja painokertoimia.

Kertaluku	virhetermi R	alakoordinaatit			paino $2w_i$
		L_1	L_2	L_3	
lineaarinen	$O(h^2)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
kvadraattinen	$O(h^3)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
		$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
kuubinen	$O(h^4)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{27}{48}$
		$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{25}{48}$
		$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{25}{48}$
		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{25}{48}$
		$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{25}{48}$

**Kuva 7.2** Bilineaarinen elementti sekä Gaussin pisteet 1×1 , 2×2 ja 3×3 pisteen kaavoissa.

lineaarisesti luonnollisista koordinaateista ξ ja η . Jos materiaalin jäykkyysmatriisiin $\mathbf{D}$ alkiot ja paksuus t ovat vakioita, niin Gaussin 2×2 pisteen integroimiskaava antaa tarkan tuloksen. Vastaavasti kahdeksansolmuisen suorakaiteen muotoisen elementin tapauksessa $J=\text{vakio}$, sisältää $\mathbf{B}$ -matriisi kvadraattiset ξ :n ja η :n polynomit, ja jäykkyysmatriisin termien laskemisessa joudutaan integroimaan neljännen asteen polynomeja. Tällöin Gaussin 3×3 pisteen kaava tuottaa tarkan tuloksen.

Nelisolmuisen elementin tapauksessa 2×2 pisteen Gaussin menetelmää sanotaan *täydelliseksi* integroinniksi, koska se integroi tarkasti säännöllisen muotoisen elementin jäykkyysmatriisin termit. Samasta syystä 3×3 pisteen kaava on täydellinen kvadraattisille elementeille.

Elementin muodon poiketessa suorakaiteesta ei J enää ole vakio ja $\mathbf{B}$ -matriisin alkiot sisältävät ξ :n ja η :n rationaalifunktioita. Täten elementin jäykkyysmatriisin alkiot eivät enää ole polynomeja, eivätkä Gaussin kvadratuurit tuota tarkkoja tu-

loksia. Voidaan päätellä, että elementin muodon on oltava mahdollisimman lähellä suorakaidetta hyvän tarkkuuden saavuttamiseksi.

Integrointipisteiden lukumäärän kasvattaminen parantaa integroinnin tarkkuutta, mutta lisää samalla laskentakustannuksia. Numeerinen integrointi voi tuoda epätarkkuutta elementin muodostamiseen. Tarkka integrointi ei ole välttämättä edes edullista elementtimenetelmän tulosten tarkkuuden kannalta. Elementin otaksuttu siirtymätila sisältää vain rajoitetun määrän deformaatiomuotoja, joiden avulla ei voida yleensä esittää tehtävän tarkkaa siirtymätilaa. Otaksutut siirtymätilat merkitsevät sitä, että analysoitava rakenne on korvattu rakenteella, joka sisältää äärellisen määrän siirtymätiloja. Korvaava rakenne, eli elementtimalli on siten jäykempi kuin todellinen rakenne. Korvausrakenteen liiallista jäykkyyttä voidaan käytännössä pienentää soveltamalla täydellistä integrointia alhaisasteisempaa menetelmää eli redusoitua integrointia. Redusoitu integrointi on myös laskentakustannusten kannalta edullisempaa.

Redusoidun integroinnin seurauksena voi syntyä nollaenergiamuotoja eli deformaatiomuotoja, joihin liittyvä muodonmuutosenergia on nolla ja joiden seurauksena jäykkyyismatriisi on singulaarinen tai lähes singulaarinen.

Elementin muodonmuutosenergia on

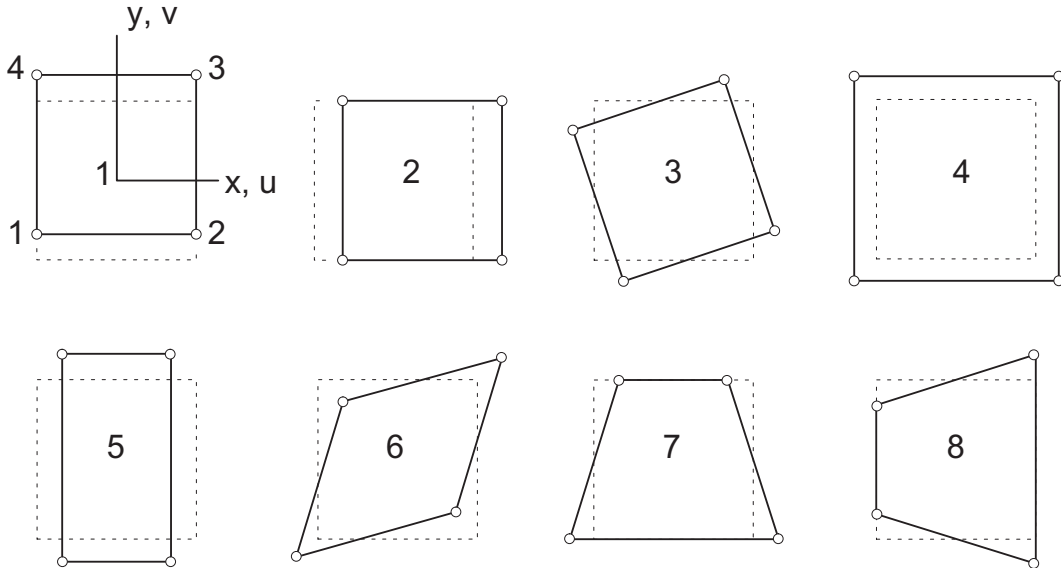
$$U^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} U_0 dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} dV, \quad (7.48)$$

missä $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}^{(e)}$. Muodonmuutosenergia on täten

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(e)T} \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{u}^{(e)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}. \quad (7.49)$$

Elementtiverkkoa tihennettäessä elementin muodonmuutostila lähenee vakiotilaa eli $U_0^{(e)}$ lähestyy vakiota elementin alueella. Jos $U_0^{(e)}$ on vakio, niin $U^{(e)}$:n määrittämiseksi täytyy tilavuus integroida tarkasti. Täten esimerkiksi levytehtävissä on numeerisen kvadratuurin integroitava tJ tarkasti. Esimerkiksi bilineaarisen elementin tapauksessa, jos t =vakio, tJ riippuu lineaarisesti koordinaateista ξ ja η . Tällöin integrointipisteiden vähimmäismäärä on yksi. Kvadraattisen elementin tapauksessa J sisältää termit ξ^3 ja η^3 , joten tarvitaan 2×2 Gaussin kaavaa tilavuuden tarkkaan integrointiin.

Isoparametrusten elementtien tapauksessa paras integrointimenetelmä on tavallisesti alhaisasteisin menetelmä, joka integroi tilavuuden tarkasti ja joka tuottaa stabiilin jäykkyyismatriisin ja elementtimallin, johon ei sisälly nollaenergiamuotoja.



Kuva 7.3 Bilineaarisen elementin ominaismuodot.

7.6.2 Redusoitu integrointi ja nollaenergiamuodot

Elementtimenetelmän tasapainoyhtälöryhmä on

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (7.50)$$

Mikäli siirtymävektori $\mathbf{u}$ vastaa jäykän kappaleen liikettä, niin

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{K}\mathbf{u} = 0. \quad (7.51)$$

Siirtymätilaa $\mathbf{u}$, johon liittyvä muodonmuutosenergia on nolla, voidaan nimittää nollaenergiamuodoksi. Koska jäykänkappaleen liike voidaan ja täytyykin eliminoida siirtymäreunaehtojen avulla, nollaenergiamuotoja ovat varsinaisesti muut kuin yhtälön (7.51) toteuttavat siirtymätilat, jotka eivät vastaa jäykänkappaleen liikettä. Nollaenergiamuotoja voi syntyä elementtiverkkoon ja elementtiin esimerkiksi redusoidun integroinnin seurauksena.

Kuvassa 7.3 on esitetty nelisolmuisen bilineaarisen elementin siirtymätilat eli ominaismuodot.

Kuvan 7.3 siirtymätilat 1,2 ja 3 ovat jäykän kappaleen liikkeitä. Tilat 4,5 ja 6 liittyvät vakio muodonmuutostiloihin, joissa elementin muodonmuutosenergia $U^{(e)} > 0$. Tilat 7 ja 8 ovat taivutusmuotoja. Jos käytetään yhden pisteen Gaussin integrointia, niin tiloihin 7 ja 8 liittyvä muodonmuutosenergia on nolla ja tilat 7 ja 8 ovat tässä tapauksessa nollaenergiamuotoja.

Ominaismuotoon 7 liittyvä elementin siirtymävektori on

$$\mathbf{u}^{(e)T} = [-c \ 0 \ c \ 0 \ -c \ 0 \ c \ 0], \quad (7.52)$$

ja siirtymäkenttä on

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) u_i = (-N_1(\xi, \eta) + N_2(\xi, \eta) - N_3(\xi, \eta) + N_4(\xi, \eta))c = (7.53a) \\ v(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) v_i = 0. \end{aligned} \quad (7.53b)$$

Jacobin matriisi on suorakaide-elementin tapauksessa

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_{21} & 0 \\ 0 & y_{31} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}^{-1} = \frac{2}{x_{21}y_{31}} \begin{bmatrix} y_{31} & 0 \\ 0 & x_{21} \end{bmatrix}, \quad x_{21} = x_2 - x_1, \quad y_{31} = y_3 - y_1. \quad (7.54)$$

Siirtymägradienttivektorin

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{Bmatrix} \quad (7.55)$$

komponentit ovat tässä tapauksessa

$$u_{,x} = -\frac{2c}{(x_2 - x_1)}\eta \quad \text{ja} \quad u_{,y} = -\frac{2c}{(y_3 - y_1)}\xi. \quad (7.56)$$

Koska $v = 0$, ovat muodonmuutoskomponentit nyt

$$\epsilon_x = -\frac{2c}{(x_2 - x_1)}\eta, \quad \epsilon_y = 0 \quad \text{ja} \quad \gamma_{xy} = -\frac{2c}{(y_3 - y_1)}\xi. \quad (7.57)$$

Elementin keskipisteessä eli Gaussin yhden pisteen kvadratuurin integrointipisteessä

$$\epsilon_x(0, 0) = \epsilon_y(0, 0) = \gamma_{xy}(0, 0) = 0 \quad (7.58)$$

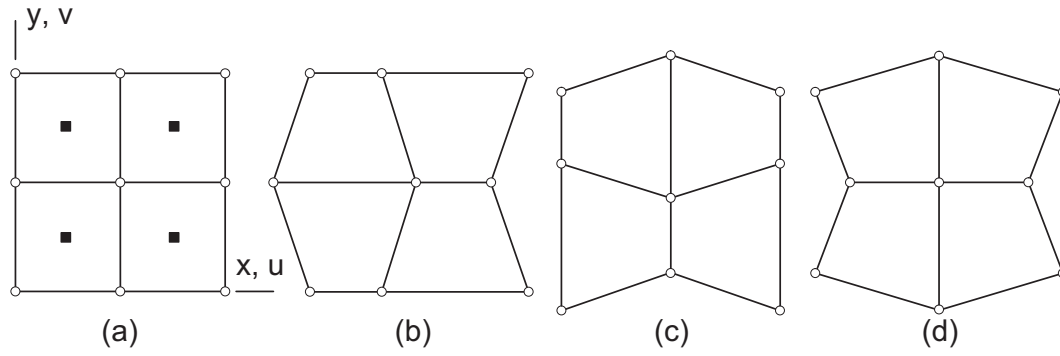
ja kyseisellä integrointimenettelyllä määritetty elementin jäykkyysmatriisi

$$\mathbf{K}^{(e)} = (tw\mathbf{J}\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B})|_{\xi=\eta=0} \quad (7.59)$$

on epästabiili eli

$$\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{0} \quad \text{ja} \quad U^{(e)} = \frac{1}{2}\mathbf{u}^{(e)T}\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{u}^{(e)} = 0. \quad (7.60)$$

Siirtymämuotoja 7 ja 8 voidaan nimittää mekanismeiksi 1×1 -integroinnin yhteydessä. Mekanismeja voi syntyä paitsi elementtiin myös elementtiverkkoon. Kuvan 7.4 mekanismeja nimitetään muotonsa perusteella myös tiimalasimuodoiksi (hourglass modes). Kuvan mekanismit koostuvat siirtymätiloista 7 ja 8, joihin on yhdistetty jäykän kappaleen rotaatio.



Kuva 7.4 Gaussin 1×1 -integroinnin synnyttämät mekanismit neljän bilineaarisen elementin verkossa.

Mekanismin synnyttämiseksi elementin ei tarvitse olla suorakaiteen muotoinen. Jos elementin siirtymätila on esimerkiksi

$$u = a_1 \xi \eta \quad \text{ja} \quad v = a_2 \xi \eta \quad (7.61)$$

missä a_1 ja a_2 ovat vakioita, niin Gaussin pisteessä $\xi = \eta = 0$

$$u_{,\xi} = u_{,\eta} = v_{,\xi} = v_{,\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = 0 \quad (7.62)$$

riippumatta elementin muodosta.

Tarkastellaan seuraavaksi kvadraattista elementtiä Gaussin 2×2 integroinnin yhteydessä. Kuvan 7.5b yhdeksänsolmuisen elementin siirtymät ovat

$$u = 3\xi^2\eta^2 - \xi^2 - \eta^2 \quad \text{ja} \quad v = 0. \quad (7.63)$$

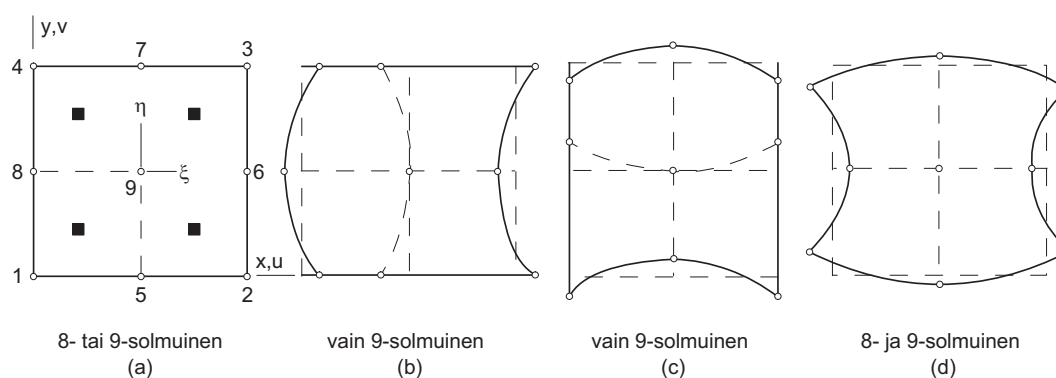
Gaussin menetelmän 2×2 -pisteen kaavan integroimispisteissä $\xi = \pm 1/\sqrt{3}$ ja $\eta = \pm 1/\sqrt{3}$ siirtymistä (7.63) seuraa

$$u_{,\xi} = u_{,\eta} = v_{,\xi} = v_{,\eta} = 0 \quad (7.64)$$

ja muodonmuutokset ovat nollia kyseisissä integroimispisteissä. Kuvien 7.5b ja c muodot eivät ole mahdollisia 8-solmuisessa elementissä, koska sen interpolaatiodiagrammit eivät sisällä termiä $\xi^2\eta^2$. Sensijaan kuvan 7.5d muoto on mahdollinen sekä 8-että 9-solmuisessa elementissä. Mekanismiin liittyvä siirtymäkenttä on

$$u = \xi(3\eta^2 - 1) \quad \text{ja} \quad v = \eta(1 - 3\xi^2) \quad (7.65)$$

ja näitä siirtymiä vastaavat muodonmuutokset ovat nollia Gaussin 2×2 -kaavan pisteissä. Kuvan 7.5d mekanismi ei ole mahdollinen vierekkäisissä elementeissä, koska näin deformatuvat vierekkäiset elementit eivät ole yhteensopivia.



Kuva 7.5 Kvadraattisten elementtien tiimalasimuotoja.

Elementin jäykkyyismatriisin säännöllisyysaste eli rangi on vapausasteiden lukumäärä vähennettynä nollaenergiamuodoilla, joita ovat jäykän kappaleen siirtymämuodot ja mekanismit. Gaussin 2×2 -kaavalla integroidun 9-solmuisen elementin rangi on $2 \times 9 - 3 - 3 = 18 - 6 = 12$. Vastaavasti 8-solmuisen elementin rangi on $16 - 3 - 1 = 12$ eli sama kuin vastaavan 9-solmuisen elementin rangi. Elementin epästabiilius voidaan välttää käyttämällä 3×3 -integrointia.

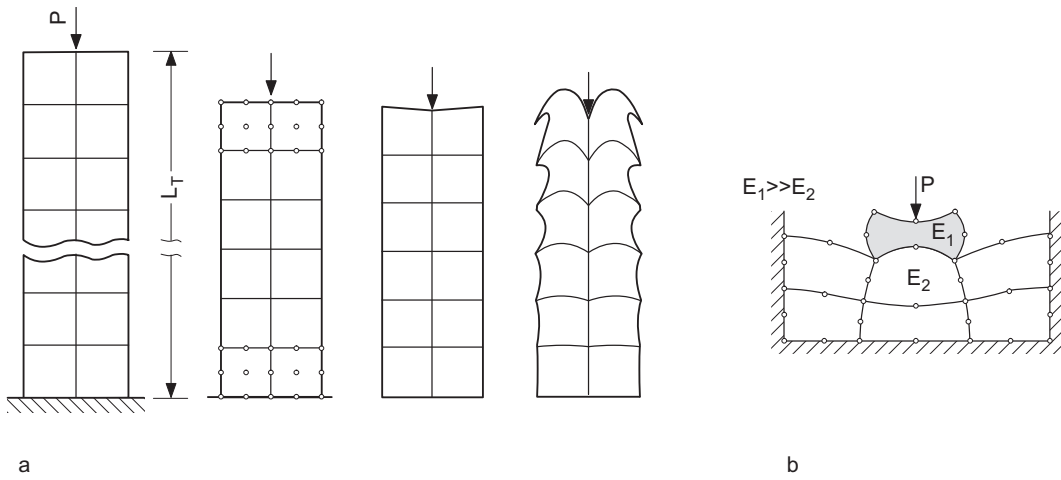
Vaikkei elementtiverkkoon sisältyisikään mekanismia, se voi silti käyttäytyä huonosti, jos mekanismin syntymistä estävä rajoite on heikko. Kuvan 7.6a verkko koostuu yhden pisteen kaavalla integroiduista nelisolmuisista elementeistä tai 2×2 -kaavalla integroiduista 9 solmuisista elementeistä. Jäykkä kiinnitys estää mekanismin syntymisen keskeisen pistekuorman tapauksessa. Kiinnityksen antaman rajoitteen vaikutus pienenee, kun etäisyys tuelta kasvaa. Pistekuorman läheisyydessä siirtymätilaan ilmestyy kuvien 7.4 ja 7.5 esittämiä deformaatiokomponentteja. Esimerkiksi 2×24 elementin verkolla laskettuna siirtymä on 500-kertainen 'tarkkaan tulokseen' $u = PL/EA$ verrattuna.

Kuvan 7.6b tapauksessa vinoviivoitetun elementin, johon pistekuorma P kohdistuu, kimmokerroin E_1 on paljon suurempi kuin viereisen osan kimmokerroin E_2 . Jäykkään reunaan tuetut joustavat elementit tukevat heikosti jäykkää elementtiä, ja 2×2 -kaavalla integroituihin kvadraattisiin elementteihin syntyy rajoitettu mekanismia muistuttava siirtymätila.

Mekanismeista aiheutuvien vaikeuksien välttämiseksi, mahdollisen tarkkuuden menetyksen kustannuksella, varovainen analysoija tyytyy käyttämään vain elementtejä, jotka ovat stabiileja kaikissa olosuhteissa.

7.6.3 Mekanismien kontrollointi

Redusoidulla integroinnilla saadaan aikaiseksi tarkkoja ja luotettavia elementtejä, jos mekanismien syntyminen voidaan jollakin tavalla estää. Tarkastellaan esimerkiksi bilineaarista elementtiä ja yksinkertaisuuden vuoksi sen x -akselin suuntaisia solmusiirtymiä $\mathbf{u}_x^{(e)}$. Kuvan 7.3 siirtymämuodoissa 1 ja 8 $\mathbf{u}_x^{(e)} = \mathbf{0}$. Muotojen 2,...,6



Kuva 7.6 Tiimalasimuotoja elementtiverkossa.

mielivaltainen yhdistelmä on

$$\mathbf{u}_x^{(e)} = a_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} + a_4 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + a_5 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_6 \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (7.66)$$

missä a_i :t ovat vakioita. Kuvan 7.3 ominaismuoto 7 on

$$\mathbf{u}_{x7}^{(e)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (7.67)$$

Muoto 7 on ortogonaalinen muiden muotojen kanssa eli

$$\mathbf{u}_{x7}^{(e)T} \mathbf{u}_{xi}^{(e)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8. \quad (7.68)$$

Muoto 7 voidaan stabiloida ja eliminoida lisäämällä yhden pisteen Gaussin menetelmällä muodostettuun jäykkyyismatriisiin ‘stabiloiva’ matriisi

$$\mathbf{K}_7^{(e)} = a_7^2 \mathbf{u}_{x7}^{(e)} \mathbf{u}_{x7}^{(e)T}. \quad (7.69)$$

Samalla tavalla estetään muodon 8 syntyminen. Kertoimet a_7 ja a_8 voidaan valita siten, että elementin muodonmuutosenergia saa tarkan arvon puhtaassa taivutuksessa. Koska muodot 7 ja 8 ovat ortogonaalisia muiden muotojen kanssa, $\mathbf{K}_7^{(e)}$ ja $\mathbf{K}_8^{(e)}$ eivät vaikuta jäykistävästi muihin siirtymämuotoihin. Esimerkiksi muotoon 7

ja matriisiin $\mathbf{K}_7^{(e)}$ liittyvät solmuvoimat ovat

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = \mathbf{K}_7^{(e)} \mathbf{u}_{xi}^{(e)} = \mathbf{u}_{x7}^{(e)} \mathbf{u}_{x7}^{(e)T} \mathbf{u}_{xi}^{(e)} = \mathbf{u}_{x7}^{(e)} 0 = \mathbf{0}, \quad (7.70)$$

kun $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$.

Edellä kuvattu stabilointimenetelmä voidaan yleistää myös muille elementeille.

7.6.4 Nollaenergiamuotojen määrä elementtiverkossa

Nollaenergiamuotojen *vähimmäismäärälle* elementtiverkossa voidaan johtaa lauseke seuraavalla tarkastelulla. Otaksutaan, että elementtiverkon integroimispisteiden lukumäärä on n_{int} . Rakenteen jäykkymatriisi voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n_{int}} \alpha_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i, \quad (7.71)$$

missä α_i sisältää painokertoimen ja Jacobin determinantin sekä mahdollisesti elementin paksuuden integrointipisteessä i . Merkintä $\mathbf{B}_i, \mathbf{D}_i$ tarkoittaa sitä, että matriisien termit on muodostettu integrointipisteessä i . Rakenteen muodonmuutosenergia on

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{int}} \alpha_i \mathbf{u}^T \mathbf{B}_i \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i \mathbf{u} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{int}} \alpha_i \boldsymbol{\epsilon}_i^T \mathbf{D}_i \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad (7.72)$$

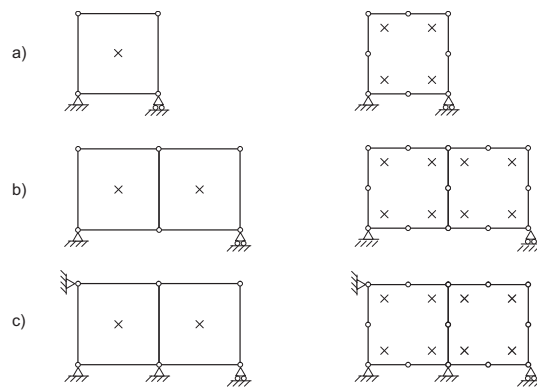
missä integroimispisteessä i muodostettu muodonmuutosvektori on

$$\boldsymbol{\epsilon}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{u}. \quad (7.73)$$

Määritelmän mukaan $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ on nollaenergiamuoto, jos siihen liittyvä muodonmuutosenergia U on nolla. Koska konstitutiivinen matriisi $\mathbf{D}$ on positiivisesti definiitti, muodonmuutosenergia on nolla, jos ja vain jos muodonmuutosvektori on nollavektori integrointipisteissä $i = 1, \dots, n_{int}$, eli jos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{n_{int}} \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (7.74)$$

Levytehtävässä matriisin $\mathbf{B}_i$ dimensiot ovat $3 \times 2n$ ja vektorin $\mathbf{u}$ dimensiot ovat $2n \times 1$, missä n on elementtiverkon solmujen lukumäärä. Tällöin kaavan (7.74) kerroinmatriisin dimensiot ovat $3n_{int} \times 2n$ ja kertomisen tuloksena syntyvän vektorin dimensiot ovat $3n_{int} \times 1$. Homogeenisessa yhtälöryhmässä (7.74) on $2n$ tuntematonta solmusiirtymää ja $3n_{int}$ yhtälöä. Jos $2n > 3n_{int}$, niin tuntemattomia on enemmän kuin yhtälöitä ja ryhmällä (7.74) on vähintään $2n - 3n_{int}$ ei-triviaalia ratkaisua siir-



Kuva 7.7 Elementtiverkkoja joissa esiintyy nollaenergiamuotoja.

Taulukko 7.2 Kuvan 7.7 elementtimallien nollaenergiamuodot.

rakenne	4-solm. elem.	8-solm. elem.
a	2	1
b	3	0
c	0	0

tymävektoriksi $\mathbf{u}$. Verkossa on siten vähintään

$$2n - 3n_{int} = N_0 \quad (7.75)$$

nollaenergiamuotoa. Nelisolmuisen elementin ja yhden pisteen integroinnin tapauksessa $n = 4$ ja $n_{int} = 1$. Kaavan (7.75) perusteella nollaenergiamuotojen lukumäärä on $2 \times 4 - 3 \times 1 = 5$, ja ne ovat kuvan 7.3 jäykänkappaleen siirtymät 1,2 ja 3 sekä muodot 7 ja 8. Jäykänkappaleen liikkeen estämiseksi rakenne tuetaan reunaehdoilla, joiden lukumäärä olkoon n_r . Tällöin kaavan (7.75) perusteella elementtimalliin jää vähintään

$$2n - n_r - 3n_{int} = N_0 \quad (7.76)$$

nollaenergiamuotoa. Kuvan 7.7 rakenteiden mahdollisten nollaenergiamuotojen lukumäärät on esitetty taulukossa 7.2 Esimerkiksi kuvan 7.7b nelisolmuisen elementin tapauksessa $n = 6$, $n_r = 3$, $n_{int} = 2$, ja kaavasta (7.76) seuraa $N_0 = 2 \times 6 - 3 \times 2 - 3 = 3$. Jos malliin jää reunaehtojen asettamisen jälkeen nollaenergiamuotoja, niin redusoidusta integroinnista on luovuttava.

Edellisen perusteella päätellään, että täydellinen integrointi tuottaa luotettavan mallin, redusoitu integrointi voi parantaa tulosten tarkkuutta, jos nollaenergiamuotoja ei synny ja elementin muodon on oltava mahdollisimman vähän vääristynyt eli lähellä suorakaiteen muotoa.

7.6.5 Reunakuormitus

Tarkastellaan elementin reunaa, joka kuuluu levyn reunan osaan S_σ , jolla reunavoimat tunnetaan. Reunavoimavektori olkoon

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \end{bmatrix}, \quad (7.77)$$

ja elementin reunan viiva-alkio on

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad (7.78)$$

missä differentiaalit dx ja dy määritellään kaavoilla

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad (7.79a)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta, \quad (7.79b)$$

eli

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}. \quad (7.80)$$

Elementin reunalla ξ on vakio

$$dx^2 + dy^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\eta^2 \Rightarrow ds = \sqrt{J_{12}^2 + J_{22}^2} d\eta. \quad (7.81)$$

Vastaavasti reunalla $\eta =$ vakio, saadaan pituusalkion lausekkeeksi

$$ds = \sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2} d\xi. \quad (7.82)$$

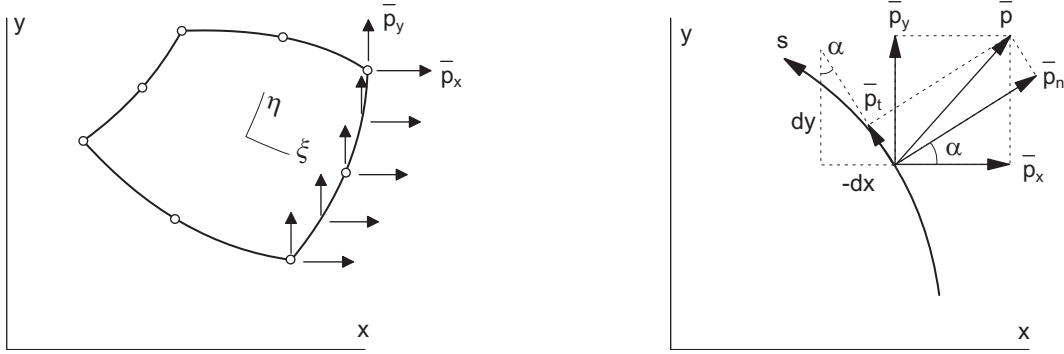
Mikäli reunan S_σ jakautunut kuormitus on määritelty normaali- ja tangentiaali-komponenttien $\bar{p}_n$ ja $\bar{p}_t$ avulla, niin $\bar{p}_x$ ja $\bar{p}_y$ saadaan muunnoskaavoilla, katso kuvaa 7.8

$$\bar{p}_x = \bar{p}_n \cos \alpha - \bar{p}_t \sin \alpha, \quad (7.83a)$$

$$\bar{p}_y = \bar{p}_n \sin \alpha + \bar{p}_t \cos \alpha. \quad (7.83b)$$

Sijoittamalla

$$\sin \alpha = -\frac{dx}{ds} \quad \text{ja} \quad \cos \alpha = \frac{dy}{ds}, \quad (7.84)$$



Kuva 7.8 Levyelementin reunakuormitus.

saadaan

$$\bar{p}_x = \bar{p}_n \frac{dy}{ds} + \bar{p}_t \frac{dx}{ds}, \quad (7.85a)$$

$$\bar{p}_y = -\bar{p}_n \frac{dx}{ds} + \bar{p}_t \frac{dy}{ds}. \quad (7.85b)$$

Reunalla $\xi = \text{vakio}$ saadaan lausekkeet

$$\bar{p}_x = \left(\bar{p}_n \frac{dy}{d\eta} + \bar{p}_t \frac{dx}{d\eta} \right) \frac{d\eta}{ds} = (J_{22}\bar{p}_n + J_{12}\bar{p}_t) \frac{d\eta}{ds}, \quad (7.86a)$$

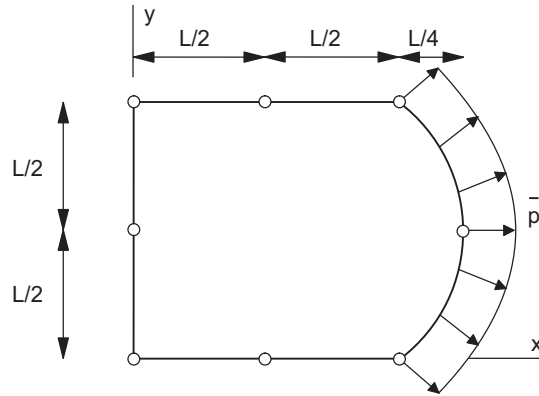
$$\bar{p}_y = \left(-\bar{p}_n \frac{dx}{d\eta} + \bar{p}_t \frac{dy}{d\eta} \right) \frac{d\eta}{ds} = (-J_{12}\bar{p}_n + J_{22}\bar{p}_t) \frac{d\eta}{ds}, \quad (7.86b)$$

ja vastaavasti reunalla $\eta = \text{vakio}$

$$\bar{p}_x = \left(\bar{p}_n \frac{dy}{d\xi} + \bar{p}_t \frac{dx}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{ds} = (J_{21}\bar{p}_n + J_{11}\bar{p}_t) \frac{d\xi}{ds}, \quad (7.87a)$$

$$\bar{p}_y = \left(-\bar{p}_n \frac{dx}{d\xi} + \bar{p}_t \frac{dy}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{ds} = (-J_{11}\bar{p}_n + J_{21}\bar{p}_t) \frac{d\xi}{ds}. \quad (7.87b)$$

Esimerkki 7.6 Määritä oheisen bikvadraattisen Serendip-tyyppisen elementin kuormavektorin lauseke reunalla 2 olevasta painekuormasta. Suorita integroinnit Gaussin kaavoilla.



Kuormitusvektorin komponentit saadaan lausekkeista

$$\bar{f}_{xi} = \int_s N_i \bar{p}_x ds = \int_{-1}^1 N_i J_{22} \bar{p}_n d\eta, \quad (7.88a)$$

$$\bar{f}_{yi} = \int_s N_i \bar{p}_y ds = - \int_{-1}^1 N_i J_{12} \bar{p}_n d\eta, \quad (7.88b)$$

missä J_{22} ja J_{12} ovat geometriakuvauksen Jacobin matriisin alkioita:

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21} \\ J_{12} & J_{22} \end{bmatrix}. \quad (7.89)$$

Elementin solmujen koordinaatit ovat

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (0, 0), & (x_5, y_5) &= (\tfrac{1}{2}L, 0), \\ (x_2, y_2) &= (L, 0), & (x_6, y_6) &= (\tfrac{5}{4}L, \tfrac{1}{2}L), \\ (x_3, y_3) &= (L, L), & (x_7, y_7) &= (\tfrac{1}{2}L, L), \\ (x_4, y_4) &= (0, L), & (x_8, y_8) &= (0, \tfrac{1}{2}L), \end{aligned} \quad (7.90)$$

ja interpolaatiofunktiot ovat

$$N_2 = \tfrac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1), \quad (7.91a)$$

$$N_3 = \tfrac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1), \quad (7.91b)$$

$$N_4 = \tfrac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1), \quad (7.91c)$$

$$N_5 = \tfrac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta), \quad (7.91d)$$

$$N_6 = \tfrac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2), \quad (7.91e)$$

$$N_7 = \tfrac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta), \quad (7.91f)$$

$$N_8 = \tfrac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2). \quad (7.91g)$$

Tarvittavat Jacobin matriisin alkioit ovat:

$$\begin{aligned} J_{22} &= y_{,\eta} = \sum_{i=1}^8 N_{i,\eta} y_i \\ &= (N_{3,\eta} + N_{4,\eta} + \frac{1}{2}N_{6,\eta} + N_{7,\eta} + \frac{1}{2}N_{8,\eta})L, \end{aligned} \quad (7.92a)$$

$$\begin{aligned} J_{12} &= x_{,\eta} = \sum_{i=1}^8 N_{i,\eta} x_i \\ &= (N_{2,\eta} + N_{3,\eta} + \frac{1}{2}N_{5,\eta} + \frac{5}{4}N_{6,\eta} + \frac{1}{2}N_{7,\eta})L. \end{aligned} \quad (7.92b)$$

Määritetään interpolaatiofunktioiden η -derivaatat

$$\begin{aligned} N_{2,\eta} &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(\xi-2\eta), & N_{6,\eta} &= -\eta(1+\xi), \\ N_{3,\eta} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(\xi+2\eta), & N_{7,\eta} &= \frac{1}{2}(1-\xi^2), \\ N_{4,\eta} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(-\xi+2\eta), & N_{8,\eta} &= -\eta(1-\xi), \\ N_{5,\eta} &= -\frac{1}{2}(1-\xi^2), \end{aligned} \quad (7.93)$$

jotka reunalla $\xi = 1$ saavat arvot

$$\begin{aligned} N_{2,\eta} &= -\frac{1}{2}(1-2\eta), \\ N_{3,\eta} &= \frac{1}{2}(1+2\eta), \\ N_{6,\eta} &= -2\eta, \\ N_{4,\eta} &= N_{5,\eta} = N_{7,\eta} = N_{8,\eta} = 0. \end{aligned} \quad (7.94)$$

Alkioiden J_{22} ja J_{12} lausekkeet tarkasteltavalla reunalla ovat

$$J_{22} = \frac{1}{2}L, \quad J_{12} = -\frac{1}{2}\eta L. \quad (7.95)$$

Viimein kysytyt kuormitusvektorin komponentit voidaan laskea

$$\begin{aligned} f_{x2} &= \int_{-1}^1 N_2(1,\eta) J_{22} \bar{p}_n d\eta = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-\eta)(-\eta) \frac{1}{2} L d\eta \bar{p}_n, \\ &= \frac{1}{4} \bar{p} L \int_{-1}^1 (\eta^2 - \eta) d\eta = \frac{1}{4} \bar{p} L 2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{6} \bar{p} L, \end{aligned} \quad (7.96a)$$

$$f_{x3} = \int_{-1}^1 N_3(1,\eta) J_{22} \bar{p}_n d\eta = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1+\eta) \eta \frac{1}{2} L d\eta \bar{p}_n = \frac{1}{6} \bar{p} L, \quad (7.96b)$$

$$f_{x6} = \int_{-1}^1 N_6(1,\eta) J_{22} \bar{p}_n d\eta = \frac{1}{2} \bar{p} L \int_{-1}^1 (1-\eta^2) d\eta = \frac{2}{3} \bar{p} L, \quad (7.96c)$$

$$f_{y2} = - \int_{-1}^1 N_2(1,\eta) J_{12} \bar{p}_n d\eta = \frac{1}{4} \bar{p} L \int_{-1}^1 (\eta^3 - \eta^2) d\eta = -\frac{1}{6} \bar{p} L \quad (7.96d)$$

$$f_{y3} = - \int_{-1}^1 N_3(1,\eta) J_{12} \bar{p}_n d\eta = \frac{1}{6} \bar{p} L, \quad (7.96e)$$

$$f_{y6} = 0. \quad (7.96f)$$

Tietenkin kahden pisteen Gaussin kaavalla saadaan tarkka tulos.

Luku 8

Elementtiapproksimaation tarkkuus

8.1 Virheen mittaus

Elementtimenetelmän antaman likiratkaisun konvergoiminen, eli suppeneminen kohti ratkaistavana olevan matemaattisen mallin tarkkaa ratkaisua riippuu pääasiassa elementtiverkon koosta ja siitä minkä asteisia interpolaatiopolynomeja käytetään. Elementtimenetelmän kehityksen alkuvaiheessa käytettiin alhaista astetta olevia polynomeja ja ratkaisun tarkentaminen tapahtui verkkoa hienontamalla eli tihentämällä. Tätä strategiaa kutsutaan elementtimenetelmän h -versioksi ja se on nykyisinkin hallitseva elementtimenetelmäversio. Modernimpaa tapaa edustaa elementtimenetelmän p -versio, jossa elementtien lukumäärä pidetään vakiona, usein melko pienenä, ja korottamalla interpolaation astetta saavutetaan numeerisen ratkaisun tarkentuminen. Mikäli ongelman ratkaisufunktiot ovat sileitä, saavutetaan tällä menetelmällä optimaaliset suppenemisominaisuudet. Tämä on johtanut hierarkisten interpolaatiofunktioiden käyttöönottoon, joilta lisäksi vaaditaan kantajärjestelmän mahdollisimman suurta stabiiliutta.

Miten ratkaisun tarkkuuden paranemista mitataan? Tähän on olemassa joukko kriteerejä, joista yksinkertaisin on tutkia tietyn suureen arvon muuttumista kun elementtiverkkoa tihennetään ja/tai interpolaatiopolynomien kertalukua kasvatetaan. Yksinkertaisin mahdollinen tapa on käyttää halutun suureen tiettyä pistearvoa. Tämä on kuitenkin yleisesti ottaen kyseenalainen tapa tulkita numeerisen ratkaisun hyvyttä, ellei kyseessä ole suureen ratkaisualueessa esiintyvä maksimiarvo. Luotettavamman kuvan ratkaisun paranemisesta saadaan tutkimalla suppenemista tiettyjen normien avulla. Tällaisia voivat olla vaikkapa maksiminormi

$$\|u(x)\|_{\infty} = \max_x |u(x)|, \quad (8.1)$$

tai ns. L^2 -normi, joka mittaa funktiota neliöintegraalin mielessä

$$\|u\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} u^2 d\Omega \right)^{1/2}. \quad (8.2)$$

Normi siis kuvaa tietyllä tavalla funktion suuruutta ja on vektorilaskennasta tutun käsitteen “vektorin pituus” laajennus.

Malliprobleeman (3.1) tapauksessa luontevia suureita olisivat lämpötilan (siirtymän) virhe

$$\|u - \tilde{u}\|_{\infty}, \quad \text{tai} \quad \|u - \tilde{u}\|_{L_2}, \quad (8.3)$$

tai ns. energiavirhe

$$\|u - \tilde{u}\|_E = \left(\int_{\Omega} k(u' - \tilde{u}')^2 d\Omega \right)^{1/2}. \quad (8.4)$$

Huomaa, että kyseisellä suureella ei kuitenkaan ole energian yksikköä. Edellä esitetyt approksimaatiovirheen lausekkeet ovat absoluuttisia lukuja. Virheen suuruus tulee monissa tapauksissa paremmin miellettyä kun käytetään suhteellisia virheen arvoja, esimerkiksi

$$e_r = \frac{\|u - \tilde{u}\|_E}{\|u\|_E}. \quad (8.5)$$

Elementtimenetelmän virhearvioanalyysi on monimutkainen ja matemaattisesti vaativa alue, joka nojautuu abstraktiin funktionaalianalyysiin. Asiasta kiinnostuneelle suositeltavia lähteitä ovat [30], [17], [25].

8.2 A priori virhearviot

Elementtimenetelmän yhteydessä puhutaan usein etukäteisvirhearvioista eli *a priori* virhearvioista. Nämä ovat asymptoottisia tuloksia ja usein muotoa (elementtimenetelmän h -versio)

$$\|e\| \leq Ch^k, \quad (8.6)$$

jossa e on numeerisen tuloksen virhe tarkkaan ratkaisuun verrattuna, h on elementtiverkon tiheyttä kuvaava lineaarinen mitta ns. verkkoparametri ja k on suppenemisnopeus. Mitä suurempi eksponentti k on sitä nopeammin likiratkaisu lähestyy kohti tarkkaa ratkaisua. Vakio C on tehtäväkohtainen, moninaisista seikoista (mm. elementtityypistä, tarkan ratkaisun sileydestä jne.) riippuva positiivinen verkkoparametrissa h riippumaton kerroin. Suppenemisnopeuseksponentti on puolestaan riippuvainen käytetyistä interpolaatiofunktioista ja myös siitä normista jossa virhettä mitataan, sekä itse ratkaisun sileydestä.

Funktion sileydellä tarkoitetaan sitä, kuinka monta derivointia siihen voidaan

kohdistaa, jotta tulos olisi vielä neliöintegroituva, eli jos

$$\int_0^L \left(\frac{d^r u}{dx^r} \right)^2 dx < \infty \quad (8.7)$$

niin funktio u on r kertaa neliöintegroituvasti derivoituva. Funktio on sitä sileämpi mitä suurempi r on. Matemaattisesti ilmaistuna sanotaan funktion u kuuluvan *Hilbert-avaruuteen* $H^r(0, L)$, eli $u \in H^r(0, L)$. Hilbert-avaruus on normiavaruus ja sen normia merkitään $\|\cdot\|_{H^r}$ tai vain yksinkertaisesti $\|\cdot\|_r$. Reuna-arvotehtävien ratkaisun sileyteen vaikuttaa oleellisesti ratkaisualueen muoto.

Edellä mainittua asymptoottisen *a priori* virhe-estimaatin lauseketta voidaan täsmentää muotoon

$$\|e\|_s \leq Ch^k \|u\|_r \quad k = \min(p+1-s, r-s+1). \quad (8.8)$$

Vakio C jää vielä riippumaan elementtityypistä, interpolaation asteesta p ja ratkaisun sileydestä (korkeimmasta mahdollisesta r :stä). Tasaiselle elementtiverkolle on kuitenkin onnistuttu johtamaan seuraavanlainen arvio

$$\|e\|_s \leq Cp^{1-r} h^k \|u\|_r \quad k = \min(p+1-s, r-s+1). \quad (8.9)$$

Arviosta nähdään, että mikäli ratkaisu u on hyvin sileä (r suuri), on interpolatiopolynomin asteen kasvattaminen (p :n kasvattaminen) nopeampi tapa pienentää virhettä kuin elementtien koon pienentäminen (h :n pienentäminen) pitämällä interpolaation aste kiinnitettynä. Mikäli ratkaisu on epäsäännöllinen (r pieni), vaikuttavat verkon tihentäminen ja polynomiavaruuden laajentaminen oleellisesti samalla tavalla, jolloin pelkästään *a priori* asymptoottisten virhetarkastelujen pohjalta ei voida päätellä, mikä olisi optimaalinen numeerinen menettelytapa.

8.3 Säännöllisyysluokat

Jotta voitaisiin valita optimaalinen elementtimenetelmäformulaatio, on tiedettävä ratkaisun luonne. Szabó ja Babüska [31] luokittelevat ongelmat tarkan ratkaisun u ja elementtimenetelmäratkaisun u_{FE} mukaan kolmeen luokkaan:

Luokka A: Tarkka ratkaisu u on analyyttinen koko ratkaisualueessa alueen reuna mukaanlukien tai alue voidaan jakaa osa-alueisiin, joissa tarkka ratkaisu on analyyttinen reunat mukaanlukien. Elementtiverkko on konstruoitu siten, että elementtien reunat yhtyvät osa-alueiden reunoihin.

Luokka B: Tarkka ratkaisu u on analyyttinen koko alueessa reunat mukaanlukien, lukuunottamatta äärellistä määrää alueen pisteitä (kolmessa dimensiossa viivoja). Elementtiverkko on siten konstruoitu, että pisteet joissa ratkaisu u ei

ole analyyttinen ovat solmupisteitä. Kolmessa dimensiossa viivat, joissa u ei ole analyyttinen yhtyvät elementin reunaviivoihin. Singulaarisen pisteen läheisyydessä ratkaisu u voidaan tyypillisesti kirjoittaa kahden tekijän summana $u = u_1 + u_2$, missä u_1 on sileä (analyyttinen) komponentti ja u_2 on muotoa

$$u_2 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i r^{\lambda_i} \Phi_i(\theta), \quad (8.10)$$

missä r, θ ovat singulaariseen pisteeseen keskitetyt polaarikoordinaatit, λ_i :t positiivisia lukuja, A_i :t reunaehdoista ja kuormituksesta riippuvia kertoimia ja Φ_i :t ovat sileitä funktioita. Mikäli nyt $\min(\lambda_i) < 1$ sanotaan ongelman olevan *vahvasti luokassa B*, muutoin se on *heikosti luokassa B*.

Luokka C: Elementtiverkkoa ei voida konstruoida siten, että solmupisteet (tai elementtien reunaviivat 3-D ongelmissa) yhtyisivät ei-analyyttisiin pisteisiin. Ongelman sanotaan kuuluvan vahvasti luokkaan C, mikäli ratkaisun epäanalyyttisten pisteiden asemalla ei ole ennalta määritettävissä olevaa muotoa. Jos epäanalyyttiset pisteet jakautuvat alueeseen säännöllisen kaavan mukaisesti sanotaan tehtävän kuuluvan *heikosti luokkaan C*.

8.4 Elementtimenetelmän h -, p - ja hp -versiot

Kuten jo kappaleessa 8.1 mainittiin, voidaan elementtimenetelmäratkaisun suppeneminen saavuttaa (a) hienontamalla verkkoa, eli pienentämällä elementtien kokoa ($h \rightarrow 0$) tai (b) kohottamalla interpolaatiopolynomien astetta $p \rightarrow \infty$. Näitä tapoja kutsutaan elementtimenetelmän h - ja p -versioiksi. Mikäli suppeneminen saadaan aikaan sekä hienontamalla verkkoa että korottamalla interpolaatiopolynomien astetta puhutaan hp -versiosta.¹

Tärkeä kysymys on eri versioiden suorituskyky ja miten sitä mitataan. Kuten *a priori* estimaateista (8.8) ja (8.9) voidaan todeta on yhteismitallisen argumentin löytäminen olla hankalaa. Sekä h - että p -laajennuksessa vapausasteiden määrä kasvaa, ja sitä voidaan pitää eräänlaisena työmäärään verrannollisena mittarina. Seuraavat tulokset ovat Szabón ja Babüskan kirjasta [31] ja pätevät kaksidimensioisille ongelmille.

h -versio: Asymptoottinen virheestimaatti (8.8) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\|u - u_{FE}\|_E \leq CN^{-k}, \quad (8.11)$$

¹Szabó ja Babüska [31] käyttävät termiä laajennusprosessi (extension) kuvaamaan tapahtumaa jossa diskretoinnin systemaattisilla muutoksilla vapausasteiden määrän kasvaessa saavutetaan asteittain parempi approksimaatio tarkasteltavana olevalle ongelmalle. Versio sanaa he käyttävät laajennusprosessien elementtimenetelmäimplementoinneista. Tässä esityksessä ei tehdä eroa termien laajennusprosessi ja versio välillä.

missä C ja k ovat positiivisia vakioita ja N on vapausasteiden lukumäärä. Erotellaan elementtiverkon tyypistä riippuen seuraavat kaksi tapausta:

1. Käytettäessä tasavälistä tai miltei tasavälistä elementtiverkkoa, eksponentti k on

$$k = \frac{1}{2} \min(p, \lambda), \quad (8.12)$$

missä $\lambda = \min \lambda_i$ ja λ_i on määritelty yhtälöllä (8.10). Mikäli ratkaisu u on analyttinen koko ratkaisualueessa ja reunoilla määrittää suppenemisnopeuden pelkästään interpolaatiopolynomien aste p .

2. Mikäli elementtiverkko voidaan konstruoida siten, että virhe on tasan jakautunut elementtiverkossa, voidaan riippuvuus singulaarisuuden asteesta menetelmän konvergenssinopeuden rajoittimena eliminoida. Tällöin siis pätee

$$k = \frac{1}{2}p. \quad (8.13)$$

p -versio:

1. Mikäli ratkaisualueessa tai sen reunalla ei ole singulariteettejä, on suppenemisnopeus *eksponentiaalinen*:

$$\|u - u_{FE}\|_E \leq C \exp(-k_1 N^{k_2}), \quad (8.14)$$

missä C, k_1 ja k_2 ovat positiivisia vakioita, $k_2 \geq 1/2$.

2. Mikäli ratkaisualueessa tai sen reunalla esiintyy singulaarisia pisteitä, on suppenemisnopeus *algebrallista*. Suppenemisnopeus on muotoa (8.11) ja k on riippuvainen singulaarisuuden asteesta λ seuraavasti:

- (a) Mikäli singulaarinen piste ei ole solmupiste,

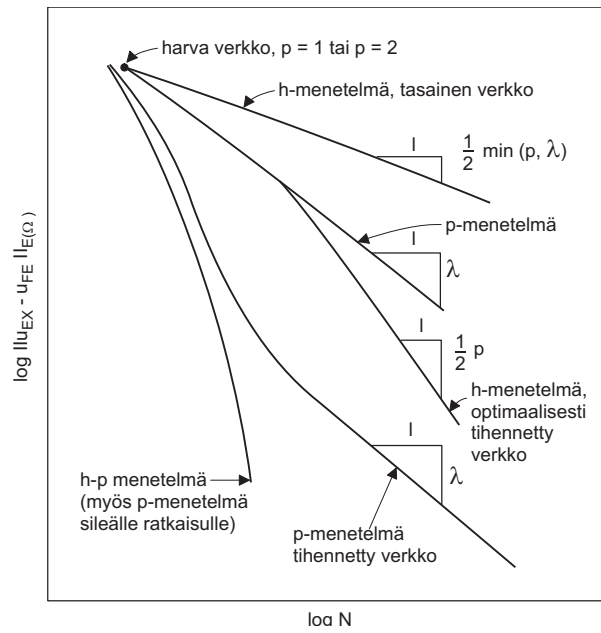
$$k = \frac{1}{2}\lambda. \quad (8.15)$$

- (b) Mikäli singulaarinen piste yhtyy solmupisteeseen,

$$k = \lambda. \quad (8.16)$$

hp -versio: Elementtimenetelmän hp -versio tarjoaa tehokkaimman tavan kontrolloida diskretointivirhettä ja eksponentiaalinen suppenemisnopeus (muotoa (8.14) ja $k_2 \geq 1/3$) voidaan saavuttaa sopivalla verkon ja polynomiasteiden valinnalla.

Optimaalinen elementtiverkko ja interpolaatiopolynomien astejakauma konstruoidaan siten, että elementit ovat pieniä singulaaristen pisteiden lähellä ja näissä elementeissä interpolaatiopolynomien aste on alhaisin. Etäännyttäessä singulaarisesta



Kuva 8.1 2-D elementtimenetelmäversioiden suppeneminen mitattuna energianormissa [31].

pisteestä elementtien koko kasvaa geometrisessa suhteessa ja interpolaatiopolynomien asteluku kasvaa. Kuvassa 8.1 on kaavamainen kuva eri menetelmien käyttäytymisestä.

8.5 Elementtimenetelmän geometrinen tulkinta

Tarkastellaan jälleen esimerkkinä malliproblemaa (3.1), jonka virtuaalisen lämmön (tai siirtymän) periaatteen mukainen heikko muoto on

$$\int_0^L ku' \hat{u}' dx = \int_0^L f \hat{u} dx, \quad (8.17)$$

missä virtuaalinen lämpötila $\hat{u}$ (tai siirtymä) toteuttaa homogeeniset reunaehdot, eli kuuluu kinemaattisesti luovallisten funktioiden joukkoon. Matemaatikot kirjoittavat variaatiotehtävän muodossa: etsi funktio u siten, että

$$\int_0^L ku' \hat{u}' dx = \int_0^L f \hat{u} dx \quad \forall \hat{u} \in V(I), \quad (8.18)$$

missä funktioavaruus V (tuo kinemaattisesti luovallisten funktioiden joukko) tässä tapauksessa on välillä $I = \{x | x \in [0, L]\}$ määriteltyjen jatkuvien funktioiden joukko, joiden ensimmäinen derivaatta on paloittain jatkuva ja funktio saa nolla-arvon välin

päätepisteissä. Funktioavaruus $V(I)$ voidaan määritellä seuraavasti:

$$V(I) = \{v | v \in L^2(I), v' \in L^2(I), v(0) = 0, v(L) = 0\}, \quad (8.19)$$

missä neliöintegroituvien funktioiden joukko $L^2(I)$ on

$$L^2(I) = \left\{ v \mid \int_I v^2 dx < \infty \right\}. \quad (8.20)$$

Skalaaritulolla varustettua täydellistä lineaariavaruutta kutsutaan *Hilbertin*² avaruudeksi.

Elementtimenetelmässä variaatio-ongelman (8.18) ratkaisua etsitään funktioavaruuden V äärellisulotteisessa aliavaruudessa V_h . Täten elementtimenetelmään perustuva variaatioformulaatio voidaan lausua muodossa: etsi funktio $u_h \in V_h(I)$ siten, että

$$\int_I k u'_h \hat{u}' dx = \int_I \bar{f} \hat{u} dx \quad \forall \hat{u} \in V_h(I). \quad (8.21)$$

Koska V_h on V :n aliavaruus ($V_h \subset V$), voidaan yhtälössä (8.18) valita variaation $\hat{u}$ kuuluvan funktioavaruuteen V_h , jolloin vähentämällä (8.21) yhtälöstä (8.18) saadaan

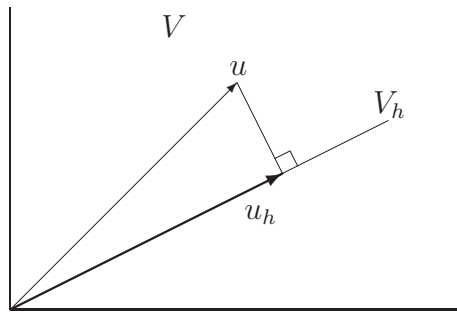
$$\int_I k(u' - u'_h) \hat{u}' dx = 0, \quad \forall \hat{u} \in V_h(I), \quad (8.22)$$

eli virhe $u - u_h$ on ortogonaalinen kaikkien V_h :n alkioden suhteen. Tämä voidaan tulkita myös seuraavasti: elementtimenetelmäratkaisu on tarkan ratkaisun ortogonaaliprojektio aliavaruuteen V_h . Tätä on havainnollistettu kuvassa 8.2, jossa avaruus V assosioidaan kaksidimensioiseen Euklidiseen vektoriavaruuteen, jonka yksidimensionen aliavaruus kuvaa avaruutta V_h .

Elementtimenetelmäratkaisu antaa siten energianormin mielessä pienimmän mahdollisen virheen aliavaruudessa V_h , eli ortogonaalisuudesta (8.22) seuraa elementtimenetelmän ns. parasapproksimaatio-ominaisuus

$$\|u - u_h\|_E \leq \|u - \hat{u}\|_E \quad \forall \hat{u} \in V_h(I). \quad (8.23)$$

²David Hilbert (1862-1943) saksalainen matemaatikko. Hilbertin oppilas Richard Courant (1888-1972) julkaisi 1943 artikkelin "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations" *Bull. Am. Math. Soc.*, **49**, 1-23, jota voidaan pitää elementtimenetelmään alkuna. Hilbert ja hänen aikalaisensa Felix Klein (1849-1925) loivat Göttingenin yliopistoon kukoistavan matematiikan laitoksen, jossa yhdistyivät oivallisesti matematiikka ja sitä soveltavat luonnontieteet. Vuosisadan vaihteen Göttingenissä vaikuttivat sellaiset kuuluisuudet kuten Herman Minkowski (1864-1909), Theodore von Kármán (1881-1963), Herman Weyl (1885-1955) ja filosofian laitoksella fenomenalisti Edmund Husserl (1859-1938). Courantin ristiriitoja herättävästä elämästä kiinnostuneille suositellaan Constance Reidin kirjoittamaa elämäkertaa [57].



Kuva 8.2 Elementtimenetelmäratkaisu on tarkan ratkaisun ortogonaaliprojektio.

8.6 Elementtimenetelmän abstrakti formulaatio

Otetan käyttöön lyhenteitä joilla yhtälössä (8.21) tai (8.18) olevia integraaleja merkitään:

$$a(u, \hat{u}) = \int_I ku' \hat{u}' dx \quad \text{ja} \quad L(\hat{u}) = \int_I f \hat{u} dx. \quad (8.24)$$

Nyt voidaan malliprobleeman elementtimenetelmän mukainen variaatiomuoto kirjoittaa muodossa: etsi $u_h \in V_h$ siten, että

$$a(u, \hat{u}) = L(\hat{u}) \quad \forall \hat{u} \in V_h(I). \quad (8.25)$$

Samanlaiseen muotoon voidaan kirjoittaa muidenkin stationaaristen ongelmien virtuaalisen työn yhtälöt, tällöin vain bilineaarimuodon $a(u, \hat{u})$, lineaarisen funktionaalil $L(\hat{u})$ ja avaruuden V_h merkitys on erilainen. Toisin sanoen abstraktin variaatioformulaation (8.25) voidaan ajatella kattavan suuren joukon erilaisten fysikaalisten ongelmien matemaattisia malleja.

Elementtimenetelmäprobleemin (8.25) *a priori* virhearvio on suoraviivaisesti johdettavissa, mikäli seuraavat kaksi ehtoa ovat voimassa

$$\alpha \|v\|_V^2 \leq a(v, v) \quad \forall v \in V, \quad (8.26)$$

$$a(v, w) \leq M \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V, \quad (8.27)$$

ja vakiot α ja M löydettävissä siten, että $\alpha > 0$ ja $0 < M \leq \infty$. Mikäli (8.26) toteutuu sanotaan bilineaarimuodon $a(v, w)$ olevan V -elliptinen. Ehto (8.27) ilmaisee bilineaarimuodon jatkuvuusominaisuuden. Näiden avulla voidaan osoittaa parasapproksimaatio-ominaisuus (8.23), nyt kirjoitettuna muodossa

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (8.28)$$

Standardi elementtimenetelmäformulaatiota voidaan menestyksellisesti soveltaa mi-

käli kerroin $M/\alpha \approx 1$. Edellisissä luvuista liemee käynyt ilmi, että standardi elementtimenetelmää voidaan hyvin soveltaa isotrooppiseen lämmönjohtumis- ja elastisuusongelmaan ja että vaikeuksia on odotettavissa kun mallinamme esim. diffuusio-konvektioyhtälöä. Ongelmia esiintyy myös kokoonpuristumattoman, tai lähes kokoonpuristumattoman aineen tapauksessa, hyvin anisotrooppisten materiaalien mallinnuksessa sekä ohuiden kappaleiden (palkkien, laattojen, kuorien) analysoinnissa.

Luku 9

Palkkielementtejä

Tämä luku toimii johdatuksena laattaelementteihin, sillä ne ongelmat joihin laattaelementtien kehittämisessä on törmätty esiintyvät yksinkertaistetussa muodossa usein myös palkkielementtien yhteydessä. Yksidimensioisen rakenteen käsittelyn helppoudesta johtuen, ilmiöiden luonteen ymmärtäminen onnistuu täten joutuisammin. On kuitenkin syytä huomauttaa, että kaikkia laattatehtäville ominaisia ongelmakohtia ei palkkimallissa voi luonnollisestikaan esiintyä.

9.1 Eulerin-Bernoullin palkkimalli

Yksinkertaisin palkin käyttäytymistä kuvaava malli on ns. ohuen palkin malli. Sitä kutsutaan myös kehittelijöidensä mukaan Eulerin-Bernoullin palkkimalliksi¹ ja sen perusotaksumat ovat:

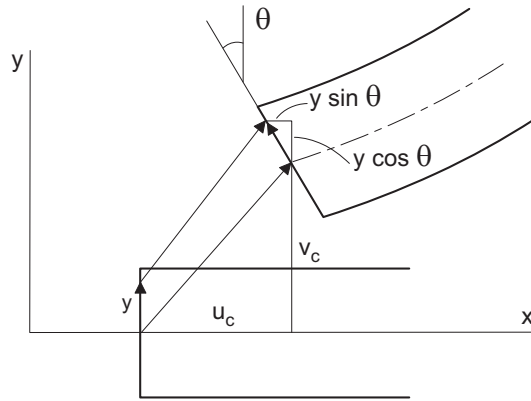
1. palkin akselin normaalit säilyvät suorina,
2. palkin akselin normaalit eivät veny ja
3. poikittainen leikkausmuodonmuutos on merkityksetön.

Kaksi ensimmäistä otaksumaa voidaan toteuttaa valitsemalla siirtymille u ja v lausekkeet (ks. kuva 9.1)

$$u(x, y) = u_c(x) - y \sin \theta(x), \quad (9.1a)$$

$$v(x, y) = v_c(x) - y(1 - \cos \theta(x)), \quad (9.1b)$$

¹Ohuen palkin mallista olisi oikeutettua käyttää nimeä Bernoulli-Euler-Parent, sillä vasta Parent (1666-1716) määritteli oikein palkin neutraaliakselin paikan (julkaisu 1713) ja sitä kautta palkin taivutusjäykkyydelle saadaan oikea arvo. Jacob Bernoulli (1654-1705) tutki palkin taipumaviivan määrittämisestä. Hän päätteli taivutusmomentin olevan suoraan verrannollinen taipumaviivan kaarevuuteen, mikä on oikein, mutta ei saanut oikeaa arvoa palkin taivutusjäykkyydelle. Daniel Bernoulli (1700-1782) esitti ensimmäisenä prismaattisen palkin poikittaisten värähtelyjen differentiaaliyhtälön. Leonard Euler (1707-1783) julkaisi 1744 kirjan variaatiolaskennasta ja joka sisälsi myös ensimmäisen systemaattisen esityksen elastisten palkkien analyysistä.



Kuva 9.1 Palkin deformaatio.

missä u_c ja v_c ovat keskipisteakselin pisteen x siirtymäkomponentit ja θ on palkin akselin normaalin kiertymäkulma. Rajoittumalla pieniin siirtymiin, $u/L, v/L, \theta \ll 1$, saadaan likilausekkeet

$$u(x, y) = u_c(x) - y\theta(x), \quad (9.2a)$$

$$v(x, y) = v_c(x). \quad (9.2b)$$

Otaksutaan palkin akseli kokoonpuristumattomaksi, jolloin aksiaalisen siirtymän lauseke voidaan yksinkertaistaa muotoon

$$u(x, y) = -y\theta(x). \quad (9.3)$$

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi jätetään keskiakselia kuvaava alaindeksi c pois taipuman v lausekkeesta, joten siirtymien lausekkeet ovat:

$$u(x, y) = -y\theta(x), \quad (9.4a)$$

$$v(x, y) = v(x). \quad (9.4b)$$

Edellä oleviin siirtymäotaksumiin perustuvat muodonmuutoskomponenttien lausekkeet ovat:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{d\theta}{dx}, \quad (9.5a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{dx} - \theta. \quad (9.5b)$$

Eulerin-Bernoullin palkkimallin otaksumasta 3 seuraa siten

$$\gamma_{xy} = \frac{dv}{dx} - \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{dv}{dx}, \quad (9.6)$$

jolloin siirtymäotaksumat (9.4) saavat muodon

$$u(x, y) = -yv'(x), \quad (9.7a)$$

$$v(x, y) = v(x). \quad (9.7b)$$

Eulerin-Bernoullin palkkimallin virtuaalisen työn yhtälö on

$$\int_0^L \int_A \sigma_x \delta \epsilon_x dA dx = \int_0^L f \delta v dx, \quad (9.8)$$

jossa virtuaalinen venymä $\delta \epsilon_x$ on

$$\delta \epsilon_x = -y \delta \theta' = -y \delta v''. \quad (9.9)$$

Otaksumalla lineaarinen materiaalilaki ($\sigma_x = E \epsilon_x$), saadaan

$$\int_0^L \int_A E y^2 \delta v'' v'' dA dx = \int_0^L f \delta v dx, \quad (9.10)$$

josta suorittamalla integrointi palkin poikkileikkauksen yli seuraa

$$\int_0^L EI \delta v'' v'' dx = \int_0^L f \delta v dx, \quad (9.11)$$

jossa I on palkin poikkileikkauksen jäyhyysmomentti. Tämä variaatiomuoto toimii perustana elementtimenetelmän yhtälöiden muodostamiselle. Heikko muoto (9.11) voidaan kirjoittaa myös taivutusmomentin $M = EI \kappa = -EI v''$ ja virtuaalisen käyrityksen $\delta \kappa = -\delta v''$ avulla muodossa

$$\int_0^L M \delta \kappa dx = \int_0^L f \delta v dx. \quad (9.12)$$

Variaatiomuodosta (9.11) nähdään, että taipuman v elementti-interpolaation on oltava vähintään C_1 -jatkuva, jotta lausekkeen ensimmäinen integraali olisi äärellinen. Konstruoidaan yksinkertaisin mahdollinen C_1 -jatkuva interpolaatio. On ilmeistä, että kaksisolmuissa elementissä tuntemattomina solmusuureina olisi oltava funktion ja sen derivaatan arvot. Täten interpolaatio elementin alueella on muotoa

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)\left.\frac{dv}{dx}\right|_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\left.\frac{dv}{dx}\right|_2. \quad (9.13)$$

Interpolaatiofunktioiden $N_i, i = 1, \dots, 4$ muodostamiseksi siirretään tarkastelu luonnolliseen ξ -koordinaatistoon, joka määritellään tavanomaiseen tapaan välillä $(-1, 1)$.

Kirjoitetaan interpolaatio muodossa

$$\tilde{v}(x) = H_{01}^1(\xi)v_1 + H_{11}^1(\xi)\frac{dv}{d\xi}\bigg|_1 + H_{02}^1(\xi)v_2 + H_{12}^1(\xi)\frac{dv}{d\xi}\bigg|_2. \quad (9.14)$$

Vaaditaan funktioilta H_{kj}^1 , $k = 0, 1$; $j = 1, 2$ seuraavat ominaisuudet:

$$H_{01}^1(-1) = 1, \quad \frac{dH_{01}^1}{d\xi}(-1) = 0, \quad H_{01}^1(1) = 0, \quad \frac{dH_{01}^1}{d\xi}(1) = 0, \quad (9.15a)$$

$$H_{11}^1(-1) = 0, \quad \frac{dH_{11}^1}{d\xi}(-1) = 1, \quad H_{11}^1(1) = 0, \quad \frac{dH_{11}^1}{d\xi}(1) = 0, \quad (9.15b)$$

$$H_{02}^1(-1) = 0, \quad \frac{dH_{02}^1}{d\xi}(-1) = 0, \quad H_{02}^1(1) = 1, \quad \frac{dH_{02}^1}{d\xi}(1) = 0, \quad (9.15c)$$

$$H_{12}^1(-1) = 0, \quad \frac{dH_{12}^1}{d\xi}(-1) = 0, \quad H_{12}^1(1) = 0, \quad \frac{dH_{12}^1}{d\xi}(1) = 1, \quad (9.15d)$$

Jokainen funktioista $H_{01}^1, \dots, H_{12}^1$ on siten kolmannen asteen polynomi, joka määräytyy yksikäsitteisesti neljästä ehdosta.

Funktioille H_{kj}^1 , $k = 0, 1$; $j = 1, 2$ saadaan lausekkeet

$$H_{01}^1(\xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi) = (H_{01}^0)^2(1 + 2H_{02}^0), \quad (9.16a)$$

$$H_{11}^1(\xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(1 + \xi) = 2(H_{01}^0)^2H_{02}^0, \quad (9.16b)$$

$$H_{02}^1(\xi) = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi) = (H_{02}^0)^2(1 + 2H_{01}^0), \quad (9.16c)$$

$$H_{12}^1(\xi) = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(\xi - 1) = -2H_{01}^0(H_{02}^0)^2, \quad (9.16d)$$

jossa lineaarisia perusinterpolaatiofunktioita on merkitty $H_{01}^0 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$ ja $H_{02}^0 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$. Funktiot H_{kj}^1 on piirretty kuvaan 9.2. Interpolaatiofunktioiksi (9.13) saadaan

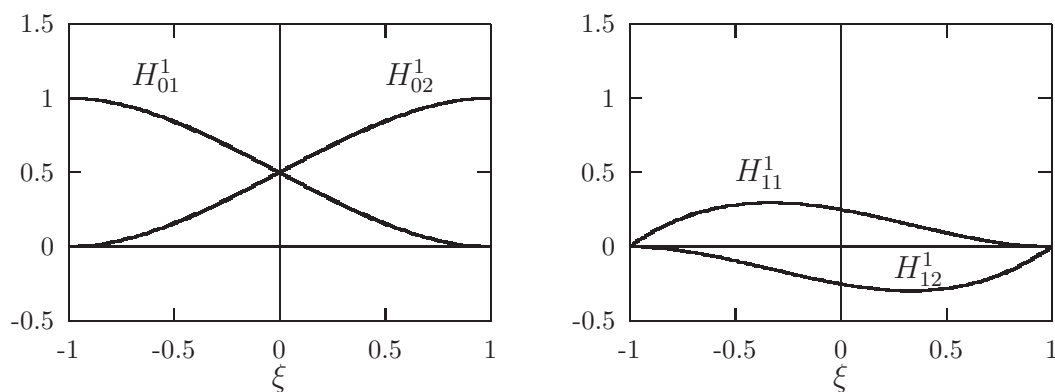
$$\begin{aligned} N_1(x) &= H_{01}^1(\xi(x)), & N_2(x) &= \frac{1}{2}h^{(e)}H_{11}^1(\xi(x)), \\ N_3(x) &= H_{02}^1(\xi(x)), & N_4(x) &= \frac{1}{2}h^{(e)}H_{12}^1(\xi(x)), \end{aligned} \quad (9.17)$$

Edellä esitettyjä polynomeja kutsutaan ensimmäisen asteen Hermiten interpolaatiopolynomeiksi (ks. liite A).

Eulerin-Bernoullin palkkielementin jäykkyyismatriisiin ja kuormavektorin alkioiksi saadaan siten

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} EI \frac{d^2 N_i}{dx^2} \frac{d^2 N_j}{dx^2} dx = \frac{8}{h^{(e)3}} \int_{-1}^1 EI \frac{d^2 N_i}{d\xi^2} \frac{d^2 N_j}{d\xi^2} d\xi, \quad (9.18)$$

$$f_i^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_i(x) dx = \frac{1}{2}h^{(e)} \int_{-1}^1 f(\xi) N_i(\xi) d\xi. \quad (9.19)$$



Kuva 9.2 Hermiten kuubiset C_1 -interpolaatiopolynomit.

9.2 Timoshenkon palkkimalli

9.2.1 Virtuaalisen työn yhtälö

Palkin kinemaattisista otaksumista

$$u(x, y) = -y\theta(x), \quad (9.20a)$$

$$v(x, y) = v(x) \quad (9.20b)$$

voidaan päätyä malliin, jossa palkin poikittainen leikkausmuodonmuutos tulee keskimääräisesti huomioonotetuksi. Timoshenkon palkkimallissa muodonmuutokset ovat

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{d\theta}{dx}, \quad (9.21a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{dx} - \theta, \quad (9.21b)$$

ja virtuaalisen työn yhtälö on muotoa

$$\int_0^L \int_A (\sigma \delta \epsilon + \tau \delta \gamma) dA dx = \int_0^L f \delta v dx, \quad (9.22)$$

josta alaindeksit x ja xy on merkintöjen yksinkertaistamiseksi jätetty pois. Sijoittamalla tähän muodonmuutosten lausekkeet (9.21) sekä lineaarisesti kimmoisa materiaalilaki $\sigma = E\epsilon$, $\tau = G\gamma$ ($G = E/2(1 + \nu)$ = leikkausmoduuli), saadaan lauseke

$$\int_0^L [EI\theta' \delta \theta' + GA(v' - \theta)(\delta v' - \delta \theta)] dx = \int_0^L f \delta v dx. \quad (9.23)$$

Muodonmuutoksen lausekkeesta (9.21b) havaitaan, että liukuma on vakio koko poikkileikkauksessa. Tämä ei tietenkään pidä paikkaansa, vaan liukumalla on jokin poikkileikkauksen muodosta riippuva jakauma. Leikkausmuodonmuutoksen poikittainen jakauma voidaan kuitenkin keskimääräisesti ottaa huomioon modifioimalla

leikkausjäykkyyden lauseketta muotoon GA_s , missä A_s on leikkauspinta-ala (suorakaiteelle $A_s = \frac{5}{6}A$ ja I-profilille $A_s = A_{uuma}$). Virtuaalisen työn lauseke saadaan siten muotoon

$$\int_0^L [EI\theta'\delta\theta' + GA_s\theta\delta\theta - GA_s(v'\delta\theta + \theta\delta v') + GA_sv'\delta v'] dx = \int_0^L f\delta v dx. \quad (9.24)$$

9.2.2 Yksinkertainen elementti

Variaatioyhtälön likiratkaisussa on nyt kaksi toisistaan riippumatonta suuretta: taipuma v ja palkin akselin normaalin kiertymäkulma θ . Havaitaan myös, että kummallekin suurelle riittää C_0 -jatkuva elementti-interpolaatio. Yksinkertaisin mahdollinen Timoshenkon palkkimallin elementti saadaan valitsemalla sekä taipumalle että kiertymälle lineaarinen interpolaatio:

$$v = N_1v_1 + N_2v_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)v_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)v_2 = \mathbf{N}_v \mathbf{v}^{(e)}, \quad (9.25a)$$

$$\theta = N_1\theta_1 + N_2\theta_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2 = \mathbf{N}_\theta \boldsymbol{\theta}^{(e)}. \quad (9.25b)$$

Variaatioyhtälön termien elementtiosuudet ovat, nyt $\mathbf{N}_v = \mathbf{N}_\theta = [N_1, N_2]$:

$$\int_{x_1}^{x_2} (EI\theta'\delta\theta' + GA_s\theta\delta\theta) dx = \boldsymbol{\delta\theta}^{(e)T} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} \boldsymbol{\theta}^{(e)}, \quad (9.26a)$$

$$- \int_{x_1}^{x_2} GA_sv'\delta\theta dx = \boldsymbol{\delta\theta}^{(e)T} \mathbf{K}_{\theta v}^{(e)} \mathbf{v}^{(e)}, \quad (9.26b)$$

$$- \int_{x_1}^{x_2} GA_s\theta\delta v' dx = \boldsymbol{\delta v}^{(e)T} \mathbf{K}_{v\theta}^{(e)} \boldsymbol{\theta}^{(e)}, \quad (9.26c)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} GA_sv'\delta v' dx = \boldsymbol{\delta v}^{(e)T} \mathbf{K}_{vv}^{(e)} \mathbf{v}^{(e)}, \quad (9.26d)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f\delta v dx = \boldsymbol{\delta v}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)}. \quad (9.26e)$$

Osamatriisien $\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(e)}$ lausekkeet ovat:

$$\mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} = \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 EI \mathbf{N}'_\theta{}^T \mathbf{N}'_\theta d\xi + \frac{h^{(e)}}{2} \int_{-1}^1 GA_s \mathbf{N}_\theta{}^T \mathbf{N}_\theta d\xi, \quad (9.27a)$$

$$\mathbf{K}_{\theta v}^{(e)} = - \int_{-1}^1 GA_s \mathbf{N}_\theta{}^T \mathbf{N}'_v d\xi, \quad (9.27b)$$

$$\mathbf{K}_{v\theta}^{(e)} = - \int_{-1}^1 GA_s \mathbf{N}'_v{}^T \mathbf{N}_\theta d\xi, \quad (9.27c)$$

$$\mathbf{K}_{vv}^{(e)} = \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 GA_s \mathbf{N}'_v{}^T \mathbf{N}'_v d\xi. \quad (9.27d)$$

Elementin jäykkyyismatriisi on koottu edellä esitetyistä lohkoista seuraavasti:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vv}^{(e)} & \mathbf{K}_{v\theta}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{\theta v}^{(e)} & \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

Otaksumalla taivutusjäykkyys EI ja leikkausjäykkyys GA_s vakioiksi saadaan lineaarista interpolaatiota käytettäessä matriisit:

$$\mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} = \frac{EI}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{GA_s h^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (9.29a)$$

$$\mathbf{K}_{\theta v}^{(e)} = \frac{GA_s}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{v\theta}^{(e)} = \mathbf{K}_{\theta v}^{(e)T}, \quad (9.29b)$$

$$\mathbf{K}_{vv}^{(e)} = \frac{GA_s}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.29c)$$

Mikäli vapausasteet ryhmitellään elementin siirtymävektoriin $\mathbf{u}^{(e)}$ seuraavasti

$$\mathbf{u}^{(e)T} = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2], \quad (9.30)$$

saadaan elementin jäykkyyismatriisi muotoon

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} GA_s h^{(e)-1} & \frac{1}{2}GA_s & -GA_s h^{(e)-1} & \frac{1}{2}GA_s \\ & EI h^{(e)-1} + \frac{1}{3}GA_s h^{(e)} & -\frac{1}{2}GA_s & -EI h^{(e)-1} + \frac{1}{6}GA_s h^{(e)} \\ & & GA_s h^{(e)-1} & -\frac{1}{2}GA_s \\ \text{symm.} & & & EI h^{(e)-1} + \frac{1}{3}GA_s h^{(e)} \end{bmatrix} \quad (9.31)$$

Tutkitaan nyt tämän yksinkertaisen elementin toimivuutta. Valitaan testitapaukseksi ulokepalkki, jonka poikkileikkaus on suorakaide $b \times t$ (b =leveys, t =korkeus) ja jota kuormittaa pistemomentti M_L palkin vapaassa päässä.

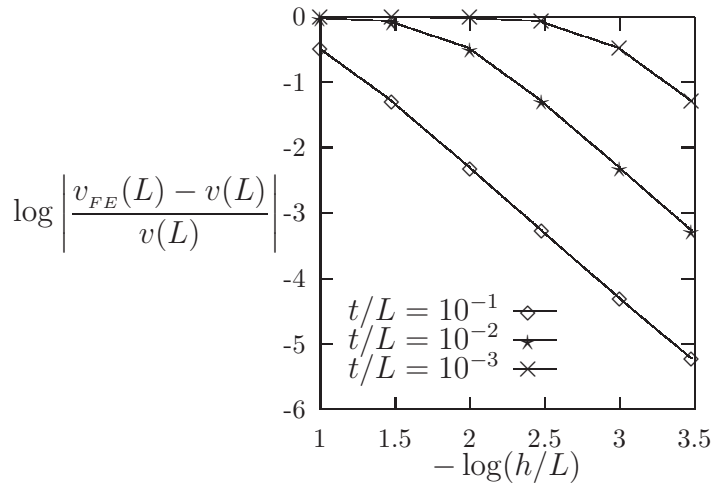
Käytetään vain yhtä elementtiä, jolloin yhtälösystemiksi saadaan

$$\begin{bmatrix} GA_s L^{-1} & -\frac{1}{2}GA_s \\ -\frac{1}{2}GA_s & EIL^{-1} + \frac{1}{3}GA_s L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_L \end{Bmatrix}. \quad (9.32)$$

Otakсутaan suppeamaluku ν nolaksi, jolloin $G = E/2$ ja lisäksi otaksutaan $A_s = A = bt$, jolloin yhtälösystemi muuntuu muotoon

$$\frac{Ebt}{4} \begin{bmatrix} 2L^{-1} & -1 \\ -1 & \frac{2}{3}L + \frac{1}{3}t^2 L^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_L \end{Bmatrix}. \quad (9.33)$$

Ottamalla käyttöön dimensioton siirtymä v_2/L ja jakamalla alempi yhtälöistä L :llä,



Kuva 9.3 Suhteellinen virhe ulokepalkin pään taipuman arvossa verkontiheyden funktiona käytettäessä lineaarista Timoshenkon elementtiä erilaisilla suhteellisen paksuuden arvoilla.

saadaan

$$\frac{Ebt}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{3}(2 + a^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2/L \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_L/L \end{Bmatrix}, \quad (9.34)$$

missä on merkitty $a = t/L$. Ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} v_2/L \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 24 \end{Bmatrix} \frac{M_L}{EbtL(1 + 2a^2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{a^2}{1 + 2a^2} \frac{M_LL}{EI}. \quad (9.35)$$

Ulokkeen pään taipuman palkkimallin mukainen tarkka ratkaisu on $v/L = M_LL/(2EI)$, joten likiratkaisun virhe on huomattava paksulla palkilla ja suorastaan pöyristyttävä ohuella palkilla. Elementtiratkaisu lähestyy nollaa kun $a = t/L \rightarrow 0$. Ilmiötä kutsutaan *lukkiutumiseksi*. Elementtiratkaisun kukkiutuminen johtaa kelvottomiin ratkaisuihin ohuissa palkkeissa, vaikka elementtijakoa kohtuullisesti tihennettäisiin. Verkkoa tihennettäessä ratkaisu lähestyy hyvin hitaasti kohti palkkimallin tarkkaa ratkaisua. Lukkiutumisesta päästään eroon vasta kun palkin korkeus on likimain elementin pituuden luokkaa (katso kuva 9.3), jolloin virheen pienenemisnopeus lähestyy elementin teoreettista asymptoottista suppenemisnopeutta.

Lukkiutumisen syy on leikkausmuodonmuutoksessa, joita muodostuu vaikka kyseessä on puhdas taivutus, sillä

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= v'(x) - \theta(x) = \frac{v_2}{L} - \theta_2 \frac{x}{L} \\ &= \left(1 - 2\frac{x}{L}\right) \frac{a^2}{1 + 2a^2} \frac{M_LL}{EI}. \end{aligned} \quad (9.36a)$$

Havaitaan, että leikkausmuodonmuutos häviää elementin keskipisteessä, joten se

pystyy kuvaamaan ohuen palkin Eulerin-Bernoullin otaksumaa keskimääräisesti oikein. Yleisesti, elementin leikkausmuodonmuutoksen lauseke on

$$\begin{aligned}\gamma(\xi) &= \frac{v_2 - v_1}{h^{(e)}} - \left[\frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2 \right] \\ &= \frac{v_2 - v_1}{h^{(e)}} - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) - \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)\xi,\end{aligned}\quad (9.37)$$

josta heti havaitaan, että liukuma voi olla identtisesti nolla vain, kun $v_1 = v_2 = \theta_1 = \theta_2 = 0$ tai kun $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ ja $v_2 = v_1 + h^{(e)}\theta$. Jälkimmäinen siirtymätila ei kuitenkaan kuvaa taivutustilaa vaan jäykän kappaleen liikettä, joten ratkaisun lukkiutuminen on ilmeistä.

Tarkastellaan vielä lukkiutumista tutkimalla muodonmuutosenergian lauseketta. Variaatioyhtälöstä (9.24) voidaan muodostaa Timoshenkon palkin potentiaalienergian lauseke, joka on

$$\Pi(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(\theta')^2 + GA_s(v' - \theta)^2] dx - \int_0^L f v dx. \quad (9.38)$$

Otetaan käyttöön merkinnät $I = Ar^2$, jossa r on poikkileikkauksen jäyhyys säde ja $A_s = kA$, jossa k on poikkileikkauksen leikkauskorjauskerroin. Potentiaalienergian lauseke voidaan täten saattaa muotoon

$$\Pi(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[(\theta')^2 + \frac{k}{2(1 + \nu)} \frac{1}{r^2} (v' - \theta)^2 \right] dx - \int_0^L f v dx. \quad (9.39)$$

Siirtymällä dimensiottomiin suureisiin $\vartheta = v/L$ ja $\xi = x/L$, saadaan

$$\begin{aligned}\Pi(\vartheta, \theta) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{EI}{L} \left[\left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 + \frac{k}{2(1 + \nu)} \left(\frac{L}{r} \right)^2 \left(\frac{d\vartheta}{d\xi} - \theta \right)^2 \right] d\xi - \int_0^1 f L^2 \vartheta d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{EI}{L} \left[\kappa^2 + \frac{k}{2(1 + \nu)} \left(\frac{L}{r} \right)^2 \gamma^2 \right] d\xi - \int_0^1 f L^2 \vartheta d\xi.\end{aligned}\quad (9.40)$$

Potentiaalienergian lausekkeesta havaitaan, että leikkausenergiassa oleva kerroin $(L/r)^2$ suurenee kun palkki hoikkenee. Täten pienikin virhe leikkausmuodonmuutoksen laskennassa aiheuttaa suuren virheen muodonmuutosenergiassa.

9.2.3 Parannettu elementti

Yhteenvetona (sekä hieman yleistäen) voidaan todeta, että samanasteinen approksimaatio sekä taipumalle v että kiertymälle θ ei voi koskaan mahdollistaa leikkausmuodonmuutoksen häviämistä koko elementin alueella muutoin kuin tapauksessa $v \equiv \theta \equiv 0$. Yksinkertainen parannusehdotus on käyttää taipumalle astetta korkeampaa interpolaatiota kuin kiertymälle. Lisätään taipuman lineaariseen perusin-

terpolaatioon kvadraattinen kuplamuoto, jolloin siirtymäkentän interpolaatio voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} v(\xi) &= N_1(\xi)v_1 + N_2(\xi)v_2 + N_3(\xi)\Delta v \\ &= \frac{1}{2}(1-\xi)v_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)v_2 + (\xi^2-1)\Delta v, \end{aligned} \quad (9.41a)$$

$$\theta(\xi) = N_1(\xi)\theta_1 + N_2(\xi)\theta_2 = \frac{1}{2}(1-\xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)\theta_2 \quad (9.41b)$$

Elementin jäykkyysmatriisia johdettaessa voidaan käyttää hyväksi jo johdettuja lineaarisen elementin jäykkyysmatriisin lohkoja. Tarkastellaan koko rakenteen globaaleja tasapainoyhtälöitä, jotka on koottu elementtikohtaisista osista. Näin saadaan lohkotussa muodossa seuraava yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vv} & \mathbf{K}_{v\Delta} & \mathbf{K}_{v\theta} \\ \mathbf{K}_{\Delta v} & \mathbf{K}_{\Delta\Delta} & \mathbf{K}_{\Delta\theta} \\ \mathbf{K}_{\theta v} & \mathbf{K}_{\theta\Delta} & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \Delta \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_v \\ \mathbf{f}_\Delta \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (9.42)$$

Uusia osia ovat vain $\mathbf{K}_{\Delta v}$, $\mathbf{K}_{\Delta\theta}$, $\mathbf{K}_{\Delta\Delta}$ ja $\mathbf{f}_\Delta$. Ratkaistaan hierarkisten vapausasteiden arvot yllä olevasta yhtälöryhmästä, jolloin saadaan

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1}(\mathbf{f}_\Delta - \mathbf{K}_{\Delta v}\mathbf{v} - \mathbf{K}_{\Delta\theta}\boldsymbol{\theta}). \quad (9.43)$$

Sijoitetaan kondensoidut hierarkiset vapausasteet takaisin yhtälösystemiin, jolloin saadaan kondensoitu yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vv} - \mathbf{K}_{v\Delta}\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1}\mathbf{K}_{\Delta v} & \mathbf{K}_{v\theta} - \mathbf{K}_{v\Delta}\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1}\mathbf{K}_{\Delta\theta} \\ \mathbf{K}_{\theta v} - \mathbf{K}_{\theta\Delta}\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1}\mathbf{K}_{\Delta v} & \mathbf{K}_{\theta\theta} - \mathbf{K}_{\theta\Delta}\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1}\mathbf{K}_{\Delta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_v - \mathbf{K}_{v\Delta}\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1}\mathbf{f}_\Delta \\ -\mathbf{K}_{\theta\Delta}\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1}\mathbf{f}_\Delta \end{Bmatrix} \quad (9.44)$$

Koska hierarkiset vapausasteet ovat vain kunkin elementin sisäisiä vapausasteita, voidaan ne kondensoida jo elementtitasolla. Yksittäisen elementin kondensoiduksi jäykkyysmatriisiksi saadaan globaalisessa tasapainoyhtälössä (9.44) esiintyvän kerroinmatriisin kaltainen elementtimatriisi kuten myös vastaavasti elementin voimavektorillekin. Elementtiosuudet, jotka muodostavat matriisit $\mathbf{K}_{\Delta v}$, $\mathbf{K}_{\Delta\theta}$, $\mathbf{K}_{\Delta\Delta}$ ovat $\mathbf{K}_{\Delta v}^{(e)}$, $\mathbf{K}_{\Delta\theta}^{(e)}$, $\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{(e)}$. Mikäli käytetään hierarkista kantaa, joka on derivaattojen suhteen ortogonaalinen, kuten taipuman interpolaatiossa (9.41), on matriisi $\mathbf{K}_{v\Delta}^{(e)}$ nollamatriisi, joten kondensoidun elementin jäykkyysmatriisiksi ja kuormavektoriksi saadaan

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vv}^{(e)} & \mathbf{K}_{v\theta}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{\theta v}^{(e)} & \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} - \mathbf{K}_{\theta\Delta}^{(e)}\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{(e)-1}\mathbf{K}_{\Delta\theta}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_v^{(e)} \\ -\mathbf{K}_{\theta\Delta}^{(e)}\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{(e)-1}\mathbf{f}_\Delta \end{Bmatrix} \quad (9.45)$$

Osuudet $\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{(e)}$ ja $\mathbf{K}_{\theta\Delta}^{(e)}$ ovat (mikäli leikkausjäykkyys on vakio) seuraavanlaiset:

$$\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{(e)} = K_{\Delta\Delta}^{(e)} = \frac{2GA_s}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \left[\frac{d}{d\xi} (\xi^2 - 1) \right]^2 d\xi = \frac{16GA_s}{3h^{(e)}}, \quad (9.46a)$$

$$\mathbf{K}_{\theta\Delta}^{(e)} = -GA_s \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{bmatrix} 2\xi d\xi = \frac{2}{3}GA_s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (9.46b)$$

Elementin jäykkymatriisiin uudeksi $\theta\theta$ -lohkoksi saadaan

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} - \mathbf{K}_{\theta\Delta}^{(e)} \mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{(e)-1} \mathbf{K}_{\Delta\theta}^{(e)} \\ &= \frac{EI}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{GA_s h^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{GA_s h^{(e)}}{12} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{EI}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{GA_s h^{(e)}}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9.47)$$

Leikkausmuodonmuutoksen lauseke on tällä elementillä muotoa

$$\gamma(\xi) = \frac{v_2 - v_1}{h^{(e)}} - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) + \left[\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) + 4\frac{\Delta v}{h^{(e)}} \right] \xi, \quad (9.48)$$

josta nähdään, että leikkausmuodonmuutos voi hävitä identtisesti, mikäli

$$v_2 = v_1 + \frac{1}{2}h^{(e)}(\theta_1 + \theta_2), \quad (9.49a)$$

$$\Delta v = \frac{1}{8}h^{(e)}(\theta_2 - \theta_1). \quad (9.49b)$$

Yllä esitetty elementti toimii hyvin. Yhden elementin taivutusesimerkissä se antaa tarkan ratkaisun, sillä ratkaisuyhtälö on

$$\begin{bmatrix} GA_s L^{-1} & -\frac{1}{2}GA_s \\ -\frac{1}{2}GA_s & EIL^{-1} + \frac{1}{4}GA_s L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_L \end{Bmatrix}, \quad (9.50)$$

joka saadaan muotoon

$$\frac{Ebt}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{3}a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2/L \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_L/L \end{Bmatrix}, \quad (9.51)$$

missä on merkitty $a = t/L$. Havaitaan, että kerroinmatriisin determinantti on $\frac{2}{3}a^2$ ja ratkaisu

$$\begin{Bmatrix} v_2/L \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 12 \end{Bmatrix} \frac{M_L}{EbtL} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{M_L L}{EI}. \quad (9.52)$$

Elementissä on vielä eräs pieni kauneusvirhe. Käyrityksen approksimaatio on elementin alueella vakio, kun taas leikkausmuodonmuutos on lineaarisesti muuttuva. Tämä on kuitenkin yksinkertaisesti korjattavissa asettamalla rajoite (9.49b)

leikkausmuodonmuutosta laskettaessa, eli asettamalla pysyvästi

$$\Delta v = \frac{1}{8}h^{(e)}(\theta_2 - \theta_1). \quad (9.53)$$

Tämä ei tietenkään vaikuta elementin jäykkyyismatriisiin lausekkeisiin.

Edellä esitetty konstruktio tuottaa mahdollisimman yksinkertaisen hyvin toimivan palkkielementin. Elementin käyttäytymistä voidaan vielä parantaa tempulla, joka selitetään luvussa 9.2.5.

9.2.4 Numeerinen ali-integrointi

Edellisen perusteella on lineaarisesti interpoloidun Timoshenkon palkkielementin harmia tuottava osa identifioitavissa $\theta\theta$ -lohkon leikkausmuodonmuutososaan

$$\mathbf{K}_{s\theta\theta}^{(e)} = \frac{1}{2}GA_s h^{(e)} \int_{-1}^1 \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{N}_\theta d\xi = \frac{GA_s h^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (9.54)$$

joka parabolisen hierarkisen taipumamuodon kondensoinnin jälkeen muuttuu muotoon

$$\frac{GA_s h^{(e)}}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.55)$$

Lineaarisen interpolaation tapauksessa lohkon $\mathbf{K}_{s\theta\theta}^{(e)}$ tarkka integrointi edellyttää kahden pisteen Gaussin-Legendren kaavaa. Mikäli elementin jäykkyyismatriisi, ja erityisesti sen osa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}GA_s h^{(e)} \int_{-1}^1 \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{N}_\theta d\xi \\ = & \frac{1}{2}GA_s h^{(e)} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} d\xi \\ = & \frac{1}{2}GA_s h^{(e)} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\xi)^2 & \frac{1}{4}(1-\xi^2) \\ \frac{1}{4}(1-\xi^2) & \frac{1}{4}(1+\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi \end{aligned} \quad (9.56)$$

integroidaan vain yhden pisteen kvadratuurilla, saadaan tulokseksi täsmälleen matriisi (9.55). Muut jäykkyyismatriisiin integroitavat osat ovat vakioita tai lineaarisesti muuttuvia lausekkeita, joten yhden pisteen kaava integroi ne tarkasti. Näin on saatu hyvin käyttäytyvä elementti, joka on vielä numeerisesti edullinen muodostaa.

9.2.5 Leikkausjäykkyyden redusointi

9.2.5.1 MacNealin menettely

Kahdessa edellisessä luvussa esitetyn yksinkertaisen elementin käyttäytymistä voidaan vielä entisestäänkin parantaa pienentämällä leikkausjäykkyyden GA_s arvoa. Potentiaalienergian lausekkeesta (9.40) nähdään, että ohuilla palkeilla ($L \gg r$) leik-

kausenergiassa esiintyvä kerroin on suhteettoman suuri verrattuna vastaavaan taivutusenergian lausekkeeseen. Tarkastellaan seuraavassa MacNealin [48] esittämää tapaa tasapainottaa taivutus- ja leikkausenergioiden suhdetta. Tarkastelun idea on muodostaa sellainen leikkausjäykkyyden korjattu arvo, jolla lineaarisesti interpoloidun ja ali-integroidun elementin muodonmuutosenergia on yhtäsuuri vakioleikkaus- ja lineaarista käyritystilaa vastaavan tarkan ratkaisun muodonmuutosenergian kanssa.

Elementin muodonmuutosenergian lauseke on

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} (EI\kappa^2 + GA_s\gamma^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (EI\kappa^2 + GA_s\gamma^2) \frac{1}{2} h^{(e)} d\xi. \quad (9.57)$$

Mikäli leikkausmuodonmuutos on vakio elementin alueella, on taipuman tarkka lauseke esitettävissä kolmannen asteen polynomina ja kiertymän lauseke kvadraattisena polynomina muodoissa²

$$v = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \frac{1}{2}h\gamma_0\xi \quad (9.58a)$$

$$\theta = \frac{2}{h}(a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2). \quad (9.58b)$$

Nämä lausekkeet johtavat lineaarisesti muuttuvaan käyritymään κ ja vakioleikkausmuodonmuutokseen γ :

$$\kappa = -\theta' = -\frac{4}{h^2}(2a_2 + 6a_3\xi), \quad (9.59a)$$

$$\gamma = v' - \theta = \gamma_0. \quad (9.59b)$$

Interpoloidaan taipuman ja kiertymän tarkkoja lausekkeitä (9.58) lineaarisilla polynomeilla $\tilde{v}$ ja $\tilde{\theta}$:

$$\tilde{v} = N_1(\xi)v_1 + N_2(\xi)v_2 = \frac{1}{2}(1-\xi)v_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)v_2, \quad (9.60a)$$

$$\tilde{\theta} = N_1(\xi)\theta_1 + N_2(\xi)\theta_2 = \frac{1}{2}(1-\xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)\theta_2. \quad (9.60b)$$

Asetetaan interpolaatio yhtäsuureksi solmupisteissä tarkan ratkaisun kanssa, jolloin solmupistevapausasteet v_1, v_2, θ_1 ja θ_2 voidaan ratkaista

$$v_1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 - \frac{1}{2}h\gamma_0, \quad (9.61a)$$

$$v_2 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \frac{1}{2}h\gamma_0, \quad (9.61b)$$

$$\theta_1 = \frac{2}{h}(a_1 - 2a_2 + 3a_3), \quad (9.61c)$$

$$\theta_2 = \frac{2}{h}(a_1 + 2a_2 + 3a_3). \quad (9.61d)$$

²Elementtiä osoittava yläindeksi (e) on mukavuussyistä jätetty merkitsemättä.

Täten taipuman ja kiertymän interpolaatiot ovat

$$\tilde{v} = a_0 + a_2 + (a_1 + a_3 + \frac{1}{2}h\gamma_0)\xi, \quad (9.62a)$$

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{h}(2a_1 + 6a_3 + 4a_2\xi), \quad (9.62b)$$

mistä voidaan derivoida käyristymän ja leikkausmuodonmuutosten lausekkeet³

$$\tilde{\kappa} = -\tilde{\theta}' = -\frac{1}{h^2}8a_2, \quad (9.63a)$$

$$\tilde{\gamma} = \tilde{v}' - \tilde{\theta} = \gamma_0 - \frac{1}{h}(4a_3 + 4a_2\xi). \quad (9.63b)$$

Lasketaan nyt elementin muodonmuutosenergia interpolaatiosta saaduilla arvoilla ja verrataan sitä tarkan ratkaisun antamaan arvoon. Muodonmuutosenergian tarkka arvo on

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (EI\kappa^2 + GA_s\gamma^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{EI}{h^3}(32a_2^2 + 192a_3^2) + GA_sh\gamma_0^2 \right]. \end{aligned} \quad (9.64)$$

Vastaavasti lineaaristen interpolaatiofunktioiden tapauksessa muodonmuutosenergian arvo on

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (EI\tilde{\kappa}^2 + GA_s\tilde{\gamma}^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[32\frac{EI}{h^3}a_2^2 + GA_sh \left(\gamma_0 - \frac{4}{h}a_3 \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (9.65)$$

missä leikkausmuodonmuutos on otettu vakiona elementin keskipisteessä, vastaten siten jäykkyysmatriisin ali-integrointia yhden pisteen Gaussin kaavalla.

Tavoitteena on saada interpolaatioiden avulla laskettu muodonmuutosenergian arvo yhtäsuureksi tarkan arvon kanssa kaikilla parametrien γ_0 :n ja a_3 :n arvoilla. Nyt on huomattava, että tarkassa ratkaisussa (9.58) parametrit γ_0 ja a_3 eivät voi olla riippumattomia, vaan niitä sitoo leikkausvoiman Q ja taivutusmomentin M välinen tasapainoyhtälö

$$Q = M' \quad \text{eli} \quad GA_s\gamma = -EI\theta'' \quad \Rightarrow \quad GA_s\gamma_0 = -48\frac{EI}{h^3}a_3, \quad (9.66)$$

josta saadaan

$$a_3 = -\frac{GA_sh^3}{48EI}\gamma_0. \quad (9.67)$$

³Pilkku suureen oikeassa yläkulmassa merkitsee nyt derivointia x -koordinaatin suhteen.

Sijoittamalla tämä yhtäsuuruus tarkan muodonmuutosenergian lausekkeeseen (9.64) saadaan

$$U_{ex} = \frac{1}{2} \left[32 \frac{EI}{h^3} a_2^2 + \left(1 + \frac{GA_s h^2}{12EI} \right) GA_s h \gamma_0^2 \right]. \quad (9.68)$$

Merkitään interpolaatiosta lasketun muodonmuutosenergian lausekkeessa (9.65) leikkausjäykkyyden arvoa GA_s symbolilla $(GA_s)^*$ ja otetaan huomioon yhteys (9.67), jolloin saadaan

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \left[32 \frac{EI}{h^3} a_2^2 + (GA_s)^* h \left(1 + \frac{GA_s h^2}{12EI} \right)^2 \gamma_0^2 \right]. \quad (9.69)$$

Havaitaan, että muodonmuutosenergiat (9.68) ja (9.69) ovat yhtäsuuret mikäli valitaan

$$GA_s^* = \frac{GA_s}{1 + \frac{GA_s h^2}{12EI}}. \quad (9.70)$$

Leikkausjäykkyyden redusoidun lausekkeen (9.70) ovat esittäneet W.T. Russell ja R.H. MacNeal jo 1953 palkkirakenteiden analogia-analyyseissä [51]. Elementtimenetelmän yhteydessä MacNeal on johtanut lausekkeen (9.70) vuonna 1978 lähteessä [48]. Idean leikkausjäykkyyden pienentämiseen on esittänyt myös I. Fried 1973 [42], ja hän tarkastelee jäykkyydsmatriisia muodossa

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{h^3} \left[\mathbf{K}_b + \frac{2G}{E} \left(\frac{h}{t} \right)^2 \mathbf{K}_s \right], \quad (9.71)$$

jossa $\mathbf{K}_b$ ja $\mathbf{K}_s$ ovat jäykkyydsmatriisin taivutuksesta ja leikkauksesta syntyvät osat. Fried esitti asian korjaamiseksi leikkaustermiä esiintyvän palkin korkeuden muuttamista, eli korvaamista tekijällä h/c , jossa c on määräämätön positiivinen vakio (esimerkissämme arvo $c = \sqrt{2}$ vastaa lauseketta 9.70). Menettely pienentää myös yhtälösystemin häiriöalttiutta, mikä on tärkeää ratkaistaessa tehtäviä tietokoneella äärellisellä laskentatarkkuudella. Sittemmin tämä strategia on saavuttanut suosion matemaatikkojen keskuudessa formuloitaessa hyvin toimivia Reissnerin-Mindlinin laattamalliin perustuvia elementtejä. Usein tämä esitetään korvaamalla leikkausjäykkyyden termiä t lausekkeella $t + \alpha h$ kaavassa (9.71) ja jossa α on ns. stabilointivakio ja h tuttuun tapaan elementin karakteristinen mitta, joka palkkielementin tapauksessa on elementin pituus.

Menettelyn matemaattinen pohja nojaa huonosti asetettujen tehtävien regularisointiteoriaan ja virheanalyysi sekaelementtimenetelmien teoriaan.

Esimerkki 9.1 Ratkaistaan jo tutuksi tullut ulokepalkki kuormitettuna nyt vain poikittaisella pistekuormalla F palkin vapaassa päässä. Otaksutaan nyt kuitenkin hieman yleisempi tapaus, jossa palkin poikkileikkaussuureet on an-

nettu vain yleisessä muodossa I ja A_s .

Käytetään edelleen yhtä elementtiä, jolloin ratkaisuyhtälö on luvun 9.2.4 elementin tapauksessa (siis lineaarinen interpolaatio ja leikkausjäykkyyden alintegrointi)

$$\begin{bmatrix} GA_s L^{-1} & -\frac{1}{2}GA_s \\ -\frac{1}{2}GA_s & EIL^{-1} + \frac{1}{4}GA_s L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (9.72)$$

joka saadaan dimensiottomaan muotoon

$$\frac{EA_s}{4(1+\nu)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} + 4\frac{a^2}{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2/L \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (9.73)$$

missä on merkitty

$$\beta = \frac{A_s r^2}{I(1+\nu)} \quad \text{ja} \quad a = \frac{r}{L}. \quad (9.74)$$

Palkin pään taipumaksi saadaan siten

$$\frac{v_2}{L} = \left(\frac{1}{4} + 2\frac{a^2}{\beta} \right) \frac{FL^2}{EI}. \quad (9.75)$$

Timoshenkon palkkimallin mukainen taipuman tarkka ratkaisu on

$$\frac{v_{2,\text{tarkka}}}{L} = \frac{1}{3} \frac{FL^2}{EI} + \frac{F}{GA_s} = \left(\frac{1}{3} + 2\frac{a^2}{\beta} \right) \frac{FL^2}{EI}. \quad (9.76)$$

Virhe ulokkeen pään taipumassa on siten -25%.

Mikäli elementissä käytetään leikkausjäykkyyden redusointia (9.70) saadaan yhdellä elementillä tarkka taipuman arvo.

Myös muille kuormitustapauksille saadaan solmupisteissä tarkat siirtymän arvot mikäli kuormitusvektoria integroitaessa käytetään taipumalle rajoitteen (9.49) mukaista kvadraattista interpolaatiota

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 \Delta v = N_1 v_1 + N_2 v_2 - \frac{1}{8} h^{(e)} (\theta_2 - \theta_1) N_3. \quad (9.77)$$

9.2.5.2 Redusoidun leikkausjäykkyyden vaihtoehtoinen johtotapa

Leikkausjäykkyyden korjauskertoimen lauseke (9.70) voidaan saada myös ilman energiatarkastelua, operoiden pelkästään interpolaatiofunktioilla. Lähtökohtana on tasapainoyhtälön

$$Q - M' = GA_s(v' - \theta) + EI\theta'' = 0 \quad (9.78)$$

keskimääräinen toteutuminen elementin alueella. Jotta tasapainoyhtälön testaaminen onnistuu on kiertymän interpolaatio oltava vähintään kvadraattinen. Yksinkertaisin mahdollinen interpolaatio on siten lineaarinen taipuma ja kvadraattinen

kiertymä:

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)v_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)v_2, \quad (9.79a)$$

$$\begin{aligned} \theta &= N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + N_3 \Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2 + (\xi^2 - 1)\Delta\theta. \end{aligned} \quad (9.79b)$$

Tasapainoyhtälön (9.78) toteutuminen keskimääräisesti

$$\frac{h}{2} \int_1^1 [GA_s(v' - \theta) + EI\theta''] d\xi = 0, \quad (9.80)$$

mahdollistaa kiertymän hierarkista kuplamuotoa vastaavan parametrin eliminoimisen, josta saadaan

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{3GA_s h^2}{24EI + 2GA_s h} \left[\frac{1}{h}(v_1 - v_2) + \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \\ &= \frac{GA_s h^2}{8EI} \frac{1}{1 + \frac{GA_s h^2}{12EI}} \left[\frac{1}{h}(v_1 - v_2) + \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right]. \end{aligned} \quad (9.81)$$

Elementin virtuaalisen työn yhtälön termissä

$$\int Q \delta\gamma dx \quad (9.82)$$

leikkausvoima lasketaan tasapainoyhtälön (9.78) avulla:

$$Q = -EI\theta'' = -\frac{8EI}{h^2} \Delta\theta = \frac{GA_s}{GA_s h^2} \left[\frac{1}{h}(v_2 - v_1) - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right]. \quad (9.83)$$

Virtuaalinen muodonmuutos on tavalliseen tapaan

$$\delta\gamma = \delta v' - \delta\theta \quad (9.84)$$

laskettuna elementin keskipisteessä, eli

$$\delta\gamma = \frac{1}{h}(\delta v_2 - \delta v_1) - \frac{1}{2}(\delta\theta_1 + \delta\theta_2). \quad (9.85)$$

Näin konstruoitu elementti on identtinen lineaarisen Timoshenkon palkkielementin kanssa, joka integroidaan yhden pisteen kaavalla ja johon sovelletaan leikkausjäykkyyden redusointia (9.70). Tätä ideaa voidaan soveltaa myös stabiloitujen Reissnerin-Mindlinin laattaelementtien yhteydessä (ks. luku 10.8), mikäli stabiloitiparametrille α halutaan fysikaalisesti mielekäs arvo.

9.2.6 Viisivapausasteinen elementti

Tarkastellaan vielä lopuksi yhtä Timoshenkon palkkimallin elementtiä. Mikäli taivutusmomentille halutaan lineaarinen lauseke, on kiertymän oltava parabolinen. Tällöin, jotta elementillä olisi mahdollisuus toteuttaa Bernoullin otaksuma, on taipuman oltava kolmatta astetta oleva polynomi. Käytetään hierarkisia muotoja nyt kaikille ‘lisävapausasteille’, joten interpolaatioiksi valitaan lausekkeet

$$\begin{aligned} v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 \Delta v_1 + N_4 \Delta v_2, \\ &= \frac{1}{2}(1 - \xi)v_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)v_2 + (\xi^2 - 1)\Delta v_1 + (\xi^3 - \xi)\Delta v_2, \end{aligned} \quad (9.86a)$$

$$\begin{aligned} \theta &= N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + N_3 \Delta \theta \\ &= \frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2 + (\xi^2 - 1)\Delta \theta. \end{aligned} \quad (9.86b)$$

Leikkausmuodonmuutoksen lausekkeeksi saadaan nyt

$$\gamma = g_0 + g_1 \xi + g_2 \xi^2, \quad (9.87)$$

jossa

$$g_0 = \frac{1}{h}(v_2 - v_1 - 2\Delta v_2) - \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_1) + \Delta \theta, \quad (9.88a)$$

$$g_1 = \frac{4}{h}\Delta v_1 + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2), \quad (9.88b)$$

$$g_2 = \frac{6\Delta v_2}{h} - \Delta \theta, \quad (9.88c)$$

jossa elementin pituuden h symbolista on elementtiä indikoiva merkintä (e) jätetty yksinkertaisuuden vuoksi pois. Kun taivutusmomentti on lineaarisesti muuttuva, on leikkausvoima momentin derivaattana vakio. Täten tuntuu luonnolliselta asettaa vaatimus leikkausmuodonmuutoksen vakioisuudesta elementin alueella. Näin kolmesta lisävapausasteesta $\Delta v_1, \Delta v_2$ ja $\Delta \theta$ voidaan kaksi eliminoida rajoitteilla

$$g_1 = \frac{4}{h}\Delta v_1 + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) = 0, \quad (9.89a)$$

$$g_2 = \frac{6\Delta v_2}{h} - \Delta \theta = 0. \quad (9.89b)$$

Eliminoidaan taipuman hierarkiset muodot:

$$\Delta v_1 = \frac{1}{8}h(\theta_2 - \theta_1), \quad (9.90a)$$

$$\Delta v_2 = \frac{1}{6}h\Delta \theta. \quad (9.90b)$$

Elementin jää nyt viisi vapausastetta $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2, \Delta \theta$. Kiertymän hierarkinen vapausaste voidaan toki kondensoida elementtitasolla, joten elementin vapausasteiden

määrä saadaan redusoitua neljään.

9.3 Diskreetti EB-palkkimallin elementti

9.3.1 Tapa 1: kuubinen taipuma, kvadraattinen kiertymä

Rajoittamalla leikkausmuodonmuutos kokonaan häviämään, saadaan Timoshenkon palkkimallin avulla muodostettu Eulerin-Bernoullin palkkimallin elementti. Otaksumalla taipumalle ja kiertymälle interpolaatio (9.86) ja rajoittamalla leikkausmuodonmuutoksen lauseke (9.87) nolaksi saadaan ehtojen (9.89) lisäksi myös rajoite

$$g_0 = \frac{1}{h}(v_2 - v_1 - 2\Delta v_2) - \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_1) + \Delta\theta = 0, \quad (9.91)$$

josta seuraa kiertymän hierarkiselle vapausasteelle arvo

$$\Delta\theta = \frac{3}{2}\frac{v_1 - v_2}{h} + \frac{3}{4}(\theta_1 + \theta_2). \quad (9.92)$$

Taipuman interpolaatiolle saadaan nyt lauseke

$$\begin{aligned} v &= N_1v_1 + N_2v_2 + N_3\frac{h}{8}(\theta_2 - \theta_1) + N_4\frac{1}{6}h\Delta\theta \\ &= (N_1 + \frac{1}{4}N_4)v_1 + \frac{1}{8}h(N_4 - N_3)\theta_1 + (N_2 - \frac{1}{4}N_4)v_2 + \frac{1}{8}h(N_3 + N_4)\theta_2. \end{aligned} \quad (9.93)$$

Kiertymän interpolaatio on

$$\begin{aligned} \theta &= N_1\theta_1 + N_2\theta_2 + N_3\Delta\theta \\ &= (N_1 + \frac{3}{4}N_3)\theta_1 + (N_2 + \frac{3}{4}N_3)\theta_2 + \frac{3}{2}N_3\frac{v_1 - v_2}{h}. \end{aligned} \quad (9.94)$$

Koska leikkausmuodonmuutos häviää, voidaan Timoshenkon palkkimallin virtuaalisen työn yhtälöstä jättää leikkausmuodonmuutosta vastaava termi pois, jolloin saadaan yhtälö

$$\int_0^L EI\theta'\delta\theta'dx = \int_0^L fvdxdx, \quad (9.95)$$

jonka perusteella elementin jäykkyyismatriisi ja kuormitusvektori voidaan johtaa.

Leikkausmuodonmuutosrajoitteet $g_0 = g_1 = g_2 = 0$ voidaan toteuttaa myös pisteittäisesti eli diskreetisti. Kolmen ehdon toteutumiseen vaaditaan tietenkin rajoitteen asettaminen kolmessa eri pisteessä. Valitaan näiksi pisteiksi Gaussin pisteet $\xi = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}, 0$. Rajoiteyhtälöt ovat siten

$$\gamma(-\sqrt{\frac{3}{5}}) = g_0 - \sqrt{\frac{3}{5}}g_1 + \frac{3}{5}g_2 = 0, \quad (9.96a)$$

$$\gamma(0) = g_0 = 0, \quad (9.96b)$$

$$\gamma(+\sqrt{\frac{3}{5}}) = g_0 + \sqrt{\frac{3}{5}}g_1 + \frac{3}{5}g_2 = 0. \quad (9.96c)$$

Rajoitteiden asettaminen voidaan ohjelmointiteknisesti toteuttaa suoraan siirtymämuodonmuutosmatriisiin B .

9.3.2 Tapa 2: sekä taipuma että kiertymä kvadraattinen

Periaatteeseen (9.95) perustuvan elementin käyristymä on interpolaation (9.94) tapauksessa lineaarinen lauseke. Täten elementin jäykkyysmatriisia muodostettaessa joudutaan integroimaan toisen asteen polynomi, joka integroituisi tarkasti jo kahden pisteen Gaussin kvadratuurilla. Otaksamalla taipumalle kvadraattinen interpolaatio

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 \Delta v \quad (9.97)$$

kuubisen lausekkeen (9.86a) sijaan, on eliminotavana ainoastaan kaksi hierarkista lisävapausastetta Δv ja $\Delta \theta$. Siitä huolimatta leikkausmuodonmuutoksen lauseke on kvadraattinen, eli

$$\gamma = g_0 + g_1 \xi + g_2 \xi^2, \quad (9.98)$$

missä

$$g_0 = \frac{1}{h}(v_2 - v_1) - \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_1) + \Delta \theta, \quad (9.99a)$$

$$g_1 = \frac{4}{h}\Delta v + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2), \quad (9.99b)$$

$$g_2 = -\Delta \theta. \quad (9.99c)$$

Mikäli leikkausmuodonmuutos (9.98) vaaditaan häviämään Gaussin kahden pisteen kaavan integroimispisteissä $\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, on lineaarisen termin kertoimen g_1 hävitävä, eli

$$g_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta v = \frac{1}{8}h(\theta_2 - \theta_1), \quad (9.100)$$

joten Δv saatiin eliminotua. Jäljelle jäänyt ainoa eliminotava vapausaste $\Delta \theta$, voidaan ratkaista ehdosta

$$\gamma(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}) = g_0 + \frac{1}{3}g_2 = 0, \quad (9.101)$$

josta seuraa kiertymän hierarkiselle vapausasteelle arvo

$$\Delta \theta = \frac{3}{2} \frac{v_1 - v_2}{h} + \frac{3}{4}(\theta_1 + \theta_2), \quad (9.102)$$

mikä on identtinen ensimmäisellä tavalla saadun arvon (9.92) kanssa. Täten myös kiertymän interpolaatio on sama kummallakin tavalla muodostettaessa ja vastaavat elementtien jäykkyysmatriisit ovat identtiset.

Kun elementtimatriisin alkiot integroidaan kahden pisteen Gaussin kvadratuurilla häviävät leikkausmuodonmuutokseen liittyvät termit elementtimenetelmän kanalta 'identtisesti', sillä kaikki informaatio tulee integroimispisteistä.

Esimerkki 9.2 Määritä ns. diskreetin Eulerin-Bernoullin palkkielementin jäyk-

kyysmatriisi otaksumalla taipumalle ja kiertymälle kvadraattinen lauseke. Ota Bernoullin otaksuma huomioon diskreetisti kahdessa Gaussin pisteessä ja suorita elementtimatriisin integrointi numeerisesti kahden pisteen Gaussin kaavalla. Elementtimatriisin lauseke on

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} EI \mathbf{N}_{\theta,x}^T \mathbf{N}_{\theta,x} dx, \quad (9.103)$$

jossa $\mathbf{N}_{\theta}$ on kiertymän θ interpolaatiofunktioit sisältävä matriisi.

Kiertymän interpolaatio on siten

$$\begin{aligned} \theta &= (N_1 + \frac{3}{4}N_3)\theta_1 + (N_2 + \frac{3}{4}N_3)\theta_1 + \frac{3}{2}N_3 \frac{v_1 - v_2}{h} \\ &= \frac{3}{2}(\xi^2 - 1) \frac{v_1}{h} + \frac{3}{2}(1 - \xi^2) \frac{v_2}{h} + (\frac{3}{4}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{4})\theta_1 + (\frac{3}{4}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{4})\theta_2 \\ &= \tilde{N}_1 v_1 + \tilde{N}_2 \theta_1 + \tilde{N}_3 v_2 + \tilde{N}_4 \theta_2 \end{aligned} \quad (9.104)$$

Jäykkyysmatriisin muodostamista varten tarvitaan kiertymän derivaattaa

$$\theta_{,\xi} = \tilde{N}_{1,\xi} v_1 + \tilde{N}_{2,\xi} \theta_1 + \tilde{N}_{3,\xi} v_2 + \tilde{N}_{4,\xi} \theta_2, \quad (9.105)$$

jossa siis

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{1,\xi} &= \frac{3\xi}{h}, & \tilde{N}_{2,\xi} &= \frac{1}{2}(3\xi - 1), \\ \tilde{N}_{3,\xi} &= -\frac{3\xi}{h}, & \tilde{N}_{4,\xi} &= \frac{1}{2}(1 + 3\xi). \end{aligned} \quad (9.106)$$

Jäykkyysmatriisin alkio on muotoa

$$K_{ij}^{(e)} = \int EI \tilde{N}_{i,x} \tilde{N}_{j,x} dx = \frac{2}{h} \int_{-1}^1 EI \tilde{N}_{i,\xi} \tilde{N}_{j,\xi} d\xi, \quad (9.107)$$

joten alkioiden lausekkeet ovat (otaksutaan taivutusjäykkyys vakioiksi)

$$\begin{aligned} K_{11}^{(e)} &= \frac{2}{h} EI \int_{-1}^1 \left(\frac{3\xi}{h} \right)^2 d\xi = \frac{18EI}{h^3} \int_{-1}^1 \xi^2 d\xi = \frac{18EI}{h^3} \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \\ &= \frac{12EI}{h^3}, \end{aligned} \quad (9.108a)$$

$$K_{12}^{(e)} = \frac{2EI}{h} \int_{-1}^1 \frac{3\xi}{h} \frac{1}{2}(3\xi - 1) d\xi = \frac{3EI}{h^2} \int_{-1}^1 (3\xi^2 - \xi) d\xi = \frac{6EI}{h^2}, \quad (9.108b)$$

$$K_{13}^{(e)} = \frac{2EI}{h} \int_{-1}^1 \left(\frac{3\xi}{h} \right) \left(-\frac{3\xi}{h} \right) d\xi = -K_{11}^{(e)} \quad (9.108c)$$

jne.. Havaitaan, että saatiin sama standardi Eulerin-Bernoullin palkkimallin jäykkyysmatriisi jossa taipumalle käytetään Hermiten kuubisia polynomeja.

9.4 Harjoitustehtäviä

1. Tutki ratkaisuyhtälön häiriöalttiutta lineaarisesti interpoloidun Timoshenkon palkkielementin tapauksessa esimerkin ulokepalkille yhden elementin verkolla. Tutki tapaukset: (a) ali-integroitu elementti ja (b) stabiloitu eli leikkausjäykkyydeltään redusoitu ali-integroitu elementti. Symmetrisen positiivisesti definitin matriisin $\mathbf{K}$ häiriöalttiutta $C_2(\mathbf{K})$ voidaan laskea suhteena

$$C_2 = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}, \quad (9.109)$$

missä λ_{max} ja λ_{min} ovat matriisin $\mathbf{K}$ suurin ja pienin ominaisarvo. Piirrä kuvaajat suhteen $a = t/L$ funktiona välillä $10^{-3} < a < 1$ logaritmisella asteikolla. Tällöin (a) kohdan kuvaaja on suora, ja häiriöalttiuden paksuusriippuvuus on siten muotoa

$$C_2(\mathbf{K}) \sim ct^p, \quad (9.110)$$

missä c on jokin positiivinen vakio ja p on kokonaisluku, mikä? Entä stabiloidun elementin tapaus (c)? Mitä johtopäätelmiä elementtien käyttökelpoisuudesta voidaan tehdä?

Oleta suorakaidepoikkileikkaus ja että $A_s = A$, sekä $\nu = 0$.

2. Näytä, että interpolaatiofunktioit lausekkeessa (9.93) ovat samat kuin Hermiten kuubiset interpolaatiofunktioit (9.17).
3. Muodosta Eulerin-Bernoullin palkimalliin perustuvan nelivapausasteisen elementin kiertymän θ interpolaatiofunktioit lähtien Timoshenkon palkkimallista, jossa taipumalla v ja kiertymällä θ on erilliset C_0 -interpolaatioit:

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)v_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)v_2, \quad (9.111a)$$

$$\begin{aligned} \theta &= N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + N_3 \Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2 + (\xi^2 - 1)\Delta\theta. \end{aligned} \quad (9.111b)$$

Kiertymän interpolaation $\Delta\theta$ vapausaste eliminoidaan soveltamalla Bernoullin rajoitetta diskreetisti palkin keskipisteessä $\xi = 0$. Lopulliset vapausasteet ovat tietenkin $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$. Mikäli vapausasteet numeroidaan edellä kirjoitetussa järjestyksessä, laske elementin jäykkyysmatriisin alkioit K_{ij} .

4. Kuten edellisessä tehtävässä muodosta Eulerin-Bernoullin palkimalliin perustuvan nelivapausasteisen elementin kiertymän θ interpolaatiofunktioit lähtien Timoshenkon palkkimallista. Taipumalle ja kiertymälle käytetään samoja interpolaatioita kuin edellisessä tehtävässä. Kiertymän interpolaation $\Delta\theta$ vapausaste eliminoidaan soveltamalla Bernoullin rajoitetta *keskimääräisesti elementin alueella*

$$\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \gamma dx = 0. \quad (9.112)$$

Lopulliset vapausasteet ovat tietenkin $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$. Mikäli vapausasteet numeroidaan edellä kirjoitetussa järjestyksessä, laske elementin jäykkyysmatriisin alkiot K_{ij} . Vertaa tulosta edellisen tehtävän ratkaisuun.

5. Timoshenkon palkkimallin tasapainoyhtälöt ovat:

$$M' - Q = 0, \quad (9.113a)$$

$$-Q' = f, \quad (9.113b)$$

jotka voidaan kirjoittaa konstitutiivisen lain ja kinemaattisten relaatioiden avulla muotoon (oletetaan EI ja GA_s vakioiksi)

$$-EI\theta'' - GA_s(v' - \theta) = 0, \quad (9.114a)$$

$$-GA_s(v'' - \theta') = f. \quad (9.114b)$$

Systeemissä on siten kaksi tuntematonta funktiota: taipuma v ja poikkileikkaustason kiertymä θ . Timoshenkon palkkiprobleema voidaan myös formuloida kolmen tuntemattoman avulla, lisäämällä leikkausvoima primaarisesti ratkaistavien suureiden joukkoon seuraavasti:

$$-EI\theta'' - Q = 0, \quad (9.115a)$$

$$-Q' = f, \quad (9.115b)$$

$$GA_s(v' - \theta) - Q = 0, \quad (9.115c)$$

Näytä, että kertomalla yllä olevat yhtälöt painofunktioilla $\hat{\theta}, \hat{v}$ ja $\hat{Q}$ ja integroimalla palkin pituuden yli, päädytään lopulta seuraavanlaiseen variaatioyhtälöön (oletetaan jäykästi tuetut reunaehdot):

$$EI \int_0^L \theta' \hat{\theta}' dx + \int_0^L Q(\hat{v} - \hat{\theta}) dx = \int_0^L f \hat{v} dx, \quad (9.116a)$$

$$GA_s \int_0^L (v' - \theta) \hat{Q} dx - \int_0^L Q \hat{Q} dx = 0. \quad (9.116b)$$

Yllä oleva systeemi voidaan stabiloida lisäämällä elementtikohtaisesti määritellyt termit

$$\sum_{e=1}^N \alpha h^2 \int_{I(e)} (EI\theta'' + Q) \hat{\theta}'' dx, \quad (9.117a)$$

$$\sum_{e=1}^N \alpha h^2 \frac{GA_s}{EI} \int_{I(e)} (EI\theta'' + Q) \hat{Q} dx \quad (9.117b)$$

yhtälöiden (9.116) oikealle puolelle. Näin päädytään seuraavanlaiseen systeemiin:

$$EI \int_0^L \theta' \hat{\theta}' dx + \int_0^L Q(\hat{v} - \hat{\theta}) dx = \int_0^L f \hat{v} dx + \sum_{e=1}^N \alpha h^2 \int_{I(e)} (EI\theta'' + Q) \hat{\theta}'' dx,$$

$$GA_s \int_0^L (v' - \theta) \hat{Q} dx - \int_0^L Q \hat{Q} dx = \sum_{e=1}^N \alpha h^2 \frac{GA_s}{EI} \int_{I^{(e)}} (EI\theta'' + Q) \hat{Q} dx.$$

Yhtälöissä esiintyvä stabilointiparametri α on positiivinen vakio. Miksi stabilointitermit (9.117) voidaan lisätä variaatiomuotoon (9.116)? Näytä, että stabiloitu systeemi voidaan termien uudelleenjärjestelyllä muuntaa symmetriseen muotoon. Näytä lisäksi, että olettamalla leikkausvoiman elementtiapproksimaatio elementtirajojen yli epäjatkuva, saadusta symmetristä muodosta voidaan leikkausvoima Q elementtikohtaisesti eliminoida, ja jolloin päädytään siirtymämenetelmään perustuvan elementtimenetelmän perustaksi kelpaavaan heikkoon muotoon:

$$\begin{aligned} EI \int_0^L \theta' \hat{\theta}' dx - \sum_{e=1}^N \alpha h^2 EI \int_{I^{(e)}} \theta'' \hat{\theta}'' dx + \\ + \sum_{e=1}^N \frac{GA_s}{1 + \alpha h^2 GA_s / EI} \int_{I^{(e)}} (v' - \theta - \alpha h^2 \theta'') (\hat{v}' - \hat{\theta} - \alpha h^2 \hat{\theta}'') dx \\ = \int_0^L f \hat{v} dx. \end{aligned} \quad (9.118)$$

6. Ratkaise molemmista päistään vapaasti tuettu palkki elementtimenetelmällä, joka perustuu edellisen tehtävän stabiloituun formulaatioon (9.118). Käytä yhtä elementtiä ja kvadraattista interpolaatiota sekä v :lle että θ :lle. Ota huomioon symmetria. Kuormituksena on vakiokuorma f .

Tehtävän jäykkyyssmatriisiin jää riippuvuus stabilointiparametrin α . Koska taivutusenergiaan liittyvä termi

$$EI \int_0^L \theta' \hat{\theta}' dx - \sum_{e=1}^N \alpha h^2 EI \int_{I^{(e)}} \theta'' \hat{\theta}'' dx \quad (9.119)$$

on oltava positiivisesti definiitti, rajoittaa se stabilointiparametrin sallitut arvot välille:

$$0 < \alpha < C. \quad (9.120)$$

Määritä C ja käytä tehtävän ratkaisussa jotain positiivisuusehdon (9.120) toteuttavaa arvoa. Määritä ja piirrä myös elementtiratkaisun leikkausvoimajakauma.

Luku 10

Laattaelementtejä

Tämä luku noudattaa edellisen luvun, eli palkkimalleihin perustuvien elementtien esittelyn, kaltaista jaottelua. Ensin selvitetään ohuen laatan mallia, jota kutsutaan myös Kirchhoffin laattamalliksi,¹ jonka jälkeen esitellään keskimääräiset poikittaiset leikkausmuodonmuutokset huomioonottavaa laattamallia, jota kutsutaan kehittelijöidensä mukaan myös Reissnerin-Mindlinin laattamalliksi. Lopuksi esitellään diskreetti-Kirchhoff-tyyppisiä elementtejä, joiden lähtökohta on Reissnerin-Mindlinin malli² ja joista saadaan Kirchhoffin mallin mukaisia sopivien rajoitteiden asettamisella.

10.1 Kirchhoffin laattamalli

10.1.1 Kinemaattiset otaksumat

Aivan vastaavasti kuin ohuen palkin tapauksessa, ohuen laatan mallin perusotaksumat ovat:

1. laatan keskipinnan normaalit säilyvät suorina deformaation aikana,
2. laatan keskipinnan normaalit eivät veny ja
3. poikittaiset leikkausmuodonmuutokset ovat merkityksettömiä.

Otaksutaan nyt laatan keskipinnan tasoksi xy -taso. Kaksi ensimmäistä otaksumaa voidaan toteuttaa valitsemalla siirtymille u, v ja w seuraavat lausekkeet:

$$u(x, y, z) = z\theta_y(x, y), \quad (10.1a)$$

$$v(x, y, z) = -z\theta_x(x, y), \quad (10.1b)$$

$$w(x, y, z) = w_c(x, y), \quad (10.1c)$$

¹Gustave Robert Kirchhoff (1824-1887) julkaisi 1850 artikkelin, jossa ohuen laatan ongelma esitettiin ensimmäistä kertaa täydellisesti formuloituna.

²E. Reissner 1945 ja R.D. Mindlin 1951

jossa akselien x ja y ympäri kiertävät rotaatiot ovat θ_x ja θ_y , ks. kuva 10.1. Huomaa, että oheiset linearisoidut lausekkeet voidaan kirjoittaa vain, jos kiertymät θ_x ja θ_y ovat pieniä. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi jätetään jatkossa keskipintaa osoittava alaindeksi c pois laatan taipuman w lausekkeesta.

Laattateoriassa käytetään usein kiertymille toisenlaista merkintätapaa. Määritellään kiertymät, katso kuva 10.1, ³

$$\beta_x = -\theta_y, \quad \beta_y = \theta_x. \quad (10.2)$$

Tällöin kinemaattiset otaksumat (10.1) voidaan kirjoittaa muodossa

$$u(x, y, z) = -z\beta_x(x, y), \quad (10.3a)$$

$$v(x, y, z) = -z\beta_y(x, y), \quad (10.3b)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y). \quad (10.3c)$$

Edellä esitettyihin siirtymäotaksumiin perustuvat muodonmuutoskomponentit ovat

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\beta_{x,x}, \quad (10.4a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\beta_{y,y}, \quad (10.4b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}), \quad (10.4c)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = w_{,x} - \beta_x, \quad (10.4d)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = w_{,y} - \beta_y. \quad (10.4e)$$

Kirchhoffin laattamallin otaksuman 3 perusteella poikittaiset leikkausmuodonmuutokset γ_{zx} ja γ_{zy} häviävät, joten

$$w_{,x} = \beta_x, \quad w_{,y} = \beta_y, \quad (10.5)$$

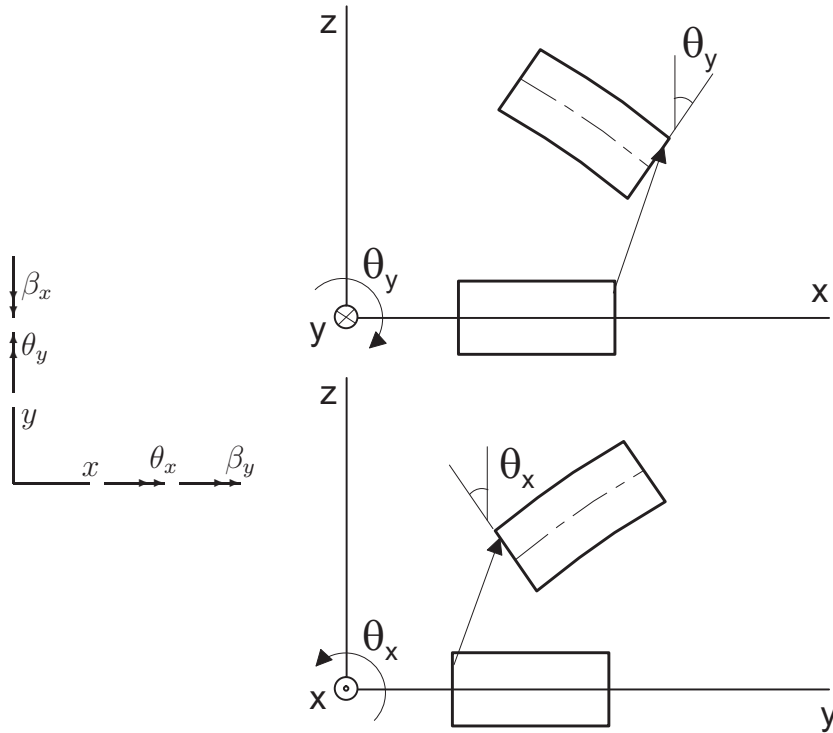
ja lopulliset kinemaattiset yhtälöt ovat muotoa

$$u(x, y, z) = -zw_{,x}, \quad (10.6a)$$

$$v(x, y, z) = -zw_{,y}, \quad (10.6b)$$

$$w(x, y, z) = w. \quad (10.6c)$$

³Joissain lähteissä määritellään $\beta_x = \theta_y$ ja $\beta_y = -\theta_x$.



Kuva 10.1 Laatan deformaatio ja kiertymäsuureiden määritelmät.

Ainoat nollasta eroavat muodonmuutoskomponentit ovat

$$\epsilon_x = -zw_{,xx} = z\kappa_x, \quad (10.7a)$$

$$\epsilon_y = -zw_{,yy} = z\kappa_y, \quad (10.7b)$$

$$\gamma_{xy} = -2zw_{,xy} = z\kappa_{xy}, \quad (10.7c)$$

missä κ_x ja κ_y ovat keskipinnan käyristymiä ja κ_{xy} on vääntymä.⁴

10.1.2 Virtuaalisen työn yhtälö

Kirchhoffin laattamallin virtuaalisen työn yhtälö on

$$\begin{aligned} & \int_A \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dz dA \\ &= \int_A f \delta w dA + \int_{\Gamma_t} (\bar{V}_n \delta w - \bar{M}_n \delta w_{,n}) ds, \end{aligned} \quad (10.8)$$

missä Γ_t on tasoalueen A reunakäyrän osa, jolla on annettu reunakuormituksena korvikeleikkausvoima $\bar{V}_n$ ja momentti $\bar{M}_n$. Korvikeleikkausvoiman lauseke on $V_n =$

⁴Tässä esityksessä käytetään “vääntymälle” määritelmää $\kappa_{xy} = -2w_{,xy}$.

$Q_n + M_{ns,s}$. Laatan reunan osalla S_w tunnetaan siirtymät, eli

$$w = \bar{w}, \quad w_{,n} = \bar{w}_{,n}. \quad (10.9)$$

Integroimalla laatan paksuuden yli, muuntuu virtuaalisen työn yhtälö muotoon

$$\begin{aligned} & \int_A (M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + M_{xy} \delta \kappa_{xy}) dA \\ &= \int_A f \delta w dA + \int_{\Gamma_\sigma} (\bar{V}_n \delta w - \bar{M}_n \delta w_{,n}) ds, \end{aligned} \quad (10.10)$$

jossa taivutusmomentit M_x, M_y ja vääntömomentti M_{xy} määritellään kaavoilla

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_x dz, \quad M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_y dz, \quad M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \tau_{xy} dz. \quad (10.11)$$

Otaksutaan laatasta vallitsevan tasojännitystilän, joten jännitykset saadaan lineaarisesti kimmoisan isotrooppisen materiaalin tapauksessa yhtälöistä

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (10.12)$$

Huomaa, että tasojännitystilaotaksuma on ristiriidassa otaksuman 2 kanssa, joka edellyttäisi tasomuodonmuutostilaa. Mikäli näin valittaisiin, tulisi laattamallista liian jäykkä. Voidaan kuitenkin osoittaa, että kyseinen laattamalli on oikea redusointi yleisestä kolmidimensioisesta jännitys- ja muodonmuutostilasta, ja laattamalli konvergoi tätä kohti, kun laatan paksuus pienenee.

Sijoittamalla tasomuodonmuutostilan yhtälöt ja kinemaattiset otaksumat momenttien määrittely-yhtälöihin saadaan niille lausekkeet

$$M_x = D(\kappa_x + \nu \kappa_y), \quad (10.13a)$$

$$M_y = D(\kappa_y + \nu \kappa_x), \quad (10.13b)$$

$$M_{xy} = \frac{1}{2} D(1 - \nu) \kappa_{xy}, \quad (10.13c)$$

missä D on laatan taivutusjäykkyys

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (10.14)$$

Otetaan käyttöön käyritysmien ja momenttien vektorit $\boldsymbol{\kappa}$ ja $\boldsymbol{m}$:

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_x & \kappa_y & \kappa_{xy} \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} M_x & M_y & M_{xy} \end{bmatrix}^T. \quad (10.15)$$

Laatan jännitysresultanttien ja käyritymien välinen yhteys on

$$\mathbf{m} = \mathbf{D}_b \boldsymbol{\kappa}, \quad (10.16)$$

missä

$$\mathbf{D}_b = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}. \quad (10.17)$$

Virtuaalisen työn lauseke (10.10) saadaan kompaktiin muotoon

$$\int_A \boldsymbol{\delta \kappa}^T \mathbf{m} dA = \int_A \boldsymbol{\delta \kappa}^T \mathbf{D}_b \boldsymbol{\kappa} dA = \int_A f \delta w dA + \int_{S_\sigma} (\bar{V}_n \delta w - \bar{M}_n \delta w_{,n}) ds. \quad (10.18)$$

Tämä voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\begin{aligned} & \int_A \begin{Bmatrix} -\delta w_{,xx} \\ -\delta w_{,yy} \\ -2\delta w_{,xy} \end{Bmatrix}^T D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{Bmatrix} dA \\ &= \int_A f \delta w dA + \int_{S_\sigma} (\bar{V}_n \delta w - \bar{M}_n \delta w_{,n}) ds. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Otaksumalla elementtimenetelmän mukainen interpolaatio taipumafunktiolle

$$w = \mathbf{N} \mathbf{w}^{(e)}, \quad (10.20)$$

missä $\mathbf{w}^{(e)}$ pitää sisällään elementin vapausasteet, saadaan elementin jäykkyyssmatriisiksi tutunnäköinen lauseke

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B} dA, \quad (10.21)$$

missä siirtymä-käyritysmatriisi $\mathbf{B}$ on

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{N}_{,xx} \\ -\mathbf{N}_{,yy} \\ -2\mathbf{N}_{,xy} \end{bmatrix}, \quad (10.22)$$

jonka avulla voidaan lausua käyritymävektori

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B} \mathbf{w}^{(e)}. \quad (10.23)$$

10.1.3 Ohuen laatan elementin yhteensopivuus- ja täydellisyysvaatimukset

Elementin koon pienentyessä verkkoa tihennettäessä lähestyy taipuma elementin alueella tilaa, joka koostuu jäykänkappaleen liikkeestä ja vakiokaarevuustilasta. Va-

kiokaarevuustila on yksinkertaisin taipumamuoto, joka aiheuttaa laattaan muodonmuutoksia. Päätellään, että elementin taipumainterpolaation on toteutettava seuraavat *täydellisyysvaatimukset*:

- w :n täytyy sisältää jäykänkappaleen liikettä kuvaavat termit,
- ja taipuman approksimaation tulee pystyä esittämään vakiokaarevuustilat.

Ensimmäisen vaatimuksen perusteella w :n lausekkeen tulee sisältää termit

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \quad (10.24)$$

Toisen ehdon toteuttamiseksi tarvitaan lisäksi vähintään toisen asteen termit, eli yhteensä

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2. \quad (10.25)$$

Kuten Eulerin-Bernoullin palkkimallin tapauksessakin, on virtuaalisen työn lausekkeessa taipuman toisia derivaattoja. *Yhteensopivuusvaatimus* johtaa siihen, että interpolaatiofunktioiden on oltava C_1 -jatkuvia, eli itse funktion ja sen derivaattojen tulee olla jatkuvia elementistä toiseen.

Täydellisyysvaatimukset ovat ehdottomia. Sensijaan jatkuvuusvaatimuksia voidaan lieventää, jolloin elementistä tulee ei-yhteensopiva eli ei-konforminen. Elementin on oltava kuitenkin numeerisesti stabiili ja konsistentti, jotta tulokset suppenisivat kohti oikeita arvoja. Alhaisasteisiin polynomeihin perustuvien laattaelementtien kehittäminen on osoittautunut hyvin hankalaksi tehtäväksi. Useimmat ohuen laatan, eli Kirchhoffin laattamallin, elementit ovat ei-konformisia.

Ei-konformisten elementtien suppenevuusominaisuuksien todistaminen on hankalaa ja se sivuutetaan tässä esityksessä.

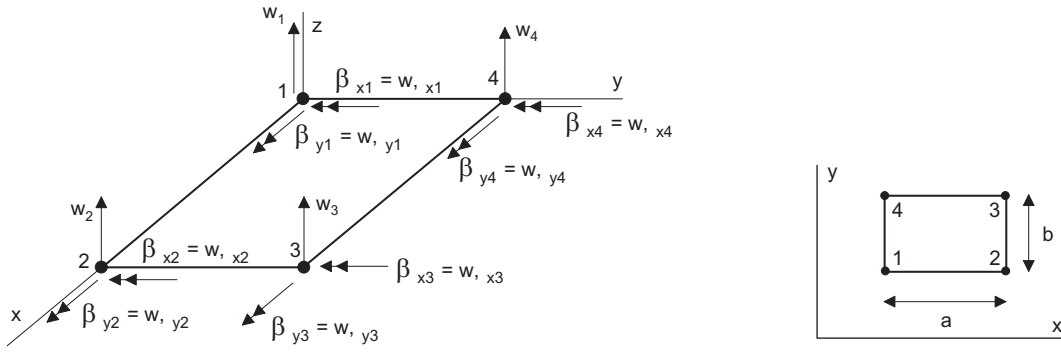
10.2 Laattaelementtejä historian lehdiltä

10.2.1 Suorakaide-elementti

Eräs ensimmäisiä laattaelementtejä on 12 vapausasteinen suorakaidelaattaelementti, jota kutsutaan myös ACM-elementiksi kehittelijöidensä A. Adini, R. Clough (1961) ja R.J. Melosh (1963) mukaan. Vapausasteina solmuissa ovat taipuma ja sen derivaatat $w_i, w_{i,x}, w_{i,y}$ tai taipuma ja kiertymät koordinaattiakseleiden ympäri eli $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$, katso kuva 10.2. Täten taipuman interpolaatiossa on 12 termiä, ja se voidaan esittää seuraavasti

$$w = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}, \quad (10.26)$$

missä vektori $\boldsymbol{\alpha}$ sisältää 12 yleistettyä vapausastetta $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, 12$. Lauseke toteuttaa täydellisyysvaatimukset, mutta elementti ei ole yhteensopiva.



Kuva 10.2 12 vapausasteinen suorakaide-elementti (ACM).

Esimerkiksi reunalla $x = vakio$ taipuma on muotoa

$$w = A_1 + A_2 y + A_3 y^2 + A_4 y^3, \quad (10.27)$$

ja

$$w_{,y} = A_2 + 2A_3 y + 3A_4 y^2, \quad (10.28)$$

missä $A_1, \dots, A_4$ ovat vakioita, jotka voidaan määrittää kiinnittämällä taipuman w ja sen derivaatan $w_{,y}$ arvot sivun päätepisteissä. Taipuma on siten jatkuva elementin reunan yli. Sensijaan derivaatta $w_{,x}$ on epäjatkuva reunan $x = vakio$ yli. Derivaatta $w_{,x}$ on

$$w_{,x} = B_1 + B_2 y + B_3 y^2 + B_4 y^3, \quad (10.29)$$

missä $B_1, \dots, B_4$ ovat vakioita. Neljän vakion B_i määrittämiseksi on käytettävissä vain kaksi ehtoa eli derivaatan $w_{,x}$ arvot sivun päätepisteissä.

Muodostamalla kaavan (10.26) avulla $w, w_{,x}$ ja $w_{,y}$ solmuissa 1,...,4 saadaan yhteyks

$$\mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{w}^{(e)}, \quad (10.30)$$

josta saadaan

$$\mathbf{w} = \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{N}\mathbf{w}^{(e)}. \quad (10.31)$$

Interpolaatiofunktio matriisi $\mathbf{N}$ on muotoa

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & \cdots & N_{12} \end{bmatrix}, \quad (10.32)$$

missä solmuun i liittyvät interpolaatiopolynomit ovat

$$N_{3i-2} = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(2 + \xi_i \xi + \eta_i \eta - \xi^2 - \eta^2), \quad (10.33a)$$

$$N_{3i-1} = -\frac{1}{16}a\xi_i(1 + \xi_i \xi)^2(1 - \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), \quad (10.33b)$$

$$N_{3i} = -\frac{1}{16}b\eta_i(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)^2(1 - \eta_i \eta). \quad (10.33c)$$

Interpolaatiomatriisia vastaava vapausastejärjestely on

$$\mathbf{w}^{(e)} = \begin{bmatrix} w_1 & w_{1,x} & w_{1,y} & w_2 & w_{2,x} & w_{2,y} & \cdots & w_4 & w_{4,x} & w_{4,y} \end{bmatrix}^T. \quad (10.34)$$

10.2.2 Bikuubinen suorakaide-elementti

Eräs yksinkertaisimmista hyvin toimivista laattaelementeistä on bikuubinen, eli BFS-elementti (F.K. Bogner, R.L. Fox, L.A. Schmit 1965), jossa on 16 vapausastetta, neljä vapausastetta $w_i, w_{i,x}, w_{i,y}$ ja $w_{i,xy}$ jokaisessa neljässä nurkkasolmussa. Interpolaatiofunktioina käytetään ensimmäisen asteen Hermiten polynomeja kummassakin suunnassa tulomuodossa. BFS-elementin taipuma on

$$w(x, y) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_{16} \end{bmatrix} \mathbf{w}^{(e)}, \quad (10.35)$$

missä solmuun 1 liittyvät interpolaatiopolynomit ovat

$$\begin{aligned} N_1 &= H_{01}(\xi)H_{01}(\eta), & N_2 &= \frac{1}{2}aH_{11}(\xi)H_{01}(\eta), \\ N_3 &= \frac{1}{2}bH_{01}(\xi)H_{11}(\eta), & N_4 &= \frac{1}{4}abH_{11}(\xi)H_{11}(\eta), \end{aligned} \quad (10.36)$$

ja vastaavasti solmuun 2 liittyvät interpolaatiopolynomit ovat

$$\begin{aligned} N_5 &= H_{02}(\xi)H_{01}(\eta), & N_6 &= \frac{1}{2}aH_{12}(\xi)H_{01}(\eta), \\ N_7 &= \frac{1}{2}bH_{02}(\xi)H_{11}(\eta), & N_8 &= \frac{1}{4}abH_{12}(\xi)H_{11}(\eta), \end{aligned} \quad (10.37)$$

jne.. Ensimmäisen asteen Hermiten interpolaatiofunktioit ovat (määriteltynä luonnollisten koordinaattien ξ ja η avulla välillä $(-1, 1)$) yhtälöillä (9.16).

Elementti toteuttaa vaadittavat yhteensopivuusvaatimukset ja hieman enemmänkin, sillä myös sekaderivaatat $w_{,xy}$ ovat solmupisteissä jatkuvat, jonka perusteella elementtiä joissain lähteissä luonnehditaan $C_{1,1}$ -jatkuvaksi.

10.2.3 Morleyn vakiokaarevuuselementti

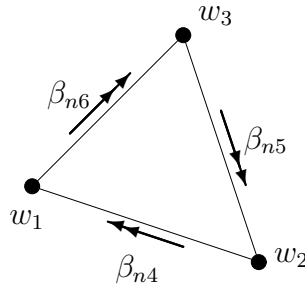
L.S.D. Morley on esittänyt 1971 kuvan 10.3 kolmiolaattaelementin, jonka taipumaa interpoloidaan funktiolla

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2. \quad (10.38)$$

Lauseke (10.38) on yksinkertaisin taipuman muoto, joka toteuttaa täydellisyysvaatimukset. Taipuman toiset derivaatat ovat vakioita, mistä johtuen myös momentit ovat vakioita elementin alueella.

Elementin vapausasteet ovat taipumat w_1, w_2 ja w_3 sekä kiertymät β_{n4}, β_{n5} ja β_{n6} , missä

$$\beta_{ni} = \frac{\partial w}{\partial n_i} \quad (10.39)$$



Kuva 10.3 Morleyn vakiokaarevuuselementti.

ja n on reunan normaalin suuntainen koordinaatti.

Ketjüsäännön mukaan

$$w_{,n} = w_{,x} \frac{\partial x}{\partial n} + w_{,y} \frac{\partial y}{\partial n}, \quad (10.40)$$

eli

$$w_{,n} = w_{,x} n_x + w_{,y} n_y = (\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y) n_x + (\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y) n_y. \quad (10.41)$$

Elementin reunasuoran yhtälö on

$$y = C_1 x + C_2 \quad (10.42)$$

ja reunalla taipuma on

$$w = A_1 + A_2 x + A_3 x^2, \quad (10.43)$$

sekä

$$\frac{\partial w}{\partial n} = B_1 + B_2 x, \quad (10.44)$$

missä A_1, A_2, A_3, B_1 ja B_2 ovat vakioita.

Tietyllä reunalla voidaan kiinnittää pääty pisteiden taipumien arvot ja reunan keskipisteen kiertymän arvo, eli saadaan kolme ehtoa, jotka eivät kuitenkaan riitä viiden vakion määrittämiseen yksikäsitteisellä tavalla. Päättellään, että sekä taipuma w että deriaatta $w_{,n}$ eli θ muuttuvat yleensä epäjatkuvasti elementistä toiseen.

Morleyn elementti voidaan johtaa monella tavalla, ehkä elegantin tapa on käyttää diskreetti-Kirchhoff kondensaatiota, katso harjoitustehtäviä luvun lopussa.

10.2.4 Muita kolmioelementtejä

Täydellinen kolmannen asteen polynomi sisältää 10 termiä, joten 9-vapausasteisessa kolmiolaattaelementissä (taipuma ja kiertymät solmuissa) on jokin kolmannen asteen termeistä jätettävä pois.

Varhaisessa laattaelementtien kehitysvaiheessa käytettiin mm. seuraavia lausekkeitä:

$$w = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & y^2 & x^3 & x^2 y & x y^2 & y^3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}, \quad (10.45)$$

ja

$$w = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y + xy^2 & y^3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}. \quad (10.46)$$

Ylemmstä kaavasta puuttuu termi xy ja elementti ei pysty esittämään vakioväntötilaa kunnollisesti. Alempi yrittelmä ei ole koordinaattien suhteen isotrooppinen, ja elementin konvergenssiominaisuudet ovat huonot. Myös tietyille elementin muodoille yhtälöryhmä

$$\mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} \quad (10.47)$$

tulee singulaariseksi.

Geometrisesti isotrooppisia interpolaatioita saadaan alakoordinaattien avulla. Zienkiewicz on esittänyt seuraavanlaiset interpolaatiofunktio (liittyen solmuun 1):

$$N_1 = L_1 + L_1^2 L_2 + L_1^2 L_3 - L_1 L_2^2 - L_1 L_3^2, \quad (10.48a)$$

$$N_2 = -y_{12}(L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) + y_{31}(L_3 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3), \quad (10.48b)$$

$$N_3 = -x_{21}(L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) + x_{13}(L_3 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3), \quad (10.48c)$$

missä

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j. \quad (10.49)$$

Solmuihin 2 ja 3 liittyvät interpolaatiofunktio muodostetaan samalla tavalla. Taipuman interpolaatio ei ole C_1 -jatkuva sillä normaaliderivaatta $w_{,n}$ ei ole jatkuva, joten elementti on epäkonforminen.

Mikäli solmupisteparametreiksi sallitaan korkeampia derivaattoja kuin ensimmäiset, on kiertymäyhteensopivuuden aikaansaaminen helpompaa. Mikäli kolmion kärkisolmujen vapausasteiksi valitaan

$$w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (10.50)$$

saadaan elementti, jossa olisi 18 vapausastetta. Mikäli elementtiin lisättäisiin kolme vapausastetta, esimerkiksi sivujen keskipisteiden normaaliderivaatat, saataisiin interpolaatioksi täydellinen viidennen asteen polynomi, joka sisältää 21 termiä. Tällaiseen elementtiin päätyivät vuoden 1968 tienoilla seuraavat elementtitutkijat: J.H. Argyris, I. Fried, D.W. Scharpf (1968), K. Bell (1969), W. Bosshard (1968), B.M. Irons (1969) ja W. Wisser (1968).

Mikäli elementin taipuman normaaliderivaatan lauseke (neljättä astetta) rajoitetaan kuubiseksi saadaan kolme rajoitetta, jolloin elementtiin jää 18 vapausastetta, eli kuusi jokaiseen solmuun.

Useita muita samankaltaisia konformisia elementtejä on esitetty, joiden vapausasteina on taipuman korkeampia derivaattoja kuin ensimmäiset. Tällaiset elementit ovat kuitenkin 'epämukavia', sillä reunaehtoien antaminen mutkistuu ja materiaaliominaisuuksien ja/tai paksuuden epäjatkuvuuden huomioonotto on hankalampaa.

10.3 Reissnerin-Mindlinin laattamalli

10.3.1 Elementin formulointi

Poikittaisilla leikkausmuodonmuutoksilla on merkitystä paitsi paksun homogeenisen laatan tapauksessa myös esimerkiksi kerroslaatan tai sandwich-laatan tapauksissa. Yksinkertaisin poikittaiset leikkausmuodonmuutokset huomioonottava laattamalli saadaan, kun otaksutaan laatan keskipinnan normaalien pysyvän suorina mutta ei välttämättä kohtisuorassa deformatiivista laatan keskipintaa vastaan. Tämä ns. Reissnerin-Mindlinin laattamalli on yksidimensioisen Timoshenkon palkkimallin vastine laatoilla. Kinemaattisesta otaksumasta seuraa siirtymäkomponenteille lausekkeet (10.3)

$$u(x, y, z) = -z\beta_x(x, y), \quad (10.51a)$$

$$v(x, y, z) = -z\beta_y(x, y), \quad (10.51b)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y). \quad (10.51c)$$

Reissnerin-Mindlinin laattamallin nolasta eroavat muodonmuutoskomponentit ovat

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\beta_{x,x}, \quad (10.52a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\beta_{y,y}, \quad (10.52b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}), \quad (10.52c)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = w_{,x} - \beta_x, \quad (10.52d)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = w_{,y} - \beta_y. \quad (10.52e)$$

Käyritymävektori $\boldsymbol{\kappa}$ määritellään kuten Kirchhoffin laattamallin tapauksessa

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_x & \kappa_y & \kappa_{xy} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\beta_{x,x} & -\beta_{y,y} & -(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \end{bmatrix}^T. \quad (10.53)$$

Tämän lisäksi tarvitaan myös keskimääräisten poikittaisten leikkausmuodonmuutosten vektori

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix}^T. \quad (10.54)$$

Momenttien ja käyritymien valilla pätee yhteys

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{D}_b \boldsymbol{\kappa}, \quad (10.55)$$

ja leikkausvoimien sekä keskimääräisten liukumien välinen yhteys on

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}_s \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D}_s = kGt \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (10.56)$$

missä k on leikkauskorjauskerroin. Leikkausjännitysresultantit määritellään kaavoilla

$$Q_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz. \quad (10.57)$$

Reissnerin-Mindlinin laattamallin virtuaalisen työn yhtälö on

$$\begin{aligned} & \int_A \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dz dA \\ &= \int_A f \delta w dA + \int_{S_\sigma} (\bar{Q}_n \delta w - \bar{M}_n \delta \beta_n - \bar{M}_{ns} \delta \beta_s) ds. \end{aligned} \quad (10.58)$$

Integroimalla laatan paksuuden yli muuntuu se muotoon

$$\begin{aligned} & \int_A (M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + M_{xy} \delta \kappa_{xy} + Q_x \delta \gamma_{xz} + Q_y \delta \gamma_{yz}) dA \\ &= \int_A f \delta w dA + \int_{S_\sigma} (\bar{Q}_n \delta w - \bar{M}_n \delta \beta_n - \bar{M}_{ns} \delta \beta_s) ds. \end{aligned} \quad (10.59)$$

Toisin kuin Kirchhoffin laattamallissa, on virtuaalisen työn yhtälössä (10.59) vain ensimmäisiä derivaattoja. Täten funktioille w , β_x ja β_y riittää vain C_0 -jatkuva interpolatio, jotta yhteensopivuusvaatimukset toteutuisivat. Otaksutaan nyt, että sekä taipumaa että kiertymiä interpoloidaan samanasteisilla polynomeilla, eli n -solmuisen elementin tapauksessa voidaan kirjoittaa

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i, \quad \beta_x = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{xi}, \quad \beta_y = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{yi}. \quad (10.60)$$

Elementin mielivaltaisen pisteen käyristymävektori on

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} -\beta_{x,x} \\ -\beta_{y,y} \\ -\beta_{x,y} - \beta_{y,x} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & -N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{i,y} \\ 0 & -N_{i,y} & -N_{i,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{Bmatrix}, \quad (10.61)$$

eli

$$\boldsymbol{\kappa} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{bi} \mathbf{w}_i^{(e)} \quad (10.62)$$

missä

$$\mathbf{w}_i^{(e)} = [w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi}]^T. \quad (10.63)$$

Poikittaiset leikkausmuodonmuutokset voidaan kirjoittaa muotoon

$$\boldsymbol{\gamma} = \left\{ \begin{matrix} w_{,x} - \beta_x \\ w_{,y} - \beta_y \end{matrix} \right\} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_{i,x} & -N_i & 0 \\ N_{i,y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{Bmatrix}, \quad (10.64)$$

eli

$$\boldsymbol{\gamma} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{si} \mathbf{w}_i^{(e)}. \quad (10.65)$$

Elementin osuus sisäisen virtuaalisen työn lausekkeessa voidaan kirjoittaa siten muodossa

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta \mathbf{w}_i^{(e)T} \left(\mathbf{K}_{bij}^{(e)} + \mathbf{K}_{sij}^{(e)} \right) \mathbf{w}_j^{(e)}, \quad (10.66)$$

missä elementin jäykkyysmatriisin taivutuksesta ja leikkauksesta solmuihin i ja j aiheutuvat termit ovat

$$\mathbf{K}_{bij}^{(e)} = \int_A \mathbf{B}_{bi}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_{bj} dA, \quad \mathbf{K}_{sij}^{(e)} = \int_A \mathbf{B}_{si}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{sj} dA. \quad (10.67)$$

Paksun laatan mallin tapauksessa on helppo muodostaa isoparametrinen elementti. Geometriaa voidaan interpoloida samoilla funktioilla kuin siirtymäsuureita-kin aivan vastaavaan tapaan kuin jo esitetyissä kaksidimensioisissa tehtävissä (lämmönjohtuminen, levytehtävä). Osuudet (10.67) ovat siten laskettavissa kaavoilla

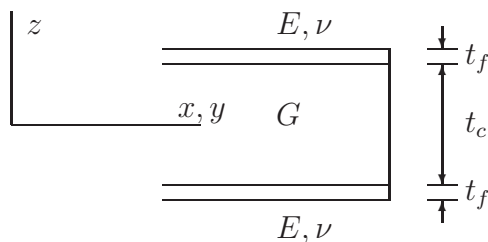
$$\mathbf{K}_{bij}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{bi}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_{bj} J d\xi d\eta, \quad \mathbf{K}_{sij}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{si}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{sj} J d\xi d\eta, \quad (10.68)$$

joissa siirtymä-muodonmuutosmatriiseissa olevat derivaatat globaalien suuntien suhteen lasketaan kaavoilla (4.165).

Sandwich-laattoja voidaan analysoida Reissnerin-Mindlinin laattamallilla. Lineaarisesti kimmoisalle ohutkuoriselle isotrooppiselle sandwich-laatalle voidaan johtaa matriisit:

$$\mathbf{D}_b = \frac{Et_f(t_c + t_f)^2}{2(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_s = \frac{G(t_c + t_f)^2}{t_c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (10.69)$$

missä E, ν ovat pintakerroksen kimmovakiot, G on ytimen leikkausmoduuli ja t_f, t_c ovat pinta- ja ydinkerroksen paksuudet, katso kuva 10.4.



Kuva 10.4 Ohutkuorinen sandwich-laatta.

10.3.2 Numeerinen integrointi

Integraalit kaavoissa (10.68) lasketaan numeerisesti Gaussin menetelmällä. Alhaisasteisia interpolaatiofunktioita käytettäessä tarkka integointi tuottaa elementin, joka on liian jäykkä ohuen laatan tapauksessa. Ilmiötä nimitetään leikkauslukkiutumiseksi ja se on aivan analoginen Timoshenkon palkkielementin lukkiutumisen kanssa. Laatan ohentuessa jäykkyysmatriisin leikkaustermi toimii sakkofunktion tapaan ja pakottaa poikittaiset leikkausmuodonmuutokset nolleen, jolloin taipuman ja kiertymätermien samanasteisesta interpolaatiosta johtuen taipuman on myös hävittävä.

Täydellä integroinnilla, joka määritelmänsä mukaan tuottaa tarkan tuloksen suorakaiteen muotoisille säännöllisille elementeille, rajoitusehtoja poikittaiselle liukumalle tulee liian paljon ja elementtiverkko lukkiutuu. Tämän välttämiseksi sovelletaan elementin leikkaustermiin redusoitua integrointia. Elementin käyttäytymistä voidaan myös parantaa käyttämällä uudelleen määriteltäviä, korvaavia interpolaatiofunktioita poikittaisille liukumille.

Redusoidun integroinnin ongelma on, että se tuottaa elementtiin nollaenergia-muotoja, jotka voivat levitä elementistä toiseen ja tuhota ratkaisun. Tämän vuoksi sovelletaan ns. selektiivistä eli valikoivaa ali-integrointia, jossa taivutuksen osuus jäykkyysmatriisissa integroidaan tarkasti ja vain leikkaukseen liittyvät termit ali-integroidaan. Selektiivinen menettely tuottaa stabiilimman jäykkyysmatriisin, jonka rangi on suurempi kuin täysin ali-integroidun elementin.

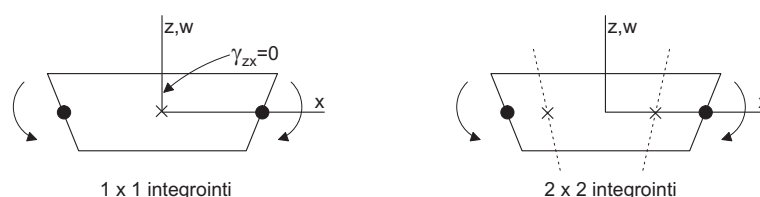
Eräitä Lagrangen ja Serendip-tyyppisiin interpolaatiofunktioihin perustuvia elementtejä on esitetty taulukossa 10.1. T.J.R. Hughes ja M. Cohen ovat esittäneet vuonna 1978 Heterosis-elementin, jossa taipumaa interpoloidaan 8-solmuisen elementin Serendip-muoto/-funk/-ti/-oilla ja kiertymille käytetään toisen asteen Lagrangen polynomeja, eli 9-solmuista interpolaatiota.

Bilineaarinen nelisolmuinen elementti toimii kunnollisesti puhtaassa taivutuksessa sekä redusoidulla, että selektiivisellä integroinnilla. Täydellä 2×2 -integroinnilla poikittaiset liukumukset eivät mene nolliksi Gaussin pisteissä puhtaassa taivutuksessa. Paksuuden t pientyessä lähes kaikki muodonmuutosenergia on virheellistä leikkausenergiaa, taivutusmuodonmuutos lähestyy nollaa ja elementti lukkiutuu, katso kuva 10.5.

Yhdeksänsolmuinen elementti toimii oikein puhtaassa taivutuksessa integroimis-

Taulukko 10.1 Reissnerin-Mindlinin laattamallin elementtejä.

Elementti	integrointi tyyppi	$\mathbf{K}_b$	$\mathbf{K}_s$	liukuman raj. ehdot	mekanismien lukumäärä
bilineaarinen	redus.	1×1	1×1	2	4
4 solmua	selekt.	2×2	1×1	2	2
12 vap. ast.	täysi	2×2	2×2	4	0
bikvadraatt.	redus.	2×2	2×2	8	4
9 solmua	selekt.	3×3	2×2	8	1
27 vap. ast.	täysi	3×3	3×3	18	0
Serendip	redus.	2×2	2×2	8	1
8 solmua	selekt.	3×3	2×2	8	0
24 vap. ast.	täysi	3×3	3×3	18	0
Heterosis					
9 solmua	selekt.	3×3	2×2	8	0
26 vap. ast.					

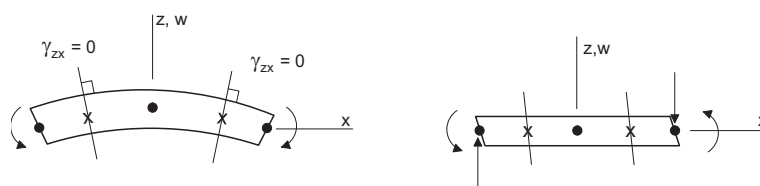
**Kuva 10.5** Bilineaarinen elementti puhtaassa taivutuksessa.

menetelmästä riippumatta. Koska taipuma w on toisen asteen polynomi, liukuman γ_{xz} asettaminen nolaksi pakottaa elementtiin puhtaan taivutuksen, kuva 10.6a. Kuvan 10.6b elementissä taivutusmomentti muuttuu lineaarisesti x :n funktiona. Lineaarisesti muuttuvaa momenttia vastaa ohuen palkin tai sylinterimäisesti taivutetun ohuen laatan tapauksissa kolmannen asteen polynomin mukainen taipuma, jota kvadraattinen elementti ei pysty esittämään, vaan kuvan 10.6b tapauksessa $w = 0$ ja β_x muuttuu parabolisesti. Yhdeksänsolmuinen Lagrangen elementti pystyy esittämään tämän tilan kunnollisesti vain, jos jäykkyysmatriisin osa $\mathbf{K}_s$ integroidaan redusoidusti 2×2 Gaussin kaavalla.

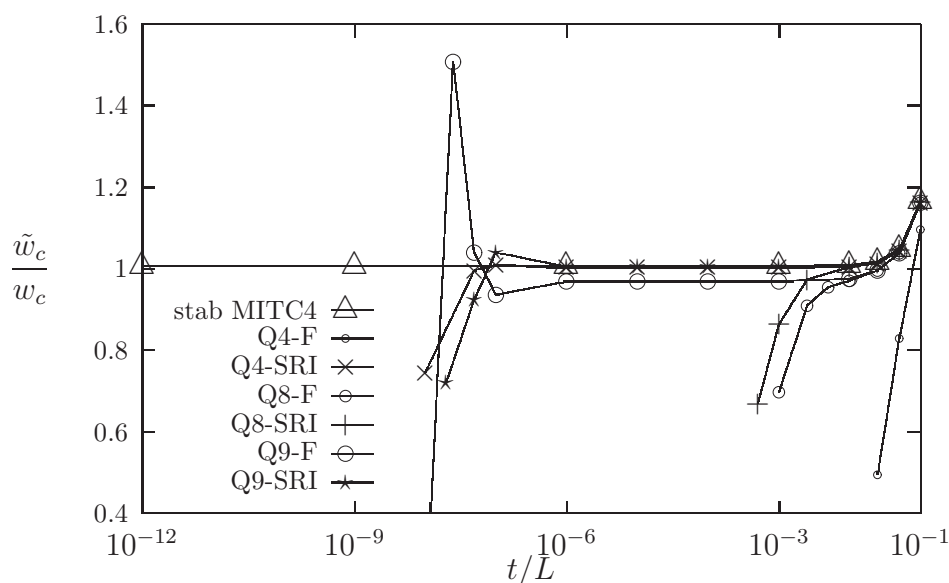
Kahdeksansolmuinen elementti toimii luotettavasti vain pienillä laatan tukivälin ja paksuuden suhteen L/t arvoilla.

Kuvassa 10.7 on esitetty tasaisesti kuormitetun ja jäykästi tuetun neliölaatan keskipisteen taipuman arvoja Kirchhoffin laattamallin antamaan arvoon verrattuna suhteellisen paksuuden t/L funktiona. Tulokset on laskettu 10×10 verkolla käytettäessä bilineaarista interpolaatiota ja 5×5 verkolla bikvadraattisilla elementeillä analysoituna.

Jotkut ratkaisut kuvassa (10.7) hajaantuvat pienillä suhteen t/L arvoilla. Ilmiö



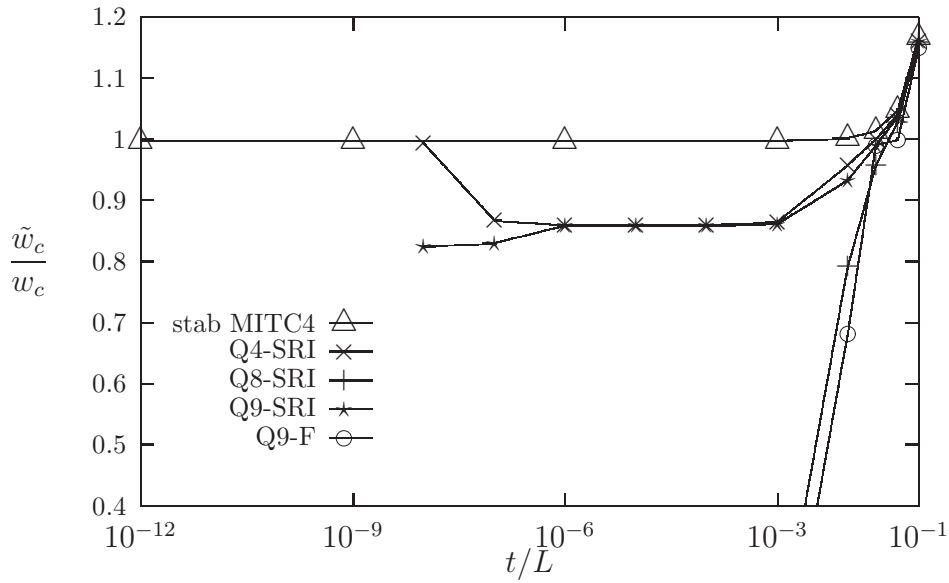
Kuva 10.6 Kvadraattinen elementti: (a) puhdas taivutus ja (b) lineaarisesti muuttuva taivutusmomentti.



Kuva 10.7 Tasaisesti kuormitettu jäykästi tuettu laatta: tasajakoinen 10×10 (bilineaariset elementit) tai 5×5 verkko (bikvadraattiset elementit). Elementtimenetelmän antama keskipisteen taipuma $\tilde{w}_c$ verrattuna Kirchhoffin laattamallin keskipisteen taipumaan w_c . SRI= selektiivinen ali-integrointi ja F on täysi integrointi.

aiheutuu siitä, että matriisin $\mathbf{K}_s$ termit tulevat numerollisesti paljon suuremmiksi kuin matriisin $\mathbf{K}_b$ alkiot suhteen t/L pienentyessä, jolloin luvun esitystarkkuudesta riippuen $\mathbf{K}_b$:n alkioiden merkitys $\mathbf{K}_s$:n alkioiden rinnalla katoaa. Hajaantuminen voidaan välttää käyttämällä stabiloituja elementtejä kuten Timoshenkon palkkimallin yhteydessä. Tällöin poikittainen liukuma tulee väärin lasketuksi, mutta sillä ei ole muutoinkaan merkitystä ohuiden laattojen tapauksessa.

Vääristyneen elementtiverkon vaikutus on esitetty kuvassa 10.8. Sisäsolmupisteiden koordinaatit on siirretty $0.01L$:n etäisyydelle ideaalista paikasta satunnaiseen suuntaan. Standardi isoparametrinen elementtien huono käyttäytyminen on vieläkin dramaattisempaa kuin kuvassa 10.7.



Kuva 10.8 Tasaisesti kuormitettu jäykästi tuettu laatta: vääristetty 10×10 (bilineaariset elementit) tai 5×5 verkko (bikvadraattiset elementit). Elementtimenetelmän antama keskipisteen taipuma $\tilde{w}_c$ verrattuna Kirchhoffin laattamallin keskipisteen taipumaan w_c . SRI= selektiivinen ali-integrointi ja F on täysi integrointi.

10.3.3 Reissnerin-Mindlinin laattaelementtien mekanismit

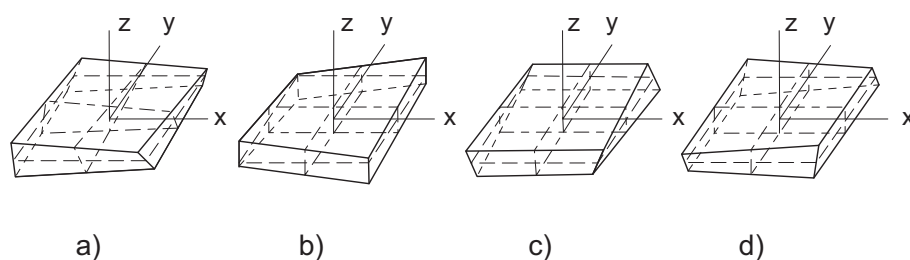
Siirtymätilan kuvaamiseen on käytetty samoja interpolaatiofunktioita kuin levyelementissä ja redusoidun integroinnin tuottamat nollaenergiamuodot ovat samantapaisia kuin isoparametrisilla vastaavanlaisiin interpolaatiofunktioihin perustuvilla levyelementeillä. Laatan tapauksessa voidaan nähdä vastaavuus

$$u = -z\beta_x \quad \text{ja} \quad v = -z\beta_y. \quad (10.70)$$

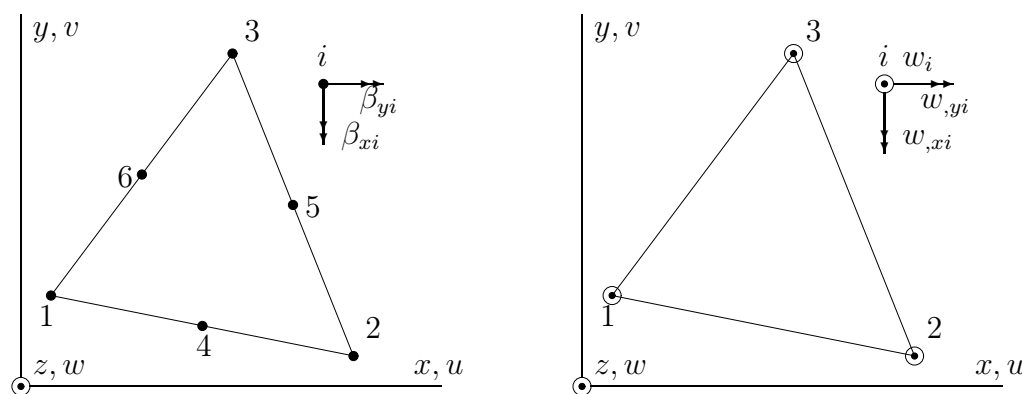
Bilineaarisen laattaelementin redusoidun 1×1 -integroinnin nollaenergiamuodot on esitetty kuvassa 10.9. Selektiivisen integroinnin tapauksessa nollaenergiamuotoja ovat kuvan 10.9 muodot (a) ja (b). Vääntöön liittyvä muoto (a) ei ole yhteensopiva naapurielementtien vastaavan muodon kanssa, joten se ei esiinny kahdesta tai useammasta elementistä koostuvassa verkossa. Mekanismeja voidaan kontrolloida numeerisesti samaan tapaan kuin levyelementeissä.

Kvadraattisten laattaelementtien redusoidun ja selektiivisen integroinnin tuottamat mekanismit ovat samanlaisia kuin vastaavien levyelementtien nollaenergiamuodot. Yhdeksänsolmuisella elementillä on redusoidun integroinnin tapauksessa kolme muuta mahdollista mekanismia, joista kaksi ovat samoja kuin levyelementin mekanismit ja kolmas on määritelty yhtälöllä

$$u = v = 0 \quad \text{ja} \quad w = 3\xi^2\eta^2 - \xi^2 - \eta^2. \quad (10.71)$$



Kuva 10.9 Nelisolmuisen laattaelementin 1×1 -integroinnin mekanismit.



Kuva 10.10 Klassisen DKT-elementtikonstruktion alkuperäiset vapausasteet.

Tämä mekanismi ei ole mahdollinen Heterosis-elementissä, koska termiä $\xi^2 \eta^2$ ei ole taipuman w interpolaatiossa.

10.4 DK otaksumaan perustuvat elementit

Ohuen laatan elementin konstruoinnissa kohdattuja vaikeuksia voidaan kiertää, jos Kirchhoffin laattateorian otaksumista seuraavat rajoitusyhtälöt

$$\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0, \quad (10.72)$$

eli

$$w_{,x} = \beta_x \quad \text{ja} \quad w_{,y} = \beta_y \quad (10.73)$$

vaaditaan toteutumaan tietyissä pisteissä eli diskreetisti elementissä. Muodonmuutokset määritellään Reissnerin-Mindlinin laattamallin kaavoilla, jossa taipuma w ja kiertymät β_x ja β_y ovat toisistaan riippumattomia. Diskreettien rajoitusyhtälöiden huomioonottamisen jälkeen ne tulevat toisistaan riippuviksi.

Idean Kirchhoffin rajoitteiden pisteittäisestä soveltamisesta ovat esittäneet G.A. Wempner (1968), G.A. Wempner, J.T. Oden, D.K. Cross (1968), J.H. Stricklin, W. Haisler, P. Tisdale, K. Gunderson (1969), G.S. Dhatt (1969).

Yhdeksänvapausasteista diskreettiin Kirchhoffin otaksumaan perustuvaa elementtiä nimitetään DKT-elementiksi (Discrete-Kirchhoff-Triangle).

DKT-elementin muodostamisvaiheet esitetään lyhyesti seuraavassa. Olennainen vaihe on *poikittaisten leikkausmuodonmuutosten asettaminen nolaksi tietyissä pisteissä*. Samalla periaattella muodostetaan muut diskreettiin Kirchhoffin otaksumaan perustuvat elementit.

Kiertymiä β_x ja β_y (kuva 10.10) interpoloidaan kuten Reissnerin-Mindlinin teoriaan perustuvissa elementeissä taipumasta w riippumattomasti kaavoilla

$$\beta_x = \sum_{i=1}^6 N_i \beta_{xi}, \quad \beta_y = \sum_{i=1}^6 N_i \beta_{yi}, \quad (10.74)$$

missä

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1(2L_1 - 1) & N_4 &= 4L_1L_2 \\ N_2 &= L_2(2L_2 - 1) & N_5 &= 4L_2L_3, \\ N_3 &= L_3(2L_3 - 1) & N_6 &= 4L_3L_1 \end{aligned} \quad (10.75)$$

ovat alakoordinaattien L_i avulla lausutut kvadraattiset interpolaatiofunktio. Kiertymävapausasteita on siten yhteensä 12. Taipuman w otaksutaan muuttuvan sivua pitkin koordinaatin s suunnassa kolmannen asteen polynomin mukaisesti. Tämän perusteella voidaan laskea derivaatta $w_{,s}$. Esimerkiksi sivulla 2-3

$$w|_{s_{23}} = H_{01}(s)w_2 + H_{11}(s)w_{,s2} + H_{02}(s)w_3 + H_{12}(s)w_{,s3}, \quad (10.76)$$

missä H_{ij} :t ovat Hermiten kuubiset interpolaatiopolynomit. Derivaatta $w_{,s}$ solmussa 5 ($s = 0$) on

$$w_{,s5} = -\frac{3}{2l_{23}}w_2 - \frac{1}{4}w_{,s2} + \frac{3}{2l_{23}}w_3 - \frac{1}{4}w_{,s3}. \quad (10.77)$$

Samoin voidaan määrittää $w_{,s4}$ ja $w_{,s6}$.

Muunnoskaavoilla

$$\begin{Bmatrix} w_{,n} \\ w_{,s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix}, \quad (10.78)$$

missä ϕ on reunan normaalin ja x -akselin välinen kulma (kuva 10.10), voidaan määrittää $w_{,s}$ derivaattojen $w_{,x}$ ja $w_{,y}$ avulla solmuissa 1,2 ja 3. Tällöin derivaattojen $w_{,s4}$, $w_{,s5}$ ja $w_{,s6}$ määrittelykaavojen oikeat puolet saadaan lausutuiksi solmujen 1,2 ja 3 vapausasteiden w , $w_{,x}$ ja $w_{,y}$ avulla. Rotaatioiden β_x , β_y interpolaatiokaavoissa ja derivaattojen $w_{,s4}$, $w_{,s5}$, $w_{,s6}$ kaavoissa on yhteensä $12+9 = 21$ vapausastetta: (β_x, β_y) solmuissa 1,...,6 ja $(w, w_{,x}, w_{,y})$ solmuissa 1,2 ja 3. Elementin vapausasteiksi halutaan taipuma w ja derivaatat $w_{,x}$, $w_{,y}$ nurkkasolmuissa. Kaksitoista vapausastetta (β_x, β_y) solmuissa 1,...,6 on sen tähden lausuttava vapausasteiden $(w, w_{,x}, w_{,y})_i$, $i = 1, 2, 3$ avulla. Tällöin sovelletaan seuraavia rajoitusyhtälöitä:

1. Poikittaiset leikkausmuodonmuutokset γ_{xz} ja γ_{yz} ovat nollia solmuissa 1,2, ja 3, eli

$$\beta_{xi} = w_{,xi}, \quad \beta_{yi} = w_{,yi}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10.79)$$

2. Poikittainen leikkausmuodonmuutos γ_{sz} on nolla solmuissa 4,5 ja 6, eli

$$\beta_{si} = w_{,si}, \quad i = 4, 5, 6. \quad (10.80)$$

Sovellettaessa kaavoja (10.80) tarvitaan muunnoskaavoja (10.78).

3. Kiertymä β_n muuttuu lineaarisesti elementin sivua pitkin s :n funktiona, eli

$$\beta_{n4} = \frac{1}{2}(w_{,n1} + w_{,n2}), \quad \beta_{n5} = \frac{1}{2}(w_{,n2} + w_{,n3}), \quad \beta_{n6} = \frac{1}{2}(w_{,n3} + w_{,n1}). \quad (10.81)$$

Soveltamalla rajoitusehtoja (10.79), (10.80) ja (10.81) saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \beta_{x1} & \beta_{y1} & \beta_{x2} & \cdots & \beta_{y6} \end{bmatrix}^T = \mathbf{T} \begin{bmatrix} w_1 & w_{,x1} & w_{,y1} & w_2 & \cdots & w_{,y3} \end{bmatrix}^T \quad (10.82)$$

jonka avulla solmujen 1,...,6 kiertymät β_x ja β_y saadaan lausutuksi nurkkasolmujen vapausasteiden $w_i, w_{,xi}$ ja $w_{,yi}$ avulla.

Elementin jäykkyyismatriisin muodostamiseksi sovelletaan ensin Reissnerin-Mindlinin laattamallin kaavoja

$$u = -z\beta_x \quad \text{ja} \quad v = -z\beta_y \quad (10.83)$$

ja

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (10.84)$$

josta

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & \cdots & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & \cdots & 0 & N_{6,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & \cdots & N_{6,y} & N_{6,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{x1} \\ \beta_{y1} \\ \beta_{x2} \\ \vdots \\ \beta_{y6} \end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = -z \mathbf{B}_\beta \mathbf{w}_\beta^{(e)}. \quad (10.85)$$

Matriisin $\mathbf{B}_\beta$ muodostamisessa tarvitaan alakoordinaattien derivoimiskaavoja.

Virtuaalisen työn yhtälön perusteella saadaan muodonmuutosenergian variaa-

tioksi (oletetaan kimmoinen materiaalilaki) elementille e :

$$\delta U^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} dV. \quad (10.86)$$

Suorittamalla integrointi laatan paksuuden yli saadaan

$$\delta U^{(e)} = \delta \mathbf{w}_\beta^{(e)T} \mathbf{K}_\beta^{(e)} \mathbf{w}_\beta^{(e)}, \quad (10.87)$$

missä

$$\mathbf{K}_\beta^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_\beta^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_\beta dA. \quad (10.88)$$

Laatan kimmomatriisi $\mathbf{D}_b$ on jo aiemmin määritelty kaavassa (10.17). Muunnoskaavan (10.82) perusteella saadaan DKT-elementin jäykkyysmatriisiksi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_\beta^{(e)} \mathbf{T}. \quad (10.89)$$

Tällainen menettely on suoraviivainen ja helppo ohjelmoida. Laskentatyön kannalta on suotavaa suorittaa muunnos (10.82) jo muodonmuutos-siirtymä-matriisiin $\mathbf{B}$, jolloin

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_\beta \mathbf{T}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = -z \mathbf{B} \mathbf{w}^{(e)}, \quad (10.90)$$

ja jäykkyysmatriisi muodostetaan operoimalla suoraan 3×9 -matriisilla $\mathbf{B}$ eikä 3×12 -matriisilla $\mathbf{B}_\beta$.

DKT-elementti voidaan ajatella koostuvan päällekkäin pinotuista kvadraattisista kolmioleveyelementeistä, joita sitovat toisiinsa jäykät laatan paksuussuuntaiset sauvat nurkissa ja lisäksi sidosehdot (10.80) ja (10.81).

Homogeenisen vakiopaksuuksisen laatan tapauksessa kolmen pisteen integroimiskaava antaa tarkan tuloksen jäykkyysmatriisin laskennassa. Jäykkyysmatriisin termin eksplisiittinen muodostaminen analyyttisellä integroinnilla on myös mahdollista. Kun siirtymäsuureet on laskettu saadaan muodonmuutokset kaavasta (10.90) ja jännitykset kimmomatriisin välityksellä kaavasta $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}$.

Koska taipuma on määritelty ainoastaan reunaviivoilla, aiheuttaa tämä epäselvyyden konsistentin kuormavektorin muodostamisessa, kun elementin alueella on jakautunut painekuorma. Käytännössä riittäväksi on kuitenkin osoittautunut kuorman jako taipumavapausasteille lineaaristen interpolaatiofunktioiden avulla.

Samalla idealla voidaan muodostaa myös nelisolmuinen elementti DKQ (Discrete Kirchhoff Quadrilateral). Sen käyttäytyminen ei ole kuitenkaan osoittautunut yhtä hyväksi kuin DKT-elementin. DK-elementteihin voidaan lukea myös sellaiset elementit, joissa on integraalirajoitteita, esimerkiksi vaaditaan liukumien häviäminen keskimääräisesti elementin alueelta. Maininnan arvoisia ovat B.M. Ironsin ja P. Lyonsin kehittelemät elementit, joista kiinnostunut löytää seikkaperäiset kuvaukset lähteestä [6]

10.5 Toinen DK-elementtien johtotapa

DKT-elementin ekvivalentti vastine voidaan konstruoida hieman helpommin käyttäen taipumalle w lineaarista interpolaatiota elementin alueella ja ottamalla leikkausmuodonmuutoksen rajoiteyhtälö huomioon keskimääräisesti elementin sivuilla. Tällä tavoin voidaan käsitellä myös nelikulmioelementtiä, joten johdetaan seuraavassa analyttiset lausekkeet kolmisolmuisen kolmioelementin ja nelisolmuisen nelikulmioelementin kiertymien interpolaatiofunktioiksi. Kutsutaan elementtejä DKT ja DKQ elementeiksi vaikka oikeammin ehkä pitäisi kirjoittaa IKT ja IKQ (Integral Kirchhoff Triangle/Quadrilateral).

Elementin taipumaa w interpoloidaan lineaarisilla (kolmio) tai bilineaarisilla (nelikulmio) funktioilla, kun taas kiertymille käytetään kvadraattista (kolmio) tai supistettua bikvadraattista (nelikulmio) interpolaatiota, joka mukavuussyistä valitaan hierarkiseksi. Interpolaatio voidaan siten kirjoittaa muodossa

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i, \quad (10.91a)$$

$$\beta_x = \sum_{i=1}^n (N_i \beta_{xi} + N_{n+i} \Delta \beta_{xi}), \quad (10.91b)$$

$$\beta_y = \sum_{i=1}^n (N_i \beta_{yi} + N_{n+i} \Delta \beta_{yi}), \quad (10.91c)$$

jossa n on elementin solmujen lukumäärä (3/4) ja merkintä $i+$ tarkoittaa solmua i seuraavaa solmua elementin reunaa pitkin positiiviseen kiertosuuntaan kierrettäessä. Kolmioelementin tapauksessa käytetään siis funktioita

$$N_i = L_i, \quad (10.92a)$$

$$N_{3+i} = 4L_i L_{i+}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10.92b)$$

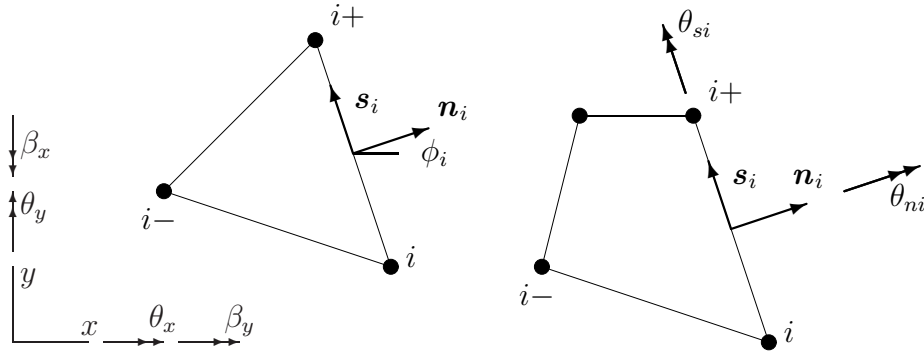
kun taas nelikulmioelementille

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), \quad (10.93a)$$

$$N_{4+i} = \frac{1}{2}(1 - \eta_{4+i}^2 \xi^2 - \xi_{4+i}^2 \eta^2)(1 + \xi_{4+i} \xi + \eta_{4+i} \eta), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (10.93b)$$

Huomaa, että tällä tavoin määritellyille hierarkisille muodoille N_{3+i} , N_{4+i} indeksiin i voidaan ajatella viittaavan myös elementin sivun numeroon. Tällöin sivu i on solmusta i solmuun $i+$ oleva elementin reunan osa. Kuvaan 10.11 on piirretty elementtien solmukonfiguraatiot ja solmujen sekä sivujen numerointi.

Otetaan käyttöön merkinnät $\vec{n}_i$ ja $\vec{s}_i$, jotka tarkoittavat elementin sivun i normaalin ja tangentin suuntaisia yksikkövektoreita, jotka voidaan määritellä lausek-



Kuva 10.11 DK-elementtien solmukonfiguraatiot ja merkinnät.

keilla

$$\vec{n}_i = \cos \phi_i \vec{i} + \sin \phi_i \vec{j}, \quad \vec{s}_i = -\sin \phi_i \vec{i} + \cos \phi_i \vec{j}, \quad (10.94)$$

jossa ϕ_i on x -akselin ja sivun normaalin $\vec{n}_i$ välinen kulma. Kulman sini ja kosini määräytyvät solmujen aseman perusteella seuraavasti

$$\sin \phi_i = \frac{x_i - x_{i+}}{\ell_i}, \quad (10.95a)$$

$$\cos \phi_i = \frac{y_{i+} - y_i}{\ell_i}, \quad (10.95b)$$

$$(10.95c)$$

jossa $\ell_i = \sqrt{(x_{i+} - x_i)^2 + (y_{i+} - y_i)^2}$ on sivun i pituus. Sivun normaalin ja tangentin suuntaisille yksikkövektoreille käytetään myös merkintää

$$\mathbf{n}_i = \begin{Bmatrix} \cos \phi_i \\ \sin \phi_i \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{s}_i = \begin{Bmatrix} -\sin \phi_i \\ \cos \phi_i \end{Bmatrix}, \quad (10.96)$$

samaten kuin β -kiertymistä koostuvalle pystyvektorille

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\theta_y \\ \theta_x \end{Bmatrix}. \quad (10.97)$$

Huomaa, että $\boldsymbol{\beta}$ ei ole fysikaalinen vektori, joten sitä ei merkitä ylänuolella. Mikäli käyttäisimme todellisia kiertymiä θ voitaisiin kirjoittaa

$$\vec{\theta} = \theta_x \vec{i} + \theta_y \vec{j}. \quad (10.98)$$

Elementissä on nyt $5n$ vapausastetta, jotka pitää redusoida määrään $3n$, jolloin elementin jokaisessa kärkisolmussa on kolme vapausastetta $(w_i, \beta_{xi}, \beta_{yi})$. Tarvitaan siten $2n$ rajoiteyhtälöä, eli kaksi rajoitetta sivua kohden, jotka ovat:

- sivun i suuntainen leikkausmuodonmuutos γ_{si} häviää keskimääräisesti, eli

$$\int_{S_i^{(e)}} \gamma_{si} ds = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (10.99)$$

- kiertymä $\beta_{ni} = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{n}_i$ muuttuu lineaarisesti elementin sivua pitkin s :n funktiona, joten

$$\boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{n}_i = \cos \phi_i \Delta \beta_{xi} + \sin \phi_i \Delta \beta_{yi} = 0. \quad (10.100)$$

Huomaa, että $-\beta_{ni}$ kuvaa todellista kiertymää tangentialvektorin $\vec{s}_i$ suunnassa, eli $\beta_{ni} = -\theta_{si} = -\vec{\theta} \cdot \vec{s}_i$.

Otetaan käyttöön lyhennysmerkinnät $C_i = \cos \phi_i$ ja $S_i = \sin \phi_i$. Leikkausmuodonmuutoksen γ_{si} lauseke on

$$\gamma_{si} = w_{,si} - \beta_{si} = w_{,si} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{s}_i. \quad (10.101)$$

Sivun normaalin suuntainen kiertymä β_{si} on toisen asteen polynomi pitkin reunaviivaa i , eli

$$\begin{aligned} \beta_{si} &= \frac{1}{2}(1 - \zeta)\beta_{si} + \frac{1}{2}(1 + \zeta)\beta_{si+} + (1 - \zeta^2)\Delta\beta_{si} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \zeta)\boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{s}_i + \frac{1}{2}(1 + \zeta)\boldsymbol{\beta}_{i+}^T \mathbf{s}_i + (1 - \zeta^2)\boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{s}_i \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T (\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_{i+} + 2\boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\beta}_i) + \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T (\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\beta}_{i+})\zeta - \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\beta}_i \zeta^2, \end{aligned} \quad (10.102)$$

jossa ζ on sivua pitkin määritelty luonnollinen koordinaatti $\zeta = 2s/\ell_i$. Taipuman derivaatta sivun suunnassa on vakio

$$w_{,si} = \frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i}. \quad (10.103)$$

Leikkausmuodonmuutoksen γ_{si} lauseke on siten

$$\gamma_{si} = g_{0i} + g_{1i}\zeta + g_{2i}\zeta^2, \quad (10.104)$$

missä

$$g_{0i} = \frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i} - \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T (\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_{i+} + 2\boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\beta}_i), \quad (10.105a)$$

$$g_{1i} = -\frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T (\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\beta}_{i+}), \quad (10.105b)$$

$$g_{2i} = \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\beta}_i. \quad (10.105c)$$

Rajoitteesta (10.99) seuraa

$$\int_{S_i^{(e)}} \gamma_{si} ds = \frac{1}{2} \ell_i \int_{-1}^1 (g_{0i} + g_{1i} \zeta + g_{2i} \zeta^2) d\zeta = 0 \quad (10.106a)$$

$$\Rightarrow g_{0i} + \frac{1}{3} g_{2i} = 0, \quad (10.106b)$$

$$\Rightarrow \frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i} - \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T (\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_{i+} + 2 \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\beta}_i) + \frac{1}{3} \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\beta}_i = 0, \quad (10.106c)$$

$$\Rightarrow \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\beta}_i = \frac{3}{2} \frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i} - \frac{3}{4} \mathbf{s}_i^T (\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_{i+}). \quad (10.106d)$$

Rajoiteyhtälöt (10.99) ja (10.100) muodostavat täten yhtälöparin

$$\mathbf{n}_i^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\beta}_i = 0, \quad (10.107a)$$

$$\mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\beta}_i = \frac{3}{2} \frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i} - \frac{3}{4} \mathbf{s}_i^T (\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_{i+}) \quad (10.107b)$$

kutakin sivua kohden hierarkisten kiertymävapausasteiden eliminoimiseksi. Ratkaisemalla esimerkiksi $\Delta \beta_{xi}$ yhtälöstä (10.107a) ja sijoittamalla se yhtälöön (10.107b) saadaan ratkaisuksi

$$\Delta \beta_{xi} = -\frac{3}{2} \frac{S_i}{\ell_i} (w_{i+} - w_i) + \frac{3}{4} S_i [C_i (\beta_{yi} + \beta_{yi+}) - S_i (\beta_{xi} + \beta_{xi+})], \quad (10.108a)$$

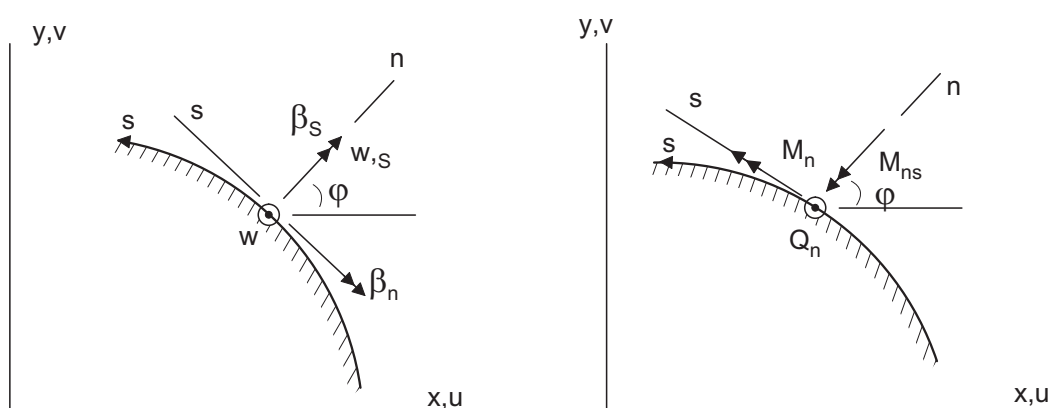
$$\Delta \beta_{yi} = \frac{3}{2} \frac{C_i}{\ell_i} (w_{i+} - w_i) - \frac{3}{4} S_i [C_i (\beta_{yi} + \beta_{yi+}) - S_i (\beta_{xi} + \beta_{xi+})], \quad (10.108b)$$

joka voidaan kirjoittaa lyhyesti vektorimuodossa

$$\boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\beta}_i = \left[\frac{3}{2} \frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i} - \frac{3}{4} \mathbf{s}_i^T (\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_{i+}) \right] \mathbf{s}_i. \quad (10.109)$$

Kiertymien interpolaatiofunktioiksi saadaan siten seuraavat lausekkeet:

$$\begin{aligned} \beta_x &= \sum_{i=1}^n \left\{ N_i \beta_{xi} + N_{n+i} \left\{ -\frac{3}{2} \frac{S_i}{\ell_i} (w_{i+} - w_i) + \frac{3}{4} S_i [C_i (\beta_{yi} + \beta_{yi+}) - S_i (\beta_{xi} + \beta_{xi+})] \right\} \right\} \\ &= \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{S_i}{\ell_i} N_{n+i} - \frac{S_{i-}}{\ell_{i-}} N_{n+i-} \right) w_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left[N_i - \frac{3}{4} (S_i^2 N_{n+i} + S_{i-}^2 N_{n+i-}) \right] \beta_{xi} \\ &\quad + \frac{3}{4} \sum_{i=1}^n (S_i C_i N_{n+i} + S_{i-} C_{i-} N_{n+i-}) \beta_{yi} \end{aligned} \quad (10.110)$$



Kuva 10.12 Laatan reuna: (a) siirtymäsuureet, (b) voimasuureet.

$$\begin{aligned}
 \beta_y &= \sum_{i=1}^n \left\{ N_i \beta_{yi} + N_{n+i} \left\{ \frac{3}{2} \frac{C_i}{\ell_i} (w_{i+} - w_i) + \frac{3}{4} S_i [C_i (\beta_{yi} + \beta_{yi+}) - S_i (\beta_{xi} + \beta_{xi+})] \right\} \right\} \\
 &= \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{C_i}{\ell_i} N_{n+i} - \frac{C_{i-}}{\ell_{i-}} N_{n+i-} \right) w_i \\
 &\quad + \frac{3}{4} \sum_{i=1}^n (S_i C_i N_{n+i} + S_{i-} C_{i-} N_{n+i-}) \beta_{xi} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \left[N_i - \frac{3}{4} (C_i^2 N_{n+i} + C_{i-}^2 N_{n+i-}) \right] \beta_{yi}, \tag{10.111}
 \end{aligned}$$

jossa on käytetty merkintää $i-$ tarkoittamaan solmua i edeltävää solmua positiiviseen suuntaan kierretessä. Korostettakoon vielä, että kiertymille johdetut lausekkeet pätevät sekä kolmisolmuiselle kolmioelementille että nelisolmuiselle nelikulmioelementille kunhan interpolaatiofunktioina N_i ja N_{n+i} käytetään joko lausekkeita (10.92) tai (10.93).

10.6 Laatan reunaehdot

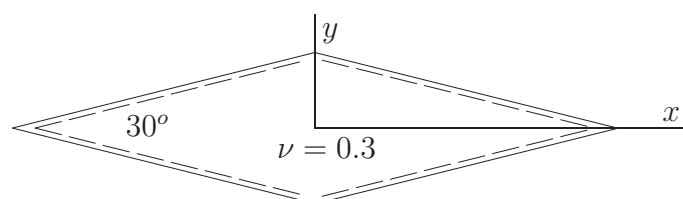
Laatan reuna voi olla jäykästi kiinnitetty, vapaa tai vapaasti tuettu. Tavallisesti tuen-
tatapa on erilainen laatan reunan eri osissa. On myös syytä huomata, että reunaehdot klassisen Kirchhoffin laattamallin ja keskimääräiset leikkausmuodonmuutokset huomioonottavan Reissnerin-Mindlinin laattamallin välillä ovat erilaiset. Kirchhoffin laattamallissa laatan jokaisella reunaan osalla voidaan antaa täsmälleen kaksi reunaehto-
ta, kun taas Reissnerin-Mindlinin mallissa niitä on kolme.

Laattamallien reunaehdot on koottu taulukkoon 10.2.

Taulukosta 10.2 havaitaan, että Reissnerin-Mindlinin mallilla on kaksi mahdollisuutta vapaasti tuetun reunaan osan reunaehdoille. Ensimmäistä tapausta (1) kutsutaan pehmeäksi- ja jälkimmäistä (2) kovaksi reunaehdoksi.

Taulukko 10.2 Laatan reunaehdot. Korvikeleikkausvoima $V_n = Q_n + M_{ns,s}$.

	jäykkä kiinnitys	vapaa reuna	vapaasti tuettu (1)	vapaasti tuettu (2)
Kirchhoffin laattamalli	$w = 0$ $\beta_n = 0$	$M_n = 0$ $V_n = 0$		$w = 0$ $M_n = 0$
Reissnerin- Mindlinin laattamalli	$w = 0$ $\beta_n = 0$ $\beta_s = 0$	$M_n = 0$ $M_{ns} = 0$ $Q_n = 0$	$w = 0$ $M_n = 0$ $M_{ns} = 0$	$w = 0$ $M_n = 0$ $\beta_s = 0$

**Kuva 10.13** Vino laatta.

Jäykkä kiinnitys estää kaiken liikkeen reunalla. Vapaalla reunalla solmuvapausasteet ovat määräämättömiä ja pysyvät osana tuntemattomia solmupistevapausasteita. Reunaehdot vapaasti tuetulla laatanosalla ovat osoittautuneet mutkikkaammiksi ja niitä selostetaan seuraavassa.

Klassisessa Kirchhoffin laattateoriassa ehto $w = 0$ pitkin reunaa implikoi välttämättä ehdon $\beta_s = 0$, sillä $\gamma_{zs} \equiv 0$. Täten ohuelle vapaasti tuetulle laatalle voitaisiin olettaa saatavan hyviä tuloksia käytettäessä klassisen laattamallin reunaehtoja (2) riippumatta siitä onko elementin tyyppi Kirchhoff, diskreetti Kirchhoff tai Reissner-Mindlin. Näin onkin asianlaita, mikäli laatan reunat ovat suoria ja eri reunanosat kohtaavat toisensa suorassa kulmassa, kuten esimerkiksi suorakaidelaatassa.

Erityisesti, mikäli käyräviivaisia vapaasti tuettuja reunoja approksimoidaan suorasisuisilla elementeillä, johtaa klassisen teorian vapaasti tuettu reunaehtototopaus 2 vaikeuksiin. Tällöin reunaehdon $\beta_s = w_{,s} = 0$ asettaminen elementtien reunasolmuissa johtaa välttämättä myös ehtoon $w_{,n} = 0$. Täten elementtiverkkoa tihennettäessä saadaan aikaan jäykästi tuettu reunaehtototopaus. Toisin sanoen, ratkaisuna saadaan oikea tulos mutta väärälle ongelmalle.

Toisena esimerkkinä mainittakoon kuvan 10.13 vinon laatan tapaus. Mallinnettaessa laatta tasaisella 14×14 elementtiverkolla saadaan keskipisteen taipumaksi noin 20 % liian pieni arvo, kun reunaehtona käytetään klassista vapaan reunan ehtoa (2). Mikäli reunaehdot muutetaan vastaamaan vapaasti tuetun reunan ehtoja (1), saadaan keskipisteen taipuma noin 3 % tarkkuudella.

Esimerkeistä voidaan siis päätellä, että klassisen laattamallin vapaasti tuetun

Taulukko 10.3 Laatan reunaehdot elementtimenetelmässä.

jäykkä kiinnitys	vapaa reuna	vapaasti tuettu (pehmeä)
$w = 0$	$M_n = 0$	$w = 0$
$\beta_n = 0$	$M_{ns} = 0$	$M_n = 0$
$\beta_s = 0$	$Q_n = 0$	$M_{ns} = 0$

reunan reunaehdot jäykistävät liikaa elementtimallia, kun mallin reunan sisäiset kulmat ylittävät arvon $\pi/2$. Onkin suositeltavaa, että elementtimenetelmän yhteydessä käytettäisiin taulukossa 10.3 esitettyjä reunaehtoja laattaelementin tyypistä riippumatta.

10.7 Esimerkkejä

Esimerkki 10.1 *Reissnerin-Mindlinin laattamallin virtuaalisen työn yhtälö on (jäykästi tuettu laatta)*

$$\int_A (M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + M_{xy} \delta \kappa_{xy} + Q_x \delta \gamma_{zx} + Q_y \delta \gamma_{zy}) dA = \int_A f \delta w dA, \quad (10.112)$$

missä

$$\begin{aligned} \kappa_x &= -\beta_{x,x}, & M_x &= D(\kappa_x + \nu \kappa_y), \\ \kappa_y &= -\beta_{y,y}, & M_y &= D(\kappa_y + \nu \kappa_x), \\ \kappa_{xy} &= -\beta_{x,y} - \beta_{y,x}, & M_{xy} &= \frac{1}{2}(1 - \nu)D\kappa_{xy}, \\ \gamma_{zx} &= w_{,x} - \beta_x, & Q_x &= Gt\gamma_{zx}, \\ \gamma_{zy} &= w_{,y} - \beta_y, & Q_y &= Gt\gamma_{zy}, \end{aligned} \quad (10.113)$$

ja missä D on laatan taivutusjäykkyys ja t laatan paksuus. Johda mallin Eulerin yhtälöt.

Kirjoitetaan momenttien lausekkeet siirtymäsuureiden ja materiaalivakioiden avulla auki

$$\begin{aligned} & \int_A \left\{ D \left[(\beta_{x,x} + \nu \beta_{y,y}) \delta \beta_{x,x} + (\beta_{y,y} + \nu \beta_{x,x}) \delta \beta_{y,y} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2}(1 - \nu) (\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) (\delta \beta_{x,y} + \delta \beta_{y,x}) \right] \right. \\ & \quad \left. + Gt \left[(w_{,x} - \beta_x) (\delta w_{,x} - \delta \beta_x) + (w_{,y} - \beta_y) (\delta w_{,y} - \delta \beta_y) \right] \right\} dA = \int_A f \delta w dA \end{aligned}$$

Koska virtuaaliset muutokset δw , $\delta \beta_x$ ja $\delta \beta_y$ ovat mielivaltaisia, saadaan kolme

yhtälöä

$$\int_A Gt [(w_{,x} - \beta_x) \delta w_{,x} + (w_{,y} - \beta_y) \delta w_{,y}] dA = \int_A f \delta w dA, \quad (10.115a)$$

$$\begin{aligned} & \int_A \left\{ D[(\beta_{x,x} + \nu \beta_{y,y}) \delta \beta_{x,x} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}(1 - \nu)(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \delta \beta_{x,y}] \right. \\ & \quad \left. - Gt (w_{,x} - \beta_x) \delta \beta_x \right\} dA = 0, \end{aligned} \quad (10.115b)$$

$$\begin{aligned} & \int_A \left\{ D[(\beta_{y,y} + \nu \beta_{x,x}) \delta \beta_{y,y} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}(1 - \nu)(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \delta \beta_{y,x}] \right. \\ & \quad \left. - Gt (w_{,y} - \beta_y) \delta \beta_y \right\} dA = 0. \end{aligned} \quad (10.115c)$$

Sovelletaan vasemman puolen integraaleihin osittaisintegrointia ja Gaussin lausetta

$$\begin{aligned} & \int_A Gt [(w_{,x} - \beta_x) \delta w_{,x} + (w_{,y} - \beta_y) \delta w_{,y}] dA \\ = & \int_A Gt \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(w_{,x} - \beta_x) \delta w] + \frac{\partial}{\partial y} [(w_{,y} - \beta_y) \delta w] \right\} dA \\ & - \int_A Gt [(w_{,xx} - \beta_{x,x}) \delta w + (w_{,yy} - \beta_{y,y}) \delta w] dA \\ = & \oint_S Gt [(w_{,x} - \beta_x) n_x + (w_{,y} - \beta_y) n_y] \delta w ds \\ & - \int_A Gt (w_{,xx} + w_{,yy} - \beta_{x,x} - \beta_{y,y}) \delta w dA. \end{aligned} \quad (10.116)$$

Koska taipuma on annettu koko reunalla on taipuman variaation oltava nolla reunakäyrällä, jolloin yhtälöstä (10.115a) saadaan

$$\int_A [Gt (\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} - \Delta w) - f] \delta w dA = 0, \quad (10.117)$$

missä on merkitty

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix}, \quad (10.118)$$

ja $\nabla \cdot$ on divergenssi- ja Δ Laplacen operaattori. Koska virtuaalinen siirtymäkenttä on mielivaltainen, on oltava

$$Gt (\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} - \Delta w) = f. \quad (10.119)$$

Vastaavalla tavalla käsitellään myös toinen ja kolmas yhtälö. Näytetään mal-

liksi vain variaatiosta $\delta\beta_x$ seuraavan yhtälön johto:

$$\begin{aligned}
 & \int_A \{ D [(\beta_{x,x} + \nu\beta_{y,y})\delta\beta_{x,x} + \frac{1}{2}(1-\nu)(\beta_{x,y} + \beta_{y,x})\delta\beta_{x,y}] \\
 & - Gt(w_{,x} - \beta_x)\delta\beta_x \} dA \\
 = & \int_A D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(\beta_{x,x} + \nu\beta_{y,y})\delta\beta_x] + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial}{\partial y} [(\beta_{x,y} + \nu\beta_{y,x})\delta\beta_x] \right\} dA \\
 & - \int_A D [\beta_{x,xx} + \nu\beta_{y,xy} + \frac{1}{2}(1-\nu)(\beta_{x,yy} + \beta_{y,xy})] \delta\beta_x dA \\
 & - \int_A Gt(w_{,x} - \beta_x)\delta\beta_x dA = 0 \\
 \Rightarrow & - \int_A \{ D [\Delta\beta_x + \frac{1}{2}(1+\nu)(\beta_{y,xy} - \beta_{x,yy})] - Gt(w_{,x} - \beta_x) \} \delta\beta_x dA = 0.
 \end{aligned}$$

Kysytyn Reissnerin-Mindlinin laattaprobleeman Eulerin yhtälöt ovat siten

$$Gt(\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} - \Delta w) = f, \quad (10.121a)$$

$$D [\Delta\beta_x + \frac{1}{2}(1+\nu)(\beta_{y,xy} - \beta_{x,yy})] + Gt(w_{,x} - \beta_x) = 0, \quad (10.121b)$$

$$D [\Delta\beta_y + \frac{1}{2}(1+\nu)(\beta_{x,xy} - \beta_{y,xx})] + Gt(w_{,y} - \beta_y) = 0, \quad (10.121c)$$

reunaehdoilla $w = \beta_x = \beta_y = 0$.

Huomaa, että pyörittelyissä on otaksuttu laatan taivutusjäykkyyden vakioisuus.

Esimerkki 10.2 Edellisen esimerkkitehtävän Eulerin yhtälöt muodostavat kolmen yhtälön systeemin kolmen tuntemattoman funktion w, β_x ja β_y ratkaisemiseksi. Eliminoi yhtälöistä rotaatioiden β_x ja β_y osuus, jolloin saadaan separoitua yhtälö jossa esiintyy ainoastaan taipuma w .

Derivoidaan puolittain yhtälö (10.121b) x :n suhteen, ja vastaavasti yhtälö (10.121c) y :n suhteen, josta seuraa

$$D \left[\frac{\partial}{\partial x} \Delta\beta_x + \frac{1}{2}(1+\nu)(\beta_{y,yyx} - \beta_{x,xyy}) \right] + Gt(w_{,xx} - \beta_{x,x}) = 0, \quad (10.122a)$$

$$D \left[\frac{\partial}{\partial y} \Delta\beta_y + \frac{1}{2}(1+\nu)(\beta_{x,xyy} - \beta_{y,yxx}) \right] + Gt(w_{,yy} - \beta_{y,y}) = 0. \quad (10.122b)$$

Lasketaan yllä olevat yhtälöt puolittain yhteen

$$D(\Delta\beta_{x,x} + \Delta\beta_{y,y}) + Gt(\Delta w - \nabla \cdot \boldsymbol{\beta}) = 0, \quad (10.123)$$

eli

$$D\Delta\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} + Gt(\Delta w - \nabla \cdot \boldsymbol{\beta}) = 0. \quad (10.124)$$

Operoidaan yhtälö (10.121) puolittain Laplace operaattorilla

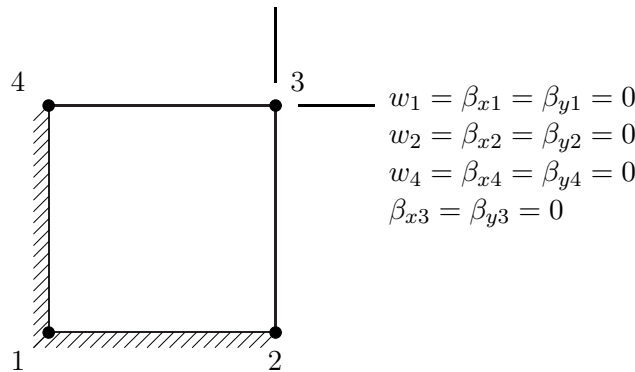
$$Gt(\Delta\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} - \Delta\Delta w) = \Delta f, \quad (10.125)$$

josta ratkaisemalla $\Delta \nabla \cdot \beta$ ja sijoittamalla yhtälöön (10.124), samoin kuin ratkaisemalla $\nabla \cdot \beta$ yhtälöstä (10.121a) ja sijoittamalla tämä myös yhtälöön (10.124) saadaan

$$D\Delta\Delta w = f - \frac{D}{Gt}\Delta f. \quad (10.126)$$

Huomaa, että yllä oleva yhtälö ei riitä ratkaisemaan Reissnerin-Mindlinin laattaproblemaa.

Esimerkki 10.3 Ratkaise oheinen laattatehtävä käyttäen kuvan elementtiverkkoa ja Reissnerin-Mindlinin laattamalliin perustuvaa bilineaarisesti interpoloitua elementtiä (bilineaarinen interpolaatio sekä taipumalle että rotaatioille). Integroijäykyysmatriisin taivutustermit 2×2 pisteen Gaussin kaavalla ja leikkaustermit yhden pisteen Gaussin kaavalla. Käytä hyväksesi symmetriaa. Laatta on kaikilta sivuilta jäykästi tuettu ja kuormituspaine on vakio koko laatan alueella.



Elementtimenetelmä pohjana oleva virtuaalisen työn yhtälö on

$$\int_A (M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + M_{xy} \delta \kappa_{xy} + Q_x \delta \gamma_{zx} + Q_y \delta \gamma_{zy}) dA = \int_A f \delta w dA. \quad (10.127)$$

Nyt on tukemistavasta, symmetriasta ja käytetystä elementtijaosta aiheutuen keskipinnan normaalin kiertymät nollija kaikkialla, eli

$$\beta_x \equiv \beta_y \equiv 0. \quad (10.128)$$

Täten virtuaalisen työn lauseke supistuu muotoon

$$Gt \int_A (w_{,x} \delta w_{,x} + w_{,y} \delta w_{,y}) dA = \int_A f \delta w dA. \quad (10.129)$$

Symmetrian nojalla riittää tarkastella vain yhtä elementtiä. Ottaen reunaehdot huomioon on taipuman interpolaation pelkästään

$$w = N_3 w_3, \quad (10.130)$$

missä

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta). \quad (10.131)$$

Derivaattojen muunoskaavat ovat

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad \text{ja} \quad dA = \frac{1}{4}L^2 d\xi d\eta, \quad (10.132)$$

jolloin ratkaistavaksi yhtälöksi saadaan

$$Gt \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N_{3,\xi}^2 + N_{3,\eta}^2) d\xi d\eta w_3 = \frac{1}{4}fL^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_3 d\xi d\eta, \quad (10.133)$$

eli

$$Gt \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{16} [(1 + \eta)^2 + (1 + \xi)^2] d\xi d\eta w_3 = \frac{1}{16}fL^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 + \xi)(1 + \eta) d\xi d\eta. \quad (10.134)$$

Suorittamalla ‘ali-integrointi’ eli käyttämällä Gaussin yhden pisteen kaavaa (paino $w = 2 \cdot 2 = 4$, $\xi = \eta = 0$), saadaan

$$\frac{1}{4}Gtw_3 = \frac{1}{4}fL^2 \quad (10.135)$$

Josta ratkaisu on

$$w_3 = \frac{fL^2}{Gt}. \quad (10.136)$$

Havaitaan, että kyseinen elementtiverkko on aivan liian harva kuvaamaan kyseisellä elementillä ja laattamallilla taivutustilaa. Momentit ovat tietenkin nollia koko alueessa koska rotaatiot häviävät, leikkausvoimat saadaan nyt lausekkeista

$$Q_x = Gtw_{,x} = Gt \frac{2}{L} N_{3,\xi} = \frac{Gt}{2L} (1 + \eta) w_3 = \frac{1}{2}fL(1 + \eta), \quad (10.137)$$

ja vastaavasti

$$Q_y = Gtw_{,y} = Gt \frac{2}{L} N_{3,\eta} = \frac{Gt}{2L} (1 + \xi) w_3 = \frac{1}{2}fL(1 + \xi). \quad (10.138)$$

Elementtien keskipisteissä saadaan siten arvot

$$Q_x = Q_y = \frac{1}{2}fL. \quad (10.139)$$

10.8 Stabiileja Reissnerin-Mindlinin-laattamallin elementtejä

10.8.1 Johdanto

Luvussa 10.3 esitetyt elementit ovat enemmän tai vähemmän epäluotettavia. Valikoivasti ali-integroitu Lagrangen tyyppinen elementti on epäluotettava siinä esiinty-

vän nollaenergiamuodon takia, Serendip- ja Heterosis- tyyppiset elementit läpäisevät tämän minimiväitimuksen, mutta eivät ole stabiileja. Tämä stabiiliuden puute näkyy erityisen selvästi leikkausvoiman heilahteluina epäsäännöllisten elementtiverkkojen yhteydessä. Näille elementeille ei voida osoittaa leikkausvoiman virheen suppenemista.

Tarkastellaan seuraavassa 1980-luvun puolivälin jälkeen laattaelementtien formulaatiossa tapahtunutta kehitystä. Tällä hetkellä on käytettävissä joukko Reissnerin-Mindlinin malliin perustuvia elementtejä, jotka eivät lukkiudu ohuen laatan rajatapauksessa, ja joille voidaan osoittaa optimaalinen konvergenssi kaikille siirtymä- ja jännitysresultanttisuureille.

10.8.2 Arnoldin ja Falkin epäkonformi elementti

D.N. Arnold ja R.S. Falk [34] ovat esittäneet yksinkertaisen epäkonformin kolmiolaattaelementin, jolle he myös osoittivat optimaaliset konvergenssiominaisuudet. Tässä elementissä taipumaa kuvataan epäkonformilla lineaarisella interpolaatiolla joka on jatkuva elementin sivujen keskipisteissä, eli

$$w = (L_1 + L_2 - L_3)w_4 + (L_2 + L_3 - L_1)w_5 + (L_3 + L_1 - L_2)w_6, \quad (10.140)$$

missä L_i :t ovat alakoordinaatit. Kiertymiä β_x, β_y interpoloidaan lineaarisilla interpolaatiofunktioilla joita on täydennetty kuubisella kuplamuodolla, joka tässä on otettu hierarkiseksi

$$\beta_i = L_1\beta_{i1} + L_2\beta_{i2} + L_3\beta_{i3} + 27L_1L_2L_3\Delta\beta_{i7}, \quad (10.141)$$

missä $i = x$ tai y . Kiertymien interpolaatio on siten konformi. Elementin solmukonfiguraatio ja vapausasteet on esitetty kuvassa 10.14.

Leikkausmuodonmuutos lasketaan elementin keskimääräisten kiertymien avulla

$$\gamma_{iz} = w_{,i} - \bar{\beta}_i, \quad (10.142)$$

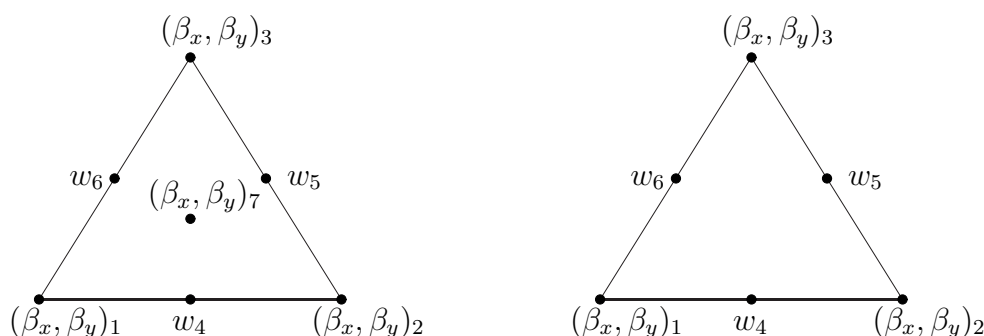
missä

$$\bar{\beta}_i = \frac{1}{A^{(e)}} \int_{A^{(e)}} \beta_i dA. \quad (10.143)$$

L. Franca ja R. Stenberg [40] ovat esittäneet elementistä muunnoksen, jossa kiertymien interpolaatiossa ei tarvita kuubista kuplamuotoa. Sen sijaan leikkausvoima on laskettava stabilointitekijällä

$$\frac{1}{1 + \alpha (h/t)^2} \quad (10.144)$$

kerrottuna, missä α on positiivinen vakio, h elementin karakteristinen mitta ja t



Kuva 10.14 Stabiili RM-mallin epäkonformi laattaelementti ja sen modifikaatio.

laatan paksuus, siis

$$Q_i = \frac{kGt}{1 + \alpha(h/t)^2}(w_{,i} - \bar{\beta}_i). \quad (10.145)$$

Täten jäykkyysmatriisi voidaan integroida yhden pisteen kvadratuurilla, ja näin saavutetaan huomattava säästö jäykkyysmatriisin kokoamistyössä. Tässä näkyy myös kiertymän kuplamuodon ja stabilointiteknikan tietynlainen ekvivalenttisuus, katso kappaletta 9.2.5.

Elementillä tehtyjä numeerisia laskelmia on esitetty lähteissä [39] (alkuperäinen formulaatio) ja [53] (modifioitu versio).

10.8.3 Stabiloidut MITC-elementit

Konformien taipuman ja kiertymien suhteen tasa-asteisesti interpoloitujen Reissnerin-Mindlinin laattaelementtien kehittäminen on osoittautunut hankalaksi. K.-J. Bathe on 1980-luvun puolivälissä esittänyt idean leikkausmuodonmuutosten laskemiseksi [36], [37]. Tämä kokonainen elementtiperhe tunnetaan lyhenteellä MITC, joka tulee sanoista: Mixed Interpolated Tensorial Components.⁵ Alkuperäinen elementti toimii hyvin suorakaidegeometrioissa, mutta sen epästabiilius tulee esiin epäsäännöllisessä verkossa. Epästabiilius voidaan kuitenkin poistaa stabilointiteknikalla, jolloin saadaan optimaalisesti suppenevat elementit.

Tarkastellaan seuraavassa vain elementtiperheen kahta alhaisasteisinta elementtiä, eli lineaarista kolmio- ja bilineaarista nelikulmioelementtiä. Mikäli seurattaisiin elementtien alkuperäistä formulointia, tarvittaisiin tensorianalyysin tietoja; tämä ei ole kuitenkaan välttämätöntä, vaan seuraavassa esitetään tälle ekvivalentti tapa konstruoida alhaisasteisten elementtien modifioitua interpolaatiofunktioita.

MITC elementtiformulaation idea on laskea leikkausmuodonmuutos modifioituista kiertymien interpolaatiofunktioista siten, että leikkausmuodonmuutos γ_s elementin reunaviivalla on samanasteinen polynomi kuin taipuman gradientti tässä suunnassa. Lineaarille ja bilineaariselle elementille tämä merkitsee leikkausmuo-

⁵Nimen muodostumiseen lienee vaikuttanut professori Bathen toimipaikka: Massachusetts Institute of Technology.

donmuutoksen vakioisuutta. Tämä vakiokomponentti asetetaan yhtäsuureksi elementin reunan keskipisteessä alkuperäisistä interpolaatioista lasketun leikkausmuodonmuutoksen arvon kanssa.

MITC elementti konstruoidaan seuraavasti. Taipumalle ja kiertymille käytetään tavanomaista interpolaatiota

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i, \quad \beta_x = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{xi}, \quad \beta_y = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{yi}. \quad (10.146)$$

Lisäksi leikkausmuodonmuutoksen määrittämiseen tarvittaville kiertymille otaksutaan oma interpolaatio ja merkitään sitä yläindeksillä S (Huomaa: tätä interpolaatiota käytetään *vain leikkausmuodonmuutosta laskettaessa*) :

$$\beta_x^S = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{xi}^S, \quad \beta_y^S = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{yi}^S. \quad (10.147)$$

Yhtälöissä (10.146) ja (10.147) N_i :t ovat lineaariset alakoordinaateissa lausutut tai bilineaariset interpolaatiofunktiot ja n on elementin solmujen lukumäärä (3 tai 4). Uusi kiertymäsuureiden interpolaatio (10.147) lisää elementin vapausasteita kuudella (kolmio) tai kahdeksalla (nelikulmio) eli kahdella vapausasteella sivua kohden. Nämä voidaan eliminoida kahdesta ehdosta:

- leikkausmuodonmuutos on vakio elementin reunalla i , eli

$$\gamma_{si} = w_{,s} - \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\beta}^S = \text{vakio}, \quad (10.148)$$

- ja yhtäsuuri alkuperäisistä interpolaatioista lasketun leikkausmuodonmuutoksen kanssa elementin reunan keskipisteessä, eli

$$w_{,s} - \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\beta}^S = w_{,s} - \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\beta}(\zeta = 0). \quad (10.149)$$

Tämä ehto voidaan lausua myös integraalin avulla, eli

$$\begin{aligned} \int_{\text{sivu } i} (w_{,s} - \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\beta}^S) ds &= \int_{\text{sivu } i} (w_{,s} - \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\beta}) ds \\ \Rightarrow \int_{\text{sivu } i} \mathbf{s}_i^T (\boldsymbol{\beta}^S - \boldsymbol{\beta}) ds &= 0. \end{aligned} \quad (10.150)$$

Sivun i tangentin suuntaista yksikkövektoria merkitään $\mathbf{s}_i$:llä, $\mathbf{s}_i^T = [-S_i \ C_i]$, katso lukua 10.5.

Ehto (10.150) voidaan kirjoittaa yleisemmässä muodossa

$$\int_{\text{sivu } i} \mathbf{s}_i^T (\boldsymbol{\beta}^S - \boldsymbol{\beta}) w ds, \quad (10.151)$$

missä w on elementin reunalla määritelty painofunktio, joka on astetta alhaisempi kuin taipuman ja rotaatioiden interpolaatiopolynomit. Tätä ehtoa käytetään konstruoitaessa korkeampiasteisia MITC elementtejä. Koska tarkasteltavana on ollut vain lineaarinen/bilineaarinen elementti, painofunktio on vakio, eli $w = 1$.

Leikkausmuodonmuutoksen lauseke reunalla i on ennen rajoitteen (10.148) huomioonottoa lineaarinen lauseke sivun suuntaisen dimensiottoman koordinaatin ζ suhteen:

$$\begin{aligned} \gamma_{si} = & w_{,s} - \frac{1}{2} \left\{ C_i(\beta_{yi}^S + \beta_{yi+}^S) - S_i(\beta_{xi}^S + \beta_{xi+}^S) \right. \\ & \left. + [C_i(\beta_{yi}^S - \beta_{yi+}^S) - S_i(\beta_{xi}^S - \beta_{xi+}^S)] \zeta \right\} \end{aligned} \quad (10.152)$$

Leikkausmuodonmuutosta koskevat ehdot (10.148) ja (10.149) elementin sivulla i ovat siten seuraavat:

$$-S_i(\beta_{xi+}^S - \beta_{xi}^S) + C_i(\beta_{yi+}^S - \beta_{yi}^S) = 0, \quad (10.153a)$$

$$-S_i(\beta_{xi+}^S + \beta_{xi}^S) + C_i(\beta_{yi+}^S + \beta_{yi}^S) = -S_i(\beta_{xi+} + \beta_{xi}) + C_i(\beta_{yi+} + \beta_{yi}). \quad (10.153b)$$

Yhtälöt (10.153) muodostavat systeemin $2n$ tuntemattoman β_{xi}^S ja β_{yi}^S ratkaisemiseksi. Vähennetään yhtälö (10.153a) yhtälöstä (10.153b), jolloin saadaan:

$$-S_i\beta_{xi}^S + C_i\beta_{yi}^S = \frac{1}{2} [C_i(\beta_{yi+} + \beta_{yi}) - S_i(\beta_{xi+} + \beta_{xi})]. \quad (10.154)$$

Yhtälön oikealla puolella on sivun i keskipisteen kiertymän β_{si} lauseke, joten voidaan kirjoittaa

$$-S_i\beta_{xi}^S + C_i\beta_{yi}^S = \beta_{si}(0), \quad (10.155)$$

missä

$$\beta_{si}(0) = \frac{1}{2} [C_i(\beta_{yi+} + \beta_{yi}) - S_i(\beta_{xi+} + \beta_{xi})]. \quad (10.156)$$

Vastaavasti laskemalla yhtälöt (10.153a) ja (10.153b) puolittain yhteen saadaan:

$$-S_i\beta_{xi+}^S + C_i\beta_{yi+}^S = \beta_{si}(0). \quad (10.157)$$

Yhtälöt (10.155) ja (10.157) ovat voimassa kaikilla sivuilla i , joten ne voidaan kir-

joittaa myös muodossa (sivujen i ja $i-$ osalta)

$$\begin{aligned} -S_i\beta_{xi}^S + C_i\beta_{yi}^S &= \beta_{si}(0), \\ -S_{i-}\beta_{xi}^S + C_{i-}\beta_{yi}^S &= \beta_{si-}(0). \end{aligned}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{aligned} \beta_{xi}^S &= \frac{1}{D_i} [C_{i-}\beta_{si}(0) - C_i\beta_{si-}(0)] \\ &= \frac{1}{2D_i} [C_{i-}C_i(\beta_{yi+} - \beta_{yi-}) + C_iS_{i-}\beta_{xi-} + D_i\beta_{xi} - C_{i-}S_i\beta_{xi+}] \quad (10.158a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{yi}^S &= \frac{1}{D_i} [S_{i-}\beta_{si}(0) - S_i\beta_{si-}(0)] \\ &= \frac{1}{2D_i} [S_{i-}S_i(\beta_{xi-} - \beta_{xi+}) + S_{i-}C_i\beta_{yi+} + D_i\beta_{yi} - S_iC_{i-}\beta_{yi-}] \quad (10.158b) \end{aligned}$$

missä

$$D_i = C_iS_{i-} - S_iC_{i-}. \quad (10.159)$$

Leikkausmuodonmuutoksen laskemiseen tarvittavien kiertymien interpolaatiot ovat viimein

$$\begin{aligned} \beta_x^S &= \sum_{i=1}^n N_i\beta_{xi}^S \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\left(N_i + \frac{C_{i+}S_i}{D_{i+}}N_{i+} - \frac{C_{i-}S_{i-}}{D_{i-}}N_{i-} \right) \beta_{xi} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{C_{i-}C_{i-}}{D_{i-}}N_{i-} - \frac{C_iC_{i+}}{D_{i+}}N_{i+} \right) \beta_{yi} \right], \quad (10.160a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_y^S &= \sum_{i=1}^n N_i\beta_{yi}^S \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\left(N_i + \frac{S_{i-}C_{i-}}{D_{i-}}N_{i-} - \frac{C_iS_{i+}}{D_{i+}}N_{i+} \right) \beta_{yi} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{S_{i+}S_i}{D_{i+}}N_{i+} - \frac{S_{i-}S_{i-}}{D_{i-}}N_{i-} \right) \beta_{xi} \right]. \quad (10.160b) \end{aligned}$$

Merkintä $i--$ tarkoittaa sivua $i-$ edeltävää sivua.

Kolmi- tai nelisolmuisen stabiloidun MITC elementin virtuaalisen työn lauseke

on siten

$$\begin{aligned} & \int_A \left[-M_x \delta \beta_{x,x} - M_y \delta \beta_{y,y} - M_{xy} (\delta \beta_{x,y} + \delta \beta_{y,x}) \right. \\ & \quad \left. + Q_x (\delta w_{,x} - \delta \beta_x^S) + Q_y (\delta w_{,y} - \delta \beta_y^S) \right] dA \\ &= \int_A \bar{f} \delta w dA + \int_{S_\sigma} (\bar{Q}_n \delta w - \bar{M}_n \delta \beta_n - \bar{M}_{ns} \delta \beta_s) ds, \end{aligned} \quad (10.161)$$

ja missä leikkausvoimat määritetään lausekkeista

$$Q_x = \frac{kGt}{1 + \alpha(h/t)^2} (w_{,x} - \beta_x^S), \quad Q_y = \frac{kGt}{1 + \alpha(h/t)^2} (w_{,y} - \beta_y^S), \quad (10.162)$$

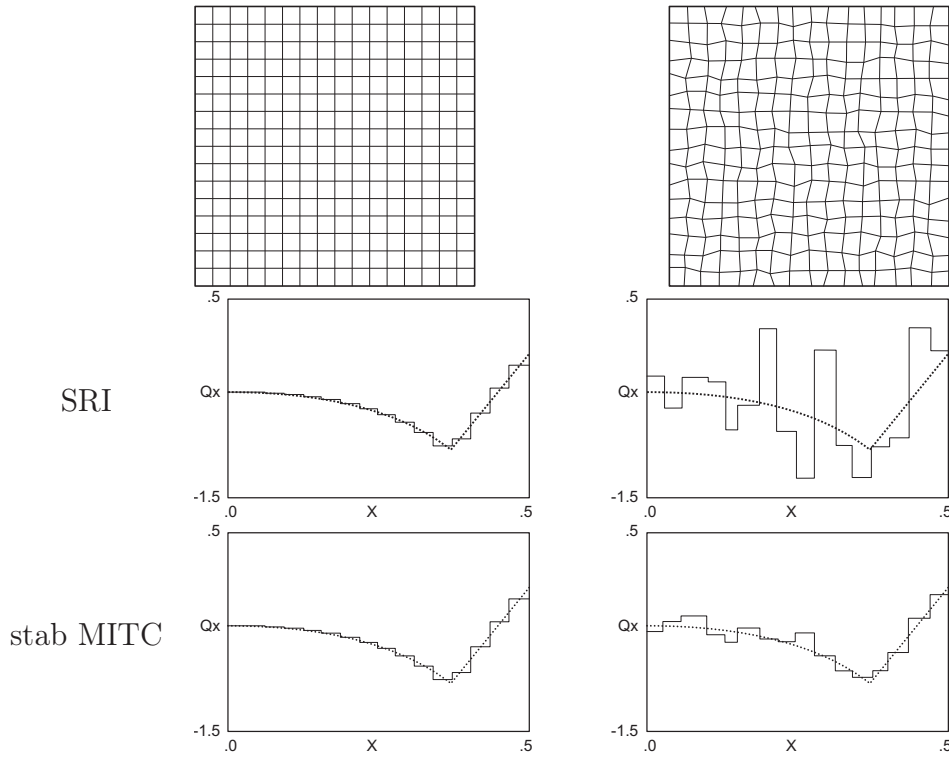
missä α on positiivinen stabilointivakio ja h on elementin karakteristinen mitta, esim. suurimman sivun pituus. Momentit määritetään tavanomaiseen tapaan. Elementin jäykkyysmatriisi voidaan integroida tarkasti, eli nelisolmuisen elementin tapauksessa 2×2 pisteen Gaussin kaavalla ja kolmioelementin tapauksessa kolmen pisteen kaavalla. Kolmioelementti toimii myös ali-integroituna, eli yhden pisteen kvadratuurilla laskettuna.

Elementille on johdettu optimaaliset suppenemisnopeusestimaatit lähteessä [38]. Numeerisia tuloksia elementin käyttäytymisestä löytyy mm. lähteistä [45], [46]. Kuvaan 10.15 on piirretty leikkausvoimajakauma vapaasti tuetun (kova) neliölaatan tapauksessa laskettuna valikoivasti ali-integroidulla nelisolmuisella elementillä (SRI) ja nelisolmuisella stabiloidulla MITC elementillä. Laatta on kuormitettu tasan jakautuneella paineella, joka vaikuttaa laatan keskellä $L/8 \times L/8$ kokoisella neliöalueella. Kuvasta nähdään selvästi SRI elementin epästabiilius, joka tulee esiin käytettäessä epäsäännöllistä elementtiverkkoa. Koska kyseessä on kova vapaa tuentatapa ei Reissnerin-Mindlinin laattamallissa esiinny reunahäiriötä (katso liitettä C), voidaan tarkkana ratkaisuna pitää Kirchhoffin laattamallin ratkaisua. Kuva on julkaistu lähenteessä [46].

10.8.3.1 Stabilointiparametrien fysikaalinen tulkinta

Timoshenkon palkkimallin stabilointivakiolle saatiin fysikaalisesti mielekäs tulkinta luvussa 9.2.5.2. Samaa menettelytapaa voidaan soveltaa myös laattoihin.

Merkitään käyritymien ja kiertymien yhteyttä kuvaavaa kinemaattista operaattorimatriisia symbolilla $\mathbf{L}$. Sen adjungantti on tasapaino-operaattori $\mathbf{L}^*$. Operaat-



Kuva 10.15 Leikkausvoimajakauma (Q_x) vaakasuoralla symmetrialinjalla laskettuna SRI (ylhäällä) ja stabiloidulla MITC elementillä (alhaalla) Säännöllinen (vasemmalla) ja epäsäännöllinen (oikealla) 16×16 elementtiverkko ja laatan suhteellinen paksuus on $t/L = 0.01$. Pisteviiva on tarkka ratkaisu. Kuva lähteestä [46].

toreiden $\mathbf{L}$ ja $\mathbf{L}^*$ esitys karteesisessa koordinaatistossa on

$$\mathbf{L} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (10.163)$$

Leikkausvoimat $\mathbf{q} = [Q_x, Q_y]^T$ voidaan lausua momenttitasapainoyhtälön avulla muodossa

$$\mathbf{q} = \mathbf{L}^* \mathbf{m} = \mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta} \equiv \mathcal{L} \boldsymbol{\beta}. \quad (10.164)$$

Merkitään kiertymävektorin lineaarista osaa ja kuplamuotoa seuraavasti

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 + \Delta \boldsymbol{\beta}. \quad (10.165)$$

Tasapainoyhtälöiden keskimääräinen toteutumisehto on

$$\int_{A^{(e)}} (\mathbf{q} - \mathbf{L}^* \mathbf{m}) dA = \int_{A^{(e)}} [\mathbf{D}_s(\nabla w - \boldsymbol{\beta}^S - \Delta \boldsymbol{\beta}) - \mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L}(\boldsymbol{\beta}_1 + \Delta \boldsymbol{\beta})] dA = \mathbf{0}, \quad (10.166)$$

eli

$$\int_{A^{(e)}} (\mathbf{D}_s + \mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L}) \Delta \boldsymbol{\beta} dA = \int_{A^{(e)}} \mathbf{D}_s(\nabla w - \boldsymbol{\beta}^S) dA. \quad (10.167)$$

Merkitään elementin nurkkasolmuihin liittyvien vapausasteiden pystyvektoria $\mathbf{u}^{(e)}$:lla ja kiertymien kuplamuodon vapausastevektoria $\Delta \mathbf{u}^{(e)}$:lla ja $\Delta \boldsymbol{\beta} = \overset{\circ}{\mathbf{N}} \Delta \mathbf{u}^{(e)}$. Yhtälön (10.167) ratkaisu voidaan kirjoittaa matriisimuodossa seuraavasti

$$\Delta \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (10.168)$$

missä matriisi $\mathbf{C}$ on

$$\mathbf{C} = \int_{A^{(e)}} (\mathbf{D}_s + \mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L}) \overset{\circ}{\mathbf{N}} dA \quad (10.169)$$

Leikkausvoimat määritetään keskiarvoistamalla yhtälöstä

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}_s \Pi_0(\nabla w - \boldsymbol{\beta}^S - \Delta \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{D}_s(\mathbf{B}_s(0) - p \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S}) \mathbf{u}^{(e)}, \quad (10.170)$$

missä Π_0 on projektio vakiofunktioiksi ja jonka arvo on p operoituna kiertymän kuplamuotoon. Leikkausmuodonmuutokseen liittyvän $\mathbf{B}_s$ matriisin keskiarvoa on merkitty symbolilla $\mathbf{B}_s(0)$. Tällöin $\mathbf{S} = A^{(e)} \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s(0)$ ja leikkausvoimalle saadaan

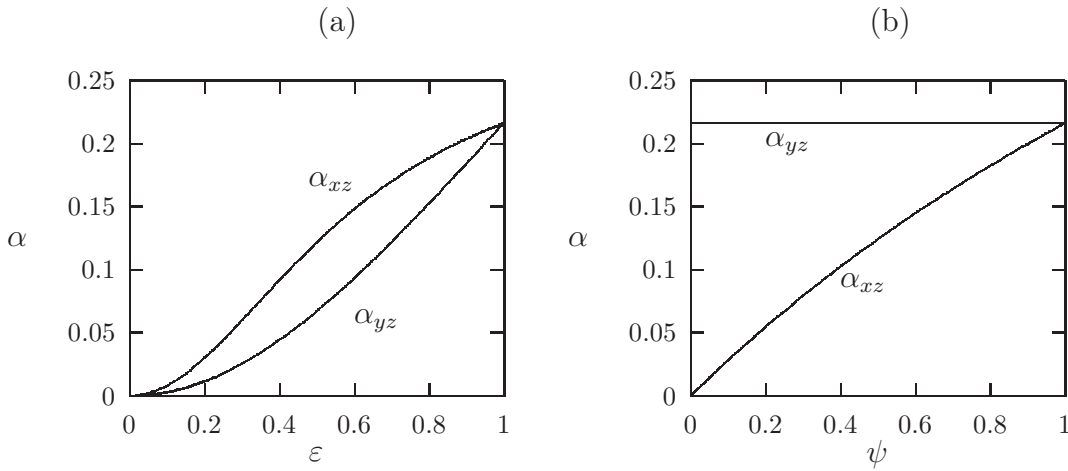
$$\mathbf{q} = (\mathbf{I} - p A^{(e)} \mathbf{D}_s \mathbf{C}^{-1}) \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s(0) \mathbf{u}^{(e)}, \quad (10.171)$$

missä $A^{(e)}$ on elementin pinta-ala ja $\mathbf{I}$ 2×2 yksikkömatriisi. Leikkausjäykkyyden redusoitu muoto on siten

$$\mathbf{D}_s^* = (\mathbf{I} - p A^{(e)} \mathbf{D}_s \mathbf{C}^{-1}) \mathbf{D}_s. \quad (10.172)$$

Esimerkki 10.4 *Johdetaan nelisolmuisen elementin stabilointiparametrien arvot suorakaidegeometriassa. Parametreina ovat laatan sivusuhte ja ortotrooppisen materiaalin kimmovakioiden suhde.*

Nelisolmuisen elementin matriisi $\mathbf{C}$ on diagonaalinen suorakaidegeometriassa. Otaksutaan lineaarisesti kimmoinen ortotrooppinen materiaalilaki ja tilanne, jossa materiaalin symmetriasuunnat yhtyvät koordinaattiakselien suuntiin.



Kuva 10.16 Stabilointiparametrien α_{xz}, α_{yz} riippuvuus (a) elementin sivusuhteesta ε , isotrooppinen materiaali $\nu = 0.3$, (b) ortotrooppisen materiaalin tapauksessa kimmokertoimien suhteesta $\psi = E_2/E_1$, oletettuna $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.3, G_{12} = G_{13} = G_{23} = E_2/2.6$, neliöelementti.

Otetaan käyttöön seuraavat lyhennysmerkinnät:

$$\begin{aligned} \chi_{12} &= (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \frac{G_{12}}{E_1}, & \chi_{13} &= (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \frac{G_{13}}{E_1}, \\ \chi_{23} &= (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \frac{G_{23}}{E_1}, & \psi &= \frac{E_2}{E_1}. \end{aligned} \quad (10.173a)$$

Elementin pitkän x -akselin suuntaisen sivun mitta on h ja y -suunnassa εh . Redusoitu leikkausjäykkyyismatriisi saadaan ilman likimääräistyksiä muotoon

$$\mathbf{D}_s^* = \begin{bmatrix} (1 + \alpha_{xz}(h/t)^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (1 + \alpha_{yz}(h/t)^2)^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{D}_s, \quad (10.174)$$

missä

$$\alpha_{xz} = \frac{k\chi_{13}}{1 + \chi_{12}\varepsilon^{-2}}, \quad \alpha_{yz} = \frac{k\chi_{23}}{\chi_{12} + \psi\varepsilon^{-2}}. \quad (10.175)$$

Isotrooppiselle materiaalille ja neliön muotoiselle elementille α -parametrit ovat yhtäsuuria ja niillä on arvo $\alpha = k(1 - \nu)/(3 - \nu)$, joka siten vaihtelee rajoissa $0.1667 \leq \alpha \leq 0.3125$ suppeumaluvun muuttuessa välillä $\frac{1}{2} \geq \nu \geq 0$. Mikäli suppeumaluvulle valitaan arvo 0.3 on stabilointiparametri 0.216, mikä vastaa melko hyvin lähteissä [55] ja [46] esitettyä taipuman neliövirheen suhteen optimaalista stabilointiparametrin arvoa (katso kuvaa 13 lähteessä [55] ja kuvaa 7 lähteessä [46]).

Stabilointiparametrin riippuvuus elementin sivusuhteesta ε on esitetty kuvassa 10.16a isotrooppiselle materiaalimallille sekä kimmokerrointen suhteesta ψ ortotrooppiselle materiaalille neliögeometriassa kuvassa 10.16b.

Edellä esitetty menettely stabilointiparametrin arvon eksplisiittiseksi määrittämiseksi on hyvin riippuvainen kiertymän kuplamuodon valinnasta. Puuttumatta kysymykseen stabilointiparametrin optimaalisesta arvosta, antanee menettely kuitenkin hyväksyttävän fysikaalisen tulkinnan sen luonteesta.

10.8.4 Yleinen stabilointitekniikka Reissnerin-Mindlinin laattamallin elementeille

Edellisessä luvussa tarkasteltiin yksityiskohtaisesti lineaarista- ja bilineaarista elementtiä. Johdetaan seuraavaksi yleinen formulaatio stabiileille Reissnerin-Mindlinin laattamallin elementeille lähtemällä laattamallin tasapainoyhtälöistä, jotka ovat

$$\mathbf{L}^* \mathbf{m} - \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (10.176a)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = \bar{f}, \quad (10.176b)$$

jotka voidaan konstitutiivisen lain ja kinemaattisten relaatioiden avulla kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}, \quad (10.177a)$$

$$-\nabla \cdot [\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta})] = 0. \quad (10.177b)$$

Systeemissä on kolme yhtälöä ja kolme tuntematonta funktiota w , β_x ja β_y . Probleema voidaan formuloida myös viiden tuntemattoman avulla lisäämällä leikkausvoimat $\mathbf{q}$ tuntemattomien joukkoon, jolloin päädytään systeemiin:

$$\mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (10.178a)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = \bar{f}, \quad (10.178b)$$

$$\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta}) - \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (10.178c)$$

Muodostetaan systeemin (10.178) heikko muoto kertomalla yhtälöt painofunktioilla $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\hat{w}$ ja $\hat{\mathbf{q}}$:lla

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta})^T \hat{\boldsymbol{\beta}} dA - \int_{\Omega} \mathbf{q}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} dA = 0, \quad (10.179a)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{q} \hat{w} dA = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA, \quad (10.179b)$$

$$\int_{\Omega} [\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta})^T - \mathbf{q}]^T \hat{\mathbf{q}} dA = 0. \quad (10.179c)$$

Osittaisintegroimalla ja käyttämällä Gaussin lausetta sekä olettaen jäykästi kiinnitetyn laatan reunaehdot systeemi muuntuu muotoon

$$\int_{\Omega} (\mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\beta}} dA - \int_{\Omega} \mathbf{q}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} dA = 0, \quad (10.180a)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{q}^T \nabla \hat{w} dA = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA, \quad (10.180b)$$

$$\int_{\Omega} [\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta})^T - \mathbf{q}]^T \hat{\mathbf{q}} dA = 0. \quad (10.180c)$$

Lasketaan kaksi yllä olevaa yhtälöä puolittain yhteen, jolloin saadaan

$$\int_{\Omega} (\mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\beta}} dA + \int_{\Omega} \mathbf{q}^T (\nabla \hat{w} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) dA = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA, \quad (10.181a)$$

$$\int_{\Omega} [\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta}) - \mathbf{q}]^T \hat{\mathbf{q}} dA = 0. \quad (10.181b)$$

Huomataan, että yllä oleva muoto on symmetrinen, mikäli alempi yhtälöistä kerrotaan puolittain leikkausjäykkysmatriisiin käänteismatriisilla $\mathbf{D}_s^{-1}$.

Reissnerin-Mindlinin laattamallin ongelmat juontavat leikkausvoiman laskemiseen suoraan kinemaattisia- ja konstitutiivisia yhteyksiä käyttäen, eli kun leikkausvoimat määritetään yhtälöistä

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta}). \quad (10.182)$$

Käytettäessä tasapainoyhtälöä leikkausvoimien laskemiseen tarvitaan vain kiertymiä

$$\mathbf{q}_{tp} = \mathcal{L} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta}, \quad (10.183)$$

ja leikkausvoimajakauma saadaan stabiiliksi. Lisätään täten yhtälöiden (10.181) oikealle puolelle stabilointitermit

$$S_1 = \sum_{e=1}^N \alpha \left(\frac{h}{t} \right)^2 \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{q}_{tp} - \mathbf{q}) \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{tp} dA, \quad (10.184a)$$

$$S_2 = - \sum_{e=1}^N \alpha \left(\frac{h}{t} \right)^2 \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{q}_{tp} - \mathbf{q}) \hat{\mathbf{q}} dA, \quad (10.184b)$$

missä $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{tp} = \mathbf{D}_s^{-1} \mathbf{q}_{tp}$. Stabilointitermit voidaan lisätä, sillä jatkuvassa probleemassa ne häviävät identtisesti ja diskreetissä ongelmassa ne häviävät rajalla, kun $h \rightarrow 0$.

Systeemin (10.181) stabiloitu muoto on siten

$$\int_{\Omega} (\mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\beta}} dA + \int_{\Omega} \mathbf{q}^T (\nabla \hat{w} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) dA = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA + S_1, \quad (10.185a)$$

$$\int_{\Omega} [\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta}) - \mathbf{q}]^T \hat{\mathbf{q}} dA = S_2. \quad (10.185b)$$

Järjestelemällä alemmassa yhtälössä termejä saadaan

$$\sum_{e=1}^N \int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta} + \alpha(h/t)^2 \mathbf{D}_s^{-1} \mathcal{L} \boldsymbol{\beta}) - (1 + \alpha(h/t)^2) \mathbf{q}]^T \hat{\mathbf{q}} dA = 0. \quad (10.186)$$

Leikkausvoimat voidaan ratkaista elementtikohtaisesti

$$\mathbf{q}^{(e)} = \frac{\mathbf{D}_s}{1 + \alpha(h/t)^2} (\nabla w - \boldsymbol{\beta} + \alpha(h/t)^2 \mathbf{D}_s^{-1} \mathcal{L} \boldsymbol{\beta}), \quad (10.187)$$

jotka sijoitettuna takaisin yhtälöön (10.185) antavat siirtymämenetelmäpohjaisen stabiloidun variaatioformulaation

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\beta}} dA - \sum_{e=1}^N \alpha \left(\frac{h}{t} \right)^2 \int_{\Omega^{(e)}} \mathcal{L} \boldsymbol{\beta} \mathbf{D}_s^{-1} \mathcal{L} \hat{\boldsymbol{\beta}} dA \\ & + \sum_{e=1}^N \frac{\mathbf{D}_s}{1 + \alpha(h/t)^2} \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla w - \boldsymbol{\beta} + \alpha(h/t)^2 \mathbf{D}_s^{-1} \mathcal{L} \boldsymbol{\beta}) (\nabla \hat{w} - \hat{\boldsymbol{\beta}} + \alpha(h/t)^2 \mathbf{D}_s^{-1} \mathcal{L} \hat{\boldsymbol{\beta}}) dA \\ & = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA. \end{aligned} \quad (10.188)$$

Summalauseke elementtien yli korostaa, että kyseiset termit lasketaan elementtikohtaisesti ja suureiden epäjatkuvuuksista elementtien reunojen yli ei välitetä. Yllä oleva hieman mutkikkaan näköinen lauseke voidaan kirjoittaa klassisen tyylin virtuaalisen työn yhtälön tapaisena hieman yksinkertaisemmassa muodossa seuraavasti:

$$\int_{\Omega} \mathbf{m}^T \hat{\boldsymbol{\kappa}} dA - \sum_{e=1}^N \alpha \left(\frac{h}{t} \right)^2 \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{q}_{\text{tp}}^T \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{tp}} dA + \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{q}^{\text{stab}} \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{\text{stab}} = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA, \quad (10.189)$$

missä on käytetty lyhenteitä

$$\mathbf{q}^{\text{stab}} = \frac{\mathbf{D}_s}{1 + \alpha(h/t)^2} \boldsymbol{\gamma}^{\text{stab}}, \quad (10.190a)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{\text{stab}} = \boldsymbol{\gamma} + \alpha(h/t)^2 \boldsymbol{\gamma}_{\text{tp}}, \quad (10.190b)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{\text{tp}} = \mathbf{D}_s^{-1} \mathbf{q}_{\text{tp}} = \mathbf{D}_s^{-1} \mathcal{L} \boldsymbol{\beta}. \quad (10.190c)$$

Huomaa, että ensimmäinen stabilointitermi vähentää taivutusenergian osuutta.

Jotta globaali yhtälösystemi olisi positiivisesti definiitti on stabilointiparametrin α toteutettava

$$0 < \alpha < C_I. \quad (10.191)$$

Parametri C_I voidaan helposti estimoida elementtitasolla, katso vastaavaa harjoitustehtävää 6 luvussa 9.4. Formulaatio (10.189) toimii sellaisenaan kaikentyypisillä interpolaatiopolynomeilla (kolmio, suorakaide), jos taipumaa interpoloidaan astetta korkeammilla polynomeilla kuin kiertymiä. Mikäli halutaan käyttää samanasteisia polynomeja sekä taipumalle että kiertymille, on leikkausenergiatermiä vielä rullattava, jotta saataisiin optimaalisesti konvergentti elementti

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{m}^T \hat{\mathbf{\kappa}} dA - \sum_{e=1}^N \alpha \left(\frac{h}{t} \right)^2 \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{q}_{\text{tp}}^T \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{tp}} dA + \\ + \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^{(e)}} \frac{\mathbf{D}_s}{1 + \alpha(h/t)^2} \mathbf{R}^{(e)} \boldsymbol{\gamma}^{\text{stab}} \mathbf{R}^{(e)} \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{\text{stab}} = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA, \end{aligned} \quad (10.192)$$

missä $\mathbf{R}^{(e)}$ on elementtikohtainen reduktio-operaattori, jonka konstruointi on kuitenkin melko monimutkaista. Periaatteessa se voidaan tehdä kuten alhaisasteisissa MITC elementeissä, eli konstruoidaan $\boldsymbol{\beta}^S$ siten, että seuraavat ehdot toteutuvat:

- mikäli taipuman ja kiertymän interpolaatio on astetta p niin leikkausmuodonmuutos γ_s on astetta $p - 1$ elementin reunoilla ja
- kaikille astetta $p - 2$ oleville polynomeille $\mathbf{p}$ on voimassa ehto

$$\int_{\Omega^{(e)}} (\boldsymbol{\beta}^S - \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{p} dA = 0. \quad (10.193)$$

Redusoitu leikkausmuodonmuutos $\mathbf{R}^{(e)} \boldsymbol{\gamma}^{\text{stab}}$ lasketaan siten

$$\mathbf{R}^{(e)} \boldsymbol{\gamma}^{\text{stab}} = \nabla w - \boldsymbol{\beta}^S + \alpha(h/t)^2 \boldsymbol{\gamma}_{\text{tp}} = \nabla w - \boldsymbol{\beta}^S + \alpha(h/t)^2 \mathbf{D}_s^{-1} \mathcal{L} \boldsymbol{\beta}. \quad (10.194)$$

Mikäli lukijalla on intoa tutustua asiaan tarkemmin, suositellaan lähteitä [47], [56].

10.9 Harjoitustehtäviä

1. Kirjoita bikuubisen Bogner-Fox-Schmidt elementin solmuihin 3 ja 4 liittyvät interpolaatiofunktio.
2. Ratkaise jäykästi kiinnitetty tasaisesti kuormitettu ($\bar{f} = f_0 = \text{vakio}$) neliölaatta käyttäen yhtä Bogner-Fox-Schmidt-elementtiä laatan neljännekselle. Vastaukseksi riittää laatan taipuman arvo keskipisteessä. Laatan paksuus on t ja materiaalin kimmovaikut E ja ν .

3. Johda Morleyn kuusivapausasteisen elementin interpolaatiofunktio lähtien diskreetti-Kirchhoff ajatuksesta. Taipumalle w voidaan otaksua lineaarinen interpolaatio ja kiertymille β_x ja β_y lineaarinen epäkonformi interpolaatio

$$\begin{aligned}\beta_i &= N_4^{ek} \beta_{i4} + N_5^{ek} \beta_{i5} + N_6^{ek} \beta_{i6} \\ &= (L_1 + L_2 - L_3) \beta_{i4} + (L_2 + L_3 - L_1) \beta_{i5} + (L_3 + L_1 - L_2) \beta_{i6}.\end{aligned}\quad (10.195)$$

Kolme vapausastetta voidaan eliminoida rajoittamalla poikittainen leikkausmuodonmuutos sivun suunnassa häviämään

$$\int_{\text{Sivui}} \gamma_s ds = 0. \quad (10.196)$$

4. Johda Reissnerin-Mindlinin mallin tasapainoyhtälöt lähtien virtuaalisen työn lausekkeesta (10.59).
5. Arnoldin ja Falkin kehittämässä Reissnerin Mindlinin mallin kolmiolaattaelementissä (katso lukua 10.8.2) taipumaa kuvataan epäkonformilla lineaarisella interpolaatiolla, joka on jatkuva elementin sivujen keskipisteissä, eli

$$\begin{aligned}w &= N_4^{ek} w_4 + N_5^{ek} w_5 + N_6^{ek} w_6 \\ &= (L_1 + L_2 - L_3) w_4 + (L_2 + L_3 - L_1) w_5 + (L_3 + L_1 - L_2) w_6,\end{aligned}\quad (10.197)$$

missä L_i :t ovat alakoordinaatit. Kiertymiä β_x, β_y interpoloidaan lineaarisilla interpolaatiofunktioilla, joita on täydennetty kuubisella kuplamuodolla, joka tässä on otettu hierarkiseksi

$$\beta_i = L_1 \beta_{i1} + L_2 \beta_{i2} + L_3 \beta_{i3} + 27 L_1 L_2 L_3 \Delta \beta_{i7}, \quad (10.198)$$

missä $i = x$ tai y . Kiertymien interpolaatio on siten konformi. Elementin solmukonfiguraatio ja vapausasteet on esitetty oheisessa kuvassa. Leikkausmuodonmuutos lasketaan elementin keskimääräisten kiertymien avulla

$$\gamma_{iz} = w_{,i} - \bar{\beta}_i, \quad (10.199)$$

missä

$$\bar{\beta}_i = \frac{1}{A^{(e)}} \int_{A^{(e)}} \beta_i dA. \quad (10.200)$$

Piirrä kuva epäkonformeista interpolaatiofunktioista N_i^{ek} , sekä määritä leikkausmuodonmuutosta γ_{xz} vastaava osa muodonmuutoksia ja solmupistesiiirtymiä yhdistävästä B_s matriisista.

6. Johda Arnoldin ja Falkin elementille (luku 10.8.2) Francan ja Stenbergin stabiloidun muodon leikkausjäykkyyden redusointitekijät eksplisiittisesti.

Luku 11

Kaarevien sauvojen analysointi

Palkkielementtejä käsittelevä luku toimi johdatuksena laattaelementtien maailmaan. Aivan vastaavasti kaarevien rakenteiden analyysissä tämä sauvoja käsittelevä luku muodostaa yhdessä yleisen kolmidimensioisten rakenteiden elementtimenetelmää koskevan luvun kanssa johdatuksen kuorielementtien vaikeaan ja kiehtovaan maailmaan.

Kaarevien rakenteiden elementtimenetelmäformulaatioissa kohdataan kaksi uutta vaikeutta nimitäin jäykän kappaleen liikkeen kuvaamisen ongelma ja ns. kalvo- eli membraanilukkiutuminen.

11.1 Kehäsauvaelementti

Yksinkertaisin tapa mallintaa kaari elementtimenetelmällä on kuvata se lineaarisesti interpoloidulla elementillä. Tällöin kinemaattiset yhteydet voidaan johtaa tarkastelemalla suoran palkin kinematiikkaa elementin solmujen määrittelemässä koordinaatistossa x_ℓ, y_ℓ , katso kuvaa 11.1. Elementin jäykkyysmatriisi ja voimavektori voidaan muodostaa ensin paikallisessa x_ℓ, y_ℓ -koordinaatistossa ja muuntaa ne lopuksi rakennekoordinaatistoon. Tämä muunnos voidaan suorittaa jo elementin integroimisvaiheessa.

Suoran sauvan kinemaattiset yhtälöt (9.2) ovat kirjoitettuna nyt (x_ℓ, y_ℓ) -koordinaatistossa:

$$u_\ell(x_\ell, y_\ell) = u_c(x_\ell) - y_\ell \theta(x_\ell), \quad (11.1a)$$

$$v_\ell(x_\ell, y_\ell) = v_c(x_\ell). \quad (11.1b)$$

Muodonmuutosten lausekkeet paikallisessa koordinaatistossa ovat

$$\epsilon_\ell = \frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell} = \frac{du_\ell}{dx_\ell} - y_\ell \frac{d\theta}{dx_\ell}, \quad (11.2a)$$

$$\gamma_\ell = \frac{\partial u_\ell}{\partial y_\ell} + \frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell} = \frac{dv_\ell}{dx_\ell} - \theta. \quad (11.2b)$$

Jätetään jatkossa alaindeksi ℓ pois, mikäli yhtälöiden tulkinnessa ei ole sekaannuksen vaaraa. Kirjoitetaan aksiaalinen muodonmuutos paikallisessa koordinaatistossa seuraavasti:

$$\epsilon = \epsilon_c + y\kappa, \quad (11.3)$$

jolloin virtuaalisen työn yhtälön termi

$$\int_{V^{(e)}} (\sigma\delta\epsilon + \tau\delta\gamma) dV \quad (11.4)$$

voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_{I^{(e)}} (N\delta\epsilon_c + M\delta\kappa + Q\delta\gamma) dx, \quad (11.5)$$

missä N on palkin normaalivoima $N = EA\epsilon_c = EAu'_c$ ja pilkku suureen oikeassa yläkulmassa merkitsee derivointia paikallisen x -koordinaatin suhteen. Havaitaan, että aksiaalisella muodonmuutoksella ei ole kytkentää käyristymän tai leikkausmuodonmuutoksen (taivutustilan) kanssa, ja elementin jäykkyysmatriisi voidaan kirjoittaa lohkomuodossa

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m^{(e)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_b^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (11.6)$$

missä elementin vapausasteet on järjestetty seuraavasti:

$$\mathbf{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1^{(e)} & u_2^{(e)} & v_1^{(e)} & \theta_1^{(e)} & v_2^{(e)} & \theta_2^{(e)} \end{bmatrix}^T. \quad (11.7)$$

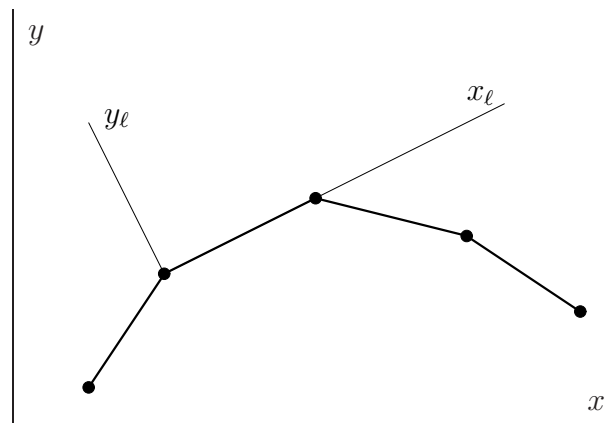
Lohkomatriisien alaindeksi m viittaa aksiaalisen muodonmuutoksen ja b taivutustilan ja leikkaussuureisiin. Matriisi $\mathbf{K}_b^{(e)}$ on luvussa 9.2 esitetty Timoshenkon palkkielementti. Aksiaalsiirtymiin liittyvä termi on analoginen yksidimensioisen diffuusioyhtälön kanssa, täten aksiaalivapausasteiden suhteen lineaarisesti interpoloidun elementin jäykkyysmatriisi on

$$\mathbf{K}_m^{(e)} = \frac{EA}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11.8)$$

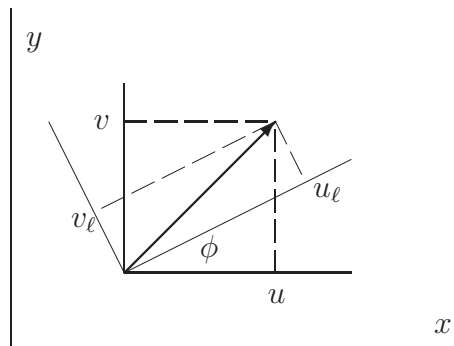
Aksiaali- ja taivutustilan suureiden välinen kytkentä syntyy koordinaatiston muunnoksessa. Tarkastellaan solmuun i liittyvien vapausasteiden välistä muunnosta. Kuvan 11.2 perusteella voidaan kirjoittaa

$$u_{\ell i} = (\cos \phi)u_i + (\sin \phi)v_i \quad \text{ja} \quad v_{\ell i} = -(\sin \phi)u_i + (\cos \phi)v_i. \quad (11.9)$$

Kiertymän θ_i arvo on sama kummassakin koordinaattijärjestelmässä, joten vapausas-



Kuva 11.1 Kaaren mallintaminen paloittain lineaarisilla elementeillä.



Kuva 11.2 Koordinaatistonmuunnos.

tevektorin $\mathbf{u}_i = [u_i, v_i, \theta_i]^T$ muunnos paikalliseen koordinaatistoon saa muodon

$$\mathbf{u}_{\ell i} = \mathbf{T}_i \mathbf{u}_i, \quad (11.10)$$

missä

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11.11)$$

Muunnosmatriisi $\mathbf{T}_i$ on ortogonaalinen, eli $\mathbf{T}_i^{-1} = \mathbf{T}_i^T$, joten

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{T}_i^T \mathbf{u}_{\ell i} \quad (11.12)$$

Yhden elementin osuus virtuaalisen työn lausekkeesta on

$$(\delta \mathbf{u}_{\ell}^{(e)})^T \mathbf{K}_{\ell}^{(e)} \mathbf{u}_{\ell}^{(e)} = (\delta \mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{K}_{\ell}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = (\delta \mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (11.13)$$

joten elementin jäykkyyismatriisin muunnos paikallisesta koordinaatistosta globaa-

liin rakennekoordinaatistoon on

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{K}_\ell^{(e)} \mathbf{T}^{(e)}. \quad (11.14)$$

Koko elementin muunnosmatriisi on muotoa

$$\mathbf{T}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix}, \quad (11.15)$$

jolloin elementin vapausasteet on järjestetty seuraavasti:

$$\mathbf{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1^{(e)} & v_1^{(e)} & \theta_1^{(e)} & u_2^{(e)} & v_2^{(e)} & \theta_2^{(e)} \end{bmatrix}^T. \quad (11.16)$$

Muunnos (11.14) voidaan suorittaa jo elementin integrointivaiheessa. Elementin jäykkyysmatriisi integroidaan matriisitulona

$$\mathbf{K}_\ell^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx. \quad (11.17)$$

Mikäli vapausasteet on järjestetty kaavan (11.16) mukaisesti, ovat matriisit $\mathbf{D}$ ja $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & GA_s^* \end{bmatrix} \quad (11.18)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_{1,x} & 0 & 0 & -N_{2,x} \\ 0 & N_{1,x} & -\Pi_0 N_1 & 0 & N_{2,x} & -\Pi_0 N_2 \end{bmatrix}, \quad (11.19)$$

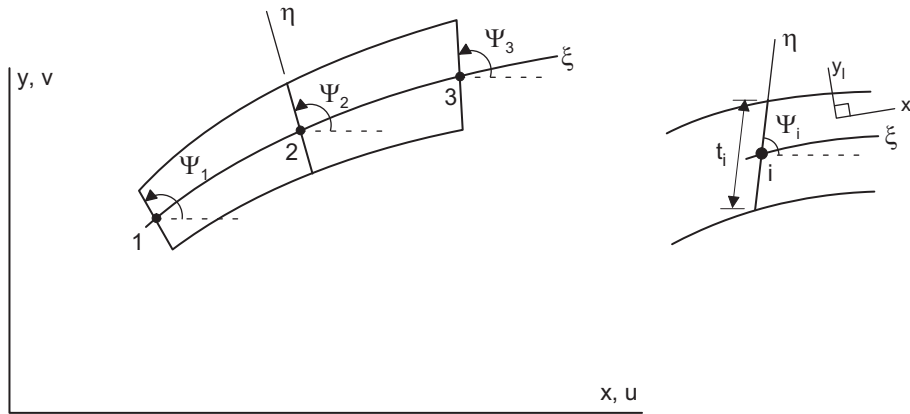
missä Π_0 on projektio vakiofunktiolle. Venymät $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_c, \kappa, \gamma]^T$ paikallisessa koordinaatistossa saadaan lausekkeesta

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (11.20)$$

joten jäykkyysmatriisi voidaan muodostaa suoraan integroimalla paikallisessa koordinaatistossa integraali

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{T}^{(e)} dx. \quad (11.21)$$

Taivutustilan kuvaamiseen voidaan käyttää myös Eulerin-Bernoullin palkkielementtiä, jolloin saadaan klassinen kehäsauvaelementti.



Kuva 11.3 Isoparametrinen kaarielementti.

11.2 Isoparametrinen kaarielementti

Isoparametrisen kaarevan tasoelementin geometria määritellään kaavoilla

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi)x_i + \frac{1}{2}\eta t_i N_i(\xi) \cos \psi_i], \quad (11.22a)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi)y_i + \frac{1}{2}\eta t_i N_i(\xi) \sin \psi_i], \quad (11.22b)$$

missä x_i, y_i ovat solmujen $i = 1, \dots, n$ koordinaatit, ψ_i on x -akselista mitattu kulma suoralle viivalle $\xi = \text{vakio}$ (η -viivalle) ja t_i on solmun i kohdalla η -viivaa pitkin mitattu elementin ”paksuus”, katso kuvaa 11.3. Mitta t_i ei ole todellinen paksuus, koska η -viiva ei ole välttämättä kohtisuorassa tangentialvektoria $\mathbf{s} = [x_{,\xi}(\xi, 0), y_{,\xi}(\xi, 0)]^T$ vastaan. Isoparametrisen elementin tapaan siirtymiä u ja v interpoloidaan samalla tavalla kuin koordinaatteja x ja y , eli

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi)u_i - \frac{1}{2}\eta t_i N_i(\xi) \sin \psi_i \theta_i] \equiv \sum_{i=1}^n (N_i u_i - \eta S_i \theta_i), \quad (11.23a)$$

$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi)v_i + \frac{1}{2}\eta t_i N_i(\xi) \cos \psi_i \theta_i] \equiv \sum_{i=1}^n (N_i v_i + \eta C_i \theta_i), \quad (11.23b)$$

missä on merkitty

$$S_i = \frac{1}{2}t_i N_i \sin \psi_i \quad \text{ja} \quad C_i = \frac{1}{2}t_i N_i \cos \psi_i. \quad (11.24)$$

Globaalissa rakennekoordinaatistossa (x, y) lausutut muodonmuutokset ovat

$$\epsilon_x = u_{,x} \quad \epsilon_y = v_{,y} \quad \text{ja} \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}. \quad (11.25)$$

Globaalissa rakennekoordinaatistossa (x, y) lausutut derivaattojen lausekkeet muunnetaan parametrin kuvauksen Jacobin matriisin avulla (ks. luku 4.6.2) lausutuiksi perusneliön koordinaattien (ξ, η) avulla:

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{Bmatrix} v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix}, \quad (11.26)$$

missä

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}. \quad (11.27)$$

Sama yhteys voidaan lausua myös hieman toisin; ketjuderivoimalla saadaan lausekkeet

$$u_{,x} = u_{,\xi}\xi_{,x} + u_{,\eta}\eta_{,x} \quad (11.28a)$$

$$u_{,y} = u_{,\xi}\xi_{,y} + u_{,\eta}\eta_{,y}. \quad (11.28b)$$

Merkitään Jacobin matriisin transpoosin käänteismatriisia symbolilla $\mathbf{H} = \mathbf{J}^{-T}$, täten

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{x_{,\xi}y_{,\eta} - x_{,\eta}y_{,\xi}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \eta_{,x} \\ \xi_{,y} & \eta_{,y} \end{bmatrix}. \quad (11.29)$$

Kaaren siirtymien (11.23) derivaatat ovat

$$u_{,x} = \sum_{i=1}^n [N_{i,x}u_i - (\eta_{,x}S_i + \eta S_{i,x})\theta_i], \quad (11.30a)$$

$$u_{,y} = \sum_{i=1}^n [N_{i,y}u_i - (\eta_{,y}S_i + \eta S_{i,y})\theta_i], \quad (11.30b)$$

$$v_{,x} = \sum_{i=1}^n [N_{i,x}v_i + (\eta_{,x}C_i + \eta C_{i,x})\theta_i], \quad (11.30c)$$

$$v_{,y} = \sum_{i=1}^n [N_{i,y}v_i + (\eta_{,y}C_i + \eta C_{i,y})\theta_i], \quad (11.30d)$$

missä

$$S_{i,x} = \frac{1}{2}t_i N_{i,x} \sin \psi_i \quad S_{i,y} = \frac{1}{2}t_i N_{i,y} \sin \psi_i \quad (11.31a)$$

$$C_{i,x} = \frac{1}{2}t_i N_{i,x} \cos \psi_i \quad C_{i,y} = \frac{1}{2}t_i N_{i,y} \cos \psi_i. \quad (11.31b)$$

Koska interpolaatiofunktio N_i ovat vain koordinaatin ξ funktioita, täten

$$N_{i,x} = H_{11}N_{i,\xi}. \quad (11.32)$$

Derivaattojen (11.30) lausekkeet voidaan siten lausua muodossa

$$u_{,x} = \sum_{i=1}^n [H_{11}N_{i,\xi}u_i - (H_{12}S_i + \eta H_{11}S_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.33a)$$

$$u_{,y} = \sum_{i=1}^n [H_{21}N_{i,\xi}u_i - (H_{22}S_i + \eta H_{21}S_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.33b)$$

$$v_{,x} = \sum_{i=1}^n [H_{11}N_{i,\xi}v_i + (H_{12}C_i + \eta H_{11}C_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.33c)$$

$$v_{,y} = \sum_{i=1}^n [H_{21}N_{i,\xi}v_i + (H_{22}C_i + \eta H_{21}C_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.33d)$$

missä

$$S_{i,\xi} = \frac{1}{2}t_i N_{i,\xi} \sin \psi_i, \quad C_{i,\xi} = \frac{1}{2}t_i N_{i,\xi} \cos \psi_i. \quad (11.34)$$

Termit S_i ja C_i sisältävät interpolaatiofunktion N_i lausekkeen. Ne ovat täten ξ -koordinaatin suhteen astetta korkeampiasteisia polynomeja kuin lausekkeiden (11.33) muut termit. Tämä aiheuttaa elementin lukkiutumisen aivan kuin suoran Timoshenkon palkin tapauksessakin. Nyt lukkiutumismuotoja on vain kaksi, membraani- ja leikkauslukkiutuminen. Yksidimensioisten rakennemallien tapauksissa yksinkertaisin keino päästä eroon näistä lukkiutumisilmiöistä on pituussuuntainen ali-integrointi. Toinen suositeltavampi tapa on projisoida interpolaatiofunktioiden lausekkeet N_i , jotka ovat astetta $p = n - 1$, astetta $p - 1$ oleville polynomeille. Täten lausekkeet (11.33) muuntuvat muotoon

$$u_{,x} = \sum_{i=1}^n [H_{11}N_{i,\xi}u_i - (H_{12}\Pi_{p-1}S_i + \eta H_{11}S_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.35a)$$

$$u_{,y} = \sum_{i=1}^n [H_{21}N_{i,\xi}u_i - (H_{22}\Pi_{p-1}S_i + \eta H_{21}S_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.35b)$$

$$v_{,x} = \sum_{i=1}^n [H_{11}N_{i,\xi}v_i + (H_{12}\Pi_{p-1}C_i + \eta H_{11}C_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.35c)$$

$$v_{,y} = \sum_{i=1}^n [H_{21}N_{i,\xi}v_i + (H_{22}\Pi_{p-1}C_i + \eta H_{21}C_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.35d)$$

missä

$$\Pi_{p-1}S_i = \frac{1}{2}t_i \Pi_{p-1}N_i \sin \psi_i \quad \text{ja} \quad \Pi_{p-1}C_i = \frac{1}{2}t_i \Pi_{p-1}N_i \cos \psi_i. \quad (11.36)$$

Projisoidut interpolaatiofunktiot määritetään yhtälöillä

$$\int_{-1}^1 \xi^k (\Pi_{p-1} N_i - N_i) d\xi = 0, \quad k = 0, \dots, p-1. \quad (11.37)$$

Virtuaaliset muodonmuutokset ovat

$$\delta \epsilon_x = \delta u_{,x} \quad \delta \epsilon_y = \delta v_{,y} \quad \text{ja} \quad \delta \gamma_{xy} = \delta u_{,y} + \delta v_{,x}, \quad (11.38)$$

missä

$$\delta u_{,x} = \sum_{i=1}^n [N_{i,x} \delta u_i - (\eta_{,x} S_i + \eta S_{i,x}) \delta \theta_i], \quad (11.39a)$$

$$\delta u_{,y} = \sum_{i=1}^n [N_{i,y} \delta u_i - (\eta_{,y} S_i + \eta S_{i,y}) \delta \theta_i], \quad (11.39b)$$

$$\delta v_{,x} = \sum_{i=1}^n [N_{i,x} \delta v_i + (\eta_{,x} C_i + \eta C_{i,x}) \delta \theta_i], \quad (11.39c)$$

$$\delta v_{,y} = \sum_{i=1}^n [N_{i,y} \delta v_i + (\eta_{,y} C_i + \eta C_{i,y}) \delta \theta_i]. \quad (11.39d)$$

Virtuaalisten siirtymien lausekkeiksi saadaan tietenkin yhtälöitä (11.35) vastaavat lausekkeet.

Virtuaalisten muodonmuutosten $\delta \epsilon$ ja virtuaalisten solmupistesiertymien $\delta \mathbf{u}_i = [\delta u_i, \delta v_i, \delta \theta_i]^T$ välisen yhteyden

$$\delta \epsilon = \mathbf{B}_i \delta \mathbf{u}_i \quad (11.40)$$

avulla muodostetaan solmuihin i ja j liittyvä osa elementin jäykkyysmatriisista

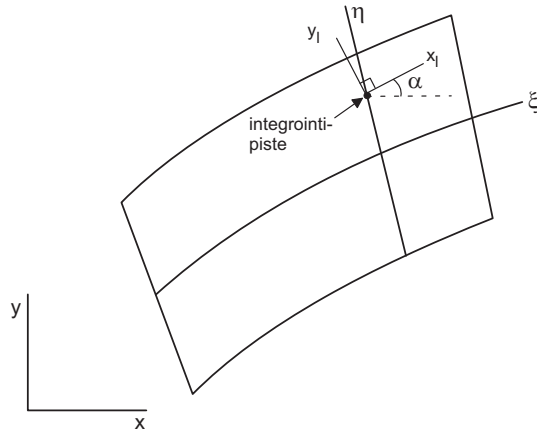
$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dV, \quad (11.41)$$

missä

$$dV = b \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (11.42)$$

ja b on sauvan poikkileikkauksen leveys. Tilavuusintegraali lasketaan numeerisesti Gaussin menetelmällä. Kimmoisan aineen tapauksessa riittää paksuussuunnassa (η :n suunnassa) kaksi integrointipistettä. Lukkiintumisen välttämiseksi on sauvan pituussuunnassa integrointi suoritettava $n-1$:n pisteen Gaussin kaavoilla (n on solmujen lukumäärä), mikäli termejä S_i ja C_i ei projisoida alempiasteisille polynomeille. Mikäli projisointi suoritetaan voidaan pituussuuntainen integrointi suorittaa millä tahansa vähintään $n-1$:n pisteen Gaussin kaavoilla.

Elementin jäykkyysmatriisin kaavassa (11.41) matriisi $\mathbf{D}$ on materiaalin jäykkyysmatriisi globaalissa koordinaatistossa. Ohuen sauvan tapauksessa kuvan 11.4



Kuva 11.4 Integrintipisteen paikallinen koordinaatisto.

integrintipisteen paikallisessa (x_ℓ, y_ℓ) -koordinaatistossa $\mathbf{D}_\ell$ matriisi on lineaarisesti kimmoisalle aineelle

$$\mathbf{D}_\ell = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & kG \end{bmatrix}, \quad (11.43)$$

joka ottaa huomioon palkkiteorian otaksunan, että akselin y_ℓ suunnassa jännitys ja venymä ovat nollia, ja k on leikkauskorjauskerroin, jonka arvo on $k = 1, 2$ suorakaidepoikkileikkaukselle. Paikallisen koordinaatiston (x_ℓ, y_ℓ) ja globaalin (x, y) -koordinaatiston väliset muodonmuutosten ja jännitysten muunnoskaavat ovat

$$\boldsymbol{\epsilon}_\ell = \mathbf{T}\boldsymbol{\epsilon} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\sigma}_\ell = \mathbf{T}^{-T}\boldsymbol{\sigma}, \quad (11.44)$$

missä

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -2 \sin \alpha \cos \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix}, \quad (11.45)$$

ja α on x_ℓ -akselin ja x -akselin välinen kulma. Mielivaltaisen pisteen (ξ, η) ξ -viivan yksikkötangenttivektori on

$$\vec{i}_\ell = \frac{1}{\sqrt{x_{,\xi}^2 + y_{,\xi}^2}} \begin{Bmatrix} x_{,\xi} \\ y_{,\xi} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}. \quad (11.46)$$

Koska $\boldsymbol{\sigma}_\ell^T \boldsymbol{\epsilon}_\ell = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon}$ on invariantti, saadaan

$$\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_\ell^T \mathbf{D}_\ell \boldsymbol{\epsilon}_\ell = \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{T}^T \mathbf{D}_\ell \mathbf{T} \boldsymbol{\epsilon} \quad (11.47)$$

joten

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^T \mathbf{D}_\ell \mathbf{T}, \quad (11.48)$$

joka sijoitetaan jäykkyysmatriisin kaavaan (11.41).

Luku 12

3D elementtimenetelmä

12.1 Johdanto

Elementtimenetelmän yleistäminen tasoalueesta kolmidimensioisiin alueisiin on yksinkertaista. Lämmönjohtumisyhtälön heikko muoto (4.9)

$$\int_{\Omega} (\nabla \hat{u})^T \mathbf{D} \nabla u d\Omega = \int_{\Omega} \hat{u} \bar{f} d\Omega - \int_{S_q} \hat{u} \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (12.1)$$

on kirjoitettu koordinaatistosta riippumattomaan muotoon ja kelpaa siten sellaiseen elementtimenetelmädiskretoinnin pohjaksi myös kolmidimensioisissa alueissa. Heikko muoto voidaan kirjoittaa myös helposti muistettavassa “virtuaalisen työn muodossa”

$$- \int_{\Omega} (\nabla \hat{u})^T \mathbf{q} d\Omega = \int_{\Omega} \hat{u} \bar{f} d\Omega - \int_{S_q} \hat{u} \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (12.2)$$

missä lämpövuoto saadaan konstitutiivisen mallin avulla, joka Fourierin lämmönjohtumismallin tapauksessa on muotoa $\mathbf{q} = -\mathbf{D} \nabla u$, joka elementtimenetelmäapproksimaatiossa saa muodon $\mathbf{q} = -\mathbf{D} \mathbf{B} u$.

Elementtimatriisin

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (12.3)$$

diskreetti gradienttioperaattorimatriisi $\mathbf{B}$ voidaan osittaa elementin paikallisten solmujen mukaan seuraavasti

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_m], \quad (12.4)$$

missä solmun i osuus on

$$\mathbf{B}_i = \nabla N_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{bmatrix}. \quad (12.5)$$

Kolmiulotteisten kappaleiden jännitysanalyysissä muodonmuutosenergian vari-

aatio voidaan kirjoittaa muodossa, katso luku 5.2

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega, \quad (12.6)$$

missä jännitysten ja muodonmuutosten vektorit ovat komponenteittain

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \end{bmatrix}^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Elementin paikalliseen solmuun i liittyvä osuus siirtymä-muodonmuutosmatriisista $\mathbf{B}$ on

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,z} \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,z} & N_{i,y} \\ N_{i,z} & 0 & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (12.7)$$

12.2 Kolmiulotteinen interpolaatio

12.2.1 Lineaarinen interpolaatio

Luvun 4.2 lineaarisen tasoelementin kolmiulotteinen vastine on nelisolmuinen tetraedrielementti, jonka interpolaatio voidaan kirjoittaa muodossa

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z. \quad (12.8)$$

Lausumalla u solmuissa saadaan neljä yhtälöä

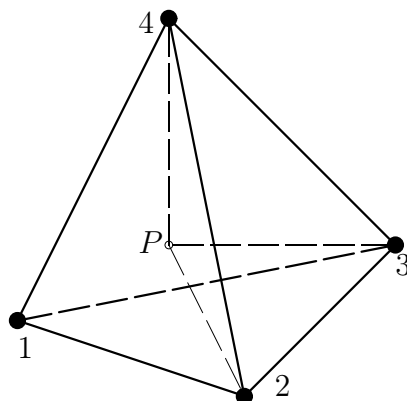
$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i, \quad (12.9)$$

joista voidaan ratkaista vakiot $\alpha_1, \dots, \alpha_4$. Funktion u lineaarisen interpolaation lauseke on ilmaistuna solmupistearvojen u_i, u_j, u_m ja u_p avulla

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{6V} & [(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)u_i - (a_j + b_j x + c_j y + d_j z)u_j \\ & + (a_m + b_m x + c_m y + d_m z)u_m - (a_p + b_p x + c_p y + d_p z)u_p]. \end{aligned} \quad (12.10)$$

missä

$$6V = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{bmatrix} \quad (12.11)$$



Kuva 12.1 Tetraedrielementin tilavuuskoordinaatit.

ja V on tetraedrin tilavuus. Vakiot a_i, b_i, c_i ja d_i ovat

$$\begin{aligned} a_i &= \det \begin{bmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{bmatrix}, & b_i &= -\det \begin{bmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{bmatrix}, \\ c_i &= \det \begin{bmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{bmatrix}, & d_i &= -\det \begin{bmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Muut vakiot $a_j, b_j, \dots, d_m$ saadaan vaihtamalla indeksejä: $p \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow m \rightarrow p$ jne. Solmut numeroidaan siten, että esim. solmusta p katsoen i, j ja m kiertävät vastapäivän tai ne ovat järjestyksessä $mipj$ jne.

Interpolaatio (12.10) voidaan kirjoittaa muodossa

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m + N_p u_p \quad (12.13)$$

kun määritellään

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y + d_i z)/6V \quad \text{jne.} \quad (12.14)$$

12.2.2 Tilavuuskoordinaatit

Tetraedrielementin, katso kuva 12.1, tilavuuskoordinaatit määritellään tilavuuksien suhteena

$$L_1 = \frac{V_1}{V}, \quad L_2 = \frac{V_2}{V}, \quad L_3 = \frac{V_3}{V}, \quad L_4 = \frac{V_4}{V}, \quad (12.15)$$

missä V_1 on tetraedrin $P245$ tilavuus ja V on elementin 1234 tilavuus. Koordinaatti L_1 muuttuu nolasta yhteen karteesisten koordinaattien mukana, solmusta 1 tahkolle 243 mentäessä.

Karteesisten koordinaattien ja tilavuuskoordinaattien välillä ovat yhteydet

$$\begin{aligned}x &= L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 + L_4x_4, \\y &= L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 + L_4y_4, \\z &= L_1z_1 + L_2z_2 + L_3z_3 + L_4z_4,\end{aligned}\tag{12.16}$$

missä (x_i, y_i, z_i) ovat solmun i koordinaatit. Luonnollisesti kaikki neljä tilavuuskoordinaattia eivät voi olla riippumattomia, vaan niitä sitoo ehto

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1.\tag{12.17}$$

Koska koordinaatit L_i muuttuvat lineaarisesti nollasta yhteen ja saavat arvon 1 solmussa i , lineaariset interpolaatiofunktiot ovat

$$N_i = L_i, \quad i = 1, \dots, 4.\tag{12.18}$$

Karteesisten koordinaattien suhteen muodostettujen derivaattojen laskemisessa tarvitaan ketjukaavaa

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{1}{6V} \sum_{i=1}^4 b_i \frac{\partial f}{\partial L_i}.\tag{12.19}$$

Tilavuusintegraaleille voidaan johtaa integrointikaava

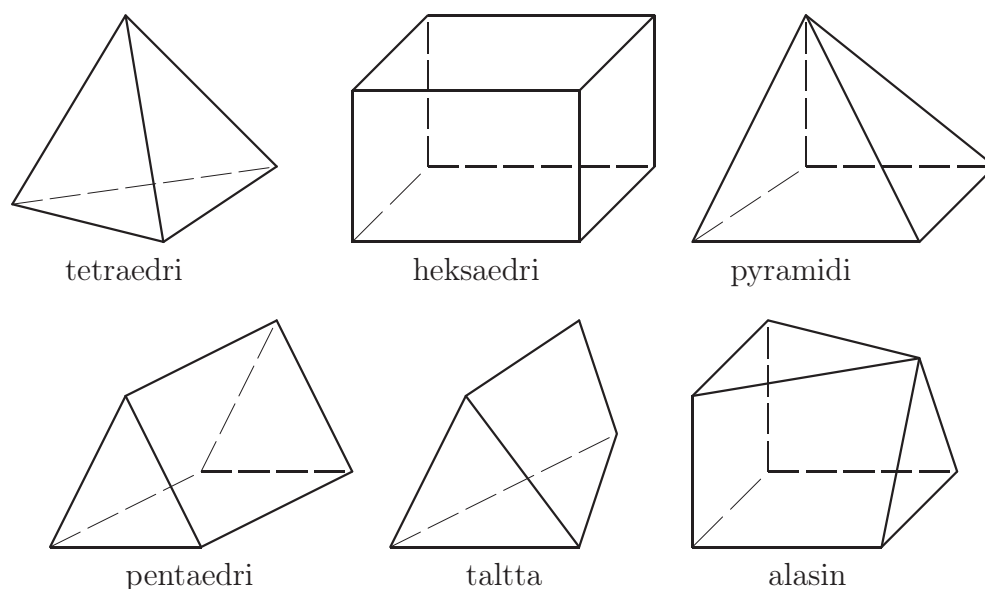
$$\int_{V^{(e)}} L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dV = 6V^{(e)} \frac{a!b!c!d!}{(3+a+b+c+d)!}.\tag{12.20}$$

12.2.3 Muita 3D-elementtigeometrioita

Kolmidimensioisessa avaruudessa mahdollisia elementtigeometrioita on useita. Kuvassa 12.2 on esitetty joukko 3-D elementtien perusmuotoja kuten *tetraedri*, *heksaedri*, *pentaedri*, *pyramidi*, *taltta* ja *alasin*.

12.2.4 Isoparametrinen kuvaus

Tarkastellaan aluksi isoparametristä hexahedrielementtiä. Isoparametrisen kolmiulotteisen, (3D), elementin pisteen P paikka suorakulmaisessa (x, y, z) -koordinaatis-



Kuva 12.2 Erilaisia 3-D elementtigeometrioita.

tossa on

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i, \quad (12.21a)$$

$$y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i, \quad (12.21b)$$

$$z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i, \quad (12.21c)$$

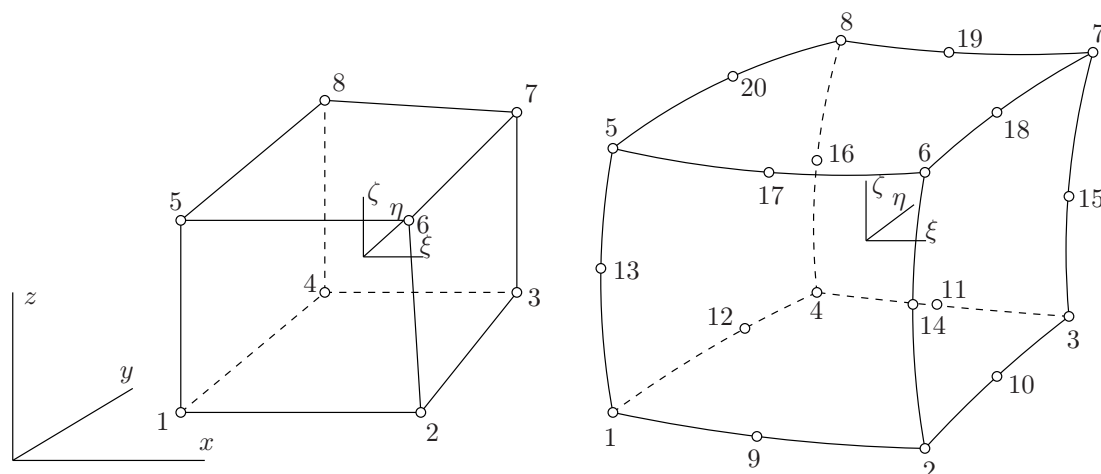
missä $\xi, \eta, \zeta \in [-1, 1]$ ovat peruskuution dimensiottomat koordinaatit, $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ ovat interpolaatiofunktiot ja n on elementin solmujen lukumäärä. Kuvassa 12.3 on esitetty 8-solmuinen, trilineaarinen, ja 20-solmuinen supistettu trikvadraattinen elementti.

Isoparametrinen 3D-elementin ratkaistavia suureita interpoloidaan samoilla interpolaatiofunktioilla kuin koordinaattejakin. Diffuusioelementin tapauksessa esimerkiksi lämpötilalle voidaan kirjoittaa elementin alueella

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i, \quad (12.22)$$

missä u_i , ovat solmupisteiden lämpötila-arvot.

Elementin jäykkyyismatriisin muodostamisessa tarvitaan $\mathbf{B}$ -matriisissa, esim. (12.5), globaalin koordinaatiston suhteen lausuttuja derivaattoja. Tämä voidaan johtaa ta-sotapauksen kaltaisesti tarkastelemalla isoparametrisen kuvauksen muunnosmatrii-



Kuva 12.3 Isoparametrinen 3D-hexahedrielementti.

sia. Tarkastellaan funktion

$$u(x, y, z) = u(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \quad (12.23)$$

derivaattojen lausekkeita peruskuution koordinaattien ξ, η, ζ suhteen

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (12.24a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (12.24b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad (12.24c)$$

joka voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix}, \quad \text{eli} \quad \mathbf{u}_{,\xi} = \mathbf{J}^T \mathbf{u}_{,x}, \quad (12.25)$$

missä $\mathbf{J}$ on geometriakuvauksen Jacobin matriisi. Kuten tasotapauksessakin on Jacobin matriisin determinantin oltava positiivinen jotta kuvaus olisi yksikäsitteinen ja suuntaisuuden säilyttävä.

Globaalit derivaatat voidaan nyt ratkaista peruskuution koordinaattien suhteen otettujen derivaattojen avulla

$$\mathbf{u}_{,x} = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{u}_{,\xi}. \quad (12.26)$$

Käänteismatriisin $\mathbf{J}^{-T}$ lausekkeeksi saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{-T} &= \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta} & -y_{,\xi} z_{,\zeta} - z_{,\xi} y_{,\zeta} & y_{,\xi} z_{,\eta} - z_{,\xi} y_{,\eta} \\ -x_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} x_{,\zeta} & x_{,\xi} z_{,\zeta} - z_{,\xi} x_{,\zeta} & -y_{,\xi} z_{,\eta} - z_{,\xi} y_{,\eta} \\ x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta} & -x_{,\xi} y_{,\zeta} - y_{,\xi} x_{,\zeta} & x_{,\xi} y_{,\eta} - y_{,\xi} x_{,\eta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (12.27)$$

missä

$$\det \mathbf{J} = \det \mathbf{J}^T = x_{,\xi}(y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta}) - y_{,\xi}(x_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} x_{,\zeta}) + z_{,\xi}(x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta}), \quad (12.28)$$

ja

$$x_{,\xi} = \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} x_i, \quad x_{,\eta} = \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} x_i, \quad x_{,\zeta} = \sum_{i=1}^n N_{i,\zeta} x_i \quad \text{jne.} \quad (12.29)$$

Tilavuusintegraalit $\int_V f dV$ lasketaan numeerisesti Gaussin menetelmällä

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta \\ &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f(x(\xi_i, \eta_j, \zeta_k), y(\xi_i, \eta_j, \zeta_k), z(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)) \det(\mathbf{J}) w_i w_j w_k, \end{aligned} \quad (12.30)$$

missä (ξ_i, η_j, ζ_k) ovat Gaussin integrointipisteet ja w_i, w_j, w_k ovat integrointipisteisiin liittyvät painokertoimet. Tavallisesti $m = n = p$.

Ekvivalentin pintakuormavektorin muodostamisessa joudutaan laskemaan integraaleja $\int_A f dA$ pinnan yli, esimerkiksi pinnalla $\zeta = a$, missä a on vakio. Lasketaan tämäkin integraali numeerisesti Gaussin menetelmällä

$$\begin{aligned} &\int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 f(x(\xi, \eta, \zeta = a), y(\xi, \eta, \zeta = a), z(\xi, \eta, \zeta = a)) \det(\mathbf{J}_a) d\xi d\eta \\ &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x(\xi_i, \eta_j, \zeta = a), y(\xi_i, \eta_j, \zeta = a), z(\xi_i, \eta_j, \zeta = a)) \det(\mathbf{J}_a) w_i w_j, \end{aligned} \quad (12.31)$$

missä $(\xi_i, \eta_j, \zeta = a)$ ovat Gaussin integrointipisteet pinnalla $\zeta = a$ ja w_i, w_j ovat painokertoimet, $\det(\mathbf{J}_a)$ on pinnan Jacobin determinatti kaarevalla pinnalla $\zeta = a$.

12.2.5 Solmuihin sidottu interpolaatio

12.2.5.1 Heksahedrielementti

Lagrangen ja Serendip tyyppisten elementtiperheiden konstruoiminen kolmidimensioisessa tapauksessa on suoraviivainen yleistys tasotapauksesta. Trilineaarisen elementin interpolaatiofunktioita voidaan kirjoittaa muodossa

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi_i\xi)(1 - \eta_i\eta)(1 - \zeta_i\zeta), \quad (12.32)$$

missä ξ_i, η_i ja ζ_i ovat solmun i koordinaatit peruskuutiossa, ja saavat siten arvot ± 1 .

Lagrangen tyyppinen trikavdraattinen elementti saadaan yksinkertaisesti

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = l_r^2(\xi)l_s^2(\eta)l_t^2(\zeta), \quad 0 \leq r, s, t, \leq 2, \quad (12.33)$$

ja missä toisen asteen Lagrangen interpolaatiopolynomia on merkitty $l_p^2(\cdot)$, katso luku 3.2.2. Trikavdaattisessa elementissä on 27 solmua, 8 nurkissa, 12 särmien keskellä, 6 sivutahkojen keskellä ja yksi alueen sisällä. Serendip tyyppinen supistetussa trikavdaattisessa elementissä ei ole sisäsolmua eikä sivutahkojen keskellä olevia solmuja, joten solmulukumääräksi tulee 20. Se on hyvin yleinen elementti useissa elementtimenetelmäohjelmistoissa. Mikäli elementin muoto ei ole säännöllinen prismamainen, sen tarkkuus on kuitenkin huonompi kuin vastaavan trikvadraattisen Lagrangen elementin. Supistetun trikvadraattisen elementin interpolaatiofunktioiksi saadaan:

- kärkisolmut, $\xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta)(-2 + \xi_i\xi + \eta_i\eta + \zeta_i\zeta) \quad (12.34)$$

- särmäsolmut joissa $\xi_i = 0, \eta_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta) \quad (12.35)$$

- särmäsolmut joissa $\eta_i = 0, \xi_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1$

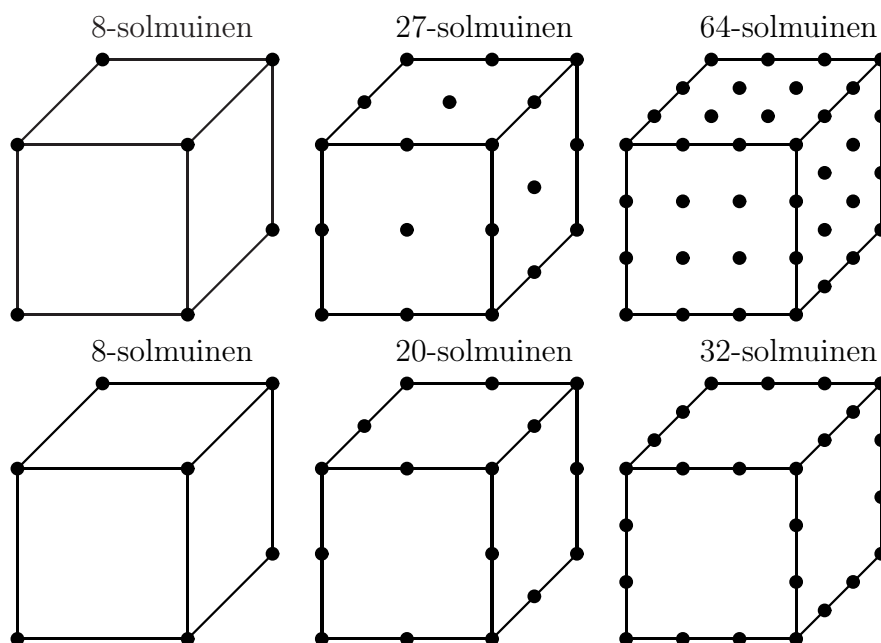
$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 - \eta^2)(1 + \zeta_i\zeta) \quad (12.36)$$

- särmäsolmut joissa $\zeta_i = 0, \xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 - \zeta^2). \quad (12.37)$$

Yleinen muoto hexahedrielementin Lagrangen interpolaatiolle on

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = l_r^{p_\xi}(\xi)l_s^{p_\eta}(\eta)l_t^{p_\zeta}(\zeta), \quad (12.38)$$



Kuva 12.4 Lagrangen trilineaarinen, trikvadraattinen ja trikuubinen elementti (yllä) sekä vastaavat redusoidut, Serendip tyypiset elementit (alla).

missä interpolaation aste paikallisissa ξ, η, ζ suunnissa on p_ξ, p_η, p_ζ ja missä $0 \leq r \leq p_\xi, 0 \leq s \leq p_\eta, 0 \leq t \leq p_\zeta$.

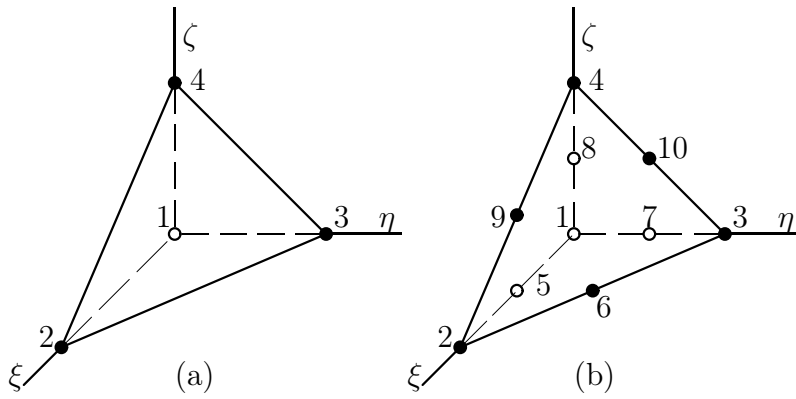
12.2.5.2 Tetraedrielementti

Isoparametrinen nelisolmuisen tetraedrielementin, kuva 12.5a, interpolaatiofunktiot voidaan kirjoittaa peruselementin koordinaattien avulla seuraavasti

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \xi - \eta - \zeta, & N_3 &= \eta, \\ N_2 &= \xi, & N_4 &= \zeta. \end{aligned} \quad (12.39)$$

Kvadraattisessa tetraedrielementissä on kymmenen solmua joten se sisältää täydellisen kvadraattisen polynomin

$$1, \xi, \eta, \zeta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2, \eta\zeta, \zeta^2, \xi\zeta.$$



Kuva 12.5 Lineaarinen ja kvadraattinen tetraedrielementti.

Interpolaatiofunktiot voidaan konstruoida samalla tavalla kuin kolmioelementillekin ja ne ovat kuvan 12.5b solmunumeroinnilla

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -L_1(1 - 2L_1), & N_6 &= 4\xi\eta, \\
 N_2 &= -\xi(1 - 2\xi), & N_7 &= 4\eta L_1, \\
 N_3 &= -\eta(1 - 2\eta), & N_8 &= 4\xi\zeta, \\
 N_4 &= -\zeta(1 - 2\zeta), & N_9 &= 4\eta\zeta, \\
 N_5 &= 4\xi L_1, & N_{10} &= 4\zeta L_1,
 \end{aligned} \tag{12.40}$$

missä $L_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta$.

12.2.6 Hierarkinen interpolaatio

Käsitellään seuraavassa vain heksahedrielementin hierarkisia C_0 -interpolaatiofunktioita. Hierarkisen kannan määrittely voidaan tehdä myös muille kuvassa 12.2 esiintyvillä elementtigeometrioille. Yleistämällä tasotapauksen hierarkisen järjestelmän, kolmi-dimensionoiset hierarkiset interpolaatiofunktiot voidaan jakaa neljään ryhmään.

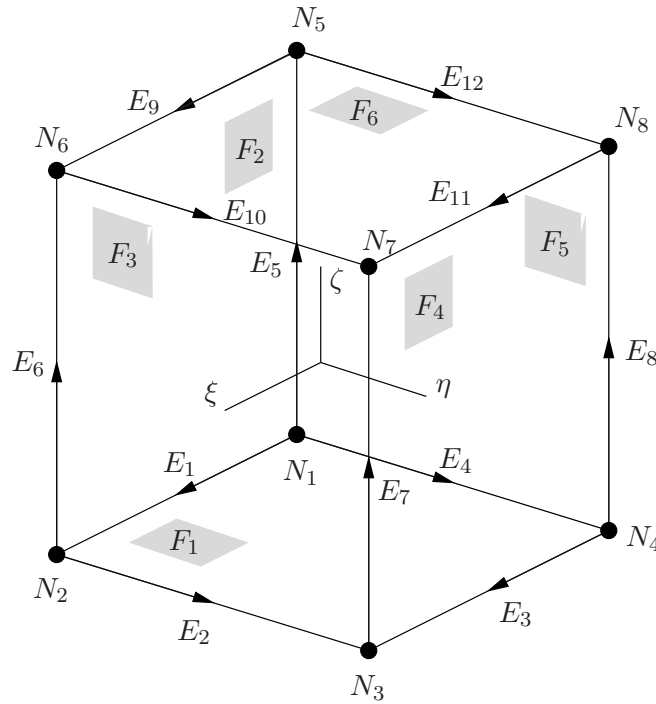
1. *Solmaufunktiot* ovat tavanomaiset trilineaariset interpolaatiopolynomit

$$N_{1,1,1}^{N_i} = \frac{1}{8}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta). \tag{12.41}$$

2. *Särmäfunctiot* määritellään erikseen kullakin kahdellatoista särmällä E_k , $k = 1, \dots, 12$. Esimerkiksi särmällä E_1 (katso kuvaa 12.6), jolla $\eta = \zeta = -1$, särmäinterpolaatiofunktiot ovat

$$N_{i,1,1}^{E_1} = \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 - \zeta)\psi_i(\xi), \tag{12.42}$$

missä ψ_i funktiot on määritelty luvussa 3.2.2.



$$\Omega_{st}^h = [(-1, 1) \times (-1, 1) \times (-1, 1)]$$

Kuva 12.6 Heksahedrielementti; solmujen, särmien ja tahkojen numerointi.

3. *Tahkofunktiot* määritellään kullakin kuudella sivutahkolla F_k . Esimerkiksi sivutahkolla F_1 , jolla $\zeta = -1$, interpolaatiofunktiot ovat

$$N_{i,j,1}^{F_1} = \frac{1}{2}(1 - \zeta)\psi_i(\xi)\psi_j(\eta). \quad (12.43)$$

4. *Sisäiset muodot* ovat puhtaasti elementin paikallisia interpolaatiofunktioita, joilla ei ole kytkentää ympäröivien elementtien vapausasteiden kanssa.

$$N_{i,j,k}^{\text{int}} = \psi_i(\xi)\psi_j(\eta)\psi_k(\zeta). \quad (12.44)$$

Alaindeksit i, j, k interpolaatiofunktioiden kaavoissa merkitsevät polynomin astetta paikallisessa suunnassa ξ, η, ζ .

Hierarkisessa järjestelmässä voidaan myös määritellä Lagrangen tyyppinen tensoritulointerpolaatio tai Serendip tyyppinen redusoitu interpolaatio. Särmäinterpolatiot ovat kummassakin järjestelmässä samat. Sivutahkoihin liittyvät interpolatiot voidaan määritellä esimerkiksi tahkolle F_1 kaavan (12.43) mukaisesti missä i ja j

ovat

Serendip	Lagrange	
$i = 2, \dots, p_\xi - 2$	$i = 2, \dots, p_\xi,$	
$j = 2, \dots, p_\eta - 2$	$i = 2, \dots, p_\eta,$	
$i + j = 4, \dots, \max(p_\xi, p_\eta).$		(12.45)

Sisäisille muodoille (12.44) vastaavasti

Serendip	Lagrange	
$i = 2, \dots, p_\xi - 4$	$i = 2, \dots, p_\xi,$	
$j = 2, \dots, p_\eta - 4$	$i = 2, \dots, p_\eta,$	
$k = 2, \dots, p_\zeta - 4$	$i = 2, \dots, p_\zeta,$	
$i + j + k = 6, \dots, \max(p_\xi, p_\eta, p_\zeta)$		(12.46)

Edellä on oletettu anisotrooppinen interpolaatio, missä paikallisten suuntien interpolaation aste voi vaihdella.

Harjoitustehtäviä

1. Mitkä ξ, η, ζ polynomien termit sisältää supistettu trikvadraattinen (Serendip) interpolaatio.
2. Mikä on pienin luku tetraedrielementtejä, joista voidaan muodostaa heksaedrielementti?
3. Konstruoi kuubisen tetraedrielementin interpolaatiofunktiot.

Luku 13

Kuorielementtejä

13.1 Tasokuorielementti

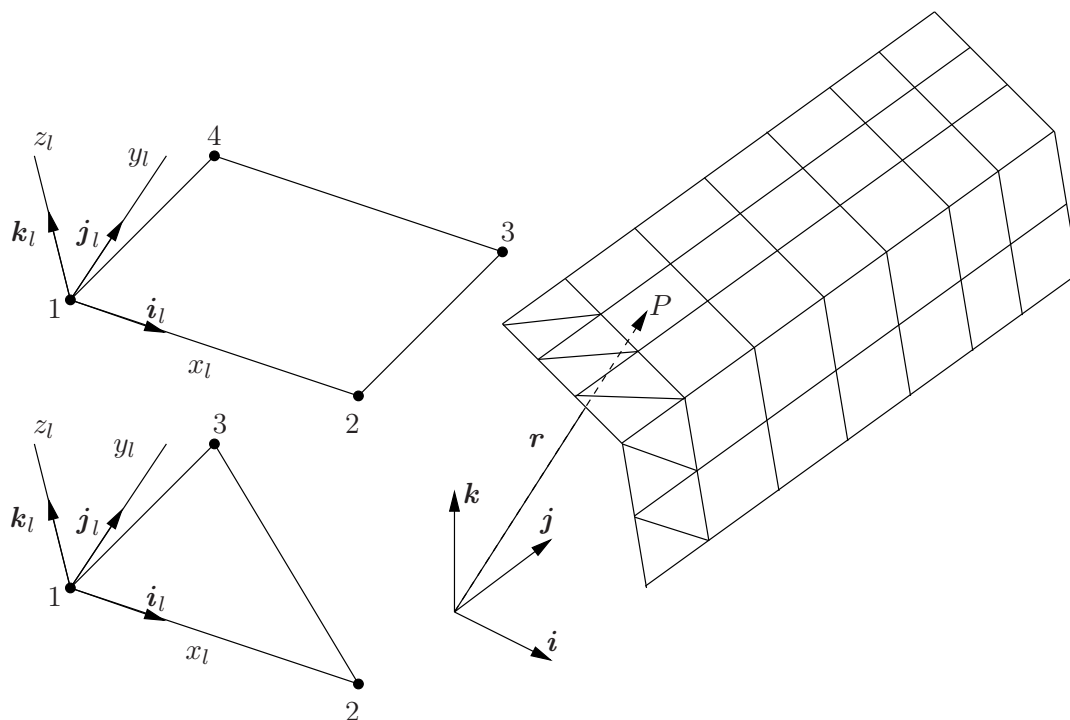
Edellä on käsitelty erikseen levyjen ja laattojen analysointia elementtimenetelmällä. Tason suunnassa kuormitettuun levyyn tulee kalvojännityksiä ja tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa kuormitettuun levyyn (laattaan) syntyy taivutusjännityksiä. Kaarevaan kuorirakenteeseen (tai taitekuoreen) syntyy sekä kalvo- että taivutusjännityksiä. Kuorirakenne voi olla kaareva yhteen suuntaan, kuten sylinterikuori, tai kahteen suuntaan (kaksoiskaareva), kuten esim. pallokuori. Sylinteripinnan voi taivuttaa takaisin tasoksi, mutta kaksoiskaarevaa pallopintaa ei voi, kuten kartan tekijät hyvin tietävät. Pallokuoren pääkaarevuudet ovat samanmerkkiset, mutta esim. hyperbelikuoren pääkaarevuudet ovat erimerkkiset. Kuorten rakenneteoriassa on kehitetty oma teoria laakeille kuorille. Hyvin laakealle kuorelle voidaan käyttää suoraan laattateoriaa, jossa laakean kuoren kaarevuus otetaan huomioon kinemaattisissa yhtälöissä alkukaarevuutena. Korkean kuoren (engl. deep shell) tapauksessa on käytettävä kuorelle johdettuja kinemaattisia yhtälöitä.

Jakamalla kuoren pinta tasomaisiin osiin, esim. kolmioihin tai nelikulmioihin, voidaan jakoa tihentämällä kuvata kaarevaa pintaa tarkemmin ja tarkemmin. Yksinkertainen kuorielementti saadaankin aikaiseksi yhdistämällä aiemmin esitellyt levy- ja laattaelementit tasokuorielementin omassa koordinaatistossa ja muuntamalla sitten näin syntynyt kuorielementti yhteiseen rakennekoordinaatistoon muunnosmatriiseilla, samaan tapaan kuin edellä tehtiin kehäsauvaelementille kaarien analysoinnissa.

Jaetaan tasokuori esim. kolmi- ja/tai nelisolmuisiin elementteihin. Kuoren keskipinnan mielivaltaisen pisteen P paikkavektori on

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (13.1)$$

missä $\mathbf{i} \equiv \mathbf{i}_g$, $\mathbf{j} \equiv \mathbf{j}_g$ ja $\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}_g$ ovat globaalisen (rakennekohtaisen) koordinaatiston yksikkökantavektorit (indeksi g voidaan usein jättää pois). Määritellään paikallinen



Kuva 13.1 Tasokuori, neli- ja kolmisolmuiset elementit

kantavektori $\mathbf{i}_l$ sekä kolmi- että nelisolmuiselle elementille kaavalla

$$\mathbf{i}_l = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}, \quad (13.2)$$

missä

$$\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\| = \sqrt{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)} \quad (13.3)$$

ja $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ ovat elementin solmujen 1 ja 2 paikkavektorit. Merkitsemällä kolmisolmuisen elementin tapauksessa

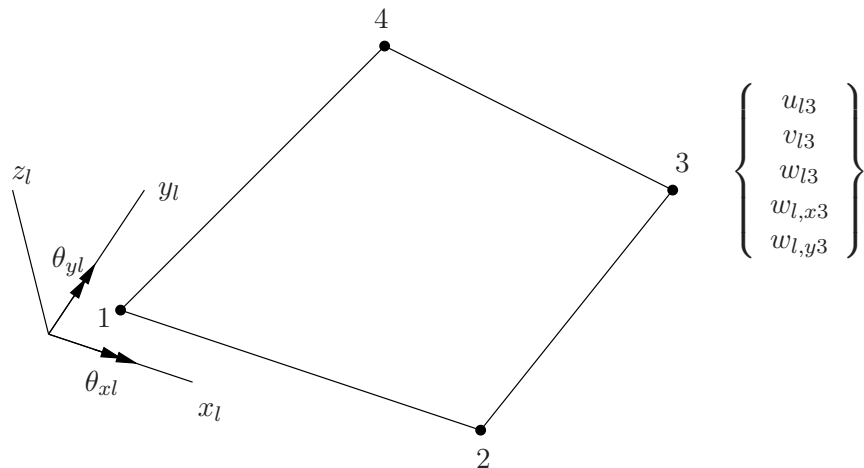
$$\mathbf{r}_{13} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 \quad (13.4)$$

määritellään paikallinen, tasoa vastaan kohtisuora yksikkövektori

$$\mathbf{k}_l = \frac{\mathbf{i}_l \times \mathbf{r}_{13}}{\|\mathbf{i}_l \times \mathbf{r}_{13}\|}, \quad (13.5)$$

ja lopuksi määritetään paikallisen akselin y_l suuntainen yksikkövektori

$$\mathbf{j}_l = \mathbf{k}_l \times \mathbf{i}_l. \quad (13.6)$$



Kuva 13.2 Nelisolmuinen tasokuorielementti, pisteet 1, 2, 3 ja 4 samassa tasossa.

Paikallisessa koordinaatistossa (x_l, y_l, z_l) tasokuoren siirtymät ovat

$$\begin{aligned} u_l(x_l, y_l, z_l) &= u_c(x_l, y_l) + z_l \theta_{y_l}(x_l, y_l), \\ v_l(x_l, y_l, z_l) &= v_c(x_l, y_l) - z_l \theta_{x_l}(x_l, y_l), \\ w_l(x_l, y_l, z_l) &= w_c(x_l, y_l), \end{aligned} \quad (13.7)$$

missä u_c ja v_c ovat kuoren keskipinnan siirtymät paikallisessa koordinaatistossa, θ_{x_l} ja θ_{y_l} ovat kiertymät paikallisten x_l - ja y_l -akseleiden ympäri. Ottamalla huomioon, että Kirchhoffin laattateoriassa poikittaiset leikkausmuodonmuutokset häviävät, eli

$$\gamma_{x_l z_l} = \gamma_{y_l z_l} = 0, \quad (13.8)$$

saadaan kiertymät paikallisten akselien ympäri eliminotua kaavoilla

$$\theta_{y_l} = -w_{l,x_l}, \quad \theta_{x_l} = w_{l,y_l} \quad (13.9)$$

ja siirtymien kaavat muotoon

$$\begin{aligned} u_l &= u_c - z_l w_{l,x_l}, \\ v_l &= v_c - z_l w_{l,y_l}. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Muodonmuutokset ovat paikallisessa koordinaatistossa

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x_l} &= u_{l,x_l} - z_l w_{l,x_l y_l}, \\ \varepsilon_{y_l} &= v_{l,x_l} - z_l w_{l,y_l y_l}, \\ \gamma_{x_l y_l} &= u_{l,y_l} + v_{l,x_l} - 2z_l w_{l,x_l y_l}.\end{aligned}\tag{13.11}$$

Tasokuorielementin solmun i vapausasteet ovat

$$\mathbf{u}_{li}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{li} \\ \mathbf{w}_{li} \end{Bmatrix}\tag{13.12}$$

missä

$$\mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} u_l \\ v_l \end{Bmatrix}_i, \quad \mathbf{w}_i = \begin{Bmatrix} w_l \\ w_{l,x_l} \\ w_{l,y_l} \end{Bmatrix}_i\tag{13.13}$$

ovat levy- laattavapausasteet solmussa i . Jokaisessa solmussa on siten viisi vapausastetta. Järjestetään vapausasteet ensin (nelisolmuisen elementin tapauksessa) järjestykseen

$$\mathbf{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} u_{l1}^{(e)} & v_{l1}^{(e)} & \cdots & u_{l4}^{(e)} & v_{l4}^{(e)} & w_{l1}^{(e)} & w_{l,x_{l1}}^{(e)} & w_{l,y_{l1}}^{(e)} & \cdots & w_{l4}^{(e)} & w_{l,x_{l4}}^{(e)} & w_{l,y_{l4}}^{(e)} \end{bmatrix}^T.\tag{13.14}$$

Tasonsuuntaisilla kalvomuodonmuutoksilla ei ole kytkentää laatan käyristymisiin, ja elementin jäykkyysmatriisi voidaan kirjoittaa lohkomuodossa, kuten kehäsauelementin tapauksessa,

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m^{(e)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_b^{(e)} \end{bmatrix},\tag{13.15}$$

missä indeksit m ja b viittaavat kalvo- ja taivutustilan suureisiin, (kuten aiemmin kehäsauelementille), ja e on kyseisen elementin numero.

Otetaan uudelleen käyttöön kiertymävapausasteet θ_{x_l} ja θ_{y_l}

$$\begin{Bmatrix} w_{l,x_l} \\ w_{l,y_l} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x_l} \\ \theta_{y_l} \end{Bmatrix},\tag{13.16}$$

ja solmun kuudenneksi vapausasteeksi otetaan kiertymä akselin z_l ympäri, θ_{z_l} . Huomataan, että solmuihin i ja j liittyvä tasokuorielementin lohko on edullista järjestää muotoon

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_b^{(e)})_{ij} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & (\mathbf{K}_m^{(e)})_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\tag{13.17}$$

missä lohkoon $(\mathbf{K}_b^{(e)})_{ij}$ muunnos (13.16) on ajateltu tehdyksi.

Jos paikallisen koordinaatiston kantavektorit ovat $\mathbf{i}_l, \mathbf{j}_l, \mathbf{k}_l$ ja globaalisen koordinaatiston kantavektorit puolestaan ovat $\mathbf{i}_g, \mathbf{j}_g, \mathbf{k}_g$, niin paikallisten kantavektoreiden komponentit globaalisten kantavektoreiden suunnille (suuntakosinit) ovat

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i}_l \cdot \mathbf{i}_g \\ \mathbf{i}_l \cdot \mathbf{j}_g \\ \mathbf{i}_l \cdot \mathbf{k}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{j}_l \cdot \mathbf{i}_g \\ \mathbf{j}_l \cdot \mathbf{j}_g \\ \mathbf{j}_l \cdot \mathbf{k}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{i}_g \\ \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{j}_g \\ \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{k}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix}. \quad (13.18)$$

Siirtymävektori $\mathbf{u}$ paikallisessa ja globaalisessa koordinaatistossa esitettynä on

$$\mathbf{u} = u_l \mathbf{i}_l + v_l \mathbf{j}_l + w_l \mathbf{k}_l \quad (13.19)$$

ja

$$\mathbf{u} = u_g \mathbf{i}_g + v_g \mathbf{j}_g + w_g \mathbf{k}_g. \quad (13.20)$$

Esimerkiksi komponentti u_l on

$$\begin{aligned} u_l &= (u_g \mathbf{i}_g + v_g \mathbf{j}_g + w_g \mathbf{k}_g) \cdot \mathbf{i}_l = \\ &= u_g (\mathbf{i}_l \cdot \mathbf{i}_g) + v_g (\mathbf{i}_l \cdot \mathbf{j}_g) + w_g (\mathbf{i}_l \cdot \mathbf{k}_g) \\ &= u_g l_1 + v_g m_1 + w_g n_1. \end{aligned} \quad (13.21)$$

Samalla tavalla johdetaan muut tarvittavat muunnoskaavat.

Paikallisen koordinaatiston ja globaalisen koordinaatiston vapausasteiden välillä ovat yhteydet

$$\begin{Bmatrix} u_l \\ v_l \\ w_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_g \\ v_g \\ w_g \end{Bmatrix} \quad (13.22)$$

ja

$$\begin{Bmatrix} \theta_{x_l} \\ \theta_{y_l} \\ \theta_{z_l} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x_g} \\ \theta_{y_g} \\ \theta_{z_g} \end{Bmatrix}. \quad (13.23)$$

Merkitään, että

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}. \quad (13.24)$$

Solmun i vapausasteiden muunnosmatriisi on

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_i \end{bmatrix}. \quad (13.25)$$

Yhden elementin osuus sisäisen virtuaalisen työn yhtälössä on

$$(\delta \mathbf{u}_l^{(e)})^T \mathbf{K}_l^{(e)} \mathbf{u}_l^{(e)} = (\delta \mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{K}_l^{(e)} \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = (\delta \mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (13.26)$$

ja elementin jäykkyyismatriisi lausuttuna globaalisen koordinaatiston suhteen on siten

$$\mathbf{K}^{(e)} \equiv \mathbf{K}_g^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{K}_l^{(e)} \mathbf{T}^{(e)}. \quad (13.27)$$

Elementin muunnosmatriisi koostuu solmujen muunnosmatriiseista. Esimerkiksi nelisolmuisen elementin tapauksessa koko elementin muunnosmatriisi on

$$\mathbf{T}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 \end{bmatrix}. \quad (13.28)$$

Solmuvapausasteita

$$\mathbf{u}_{li}^{(e)} = [u_l \quad v_l \quad w_l \quad \theta_{x_l} \quad \theta_{y_l} \quad \theta_{z_l}]_i^T \quad (13.29)$$

vastaava paikallisen koordinaatiston solmun i kuormavektori on

$$\bar{\mathbf{f}}_{li}^{(e)} = [\bar{f}_{u_l} \quad \bar{f}_{v_l} \quad \bar{f}_{w_l} \quad \bar{f}_{\theta_{x_l}} \quad \bar{f}_{\theta_{y_l}} \quad \bar{f}_{\theta_{z_l}}]_i^T. \quad (13.30)$$

Paikallisen koordinaatiston suhteen lausuttu ulkoisen virtuaalisen työn termi on

$$(\delta \mathbf{u}_{li}^{(e)})^T \bar{\mathbf{f}}_{li}^{(e)} = (\delta \mathbf{u}_{gi}^{(e)})^T \mathbf{T}_i^{(e)T} \bar{\mathbf{f}}_{li}^{(e)} = (\delta \mathbf{u}_{gi}^{(e)})^T \bar{\mathbf{f}}_{gi}^{(e)}, \quad (13.31)$$

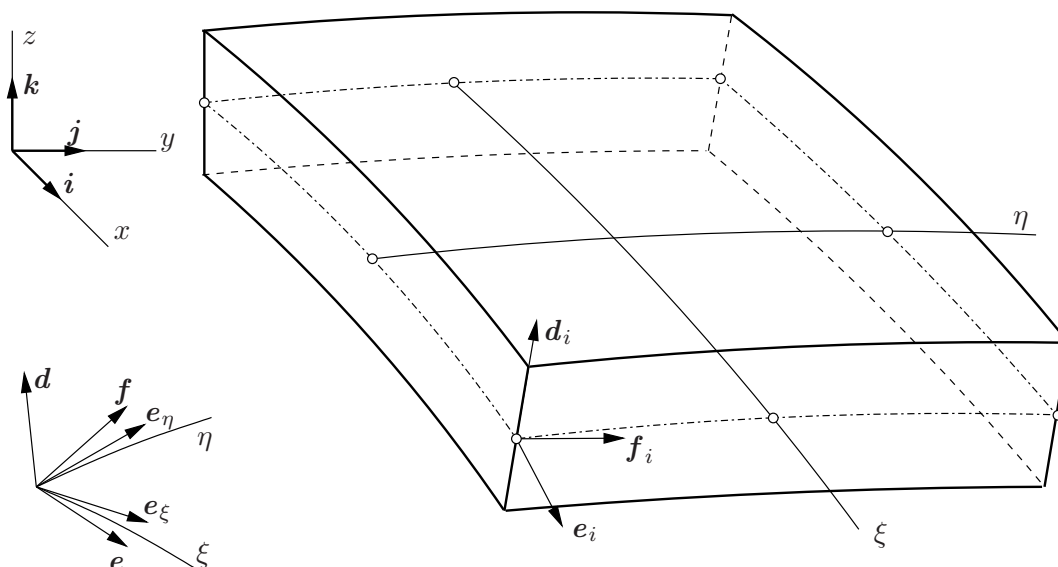
joten

$$\bar{\mathbf{f}}_i^{(e)} \equiv \bar{\mathbf{f}}_{gi}^{(e)} = \mathbf{T}_i^{(e)T} \bar{\mathbf{f}}_{li}^{(e)} \quad (13.32)$$

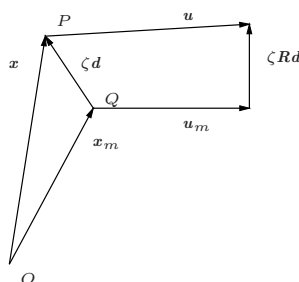
ja elementin koko kuormavektorin muunnos on

$$\bar{\mathbf{f}}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)T} \bar{\mathbf{f}}_l^{(e)}. \quad (13.33)$$

Jos usempi tasokuorielementti on samassa tasossa, niin rakenteen jäykkyyismatriisista tulee singulaarinen. Tämä voidaan estää lisäämällä vapausastetta θ_{z_l} vastaavaan kohtaan jäykkyyismatriisin diagonaalille pieni luku, joka on riittävän suuri estämään singulaarisuuden, mutta ei vaikuta haitallisesti tuloksiin. Pienen luvun lisääminen diagonaalille tarkoittaa ko. kiertymävapausasteen kiinnittämistä jousella ympäröivään maailmaan. Rationaalisempi tapa on käyttää kuorielementin osana levyelementtiä, jossa on valmiina paikallisen akseliston normaalikiertymä θ_{z_l} , (engl. drilling degree of freedom).



Kuva 13.3 Isoparametrinen kuorielementti.



Kuva 13.4 Siirtymävektori.

13.2 Kaareva, isoparametrinen kuorielementti

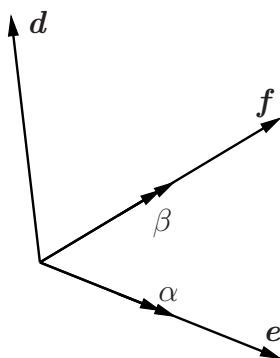
13.2.1 Kuorielementin geometriset suureet

Tarkastellaan yleistä, mielivaltaisen muotoista ohutta kuorta kolmiulotteisessa avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Kuoren mielivaltaisen pisteen P paikkavektori suorakulmaisessa koordinaatistossa (x, y, z) on

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{x}_m(\xi, \eta) + \zeta \mathbf{d}(\xi, \eta), \quad (13.34)$$

missä $\xi, \eta \in [-1, 1]$ ovat käyräviivaiset koordinaatit, joiden avulla parametrisoidaan kuoren keskipinta, $(\xi, \eta) \in \mathcal{M}$, kuoren paksuuden suunnassa koordinaatti $z_l = \zeta t \in \mathcal{H} = [-\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t]$, $t = t(\xi, \eta)$ on kuoren paksuus, $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}(\xi, \eta, 0)$ on kuoren keskipinnalla olevan pisteen Q paikkavektori, jonka päätepiste on samalla ζ -viivalla kuin käsiteltävän, mielivaltaisen pisteen P paikkavektorin päätepiste, $\mathbf{d}$ on suunta-vektori, jonka pituus on yksi eli $\|\mathbf{d}\| = 1$.

Suorakulmaisen peruskoordinaatiston yksikkökantavektorit ovat $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$, ja



Kuva 13.5 Rotaatiot α ja β paikallisten akselien ympäri.

paikkavektori $\mathbf{x}$ voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (13.35)$$

matriisimerkinnöin

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (13.36)$$

Määritellään kuoren keskipinnan tangenttitasossa keskenään ortogonaaliset vektorit $\mathbf{e}$ ja $\mathbf{f}$, jotka ovat kohtisuorassa vektoria $\mathbf{d}$ vastaan. Vektorikolmikon $[\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{d}]$ konstruointia käsitellään myöhemmin.

Kuoren mielivaltaisen pisteen P siirtymävektori $\mathbf{u}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{u}_m(\xi, \eta) + \zeta \mathbf{R}(\xi, \eta) \mathbf{d}(\xi, \eta), \quad (13.37)$$

missä $\mathbf{u}_m$ on kuoren keskipinnan vastaavan pisteen Q siirtymä ja $\mathbf{R}$ on vektorin $\mathbf{d}$ rotaatiota esittävä matriisi, kuva 13.4.

Pienten rotaatioiden tapauksessa lineaarisessa kuoriteoriassa kaava (13.37) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_m + \zeta(-\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{e}), \quad (13.38)$$

missä α ja β ovat kiertymät paikallisten kantavektoreiden $\mathbf{e}$ ja $\mathbf{f}$ ympäri, kuva 13.5, ja otaksutaan, että rotaatio vektorin $\mathbf{d}$ ympäri on nolla.

Koordinaattivivojen ξ , η ja ζ tangenttivektorit ovat

$$\mathbf{g}_\xi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}, \quad \mathbf{g}_\eta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta}, \quad \mathbf{g}_\zeta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta}, \quad (13.39)$$

Käyräviivaisen koordinaatiston kantavektorit etäisyydellä ζ kuoren keskipinnalta

ovat

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_\xi &= \mathbf{x}_{,\xi} = \mathbf{x}_{m,\xi} + \zeta \mathbf{d}_{,\xi}, \\ \mathbf{g}_\eta &= \mathbf{x}_{,\eta} = \mathbf{x}_{m,\eta} + \zeta \mathbf{d}_{,\eta}, \\ \mathbf{g}_\zeta &= \mathbf{x}_{,\zeta} = \mathbf{d}.\end{aligned}\tag{13.40}$$

Kuoren keskipinnalla $\mathcal{M}$, ($\zeta = 0$), kantavektorit ovat

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_\xi(\xi, \eta) &= \mathbf{g}_\xi(\xi, \eta, 0), \\ \mathbf{a}_\eta(\xi, \eta) &= \mathbf{g}_\eta(\xi, \eta, 0).\end{aligned}\tag{13.41}$$

Paikallinen suorakulmainen koordinaatisto pinnalla $\zeta = \text{vakio}$ voidaan muodostaa vektoreiden $\mathbf{g}_\xi$, $\mathbf{g}_\eta$ ja $\mathbf{g}_\zeta$ avulla. Ohuen kuoren tapauksessa voidaan jännitysten laskentaan käyttää kuoren keskipinnalla paikallista koordinaatistoa, joka voidaan tehdä esim. seuraavalla tavalla. Muodostetaan ensin yksikkövektorit (integroitipisteessä)

$$\mathbf{e}_\xi = \frac{\mathbf{a}_\xi}{\|\mathbf{a}_\xi\|}, \quad \mathbf{e}_\eta = \frac{\mathbf{a}_\eta}{\|\mathbf{a}_\eta\|}.\tag{13.42}$$

Keskipintaa vastaan kohtisuora yksikkövektori $\mathbf{d}$ voidaan määritellä kaavalla

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta}{\|\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta\|}.\tag{13.43}$$

Määritellään edelleen apuvektorit

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\eta}{\|\mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\eta\|}, \quad \mathbf{q} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{d}}{\|\mathbf{p} \times \mathbf{d}\|},\tag{13.44}$$

ja niiden avulla muodostetaan paikallisen koordinaatiston referenssitason suuntaiset, vektoria $\mathbf{d}$ vastaan kohtisuorat yksikkökantavektorit

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{q}}{\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|}, \quad \mathbf{f} = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{q}}{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|}.\tag{13.45}$$

Näin saadaan koordinaatisto, jonka kantavektorit keskipinnalla $\zeta = 0$ ovat lähinnä vektoreita $\mathbf{e}_\xi$ ja $\mathbf{e}_\eta$.

Elementin solmupisteessä i lähtötietona tunnetaan (tai voidaan laskea elementin ala- ja yläpinnan kahden solmupisteen avulla) vektori $\mathbf{d}_i$. Vektoria $\mathbf{d}_i$ vastaan kohtisuora vektori, (x, z) -tason suunnassa, on

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{d}_i}{\|\mathbf{j} \times \mathbf{d}_i\|},\tag{13.46}$$

tai jos $\mathbf{d}_i$ on sattumalta vektorin $\mathbf{j}$ suuntainen, niin

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{d}_i \times \mathbf{i}}{\|\mathbf{d}_i \times \mathbf{i}\|}, \quad (13.47)$$

$\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ ovat globaalin koordinaatiston kaksi kantavektoria. Lopuksi kolmas kanta-vektori solmussa i lasketaan kaavalla

$$\mathbf{f}_i = \frac{\mathbf{d}_i \times \mathbf{e}_i}{\|\mathbf{d}_i \times \mathbf{e}_i\|}. \quad (13.48)$$

13.2.2 Siirtymien interpolointi

Isoparametrinen kaarevan kuorielementin geometria voidaan määritellä kaavalla

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi, \eta) \mathbf{x}_{mi} + \frac{1}{2} \zeta t_i N_i(\xi, \eta) \mathbf{d}_i] \quad (13.49)$$

missä $N_i(\xi, \eta)$ ovat muotofunktiot, vektorin $\mathbf{x}_i \equiv \mathbf{x}_{mi}$ komponentit (x_i, y_i, z_i) ovat solmujen $i = 1, \dots, n$ koordinaatit, t_i on elementin paksuus solmun i kohdalla. Mitta t_i ei kuitenkaan välttämättä ole todellinen paksuus. Vektorin $\mathbf{d}$ komponentit globaalin kannan suhteen ovat

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix}. \quad (13.50)$$

Siirtymiä u, v, w interpoloidaan samalla tavalla kuin geometriaa kaavalla

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi, \eta) \mathbf{u}_{mi} + \frac{1}{2} \zeta t_i N_i(\xi, \eta) (-\alpha \mathbf{f}_i + \beta \mathbf{e}_i)], \quad (13.51)$$

missä solmupisteen i siirtymävektorin $\mathbf{u}_i \equiv \mathbf{u}_{mi}$ komponentit ovat (u_i, v_i, w_i) ja vektoreiden $\mathbf{e}$ ja $\mathbf{f}$ komponentit ovat

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix}. \quad (13.52)$$

13.2.3 Kuoren muodonmuutokset

Globaalisessa koordinaatistossa (x, y, z) lausutut muodonmuutokset ovat venymät

$$\varepsilon_x = u_{,x}, \quad \varepsilon_y = v_{,y}, \quad \varepsilon_z = w_{,z} \quad (13.53)$$

ja leikkausmuodonmuutokset

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}, \quad \gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y}, \quad \gamma_{xz} = u_{,z} + w_{,x}. \quad (13.54)$$

Derivaatat koordinaattien x , y ja z suhteen voidaan määrittää derivoinnin ketjusäännön avulla. Siirtymäkomponentin $u(\xi, \eta, \zeta)$ derivaatat käyräviivaisten koordinaattien ξ , η ja ζ suhteen ovat

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (13.55)$$

missä

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (13.56)$$

ja $\mathbf{J}$ on kuvauksen $(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow (x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta))$ Jacobin matriisi.

Matriisin $\mathbf{J}^T$ käänteismatriisi on, kuten 3D-isoparametrisen elementin tapauksessa,

$$\mathbf{J}^{-T} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta} & -y_{,\xi} z_{,\zeta} - z_{,\xi} y_{,\zeta} & y_{,\xi} z_{,\eta} - z_{,\xi} y_{,\eta} \\ -x_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} x_{,\zeta} & x_{,\xi} z_{,\zeta} - z_{,\xi} x_{,\zeta} & -y_{,\xi} z_{,\eta} - z_{,\xi} y_{,\eta} \\ x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta} & -x_{,\xi} y_{,\zeta} - y_{,\xi} x_{,\zeta} & x_{,\xi} y_{,\eta} - y_{,\xi} x_{,\eta} \end{bmatrix}, \quad (13.57)$$

missä

$$\det \mathbf{J} = \det \mathbf{J}^T = x_{,\xi}(y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta}) - y_{,\xi}(x_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} x_{,\zeta}) + z_{,\xi}(x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta}) \quad (13.58)$$

on Jakobin matriisin determinantti ja globaalisten, karteesisten koordinaattien derivaatat luonnollisten koordinaattien suhteen ovat

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} [x_i + \frac{1}{2} t_i \zeta l_3], & x_{,\eta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} [x_i + \frac{1}{2} t_i \zeta l_3], & x_{,\zeta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\zeta} [x_i + \frac{1}{2} t_i \zeta l_3], \\ y_{,\xi} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} [y_i + \frac{1}{2} t_i \zeta m_3], & y_{,\eta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} [y_i + \frac{1}{2} t_i \zeta m_3], & y_{,\zeta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\zeta} [y_i + \frac{1}{2} t_i \zeta m_3], \\ z_{,\xi} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} [z_i + \frac{1}{2} t_i \zeta n_3], & z_{,\eta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} [z_i + \frac{1}{2} t_i \zeta n_3], & z_{,\zeta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\zeta} [z_i + \frac{1}{2} t_i \zeta n_3]. \end{aligned} \quad (13.59)$$

Merkitään

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}^{-T}, \quad (13.60)$$

jolloin

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (13.61)$$

Matriisin $\mathbf{H}$ komponenttien avulla lausutaan muotofunktioiden derivaatat

$$\begin{aligned} N_{i,x} &= H_{11}N_{i,\xi} + H_{12}N_{i,\eta}, \\ N_{i,y} &= H_{21}N_{i,\xi} + H_{22}N_{i,\eta}, \\ N_{i,z} &= H_{31}N_{i,\xi} + H_{32}N_{i,\eta} \end{aligned} \quad (13.62)$$

ja derivaatat

$$\zeta_{,x} = H_{13}, \quad \zeta_{,y} = H_{23}, \quad \zeta_{,z} = H_{33}. \quad (13.63)$$

Globaalisessa koordinaatistossa (x, y, z) lausutut virtuaaliset muodonmuutokset ovat

$$\delta \varepsilon_x = \delta u_{,x}, \quad \delta \varepsilon_y = \delta v_{,y}, \quad \delta \varepsilon_z = \delta w_{,z}, \quad (13.64)$$

$$\delta \gamma_{xy} = \delta u_{,y} + \delta v_{,x}, \quad \delta \gamma_{yz} = \delta v_{,z} + \delta w_{,y}, \quad \delta \gamma_{xz} = \delta u_{,z} + \delta w_{,x}. \quad (13.65)$$

Elementin kinemaattiset yhtälöt ovat

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B} \delta \mathbf{u}^{(e)} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \delta \mathbf{u}_i^{(e)}, \end{aligned} \quad (13.66)$$

missä solmuun i liittyvä $\mathbf{B}$ -matriisin lohko on

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_{1i} + \zeta \mathbf{B}_{2i}, \quad (13.67)$$

$$\mathbf{B}_{1i} = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i N_i H_{13} l_2 & \frac{1}{2}t_i N_i H_{13} l_1 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & -\frac{1}{2}t_i N_i H_{23} m_2 & \frac{1}{2}t_i N_i H_{23} m_1 \\ 0 & 0 & N_{i,z} & -\frac{1}{2}t_i N_i H_{33} n_2 & \frac{1}{2}t_i N_i H_{33} n_1 \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & -\frac{1}{2}t_i N_i (H_{23} l_2 + H_{13} m_2) & \frac{1}{2}t_i N_i (H_{23} l_1 + H_{13} m_1) \\ 0 & N_{i,z} & N_{i,y} & -\frac{1}{2}t_i N_i (H_{33} m_2 + H_{23} n_2) & \frac{1}{2}t_i N_i (H_{33} m_1 + H_{23} n_1) \\ N_{i,z} & 0 & N_{i,x} & -\frac{1}{2}t_i N_i (H_{33} l_2 + H_{13} n_2) & \frac{1}{2}t_i N_i (H_{33} l_1 + H_{13} n_1) \end{bmatrix} \quad (13.68)$$

ja

$$\mathbf{B}_{2i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i N_{i,x} l_2 & \frac{1}{2}t_i N_{i,x} l_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i N_{i,y} m_2 & \frac{1}{2}t_i N_{i,y} m_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i N_{i,z} n_2 & \frac{1}{2}t_i N_{i,z} n_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i (N_{i,y} l_2 + N_{i,x} m_2) & \frac{1}{2}t_i (N_{i,y} l_1 + N_{i,x} m_1) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i (N_{i,z} m_2 + N_{i,y} n_2) & \frac{1}{2}t_i (N_{i,z} m_1 + N_{i,y} n_1) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i (N_{i,z} l_2 + N_{i,x} n_2) & \frac{1}{2}t_i (N_{i,z} l_1 + N_{i,x} n_1) \end{bmatrix}. \quad (13.69)$$

Elementin jäykkyysmatriisi on

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta. \quad (13.70)$$

Integraali koordinaatin ζ suhteen voidaan nyt laskea eksplisiittisesti ohuen kuoren tapauksessa sijoittamalla

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_{1i} + \zeta \mathbf{B}_{2i} \quad (13.71)$$

ja

$$\det \mathbf{J} \approx t |\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}| d\xi d\eta. \quad (13.72)$$

Elementin jäykkyysmatriisin kaavassa $\mathbf{D}$ on materiaalin jäykkyysmatriisi globaalisessa koordinaatistossa. Jännitysten ja muodonmuutosten välinen yhteys määritetään kuitenkin integrointipisteen paikallisessa koordinaatistossa (x_l, y_l, z_l) . Kimmoisen aineen tapauksessa materiaalin jäykkyysmatriisi on paikallisessa koordinaatistossa

$$\mathbf{D}_l = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (13.73)$$

jossa on otettu huomioon, että kuoren jännitys ja muodonmuutos akselin z_l suunnassa ovat nollia ja k on leikkauskorjauskerroin, jonka arvoksi homogeeniselle poikileikkaukselle voidaan ottaa $k = \frac{6}{5}$. Paikallisen koordinaatiston ja globaalin koordinaatiston väliset muodonmuutosten ja jännitysten muunnoskaavat ovat

$$\boldsymbol{\varepsilon}_l = \mathbf{T}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\sigma}_l = \mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_\varepsilon^{-T} \boldsymbol{\sigma}, \quad (13.74)$$

missä muunnosmatriisi

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & l_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & l_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & l_3 n_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + m_1 l_2 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + m_2 l_3 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + m_3 l_1 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \quad (13.75)$$

ja l_i , m_i ja n_i ovat vektoreiden $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ suuntakosinit, (sisätulot) paikallisten kantavektoreiden $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ ja $\mathbf{d}$ suhteen (integroitipisteessä).

Koska $\boldsymbol{\sigma}_l^T \boldsymbol{\varepsilon}_l = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ on invariantti, saadaan yhteys

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_l^T \mathbf{D}_l \boldsymbol{\varepsilon}_l = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{T}_\varepsilon^T \mathbf{D}_l \mathbf{T}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (13.76)$$

joten

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}_\varepsilon^T \mathbf{D}_l \mathbf{T}_\varepsilon \quad (13.77)$$

on materiaalin jäykkyysmatriisi globaalin koordinaatiston suhteen sijoitettavaksi elementin jäykkyysmatriisiin.

Samalla tavalla kuin tasokuorielementin tapauksessa edellä voidaan isoparametrisen kuorielementin vapausasteeksi ottaa kiertymä, γ , solmupisteen i paikallisen kantavektorin $\mathbf{d}_i$ ympäri. Paikallisen ja globaalin koordinaatiston kiertymien väliset yhteydet ovat

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}, \quad (13.78)$$

missä muunnosmatriisi (solmun i) kiertymille on

$$\mathbf{Q}_i = [\mathbf{e}_i \quad \mathbf{f}_i \quad \mathbf{d}_i]^T. \quad (13.79)$$

Solmun i vapausasteiden muunnosmatriisi on

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_i \end{bmatrix}. \quad (13.80)$$

Paikallisessa koordinaatistossa on jälleen lisättävä lavennetun jäykkyysmatriisin diagonaalille pieni luku vapausasteen γ kohdalle estämään jäykkyysmatriisin singulariteetti.

Luku 14

Jännitysten laskennasta

Virtuaalisen työn periaatteesta johdettujen elementtimenetelmäformulaatioiden jännitysten lausekkeet ovat epäjatkuvia elementtien rajapintojen yli siirryttäessä. Jännitysten arvot ovat myös epätarkempia kuin siirtymäsuureet, sillä ne saadaan materiaalilain avulla muodonmuutoksista, jotka on saatu derivoimalla siirtymiä. Tarkimmillaan jännitysten arvot ovat usein integroimispisteissä, ja haluttaessa laskea jännitysten arvoja solmupisteissä voidaan menetellä seuraavin tavoin:

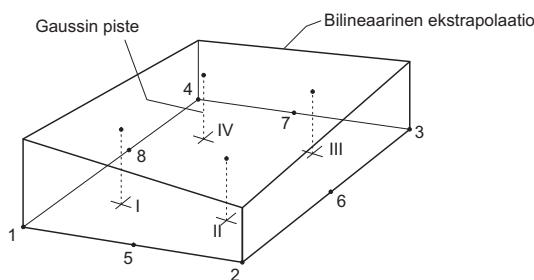
1. Lasketaan siirtymäinterpolaatiosta muodonmuutosten arvot solmuissa ja niistä jännitykset, jotka keskiarvoistetaan solmuun liittyvien elementtien pintaalojen suhteessa.
2. Ekstrapoloidaan jännitysten arvot integrointipisteistä käyttäen hyväksi sopivaa interpolaatiofunktioita ja suoritetaan keskiarvoistus.
3. Otaksutaan jännityskomponenteille *jatkuva* interpolaatio käyttäen samoja interpolaatiofunktioita kuin siirtymille ja määritetään jännitysten solmupistearvot pienimmän neliön keinolla.

Ensimmäisen kohdan strategia ei kaivanne lisäselvityksiä.

14.1 Ekstrapolaatio

Oletetaan, että jännityssuure Q on määritetty bilineaarisen elementin Gaussin-Legendren 2×2 integrointipisteissä, I, II, III ja IV. Merkitään haluttuja solmupistearvoja $Q_1, \dots, Q_4$. Gaussin-Legendren 2×2 -menetelmän pisteiden koordinaatit ovat

$$\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \eta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (14.1)$$



Kuva 14.1 Ekstrapolaatio solmuihin.

jotka on esitetty kuvassa 14.1. Otaksumalla nyt jännitykselle bilineaarinen interpolatio elementin alueella, saadaan solmupistearvot yhtälöstä

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} & (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} & (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) \\ (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} & (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} & (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_I \\ Q_{II} \\ Q_{III} \\ Q_{IV} \end{Bmatrix}. \quad (14.2)$$

14.2 Pienimmän neliön keino

Olkoon elementtimenetelmän antama ratkaisu siirtymäsuureille $\mathbf{u}_h$ ja niistä lasketut jännitykset $\boldsymbol{\sigma}_h$. Parannetulle jatkuvalle jännitysjakaumalle käytetään merkintää

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \mathbf{N}\mathbf{s}, \quad (14.3)$$

missä matriisi $\mathbf{N}$ sisältää interpolaatiofunktioita ja $\mathbf{s}$ jännitysten solmupistearvot. Uusi jännitysjakauma sovitetaan elementtimenetelmän antamaan ”raakajännitykseen” pienimmän neliön keinolla

$$\min_{\mathbf{s}} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_c - \boldsymbol{\sigma}_h)^2 d\Omega, \quad (14.4)$$

josta solmupistejännitysten suhteen derivoimalla saadaan ratkaisuyhtälöksi

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\mathbf{N}\mathbf{s} - \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega = 0. \quad (14.5)$$

Tämä yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{M}\mathbf{s} = \mathbf{b} \quad (14.6)$$

missä kerroinmatriisi $\mathbf{M}$ ja vektori $\mathbf{b}$ koostaan elementtiosuuksista

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad \mathbf{b}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma}_h d\Omega. \quad (14.7)$$

Tällä tavoin voidaan jännitysten tarkkuutta hieman parantaa, mutta jännitysten suppenemisnopeuteen sillä ei ole vaikutusta, (katso lukua 8), ainoastaan virhekerroin C pienenee. Jännitysten tasoitusta ei saa suorittaa rajapinnoilla joissa materiaaliominaisuudet hyppäyksenomaisesti muuttuvat. Tällöin tasoitus on suoritettava osa-alueittain.

Esimerkki 14.1 *Olko ratkaistavana lämmönjohtumisyhtälö*

$$-ku'' = \bar{f}, \quad u(0) = u(L) = 0, \quad \bar{f}(x) = 4f_0 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right). \quad (14.8)$$

Käyttäen symmetriaa hyväksi ratkaise tehtävä elementtimenetelmällä käyttäen kahta lineaarisesti interpoloitua elementtiä ratkaisualueen puolikkaalle. Laske saadusta ratkaisusta lämpövuoto

$$q_h = -ku'_h. \quad (14.9)$$

Jälkikäsittele tätä lämpövuon lauseketta otaksumalla parannetulle lämpövuon lausekkeelle C_0 -jatkuva lauseke, eli otaksumalla, että lämpövuoto on esitettävissä kunkin elementin alueella samoilla interpolaatiofunktioilla kuin itse lämpötila-kin

$$q_c^{(e)} = N_1(\xi)q_{c1} + N_2(\xi)q_{c2}. \quad (14.10)$$

Diskretoitaessa elementtimenetelmällä puolet alueesta reunaehdot ovat

$$u(0) = 0 \quad \text{ja} \quad q(L/2) = 0. \quad (14.11)$$

Elementtimatriisi on

$$K_{ij}^{(e)} = k \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx = \frac{2k}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} d\xi. \quad (14.12)$$

Käytettäessä lineaarisia elementtejä, yhtälöryhmäksi saadaan

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_2^{(1)} + \bar{f}_1^{(2)} \\ \bar{f}_2^{(2)} \end{Bmatrix}. \quad (14.13)$$

Lasketaan kuormitustermit

$$\bar{f}_i^{(e)} = \frac{1}{2} h^{(e)} \int_{-1}^1 \bar{f}(\xi) N_i(\xi) d\xi, \quad (14.14)$$

jotka ovat:

$$\begin{aligned}\bar{f}_2^{(1)} &= \frac{1}{2}h^{(e)} \int_{-1}^1 4f_0 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{1}{2}(1 + \xi) d\xi \quad \left(\frac{x}{L} = \frac{x_c^{(e)}}{L} + \frac{h^{(e)}}{2L}\xi\right) \\ &= \frac{1}{256}f_0L \int_{-1}^1 (1 + \xi)^2(7 - \xi) d\xi = \frac{13}{192}f_0L,\end{aligned}\quad (14.15)$$

$$\bar{f}_1^{(2)} = \frac{1}{256}f_0L \int_{-1}^1 (3 + \xi)(5 - \xi)(1 - \xi) d\xi = \frac{21}{192}f_0L, \quad (14.16)$$

$$\bar{f}_2^{(2)} = \frac{23}{192}f_0L. \quad (14.17)$$

Yhtälöryhmäksi saadaan siten

$$\frac{4k}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{192} \begin{Bmatrix} 34 \\ 23 \end{Bmatrix}, \quad (14.18)$$

jonka ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 57 \\ 80 \end{Bmatrix} \frac{f_0L^2}{768k}. \quad (14.19)$$

Käytettäessä lineaarisia elementtejä lämpövuon on vakio elementin alueella, ja sille saadaan lauseke

$$q^{(e)} = -ku' = -k \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{h^{(e)}} = \frac{4k}{L}(u_1^{(e)} - u_2^{(e)}). \quad (14.20)$$

Saadaan arvot

$$q^{(1)} = -\frac{57}{192}f_0L, \quad q^{(2)} = -\frac{23}{192}f_0L. \quad (14.21)$$

Lämpövuon jälkikäsitteilyä varten muodostetaan matriisi $\mathbf{M}$, joka koostuu elementtimatriiseista

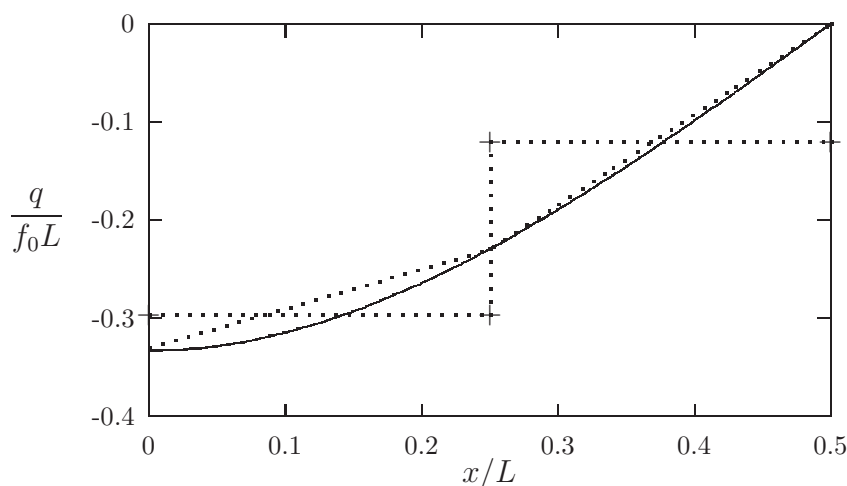
$$M_{ij}^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} N_i N_j dx = \frac{1}{2}h^{(e)} \int_{-1}^1 N_i N_j d\xi. \quad (14.22)$$

Lineaarisen elementin tapauksessa se on muotoa

$$\mathbf{M}^{(e)} = \frac{h^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (14.23)$$

Nyt voidaan lämpövuolle antaa reunaehto alueen keskellä, joten ratkaistavaksi jää kaksi suuretta eli lämpövuon arvot solmuissa 1 ja 2. Oikean puolen vakiovektorin $\mathbf{b}$, joka koostuu elementtiosuuksista

$$b_i^{(e)} = \frac{1}{2}h^{(e)} \int_{-1}^1 N_i(\xi) q^{(e)} d\xi, \quad (14.24)$$



Kuva 14.2 Lämpövuon ehyt viiva analyttinen ratkaisu ja katkovii-
vat elementtimenetelmätulokset.

termit ovat

$$b_1 = b_1^{(1)}, \quad (14.25)$$

$$b_2 = b_2^{(1)} + b_1^{(2)}, \quad (14.26)$$

missä

$$b_1^{(1)} = \frac{L}{8} \int_{-1}^1 \left(-\frac{57}{192} f_0 L\right) \frac{1}{2} (1 - \xi) d\xi = -\frac{57}{1536} f_0 L^2, \quad (14.27)$$

$$b_2^{(1)} = b_1^{(1)}, \quad (14.28)$$

$$b_1^{(2)} = -\frac{23}{1536} f_0 L^2. \quad (14.29)$$

Ratkaistava yhtälöryhmä on

$$\frac{L}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{c1} \\ q_{c2} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 57 \\ 80 \end{Bmatrix} \frac{f_0 L^2}{1536}, \quad (14.30)$$

ja sen ratkaisuksi saadaan

$$\begin{Bmatrix} q_{c1} \\ q_{c2} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 148 \\ 103 \end{Bmatrix} \frac{f_0 L}{796}. \quad (14.31)$$

Kuvaan 14.2 on piirretty lämpövuon analyttinen lauseke sekä suoraan elementti-interpolaatiosta laskettu että jälkikäsitelty jatkuva lämpövuon arvo.

Analyttinen ratkaisu lämpötilalle on

$$u(x) = \frac{f_0 L^2}{3k} \frac{x}{L} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 2 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1 \right], \quad (14.32)$$

josta saadaan lämpövuon kaavalla $q = -ku'$.

14.2.1 Harjoitustehtäviä

1. Johda yhtälö (14.2).
2. Mieti miten suoritetaan bikvadraattisen tai supistetun bikvadraattiseen (Serendip) elementin ekstrapolaatio solmuihin.
3. Ratkaise esimerkin 14.1 jälkikäsitelty lämpövuon jakauma otaksumatta ehtoa $q(L/2) = 0$. Määritä lämpövuon neliövirhe kummassakin tapauksessa. Kumpi menettely antaa ko. normin mielessä paremman tuloksen?

Luku 15

Sekaelementtimenetelmät

15.1 Johdanto

Sekaelementtimenetelmät muodostavat laajan ryhmän erilaisia epätavallisia elementtimenetelmäformulaatioita. Niiden käytöllä on joukko syitä, jotka voidaan karkeasti jakaa kolmeen ryhmään. Ehkä kaikkein tärkein syy on se, että sekaelementtimenetelmät mahdollistavat rajoiteyhtälöiden luontevan käsittelyn. Esimerkiksi kokoonpuristumattoman aineen, kiinteän tai nesteen, mallinnus ei onnistu tavanomaisella siirtymä-/nopeusformulaatiolla.

Toinen syy on tiettyjen standardiformulaatioissa primäärisuureista derivoimalla laskettujen suureiden fysikaalisessa merkittävydessä. Elastisuusprobleemissa jännitykset ovat usein tärkeämpiä suureita kuin siirtymät, jotka tavanomaisessa siirtymämenetelmässä ovat kuitenkin astetta tarkempia kuin jännitykset. Lämmönjohtumistehtävässä usein lämpövuoto on tärkeämpi suure kuin itse lämpötila. Täten menetelmä, jossa nämä jännityssuureet olisivat ”suoraan” saatavilla saattaisi olla mielekkäämpi.

Kolmas syy liittyy vaikeuteen muodostaa interpolaatiofunktioita joilta vaaditaan derivaattojen jatkuvuutta. Esimerkiksi Kirchhoffin laattamallissa C_1 -jatkuvien funktioiden konstruointi kolmio tai yleiselle nelikulmioelementille on hankalaa ja johtaa epätoivottuihin vapausasteisiin. Sekaelementtimenetelmässä jatkuvuusvaatimuksia voidaan lieventää muuntamalla korkea-asteisia derivaattoja sisältävät yhtälöt matalampiasteiseksi systeemiksi.

15.2 Yksinkertainen esimerkkiongelmia

15.2.1 Symmetrisen heikon muodon johto

Tarkastellaan seuraavassa aksiaalisesti kuormitetun sauvan ongelmaa (analogisesti lämmönjohtumisongelmaa). Sauvan tasapainoyhtälö on aksiaalisen siirtymän u avulla lausuttuna toisen kertaluvun skalaarinen differentiaaliyhtälö:

$$-(EAu')' = \bar{f}. \quad (15.1)$$

Otaksutaan reunaehtotapaus

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, \\ N(L) &= EAu'(L) = \bar{N}_L. \end{aligned} \quad (15.2)$$

Sekaelementtimenetelmäformulaatiota varten muodostetaan toisen kertaluvun yhtälöstä normaalivoiman N ja siirtymän u systeemi

$$\begin{aligned} \frac{N}{EA} - u' &= 0 \\ -N' &= \bar{f}. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Kerrotaan ylempi yhtälöistä testifunktioilla $\hat{N}$ ja alempi $\hat{u}$, ja integroidaan alueen $I = \{x|x \in (0, L)\}$ yli, saadaan systeemin heikko muoto

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\hat{N}N}{EA} dx - \int_0^L \hat{N}u' dx &= 0 \\ - \int_0^L \hat{u}N' dx &= \int_0^L \hat{u}\bar{f} dx. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Osittaisintegroidaan alemman yhtälön ensimmäinen termi ja kerrotaan ylempi yhtälöistä -1 :llä, saadaan elementtimenetelmän kannalta sovelias heikko muoto

$$\begin{aligned} - \int_0^L \frac{\hat{N}N}{EA} dx + \int_0^L \hat{N}u' dx &= 0 \\ \int_0^L \hat{u}'N dx &= \int_0^L \hat{u}\bar{f} dx + \hat{u}(L)\bar{N}_L. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Sekaelementtimenetelmä saadaan kun alue I jaetaan osa-alueisiin $I^{(e)}$ ja valitaan osa-alueittain interpolaatiot

$$\begin{aligned} N^{(e)} &= \sum_{i=1}^p N_{Ni} P_i^{(e)} = \mathbf{N}_N \mathbf{p}^{(e)}, \\ u^{(e)} &= \sum_{i=1}^q N_{ui} u_i^{(e)} = \mathbf{N}_u \mathbf{u}^{(e)}. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Vastaavasti testifunktiolle valitaan Galerkinin keinon mukaisesti samat interpolaat-

tiofunktiot

$$\begin{aligned}\hat{N}^{(e)} &= \sum_{i=1}^p N_{Ni} \hat{P}_i^{(e)} = \mathbf{N}_N \hat{\mathbf{p}}^{(e)}, \\ \hat{u}^{(e)} &= \sum_{i=1}^q N_{ui} \hat{u}_i^{(e)} = \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}}^{(e)}.\end{aligned}\quad (15.7)$$

Sijoittamalla nämä heikkoon muotoon (15.5) ja kokoamalla kaikkien elementtien osuudet saadaan yhtälösystemi

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{Bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{Bmatrix} \right) = 0, \quad (15.8)$$

ja merkitään tätä lyhyesti

$$\hat{\mathbf{x}}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0. \quad (15.9)$$

Matriisit $\mathbf{M}$ ja $\mathbf{C}$ koostuvat elementtiosuuksista

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \frac{\mathbf{N}_N^T \mathbf{N}_N}{EA} dx, \quad \mathbf{C}^{(e)} = \int_{I^{(e)}} (\mathbf{N}'_u)^T \mathbf{N}_N dx, \quad (15.10)$$

ja ulkoisten kuormien voimavektori saadaan vastaavasti elementtiosuuksista

$$\bar{\mathbf{f}}^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \mathbf{N}_u^T \bar{f} dx, \quad (15.11)$$

lisättynä sauvan päässä vaikuttavan voiman osuudella $\bar{N}_L$.

Esimerkki 15.1 Ratkaistaan edellä kuvattu ongelma käyttäen kahta sekaelementtiä, jossa siirtymälle u ja normaalivoimalle N käytetään lineaarista C_0 -interpolatiota. Otaksutaan EA vakioksi ja että kuormitus $\bar{f}$ on lineaarisesti jakautunut palkin pituudelle $\bar{f} = f_0(1 - x/L)$.

Interpolatiosuunnat elementin paikallisessa ξ -koordinaatistossa ovat täten $\mathbf{N}_u = \mathbf{N}_N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \xi) & \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{bmatrix}$, jolloin matriisit $\mathbf{M}^{(e)}$ ja $\mathbf{C}^{(e)}$ ovat

$$\mathbf{M}^{(e)} = \frac{h^{(e)}}{6EA} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{(e)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (15.12)$$

Käytetään tasajakoista elementtiverkkoa, tällöin $h^{(1)} = h^{(2)} = L/2$. Elementtien ulkoisiksi voimavektoreiksi saadaan

$$\bar{\mathbf{f}}^{(1)} = \frac{1}{24} f_0 L \begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{f}}^{(2)} = \frac{1}{24} f_0 L \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{N}_L \end{Bmatrix}. \quad (15.13)$$

Otetaan käyttöön dimensiottomat vapausasteet $P_i = EA\alpha_i$, ja $u_i = L\delta_i$ sekä pistekuormalle sauvan päässä esitys $\bar{N}_L = \beta f_0 L$. Järjestämällä vapausasteet seuraavasti $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T$, saadaan globaaliksi yhtälösystemiksi

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{12} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{24} + \beta \end{bmatrix} \frac{f_0 L}{EA}. \quad (15.14)$$

Yhtälösystemin ratkaisu on

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} + \beta \\ \frac{1}{6} + \beta \\ -\frac{1}{12} + \beta \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\beta \\ \frac{1}{6} + \beta \end{bmatrix}. \quad (15.15)$$

15.2.2 Muutamia huomautuksia

Tarkkaavainen lukija on jo saattanut huomata, että heikko muoto (15.5) ei vaadi normaalivoiman C_0 -jatkuvuutta. Mikäli normaalivoimalle valitain elementteittäin paloittain jatkuva interpolaatio, on globaali $\mathbf{M}$ matriisi on lohkodeagonaalinen, eli

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(1)} & & & \\ & \mathbf{M}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{M}^{(E)} \end{bmatrix}. \quad (15.16)$$

Tässä tapauksessa normaalivoimaan liittyvät vapausasteet voidaan kondensoida pois jo elementtitasolla systeemin (15.8) ylemmän yhtälön avulla (yhteensopivuusehto), jolloin saadaan

$$\mathbf{p}^{(e)} = (\mathbf{M}^{(e)})^{-1}(\mathbf{C}^{(e)})^T \mathbf{u}^{(e)}, \quad e = 1, \dots, E. \quad (15.17)$$

Sijoittamalla nämä systeemin (15.8) alempaan yhtälöön, tasapainoehtoon, saadaan elementin jäykkymatriisiksi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{C}^{(e)}(\mathbf{M}^{(e)})^{-1}(\mathbf{C}^{(e)})^T. \quad (15.18)$$

Esimerkki 15.2 Ratkaistaan esimerkkiongelm käyttäen sekaelementtiä, jossa normaalivoimalle N käytetään lineaarista interpolaatiota, joka on epäjatkuva elementin päätepisteissä. Otaksutaan EA ja $\bar{f}$ vakioiksi.

Matriisi $\mathbf{M}^{(e)}$ on nyt tietenkin sama kuin edellisessä esimerkissä. Sen käänteismatriisi on

$$(\mathbf{M}^{(e)})^{-1} = \frac{2EA}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (15.19)$$

Täten jäykkyyismatriisiksi saadaan

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EA}{2h^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (15.20)$$

Tuloksena saatiin siten sama jäykkyyismatriisi kuin tavanomaisen lineaarisen interpoloituun siirtymämenetelmään perustuvassa elementtimenetelmässä. Globaali yhtälösystemi on siten

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{24} + \beta \end{Bmatrix} f_0 L, \quad (15.21)$$

jonka ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{4}{48} + \frac{1}{2}\beta \\ \frac{1}{6} + \beta \end{Bmatrix} \frac{f_0 L^2}{EA}. \quad (15.22)$$

Sekaelementtimenetelmässä jännitykset ratkaistaan elementtikohtaisesti kuten standardiformulaatiossakin, mutta käyttäen yhtälöä (15.17)

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(e)} &= (\mathbf{M}^{(e)})^{-1} \mathbf{C}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{S}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \\ \mathbf{S}^{(e)} &= \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15.23)$$

Havaitaan, että elementti tuottaa aina normaalivoimajakauman, joka on elementteittäin vakio. Esimerkiksi elementille 1 saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(e)} &= \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{7}{48} + \frac{1}{2}\beta \end{Bmatrix} \frac{f_0 L^2}{EA} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\frac{7}{24} + \beta \right) f_0 L \end{aligned} \quad (15.24)$$

ja yleisesti

$$\mathbf{p}^{(e)} = \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{Bmatrix} = EA \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{h^{(e)}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (15.25)$$

Tässä tapauksessa ei jännitysten lineaarisella interpolaatiolla saatu mitään hyötyä tavanomaiseen elementtimenetelmään verrattuna.

Edellisen esimerkin tulos on kuitenkin luonnollinen. Jännitysten ja siirtymien interpolaation tulee olla oikeassa suhteessa toisiinsa, jotta saataisiin hyvin käyttäytyvä elementti eikä laskentatyötä tuhlataisi turhaan. Tähän aiheeseen palataan myöhemmin.

Huomaa, että globaali matriisi $\mathbf{A}$ on indefiniittinen, eli sillä on sekä positiivisia että negatiivisia ominaisarvoja. Tällä seikalla on suuri merkitys lineaarisen systeemin ratkaisussa. Tähän seikkaan palataan luvussa 16.

Yhtälösystemi (15.8) saadaan myös Lagrangen funktionaalin

$$L(N, u) = \int_0^L \left(\frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} - Nu' + \bar{f}u \right) dx \quad (15.26)$$

stationäärisyysehdosta, missä sekä normaalivoima N että aksiaalsiirtymä u ovat variaatioitavina suureina. Funktionaalia (15.26) kutsutaan mekaniikassa myös Hellingerin-Reissnerin funktionaaliksi.

15.3 Eulerin-Bernoullin palkkimallin sekaelementtimenetelmä-formulaatio

Eulerin-Bernoullin palkkimallin yhteensopiva siirtymäelementtimenetelmä vaatii taipuman interpolaatiofunktioilta C_1 -jatkuvuutta. Sekaelementtimenetelmässä tätä jatkuvuusvaatimusta voidaan lieventää. Palkkimallin differentiaaliyhtälö

$$(EIv'')'' = \bar{f} \quad (15.27)$$

voidaan kirjoittaa kahden yhtälön ryhmänä

$$\begin{aligned} M &= -EIv'' \\ -M'' &= \bar{f}. \end{aligned} \quad (15.28)$$

Kerrotaan ylempi yhteensopivuusehto testifunktioilla $\hat{M}$ ja alempi tasapainoyhtälö $\hat{v}$:llä ja integroidaan alueen $I = \{x | x \in (0, L)\}$ yli, saadaan heikko muoto

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\hat{M}M}{EI} dx + \int_0^L \hat{M}v'' dx &= 0 \\ - \int_0^L \hat{v}M'' dx &= \int_0^L \hat{v}\bar{f} dx. \end{aligned} \quad (15.29)$$

Suoritetaan osittaisintegrointi ja kerrotaan ylin yhtälö -1:llä, jolloin saadaan symmetrinen heikko muoto

$$\begin{aligned} -\int_0^L \frac{\hat{M}M}{EI} dx + \int_0^L \hat{M}'v' dx &= \left|_0^L \hat{M}v' \right. \\ \int_0^L \hat{v}'M' dx &= \int_0^L \hat{v}\bar{f} dx - \left|_0^L \hat{v}Q, \end{aligned} \quad (15.30)$$

missä Q on leikkausvoima $Q = M'$. Ylemmän yhtälön sijoitustermi häviää jos kiertymä sauvan päissä on estetty tai taivutusmomentilla on sauvan päissä määrätty arvo (myös nolla). Alemman yhtälön sijoitustermi vastaavasti häviää mikäli taipumalla on sauvan päissä määrätty arvo tai leikkausvoima häviää. Sekä taipumalle että taivutusmomentille voidaan valita C_0 -interpolaatio heikkoon muotoon (15.30) perustuvassa elementtimenetelmässä.

15.4 Kokoonpuristumattoman aineen ongelma

Täysin kokoonpuristumatonta ainetta ei pystytä analysoimaan siirtymämenetelmällä ja tavanomaiset elementit käyttäytyvät huonosti kun Poissonin luku lähestyy kokoonpuristumattomuusrajaa $\nu \rightarrow 0,5$. Tarkastellaan seuraavassa kokoonpuristumattoman tai lähes kokoonpuristumattoman aineen ongelmaa lineaarisen isotrooppisen elastisuuden esimerkkitapauksessa. Lineaarisesti kimmoisen ja isotrooppisen materiaalin konstitutiivinen yhtälö on

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}, \quad (15.31)$$

missä kimmomatriisi $\mathbf{D}$ on kolmidimensioisessa tapauksessa muotoa

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}, \quad (15.32)$$

missä Lam'en vakiot λ ja μ ovat

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (15.33)$$

Kun $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$ niin $\lambda \rightarrow \infty$, joten tavanomaista siirtymämenetelmää ei voi soveltaa. Käsitellään seuraavassa muodonmuutosta ja jännitystä matriisisuureina, mikä helpottaa huomattavasti lausekkeiden johtoa. Kun siirrytään takaisin elementtimene-

telmään, otetaan jälleen vektorimuotoinen esitys käyttöön. Jaetaan muodonmuutosmatriisi ϵ deviatoriseen osaan ϵ' ja tilavuudenmuutososaan $e\mathbf{I}/3$:

$$\epsilon = \epsilon' + \frac{1}{3}e\mathbf{I}. \quad (15.34)$$

Tilavuudenmuutos on muodonmuutosmatriisin jälki

$$e = \text{tr } \epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (15.35)$$

ja deviatorinen osa saadaan ratkaistua jaon (15.34) perusteella

$$\epsilon' = \epsilon - \frac{1}{3}e\mathbf{I}. \quad (15.36)$$

Muodonmuutosdeviaattori mittaa materiaaliolkion muodon vääristymistä ja volumetrinen osa¹ kuvaa tilavuuden muutosta

$$e = \text{tr } \epsilon \approx \frac{V - V_0}{V_0}. \quad (15.37)$$

Keskimääräinen jännitys σ_m määritellään

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\text{tr } \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -p, \quad (15.38)$$

missä keskimääräistä painetta on merkitty p :llä. Paine on yhteydessä tilavuudenmuutokseen kokoonpuristuvuusmoduulin K välityksellä seuraavasti

$$e = -\frac{p}{K}. \quad (15.39)$$

Kokoonpuristuvuusmoduuli voidaan lausua muiden elastisten vakioiden avulla esim. seuraavasti

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}. \quad (15.40)$$

Kokoonpuristumattomala materiaalilla $K = \infty$, jolloin tilavuudenmuutosta ei tapahdu.

Deviatorinen jännitys määritellään

$$\sigma' = \sigma - \frac{1}{3}\text{tr}(\sigma)\mathbf{I} = \sigma + p\mathbf{I}. \quad (15.41)$$

Kirjoitetaan materiaalilaki (15.31) indeksimuodossa ja jaetaan se hydrostaattiseen

¹Käytetään myös nimityksiä hydrostaattinen-, pallo- tai dilataatio-osa.

ja deviatoriseen osaan:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= \lambda e \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \\
 &= (K - \frac{2}{3}\mu) e \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \\
 &= K e \delta_{ij} + 2\mu (\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} e \delta_{ij}) \\
 &= K e \delta_{ij} + 2\mu \epsilon'_{ij} \\
 &= -p \delta_{ij} + \sigma'_{ij},
 \end{aligned} \tag{15.42}$$

joten

$$\sigma'_{ij} = 2\mu \epsilon'_{ij} \quad \text{ja} \quad p = -K e. \tag{15.43}$$

Elementtimenetelmässä on kätevää kirjoittaa jännitys ja muodonmuutos pystyvektoreina, jolloin

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -\frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{m}, \tag{15.44}$$

missä yleisessä kolmidimensioisessa tapauksessa $\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]$ ja $\mathbf{m}$ on

$$\mathbf{m}^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \tag{15.45}$$

Täten volymetrinen muodonmuutos voidaan kirjoittaa

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \mathbf{m}^T \boldsymbol{\epsilon}. \tag{15.46}$$

Deviatorinen muodonmuutos $\boldsymbol{\epsilon}'$ voidaan siten lausua muodossa

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{3} \mathbf{m} e = (\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{m} \mathbf{m}^T) \boldsymbol{\epsilon}, \tag{15.47}$$

ja deviatoriselle jännitykselle saadaan yhtälö

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\epsilon}' = \mathbf{D}_0 (\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{m} \mathbf{m}^T) \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}' \boldsymbol{\epsilon}, \tag{15.48}$$

missä

$$\mathbf{D}_0 = \mu \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{D}' = \mu \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & & & \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & & & \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{15.49}$$

Jännitysten tekemä virtuaalinen työn on siten

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{m} p) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T (\mathbf{D}' \boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{m} p) d\Omega. \tag{15.50}$$

Sijoittamalla tämä virtuaalisen työn yhtälöön (5.34) ja ottamalla paineen ja kokoonpuristuvuuden välinen konstitutiivinen yhteys mukaan heikossa muodossa saadaan sekaelementtimenetelmän mukainen formulaatio, jossa tuntemattomina suureina ovat siirtymä $\mathbf{u}$ ja paine p :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T (\mathbf{D}' \boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{m} p) d\Omega &= \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\ \int_{\Omega} \hat{p} \left(\mathbf{m}^T \boldsymbol{\epsilon} + \frac{p}{K} \right) d\Omega &= 0. \end{aligned} \quad (15.51)$$

Valitaan elementtimenetelmän mukaiset interpolaatiot siirtymille $\mathbf{u}$ ja paineelle p :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{q} \quad \text{ja} \quad p = \mathbf{N}_p \mathbf{p}. \quad (15.52)$$

Tällöin saadaan seuraavanlainen globaali yhtälösystemi

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{q}} \\ \hat{\mathbf{p}} \end{Bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \right) = 0, \quad (15.53)$$

missä matriisit $\mathbf{K}$, $\mathbf{C}$ ja $\mathbf{M}$ koostuvat elementtiosuuksista

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D}' \mathbf{B} d\Omega, \\ \mathbf{C}^{(e)} &= - \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_p^T \mathbf{m}^T \mathbf{B} d\Omega, \\ \mathbf{M}^{(e)} &= - \int_{\Omega^{(e)}} K^{-1} \mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_p d\Omega, \\ \bar{\mathbf{f}}^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_u^T \bar{\mathbf{f}} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}^{(e)}} \mathbf{N}_u^T \bar{\mathbf{t}}_n d\Gamma. \end{aligned} \quad (15.54)$$

Mikäli materiaali on kokoonpuristumatonta, on matriisi $\mathbf{M} = \mathbf{0}$. Huomaa, että jäykkyysmatriisi $\mathbf{K}^{(e)}$ on miltei samanlainen kuin standardi siirtymämenetelmään perustuvassa elementtimenetelmässä. Ainoa ero on, että materiaalin jäykkyysmatriisin $\mathbf{D}$ tilalla on materiaalijäykkyys $\mathbf{D}'$.

Käyttökelpoisten $(\mathbf{u}, p)$ -interpolaatioparien löytäminen ei ole aivan yksinkertainen asia. Diskreetin formulaation tulee toteuttaa ns. Babuška-Brezzi stabiiliusehto (lyhyesti BB-ehto), jotta menetelmä olisi täysin luotettava. Huomaa myös, että paineen interpolaatio voi olla epäjatkuva elementin rajapintojen yli. Yksinkertaisin mahdollinen interpolaatiokombinaatio olisi tietenkin valita siirtymille lineaarinen/trilineaarinen C_0 -interpolaatio ja paineelle vakio. Tämä ei kuitenkaan toteuta BB-ehtoa ja tuloksena voi olla hyvinkin villisti oskilloiva painejakauma.

15.5 Stabiloidut sekaelementtimenetelmäformulaatit

Sekamenetelmiin johtavaa systeemia, esim. (15.5) tai (15.51) voidaan yleisesti kuvata seuraavasti

$$\begin{aligned} Au + B^*p &= \bar{f} \\ Bu &= \bar{g}, \end{aligned} \quad (15.55)$$

missä A ja B ovat differentiaali tai algebrallisia operaattoreita ja B^* on B :n adjungantti. Systeemin (15.55) primäärisuuretta merkitään u :lla ja p on Lagrangen kertoja. Numeerisen ratkaisun pohjaksi kelpaava heikkoa muotoa merkittäköön

$$\begin{aligned} a(\hat{u}, u) + b(\hat{u}, p) &= (\hat{u}, \bar{f}) \\ b(\hat{p}, u) &= (\hat{p}, \bar{g}). \end{aligned} \quad (15.56)$$

Kuten kokoonpuristumattoman aineen tapauksessa jo mainittiin, on toimivan elementtimenetelmän konstruointi hankalaa, t.s. sopivien interpolaatioiden löytäminen u :lle ja p :lle siten, että ne toteuttaisivat Babuška-Brezzi stabiiliusehdon. Stabiiloiduiksi formulaatioksi kutsutaan menetelmiä, jotka kiertävät BB-stabiiliusehdon, jolloin saadaan toimivia elementtimenetelmiä kaikilla mielekkäillä interpolaatiopareilla. Kirjoitetaan systeemi (15.56) muodossa

$$a(\hat{u}, u) + b(\hat{u}, p) + b(\hat{p}, u) = (\hat{u}, \bar{f}) + (\hat{p}, \bar{g}). \quad (15.57)$$

Systeemi (15.57) stabiloidaan lisäämällä siihen elementtikohtaisesti määriteltäviä pienimmän neliön termejä

$$\begin{aligned} a(\hat{u}, u) + b(\hat{u}, p) + b(\hat{p}, u) + \delta_1 h^{2r_1} (A\hat{u} + B^*\hat{p}, Au + B^*p - \bar{f}) \\ - \delta_2 h^{2r_2} (B\hat{u}, Bu - \bar{g}) = (\hat{u}, \bar{f}) + (\hat{p}, \bar{g}), \end{aligned} \quad (15.58)$$

missä $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ ja eksponentit r_1, r_2 ovat positiivisia.

Luku 16

Systemiyhtälöiden ratkaisu

16.1 Johdanto

Elementtimenetelmädiskretointi johtaa lineaarisen yhtälösystemin

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (16.1)$$

ratkaisuun.¹ Ratkaisumenetelmät voidaan luokitella kahteen kategoriaan:

- suorat Gaussin eliminaatioon perustuvat
- ja epäsuorat eli iteratiiviset algoritmit.

Tiettyjä algoritmeja voidaan pitää edellisten välimuotoina, kuten esim. konjugaatti-gradienttimenetelmää, sillä ne ovat askelmenetelmien kaltaisia, mutta niiden avulla on mahdollista päästä tarkkaan ratkaisuun äärellisellä, ennalta määrättävissä olevalla askelmäärällä.² Ennen varsinaisten algoritmien esittelyä tutkitaan kuitenkin kerroinmatriisin $\mathbf{A}$ rakennetta.

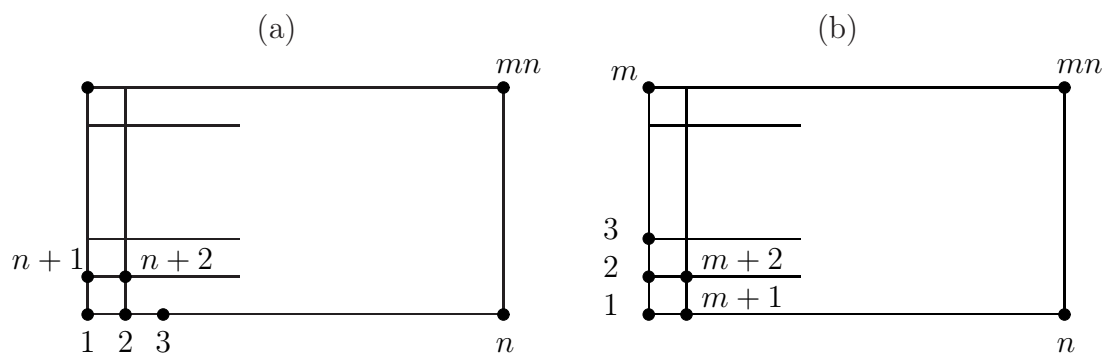
Elementtimenetelmän yhtälösystemille on ominaista, että matriisi $\mathbf{A}$ on harva matriisi, ts. siinä on vähän nollasta poikkeavia termejä.³ Tavanomaisen elementtimenetelmän, eli ns. h -version tapauksessa se on usein myös nauhamainen, mikäli elementtiverkko on suhteellisen säännöllinen. Tämä taas tarkoittaa sitä, että matriisin nollasta eroavat termit asettuvat diagonaalin ympärille kapeaan kaistaan nauhan muodossa. Mitä kapeampi nauha, sen vähemmän muistitilaa matriisialkioiden varastoiminen luonnollisestikin vie.

Nauhanleveyteen voidaan vaikuttaa solmunumeroinnilla. Havainnollistetaan tilannetta yksinkertaisella kaksiulotteisella esimerkillä. Olkoon diskreetoitava alue suorakaiteen muotoinen ja käytetään tasaista elementtiverkkoa, jossa on n -solmua pi-

¹Elementtimenetelmän diskreettiä tasapainoyhtälöä on aikaisemmissa luvuissa merkitty $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$. Tässä luvussa noudatetaan kuitenkin lineaarialgebran vakiintunutta merkintäkäytäntöä.

²Mikäli laskennassa ei otaksuta tapahtuvan pyöristysvirheitä.

³Matriisia kutsutaan harvaksi mikäli matriisi-vektori kertolaskussa tarvittavien operaatioiden määrä on luokkaa $\mathcal{O}(N)$, missä N on tuntemattomien lukumäärä.

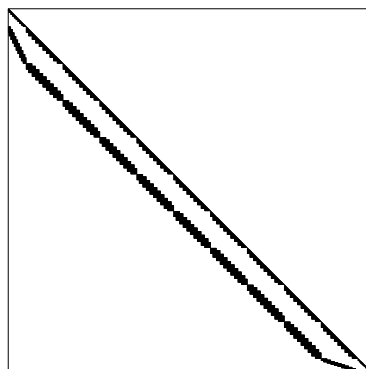


Kuva 16.1 Solmunumerointi 2-D alueessa. Suorien ratkaisijoiden kannalta (a) huono, (b) optimaalinen ($n > m$) numerointi.

tuussuuntaisella pidemmällä ja m -solmua lyhyemmällä sivulla ($n > m$), katso kuva 16.1. Oletetaan, että käytetään bilineaarista elementtiä, joten elementtiverkossa on yhteensä $(n-1)(m-1) \simeq nm$ elementtiä. Otaksutaan lisäksi, että tehtävässä on yksi vapausaste solmua kohden. Numeroidaan solmut pitkän sivun suuntaisesti. Nyt ensimmäinen elementti kytkee toisiinsa solmut $1, 2, n+1, n+2$. Vastaavasti muiden elementtien tapauksessa elementin kytkemien solmupisteiden ero on luokkaa n , joka on myös nauhanleveys (yksi vapausaste/solmu). Mikäli solmunumerointi suoritetaan lyhyemmän sivun suuntaisesti, saadaan elementtien solmunumeroiden erotukseksi vastaavasti m , joka siten tässä tapauksessa tuottaa optimaalisen tuloksen. Esimerkkitapauksessa systeemi yhtälön kerroinmatriisissa on nm tuntematonta ja se on nauhamainen ja useissa fysikaalisissa sovellutuksissa myös symmetrinen, joten sen sisältämän informaation varastointiin riittää tallentaa vain diagonaalialkiot ja ylä- tai alakolmio jonka puolinauhanleveys on luokkaa m . Nauhamaisessa varastointimuodossa joudutaan siten tallentamaan nm^2 alkiota.

Nauhamaiselle varastointitavalle on kehitetty hieman tilaa säästävämpi muoto, jota kutsutaan profiilimuodoksi ja siihen perustuvia eliminointiohjelmia profiiliratkaisijoiksi. Havainnollistetaan asiaa seuraavalla symmetrisellä 8×8 matriisilla, johon on piirretty profiiliviiva sen yläkolmioon:

$$\begin{bmatrix} x & x & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & x & x & 0 & x & 0 & 0 \\ & & & x & x & x & 0 & 0 \\ & & & & x & x & 0 & x \\ & & & & & x & x & 0 \\ & & & & & & x & x \\ & & & & & & & x \end{bmatrix}.$$



Kuva 16.2 Erään jäykkyydsmatriisin nollasta eroavat komponentit (2-D).

Mikäli oheinen matriisi varastoitaisiin nauhamatriisina (nauhanleveys diagonaali mukaanlukien = 4) tarvitaan tila $8 \times 4 = 32$ termin kokoiselle taulukolle, mutta varastoitaessa vain profiilin alapuoliset termit riittää 21 alkion tallentaminen. Profiiliratkaisijaa varten on varastoitava lisäksi osoitetaulukko, joka sisältää diagonaali-alkioiden tai sarakkeen huipun osoitteet. Symmetristen matriisien tapauksessa voidaan vaihtoehtoisesti varastoida vain alakolmio, jolloin matriisialkiot tallennetaan riveittäin. Suorien ratkaisijoiden vaatimista matriisin varastointitavoista kerrotaan lisää luvussa 19.

Kuvassa 16.2 on esitetty havainnollinen kuva jäykkyydsmatriisin nollasta eroavista termeistä eräässä laatan stabiiliustehtävässä. Ratkaisussa on käytetty laatan taiputustilan kuvaamiseen BFS-elementtiä ja tason suuntaisen siirtymäkentän mallintamiseen bilineaarista interpolaatiota, joten jokaisessa solmussa on kuusi vapausastetta $(u_i, v_i, w_i, w_{i,x}, w_{i,y}, w_{i,xy})$ ja elementissä neljä solmupistettä. Elementtiverkko on 10×10 , joka johtaa 610 vapausasteen systeemiin ja nauhanleveys on 74, joten nauhamaisessa varastointitekniikassa joudutaan varaamaan tila 45140 reaaliluvulle, kun taas aktiivisarakemuotoinen varastointitapa vaatii tilan 39525 luvulle.

Kuten kuvasta 16.2 havaitaan, on nauhan sisälläkin suuri joukko nollatermejä. Mikäli tämä tila voitaisiin jättää varastoimatta säästyisi paljon muistitilaa. Se onnistuu erityisesti iteratiivisten ratkaisijoiden tapauksessa, joista seuraavissa kappaleissa enemmän.

Nauhan sisällä olevien nollien lukumäärä yleensä kasvaa probleeman koon kasvaessa. Tarkastellaan esimerkkinä neliölaattaa, jonka neljäsosa mallitetaan bikuubisella BFS-elementeillä joissa on neljä vapausastetta solmua kohden. Määritellään matriisin tiheys nollasta eroavien alkioden ja koko täyden symmetrisen matriisin

Taulukko 16.1 Jäykästi tuetun laatan neljännes, BFS-elementti, tietoja kerroinmatriisista. B on puolinauhanleveyden maksimiarvo (diagonaali mukaanlukien) ja B_{rms} on vastaava neliöllinen keskiarvo käytettäessä aktiivisarakeratkaisijaa, M_{nauha} on varastoitavien matriisialkioiden lukumäärä käytettäessä nauharatkaisijaa $M_{nauha} = NB$, $N_{profiili}$ on vastaavasti aktiivisarakeremuodossa varastoitavien matriisialkioiden lukumäärä ja $M_{\neq 0}$ vain nollasta eroavien alkioiden lukumäärä.

verkko	N	B	B_{rms}	M_{nauha}	$M_{profiili}$	$M_{\neq 0}$	tiheys [%]
1×1	1	1	1	1	1	1	100.0
4×4	49	22	16	1078	721	551	45.0
10×10	361	46	41	16606	14269	5540	8.5
30×30	3481	126	122	438606	417189	60326	1.0

varastoitavien alkioiden lukumäärän suhteena

$$\text{tiheys} = 100 \frac{M_{\neq 0}}{\frac{1}{2}N(N+1)},$$

jossa N on vapausasteiden lukumäärä ja $M_{\neq 0}$ on nollasta eroavien alkioiden lukumäärä diagonaalilla ja yläkolmiossa. Taulukossa 16.1 on esitetty kerroinmatriisin tiheyden muuttuminen esimerkkitehtävässä erilaisilla elementtiverkoilla laskettaessa.

16.2 Suorat eliminaatiomenetelmät

16.2.1 Croutin ja Choleskyn hajotelmat

Yhtälösystemin (16.1) ratkaisu Gaussin eliminaatiolla merkitsee matriisin A hajotelmien suorittamista joko muodossa

$$A = LDU$$

tai

$$A = L^* U \quad L^* = LD, \quad (16.2)$$

joissa D on diagonaalimatriisi ja L, U ala- ja yläkolmiomatriiseja, joiden diagonaalitermit ovat ykkösiä. Hajotelmaa (16.2) kutsutaan Croutin hajotelmaksi. Mikäli matriisi A on symmetrinen saadaan Choleskyn hajotelma

$$A = \tilde{L}\tilde{L}^T, \quad \text{missä} \quad \tilde{L} = LD^{\frac{1}{2}}.$$

Choleskyn hajotelmaa voidaan siten käyttää vain tilanteissa, joissa kerroinmatriisi on *positiivisesti definiitti*.

Yhtälösystemin (16.1) ratkaisu hajotelman $\mathbf{LDL}^T$ avulla tapahtuu siten neljässä vaiheessa:

- muodostetaan systeemimatriisin hajotelma

$$\mathbf{A} = \mathbf{LDU}$$

- kuormavektorin redusointi

$$\mathbf{Lz} = \mathbf{b}$$

- diagonaalilla skaalaus

$$\mathbf{Dy} = \mathbf{z}$$

- ja lopuksi takaisinsijoitus

$$\mathbf{Uu} = \mathbf{y}.$$

Sovellettaessa Gaussin eliminaatioprosessia nauhamaiseen matriisiin havaitaan nauhamaisuuden periytyvän myös hajotelmamatriiseihin $\mathbf{L}$ ja $\mathbf{U}$. Nauhan sisällä olevat nollalohkot sensijaan eivät säily, vaan tapahtuu ns. täyttymistä. Erilaiset eliminaatiotavat tuottavat erilaisen täyttymisasteen, vrt. alirakennetekniikka, jota selvitetään myöhemmissä kappaleissa.

Esimerkki 16.1 Diskretoitaessa yksidimensioinen lämmönjohtumisprobleema

$$-ku'' = \bar{f}, \quad u(0) = 0, u'(L) = 0$$

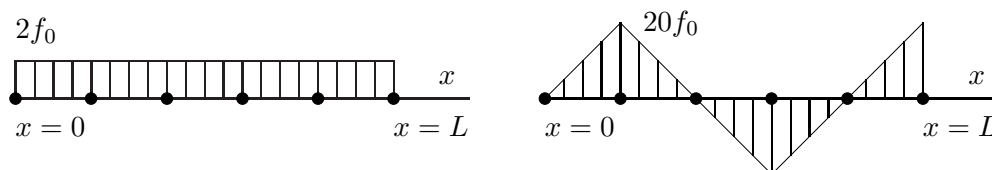
viidellä lineaarisilla elementillä päädytään yhtälösystemiin

$$\frac{k}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ -12 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right) f_0 h = \begin{bmatrix} 14 \\ 2 \\ -10 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} f_0 h, \quad (16.3)$$

eli

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f},$$

kun kuormitus koostuu kahdesta komponentista oheisen kuvan mukaisesti ja $h = L/5$.



Suoritetaan kerroinmatriisin $\mathbf{LU}$ ja $\mathbf{LDL}^T$ hajotelmat, kuormavektorin reduktio sekä systeemin ratkaisu takaisinsijoituksella.

Jaetaan matriisi $\mathbf{K}$ dimensiottomaksi tekijällä k/h . Vähennetään näin saadun matriisin $\mathbf{K}$ toisesta vaakarivistä luvulla $-\frac{1}{2}$ kerrottu ensimmäinen vaakarivi:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Näin on kaksi ylintä vaakariviä saatettu yläkolmiomuotoon. Seuraavaksi vähennetään yllä olevan matriisin kolmannelle vaakariville luvulla $-\frac{2}{3}$ kerrottu toinen vaakarivi:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seuraavaksi yllä olevan matriisin neljännestä vaakarivistä vähennetään kertomalla $-\frac{3}{4}$ kerrottu kolmas vaakarivi:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Viimeisenä vaiheena vähennetään yllä olevan matriisin alimmasta vaakarivista kertomalla $-\frac{4}{5}$ kerrottu neljäs vaakarivi, jolloin päädytään yläkolmiomatriisiin $\mathbf{U}$ ja alakolmiomatriisi saadaan käyttämistämme kerroinalkioista $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$ ja $-\frac{4}{5}$:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix}.$$

Totea kertomalla että $\mathbf{K} = \mathbf{LU}$.

Helposti nähdään yhteyden alakolmiomatriisin $\mathbf{L}$ ja yläkolmiomatriisin $\mathbf{U}$ välillä,

josta saadaan $\mathbf{LDL}^T$ hajotelma

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

eli siis $\mathbf{U} = \mathbf{DL}^T$.

Kuormavektorin redusointi alakolmiomatriisiin $\mathbf{L}$ avulla tapahtuu seuraavasti:

$$\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 14 \\ 2 + \frac{1}{2}14 \\ -10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ -10 + \frac{2}{3}9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ -4 \\ 2 + \frac{3}{4}(-4) \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ -4 \\ -1 \\ 7 + \frac{4}{5}(-1) \end{pmatrix},$$

joten

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ -4 \\ -1 \\ \frac{31}{5} \end{pmatrix} \frac{f_0 h^2}{k}, \quad \text{josta} \quad \mathbf{y} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -3 \\ -\frac{4}{5} \\ 31 \end{pmatrix} \frac{f_0 h^2}{k}.$$

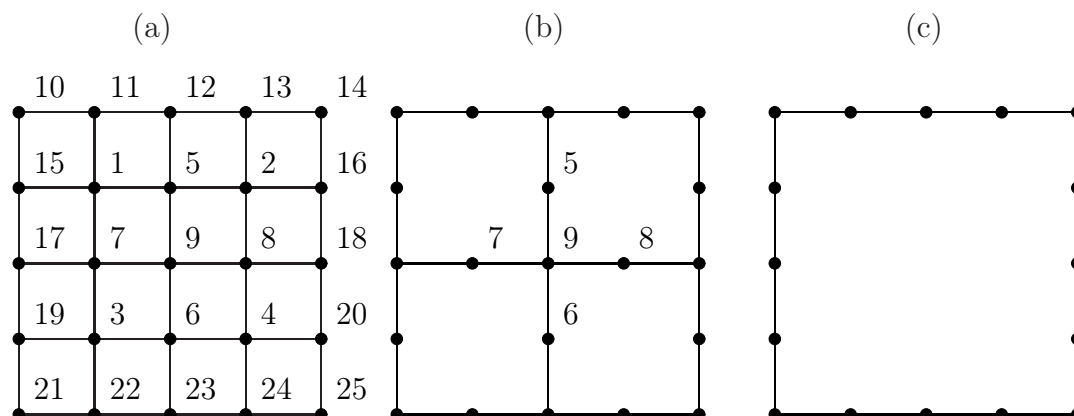
Ratkaisu saadaan helposti takaisinsijottamalla $\mathbf{u} = \mathbf{L}^T \mathbf{y}$:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -3 \\ -\frac{4}{5} + \frac{4}{5}31 \\ 31 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -3 + \frac{3}{4}24 \\ 24 \\ 31 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 6 + \frac{2}{3}15 \\ 15 \\ 24 \\ 31 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 + \frac{1}{2}16 \\ 16 \\ 15 \\ 24 \\ 31 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ 15 \\ 24 \\ 31 \end{pmatrix} \frac{f_0 h^2}{k}.$$

16.2.2 Aaltorintamatekniikka

Aaltorintamatekniikalle ominainen piirre on systeemimatriisin kokoamisen (elementtimatriisien osuuksista) ja eliminoinnin samanaikaisuus. Tässä menetelmässä systee-



Kuva 16.3 Alirakennetekniikan periaate.

mimatriisi ei milloinkaan esiinny koottuna tietokoneen keskusmuistissa. Bruce Ironsin 1960 luvun loppupuolella kehittämä aaltorintamamenetelmä mahdollisti suurempien tehtävien ratkaisun kuin mitä olisi ollut mahdollista muilla eliminointitekniikoilla senaikaisten tietokoneiden keskusmuistin pienuuden takia. Vieläkin se on tehokas keino suurten tehtävien suoraan ratkaisuun, vaikka virtuaalimuistitekniikka mahdollistaa todellisen keskusmuistin kokoa suurempien tehtävien ratkaisun. Erittäin suurten tehtävien ratkaisu suoritetaan nykyisin iteratiivisia algoritmeja käyttäen, jolloin muistitilan tarve on huomattavasti pienempi suoraan eliminointiin verrattuna. Yksityiskohtaisen selostuksen aaltorintamatekniikasta löytää esimerkiksi lähteestä [23]

16.2.3 Alirakennetekniikka

Alirakennetekniikka soveltaa staattisen kondensaation ideaa. Tarkastellaan asiaa esimerkin avulla. Kuvassa 16.3 on esitetty prosessin kulku kaksidimensioisessa tapauksessa, jossa diskretointi on suoritettu nelisolmuisilla bilineaarisilla elementeillä ja otaksutaan yksinkertaisuuden vuoksi, että jokaisessa solmussa on yksi vapausaste.

Alkuperäinen elementtiverkko on kuvan 16.3a mukainen. Ensimmäisessä vaiheessa muodostetaan neljä makroelementtiä, joiden sisältä eliminoidaan solmujen 1-4 vapausasteet jolloin päädytään kuvan 16.3b tilanteeseen. Seuraavassa vaiheessa yhdistetään neljä makroelementtiä kahdeksi makroelementiksi, joiden sisältä eliminoidaan solmujen 5 ja 6 vapausasteet. Nämä kaksi makroelementtiä yhdistetään viimein koko verkon kattavaksi superelementiksi, jonka sisältä kondensoidaan solmujen 7-9 vapausasteet, jolloin päädytään kuvan 16.3c tilanteeseen.

Näin on saatu jäykkyysmatriisin koko huomattavasti alkuperäistä pienemmäksi; tosin se ei ole enää nauhamainen vaan täysi matriisi. Matriisin täyttymisaste hajoitelman yhteydessä on kylläkin osoittautunut alirakennetekniikassa pienemmäksi kuin nauhamaisen alkuperäisen systeemin hajoitelman suorittamisessa. Alirakennetekniikan haittapuolena on huomattavasti hankalampi ohjelmointi erityisesti epä-säännöllisten elementtiverkkojen yhteydessä.

16.3 Iteratiiviset menetelmät

Iteratiiviset lineaarisen yhtälösystemin ratkaisumenetelmät voidaan jakaa pääluokkaan, eli stationäärisiin- ja epästationäärisiin menetelmiin. Stationäärisiksi kutsutaan muotoa

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$$

olevia iteraatioita joissa sekä $\mathbf{B}$ että $\mathbf{c}$ eivät saa riippua iteraatiokierroksesta k . Klassiset iteraatiot kuten Jacobi, Gauss-Seidel ja ylirelaksaatiomenetelmät kuuluvat tähän luokkaan. Epästationääriset iteraatiot taas sisältävät informaatiota, joka muuttuu joka iteraatiokierroksella, kuten esimerkiksi konjugaattigradienttimenetelmän parametrit, jotka ovat jäännös- ja suuntavektoreiden sisätuloja.

16.3.1 Yksinkertaisia iteraatioalgoritmeja

Konstruoidaan systeemille (16.1) ekvivalentti yhtälöryhmä siirtämällä termi $\mathbf{A}\mathbf{x}$ yhtälön oikealle puolelle ja lisäämällä puolittain termi $\mathbf{M}\mathbf{x}$, jossa $\mathbf{M}$ on jokin sopivan yksinkertainen matriisi, eli

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = (\mathbf{M} - \mathbf{A}\mathbf{x}) + \mathbf{b}. \quad (16.4)$$

Yhtälöt (16.1) ja (16.4) ovat tietenkin ekvivalentteja, mutta systeemi (16.4) antaa mahdollisuuden iteratiiviseen ratkaisuun, jolloin mielivaltaisesta aloitusvektorigista $\mathbf{x}^{(0)}$ (voi olla nollavektori), askeleittain päädytään kohti tarkempaa tulosta, eli saadaan iteraatiokaava

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{M} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}. \quad (16.5)$$

On huomattava, että mikä tahansa matriisi $\mathbf{M}$ ei ole sovelias. Toisaalta sen olisi oltava mahdollisimman yksinkertainen, jotta iteratiivinen ratkaisu olisi kannattavaa. Mitä lähempänä $\mathbf{M}$ on alkuperäistä matriisiä $\mathbf{A}$ sen parempi. Iteraation (16.5) suppeneminen eli konvergentti⁴ on tietenkin riippuvainen matriiseista $\mathbf{M}$ ja $\mathbf{A}$. Merkitään askeleella k olevaa virhettä $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}$, jolloin iteraatiokaavasta (16.5) saadaan

$$\mathbf{M}\mathbf{e}^{(k+1)} = (\mathbf{M} - \mathbf{A})\mathbf{e}^{(k)}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}^{(k+1)} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{A})\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{B}\mathbf{e}^{(k)}.$$

Jokaisella iteraatioaskeleella virhe kerrotaan (toivottavasti pienentävällä) tekijällä $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$, joten k :n askeleen jälkeen senhetkinen virhe suhtautuu alkuperäiseen virheeseen yhtälön

$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{B}^k \mathbf{e}^{(0)}$$

⁴Mikäli iteraatio ei supene sen sanotaan hajaantuvan eli divergoivan; tilanne joka pyritään kaikin keinoin välttämään.

mukaisesti.

Yllä olevasta yhtälöstä nähdään heti, että iteraatioalgoritmi (16.5) suppenee vain, jos matriisin $\mathbf{B}$ kaikki ominaisarvot ovat itseisarvoltaan ykköstä pienempiä, toisin sanoen

$$|\lambda_i(\mathbf{B})| < 1.$$

Konvergenssin määrää siten matriisin $\mathbf{B}$ itseisarvoltaan suurin ominaisarvo, ja tätä arvoa kutsutaan myös matriisin $\mathbf{B}$ *spektraalisäteeksi*.

Täten voidaan matriisin $\mathbf{M}$ hyvälle valinnalle asettaa seuraavat kaksi, toisilleen ristiriitaista ehtoa:

- Yhtälö $\mathbf{M}\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{M} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$ on oltava ratkaistavissa yksinkertaisesti. Täten matriisin $\mathbf{M}$ olisi oltava joko diagonaali- tai kolmiomatriisi.
- Matriisin $\mathbf{M}$ pitäisi olla mahdollisimman lähellä matriisia $\mathbf{A}$, jolloin iteraatiomatriisin $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{A}) = \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ ominaisarvot olisivat itseisarvoltaan mahdollisimman pieniä.

Kolme yksinkertaista kandidaattia matriisiksi $\mathbf{M}$ ovat:

1. $\mathbf{M}$ on $\mathbf{A}$:n diagonaali (Jacobin menetelmä),
2. $\mathbf{M}$ on $\mathbf{A}$:n alakolmio (Gaussin-Seidelin menetelmä),
3. $\mathbf{M}$ on edellisten kombinaatio jolloin saadaan ylirelaksaatiomenetelmä, jonka lyhenne SOR (successive overrelaxation).

Merkitään jäykkyysmatriisin $\mathbf{A}$ jakoa diagonaalimatriisin, ala- ja yläkolmiomatriisin summaksi seuraavasti:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U} \quad \text{ja} \quad \mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{A}).$$

Täten iteraatiokaavat mainituille menetelmille ovat:

1. Jacobi ($\mathbf{M} = \mathbf{D}$)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1} [\mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U}) \mathbf{x}^{(k)}] = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)}),$$

2. Gauss-Seidel ($\mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{D}$)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{U} \mathbf{x}^{(k)}), \quad (16.6)$$

3. ylirelaksaatiomenetelmä ($\mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + (1 - \omega)/\omega \mathbf{D} = \mathbf{L} + (1/\omega) \mathbf{D}$)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{L} + \frac{1}{\omega} \mathbf{D})^{-1} \left[\mathbf{b} - \left(\frac{1 - \omega}{\omega} \mathbf{D} + \mathbf{U} \right) \mathbf{x}^{(k)} \right], \quad (16.7)$$

missä ω on relaksaatioparametri $1 \leq \omega < 2$. Iteraatiokaavoja (16.6) ja (16.7) ei kuitenkaan käytetä, vaan iterointi tapahtuu niiden ekvivalenteissa muodoissa

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b} \right), \quad (16.8)$$

ja

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (1 - \omega)\mathbf{x}^{(k)} - \omega\mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b} \right). \quad (16.9)$$

Kirjoitetaan yllä olevat iteraatiokaavat komponenttimuodossa, josta ne on helppo ohjelmoida algoritmiksi ($\mathbf{A} = [A_{ij}]$, $\mathbf{b} = \{b_i\}$):

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j^{(k)} \right),$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n A_{ij}x_j^{(k)} \right).$$

Optimaaliselle ylirelaksaatioparametrin arvolle voidaan johtaa lauseke

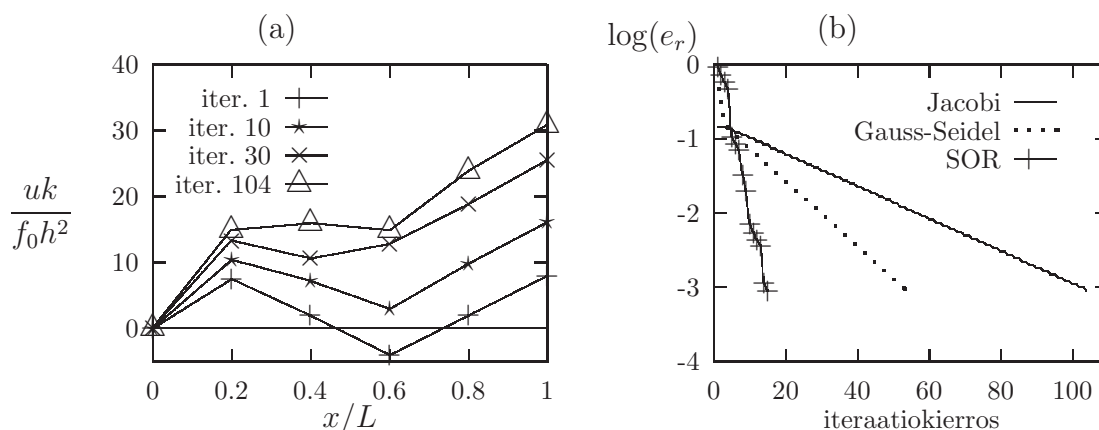
$$\omega_{opt} = 1 + \lambda_n,$$

jossa λ_n on iterointimatriisin $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ suurin ominaisarvo. Jacobin, Gauss-Seidelin ja ylirelaksaatiomenetelmän suppenemisnopeus on riippuvainen iteraatiomatriisin $\mathbf{B}$ suurimman ominaisarvosta. Tämä on taas riippuvainen yhtälösystemin koosta ikävällä tavalla. Mitä suurempi systeemi sen varmemmin iteraatiomatriisin suurin ominaisarvo on lähellä ykköstä. Elementtimenetelmässä syntyvien suurien yhtälösystemien ratkaisuun nämä yksinkertaiset iteraatiot ovat siten liian hitaita. Niitä voidaan kuitenkin käyttää osana ns. moniverkkoalgoritmia.

Esimerkki 16.2 Tarkastellaan edellä mainittujen menetelmien suppenemistä esimerkin avulla, ja suoritetaan yhtälösystemin (16.3) ratkaisu Jacobin, Gauss-Seidelin ja ylirelaksaatiomenetelmällä. Pyritään promillen tarkkuuteen käytettäessä lopetuskriteeriä

$$\|\mathbf{K}\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{f}\|_{\infty} < TOL\|\mathbf{f}\|_{\infty},$$

eli $TOL = 0,001$.



Kuva 16.4 Yhtälösystemin ratkaisu klassisilla iteraatioilla: (a) ratkaisun approksimaatio askeleilla 1, 10, 30 ja 104 Jacobin menetelmässä, (b) suhteellinen virhe iteraatiokierrosten funktiona eri menetelmillä.

Jacobin menetelmän matriisi $\mathbf{M}$ on jäykkyyismatriisin diagonaali, joten

$$\mathbf{M} - \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iteraatio suppenee hitaasti ja haluttu tarkkuus saavutetaan vasta 104 iteraation jälkeen. Tutkittaessa iteraation kulkua havaitaan globaalin muodon suppenen hitaasti, kun taas korkeataajuuksiset komponentit iteraatio vangitsee hyvin jo ensimmäisen iteraation jälkeen. Kuvassa 16.4 ratkaisun kulku on piirretty ensimmäisen ja muutamien myöhempien iteraatioiden jälkeen.

Gaussin-Seidelin menetelmän matriisit $\mathbf{M}$ ja $\mathbf{M} - \mathbf{K}$ ovat

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} - \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Voidaan osoittaa Gaussin-Seidelin menetelmän yhden iteraatioaskeleen vastaavan noin kahta Jacobin iteraatiota. Näin voidaan todeta myös esimerkiksi, sillä vaadittu tarkkuus saavutetaan 53 iteraation jälkeen. Iteraation suppeneminen on samantyyppistä kuin Jacobin iteraation tapauksessa, eli matalataajuuksinen komponentti suppenee hitaimmin.

Taulukko 16.2 Ratkaisuvektorin ja residuaalin alkiot.

i	Jacobi		Gauss-Seidel		SOR		tarkka
	u_i	g_i	u_i	g_i	u_i	g_i	u_i
1	14.957	-0.43306E-02	14.953	-0.89394E-02	15.016	0.12366E-01	15
2	15.918	-0.78341E-02	15.915	-0.11702E-01	16.019	0.11629E-01	16
3	14.887	-0.11338E-01	14.889	-0.13083E-01	15.011	-0.13615E-02	15
4	23.867	-0.12676E-01	23.876	-0.13083E-01	24.004	-0.60054E-02	24
5	30.860	-0.70071E-02	30.876	0.00000E-00	31.004	-0.79493E-03	31

Ylirelaksaatiomenetelmän optimaalinen relaksaatioparametri on tässä esimerkissä

$\omega \approx 1.6$, jolloin iteraatio suppenee 15 kierroksessa. Suhteellisen residuaalin maksiminormin pieneneminen on esitetty kuvassa 16.4b. Ratkaisuvektori on esitetty taulukossa 16.2. Huomaa, että vaikka residuaalilta vaaditaan promillen suhteellista tarkkuutta, ei siirtymien ratkaisuvektori ole lähellä edes prosentin tarkkuutta Jacobin ja Gaussin-Seidelin menetelmissä.

16.3.2 Minimointialgoritmejä

Yhtälösystemin (16.1) ratkaisu on ekvivalentti minimointiongelman

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b} \right), \quad (16.10)$$

ratkaisulle, mikäli matriisi $\mathbf{A}$ on symmetrinen ja positiivisesti definiitti $n \times n$ matriisi. Tässä luvussa tarkastellaan kahta algoritmia, gradientti- ja konjugaattigradienttimenetelmää (liittogradienttimenetelmä) minimointitehtävän (16.10) ratkaisemiseksi.

16.3.2.1 Gradienttimenetelmä

Merkitään vektoriarvoisen skalaarifunktion gradienttia $f' = \mathbf{g}$, eli

$$f' = \mathbf{g} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T.$$

Lisäksi määritellään funktion f Hessen matriisi $f'' = \mathbf{H}$

$$f'' = \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Kvadraattiselle funktiolle f pätee

$$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \quad \text{ja} \quad f''(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}.$$

Etsitään minimointiongelman ratkaisua seuraavassa muodossa

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}$$

jossa $\mathbf{d}^{(k)}$ on hakusuunta ja $\alpha^{(k)}$ on askelpituus. Funktion f Taylorin kehitelmä on

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^{(k+1)}) &= f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}) \\ &= f(\mathbf{x}^{(k)}) + \alpha^{(k)} \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}^{(k)} + \frac{1}{2} (\alpha^{(k)})^2 \mathbf{d}^{(k)T} \mathbf{H}(\mathbf{v}) \mathbf{d}^{(k)}, \end{aligned}$$

missä vektori $\mathbf{v}$ on väliltä $(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k+1)})$. Termi $(\alpha^{(k)})^2 \mathbf{d}^{(k)T} \mathbf{H} \mathbf{d}^{(k)}$ on aina positiivinen, sillä $\mathbf{H}$ otaksutaan positiivisesti definiitiksi. Mikäli vaaditaan ehto $f(\mathbf{x}^{(k+1)}) < f(\mathbf{x}^{(k)})$, on tällöin oltava voimassa epäyhtälö

$$\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{d}^{(k)} < 0 \quad \text{kun} \quad 0 < \alpha \ll 1,$$

missä on merkitty $\mathbf{g}^{(k)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)})$. Mikäli nyt valitaan

$$\mathbf{d}^{(k)} = -\mathbf{g}^{(k)},$$

saadaan menetelmä jota kutsutaan gradienttimenetelmäksi tai jyrkimmän laskun menetelmäksi.

Optimaalinen askelpituus $\alpha^{(k)}$ määritetään ehdosta

$$f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}) = \min_{\alpha \geq 0} f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)}).$$

Merkitään $g(\alpha) = f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)})$, jolloin minimipisteessä pätee $dg/d\alpha = 0$. Ketju-derivoimalla saadaan lauseke

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\alpha} &= f'(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{d}^{(k)} = [\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)}) - \mathbf{b}]^T \mathbf{d}^{(k)} \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b})^T \mathbf{d}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{d}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{d}^{(k)} = 0, \end{aligned}$$

josta tarkaisemalla optimaalinen askelpituus on

$$\alpha^{(k)} = -\frac{\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{d}^{(k)}}{\mathbf{d}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{d}^{(k)}} = \frac{\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{g}^{(k)}}{\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{g}^{(k)}}.$$

Gradienttimenetelmän algoritmi voidaan siten kirjoittaa seuraavasti. Lähdetään

aloitusvektorista $\mathbf{x}_0$, iteroidaan

$$\mathbf{g}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}, \quad (16.11a)$$

$$\alpha^{(k)} = \frac{\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{g}^{(k)}}{\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{g}^{(k)}}, \quad (16.11b)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha^{(k)} \mathbf{g}^{(k)}. \quad (16.11c)$$

Edellä esitetty iteraatiokaava vaatii kaksi matriisi-vektori kertomista. Algoritmi voidaan kirjoittaa myös muodossa, jossa on vain yksi matriisi-vektori kertominen, jolloin menetelmän työmäärä askelta kohden huomattavasti pienenee. Tämä perustuu siihen, että gradienttia $\mathbf{g}$ (jota voidaan kutsua myös jäännökseksi eli residuaaliksi) ei lasketa suoraan yhtälöstä (16.11a) vaan edellisen iteraatioaskeleen gradientista seuraavasti

$$\mathbf{g}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{b} = \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)} - \alpha^{(k)} \mathbf{g}^{(k)}) - \mathbf{b} = \mathbf{g}^{(k)} - \alpha^{(k)} \mathbf{A} \mathbf{g}^{(k)}.$$

Gradienttimenetelmän algoritmi voidaan kirjoittaa nyt uudessa muodossa

$$\alpha^{(k)} = \frac{\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{g}^{(k)}}{\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{g}^{(k)}}, \quad (16.12a)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha^{(k)} \mathbf{g}^{(k)}, \quad (16.12b)$$

$$\mathbf{g}^{(k+1)} = \mathbf{g}^{(k)} - \alpha^{(k)} \mathbf{A} \mathbf{g}^{(k)}, \quad (16.12c)$$

missä $k = 0, 1, \dots$. Alkuarvauksesta $\mathbf{x}^{(0)}$ lasketaan $\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}$.

16.3.2.2 Liittogradienttimenetelmä

Konjugaattigradienttimenetelmässä hakusuunnat $\mathbf{d}^{(k)}$ valitaan siten, että hakusuunnat konjugoivat, eli ovat ortogonaalisia jäykkyysmatriisilla $\mathbf{A}$ painotetun sisätulon mielessä

$$\mathbf{d}^{(i)T} \mathbf{A} \mathbf{d}^{(j)} = 0, \quad i \neq j.$$

Konjugaattigradienttimenetelmän algoritmi voidaan kirjoittaa useissa ekvivalenteissa muodoissa jotka eroavat toisistaan muistitilan tarpeen ja laskentatyön määrän suhteen. J.K. Reid on vertaillut konjugaattigradienttimenetelmän eri versioita laskentatyön määrän, muistitilan tarpeen ja tarkkuuden suhteen [50], ja hänen tulok-

sensa näyttäisivät suosivan seuraavanlaista algoritmia:

$$\alpha^{(k)} = \frac{\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{g}^{(k)}}{\mathbf{d}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{d}^{(k)}}, \quad (16.13a)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}, \quad (16.13b)$$

$$\mathbf{g}^{(k+1)} = \mathbf{g}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{A} \mathbf{d}^{(k)}, \quad (16.13c)$$

$$\beta^{(k)} = \frac{\mathbf{g}^{(k+1)T} \mathbf{g}^{(k+1)}}{\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{g}^{(k)}}, \quad (16.13d)$$

$$\mathbf{d}^{(k+1)} = -\mathbf{g}^{(k+1)} + \beta^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}, \quad (16.13e)$$

missä $k = 0, 1, \dots$. Alkuarvauksesta $\mathbf{x}^{(0)}$ lasketaan $\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{A} \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}$ ja asetetaan $\mathbf{d}^{(0)} = -\mathbf{g}^{(0)}$.

Konjugaattigradienttimenetelmä voidaan periaatteessa lukea suoriin menetelmiin kuuluvaksi, sillä se antaa tarkan ratkaisun n :n askeleen jälkeen, kun kaikki avaruuden R^n suunnat on käyty lävitse, mikäli laskennassa ei tapahdu pyöristysvirheitä. Edellisessä kappaleessa oleva pieni esimerkki iteroituu kylläkin viidellä iteraatiolla. Konjugaattimenetelmän eri versioiden yksityiskohtaisempi johto löytyy lähteestä [2], jossa on esitetty myös menetelmän virheanalyysi. Helppotajuinen johto ja virheanalyysi on esitetty myös lähteessä [17].

Gradienttimenetelmälle voidaan johtaa virhearvio energianormissa

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A = \left[(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x})^T \mathbf{A} (\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}) \right]^{1/2},$$

ja se on [17]

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \left(1 - \frac{1}{C(\mathbf{A})} \right)^{k/2} \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A, \quad (16.14)$$

missä $\mathbf{x}$ on minimointitehtävän tarkka ratkaisu ja $C(\mathbf{A})$ on matriisin $\mathbf{A}$ häiriöalttius. Tästä voidaan päätellä, että suhteelliseen tarkkuuteen TOL pääsemiseksi tarvittavien iteraatioiden määrä on

$$I \geq 2C(\mathbf{A}) \log \frac{1}{TOL}. \quad (16.15)$$

Vastaavasti konjugaattigradienttimenetelmälle pätee virhearvio [17]

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{C(\mathbf{A})} - 1}{\sqrt{C(\mathbf{A})} + 1} \right)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A, \quad (16.16)$$

josta iteraatiomäärä

$$I \geq \frac{1}{2} \sqrt{C(\mathbf{A})} \log \frac{2}{TOL}. \quad (16.17)$$

16.3.2.3 Pohjustettu liittogradienttimenetelmä

Arvioista (16.15) ja (16.17) havaitaan, että iteraatiomäärä on suoraan verrannollinen jäykkyysmatriisin $\mathbf{A}$ häiriöalttiuteen. Tätä riippuvuutta voidaan lieventää käyttämällä muuttujain vaihtoa, eli $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$, missä $\mathbf{C}$ on positiivisesti definiitti $n \times n$ matriisi. Täten minimointiongelma (16.10) muuntuu muotoon

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}} F(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{C}^{-T} \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{C}^{-T} \mathbf{b} \right) = \min_{\mathbf{y}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \tilde{\mathbf{b}} \right),$$

missä on merkitty

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C}^{-T} \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1}, \quad \text{ja} \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{C}^{-T} \mathbf{b}.$$

Mikäli merkitään $\mathbf{M} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$, voidaan konjugaattigradienttimenetelmän algoritmi (16.13) kirjoittaa pohjustetussa muodossa [2], [27]:

16.3.2.3.1 PCG-algoritmi (engl. Preconditioned Conjugate Gradient):

1. alustus

- (a) muodosta pohjustin $\mathbf{M}$ (tai suoraan $\mathbf{M}^{-1}$),
- (b) laske aloitusvektori $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$ ja ratkaise suunta $\mathbf{d}_0 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_0$ sekä laske $\tau_0 = \mathbf{r}_0^T \mathbf{d}_0$

2. iteroi $i = 0, 1, 2, \dots$ kunnes saavutetaan riittävä tarkkuus:

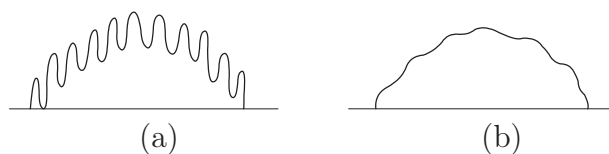
- (a) muodosta: $\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{d}_i$, $\alpha_i = \tau_i / \mathbf{d}_i^T \mathbf{s}$,
- (b) päivitä: $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \alpha_i \mathbf{d}_i$, $\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \alpha_i \mathbf{s}$,
- (c) suorita pohjustinoperaatio: $\mathbf{z} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_{i+1}$,
- (d) laske: $\tau_{i+1} = \mathbf{r}_{i+1}^T \mathbf{z}$, $\beta_i = \tau_{i+1} / \tau_i$,
- (e) päivitä: $\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{z} + \beta_i \mathbf{d}_i$.

Oheisessa algoritmssä on merkitty $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} = -\mathbf{g}$. Iteraation suppenemista voidaan testata laskemalla jäännösvektorin normi $\|\mathbf{r}\|$ tai $\sqrt{\tau}$ parametrissa, joka on oikeastaan jäännösvektorin pohjustimen käänteismatriisilla painotettu normi $\sqrt{\tau} = \|\mathbf{r}\|_{\mathbf{M}^{-1}} = (\mathbf{r}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r})^{1/2}$.

Matriisia $\mathbf{M}$ kutsutaan pohjustimeksi ja se pyritään valitsemaan siten, että matriisin $\tilde{\mathbf{A}}$ häiriöalttiisuus olisi huomattavasti pienempi kuin alkuperäisen jäykkyysmatriisin $\mathbf{A}$, eli

$$C(\tilde{\mathbf{A}}) = C(\mathbf{C}^{-T} \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1}) = C(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}) \ll C(\mathbf{A}).$$

Havaitaan, että optimaalinen pohjustus saavutetaan kun $\mathbf{M} = \mathbf{A}$. Tämä edellyttäisi kuitenkin matriisin $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$ hajotelman muodostamista. Suositettu tapa on käyttää



Kuva 16.5 Iteraatiovirheen kehittyminen Jacobin iteraatiossa: (a) alkuarvaus, (b) muutaman iteraatiokierroksen jälkeen virhe ei ole juuri pienentynyt, mutta on rauhoittunut [49].

epätäydellistä $\mathbf{LL}^T$ hajotelmaa pohjustimena, jossa matriisin nauhan sisäiset nollaalkiot säilytetään nollina, ts. jätetään tarkassa hajotelmassa syntyvä nauhan täyttyminen huomiotta. Seuraavassa luvussa kerrotaan lisää erilaisista pohjustustavoista.

16.3.3 Pohjustinstrategioista

Pohjustimen valinta ja sen laskenta on ehkä koko iteraatioprosessin tärkein vaihe. Yleisimmät pohjustusmenetelmät voidaan jaotella seuraaviin luokkiin:

1. klassisiin stationääriin iteraatioihin perustuvat pohjustimet kuten Jacobi, SSOR,
2. epätäydelliset $\mathbf{LU}$ tai $\mathbf{LDL}^T$ hajotelmat,
3. polynomipohjustimet,
4. harva approksimaatio pohjustimen käänteismatriisille $\mathbf{H} = \mathbf{M}^{-1} \approx \mathbf{A}^{-1}$ ja
5. monitasopohjustimet.

Muita menettelyjä on myös olemassa jotka perustuvat ratkaistavan ongelman erikoisluonteeseen.

Pohjustinta sanotaan implisiittiseksi mikäli sen käytössä joudutaan ratkaisemaan lineaarinen yhtälö ja eksplisiittiseksi mikäli pohjustinaskel voidaan suorittaa matriisivektori kertolaskuna. Eksplisiittiset pohjustimet ovat suhteellisen helppoja ohjelmoida vektori- ja rinnakkaisprosessoritietokoneilla verrattuna implisiittisiin pohjustimiin.

16.3.4 Moniverkkoalgoritmi

Edellä todettiin yksinkertaisten iteraatioiden, kuten Jacobin iteraation, suppenevan hitaasti. Menetelmän ominaisuuksia tarkemmin tutkien on se kuitenkin nopea ratkaisun korkeataajuuksisten komponenttien vangitsijana, kuva 16.5 (lähteestä [49]). Ratkaisun matalataajuuksiset komponentit suppenevat hitaimmin ja tekevät kyseisten iteraatiomenetelmien käytön suurten elementtimenetelmässä syntyvien yhtälösystemien ratkaisussa kannattamattomaksi.

Moniverkkoratkaisijan idea on käyttää useita diskretoinnin tasoja, ja ratkaisun matalataajuuksiset komponentit vangitaan harvassa verkossa. Moniverkkoalgoritmin kaksi oleellista vaihetta ovat:

- relaksaatiovaihe, jossa ratkaisun korkeataajuuksiset komponentit vangitaan yksinkertaisella iteraatiolla, esim. Jacobin tai Gauss-Seidelin iteraatiolla (relaksaatiota suoritetaan useilla diskreetointitasoilla),
- korjausvaihe, jossa ratkaisun matalataajuuksiset komponentit vangitaan ratkaisemalla ongelma hyvin harvassa verkossa.

Moniverkkoalgoritmi esitetään useissa lähteissä (esim. [29], [2]) muodossa, jossa prosessi aloitetaan mielivaltaisesta alkuarvauksesta hienoimmassa verkossa ja relaksoiden kohti karkeinta verkkoa, jossa suoritetaan korjaus ja palataan takaisin korjaten ja relaksoiden kohti hienointa verkkoa. Vieläkin tehokkaampi ja luonnollisempi tapa on johtaa hienoimman verkon iteraatiolle alkuarvaus karkeimman verkon ratkaisusta [49].

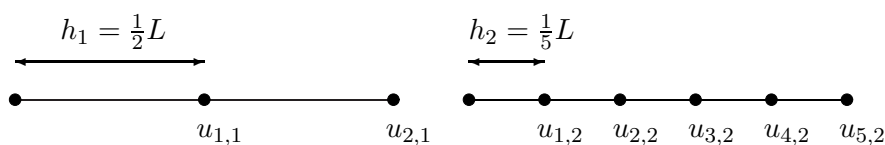
Yksinkertainen kaksiverkkoalgoritmi voisi olla seuraavanlainen:

1. ratkaistaan systeemi harvassa verkossa $\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$,
2. interpoloidaan hienon verkon arvot harvasta verkosta $\mathbf{x}_2 = \mathbf{F} \mathbf{x}_1$,
3. suoritetaan muutama relaksaatioiteraatio hienossa verkossa,
4. muunnetaan jäännös $\mathbf{r}_2 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2$ harvempaan verkkoon $\mathbf{r}_1 = \mathbf{C} \mathbf{r}_2$,
5. ratkaistaan harvan verkon korjaus $\mathbf{A}_1 \Delta \mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_1$,
6. siirretään korjaus hienoon verkkoon ja lisätään edellisiin hienon verkon arvoihin $\Delta \mathbf{x}_2 = \mathbf{F} \Delta \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2^{\text{uusi}} = \mathbf{x}_2^{\text{vanha}} + \Delta \mathbf{x}_2$,
7. siirrytään kohtaan 3.

Matriisi $\mathbf{F}$ on interpolaatio hienoon verkkoon ja vastaavasti $\mathbf{C}$ on “keskiarvoistus” harvaan verkkoon, joka on $\mathbf{F}$:n transpoosi. On huomattava, että kaksitasomenetelmä ei ole systeemin suoraa ratkaisua tehokkaampi menetelmä, mutta kelpaa moniverkkoalgoritmin idean esittelyyn.

Voidaan osoittaa, että moniverkkoalgoritmin suppenemisnopeus ei ole riippuvainen tehtävän koosta, eli vapausasteiden lukumäärään hienossa verkossa, mikä on suuri etu tavanomaisiin iteraatioihin verrattuna. Lisäksi moniverkkoalgoritmi on asympotoottisesti optimaalinen työmäärän suhteen.

Esimerkki 16.3 Tutkitaan esimerkkiongelmää kaksitasomenetelmällä, jossa hienossa verkossa on viisi elementtiä ja harvassa kaksi.



Merkitään harvaa verkkoa alaindeksillä 1 ja hienoa vastaavasti indeksillä 2, siten $h_1 = L/2$ ja $h_2 = L/5$. Interpolaatiomatriisiksi $\mathbf{F}$ saadaan yksinkertaisesti

$$\begin{Bmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \\ u_{4,2} \\ u_{5,2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{Bmatrix} \quad \text{eli} \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{F}\mathbf{u}_1.$$

Siirretään kuormavektori siirtomatriisilla $\mathbf{C}$ harvaan verkkoon

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{C}\mathbf{f}_2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 14 \\ 2 \\ -10 \\ 2 \\ 7 \end{Bmatrix} f_0 h = \begin{Bmatrix} 0 \\ 31/5 \end{Bmatrix} f_0 h.$$

Ratkaistaan yhtälösystemi tarkasti harvassa verkossa

$$\frac{2k}{5h} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 31/5 \end{Bmatrix} f_0 h \quad \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 31/2 \\ 31 \end{Bmatrix} \frac{f_0 h^2}{k}.$$

Interpoloidaan hienon verkon aloitusvektori harvan verkon ratkaisusta

$$\mathbf{u}_2^{(0)} = \mathbf{F}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 31/2 \\ 31 \end{Bmatrix} \frac{f_0 h^2}{k} = \frac{31}{5} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix} \frac{f_0 h^2}{k} = \begin{Bmatrix} 6.2 \\ 12.4 \\ 18.6 \\ 24.8 \\ 31.0 \end{Bmatrix} \frac{f_0 h^2}{k}.$$

Suoritetaan relaksaatio Jacobin iteraatiolla

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_2^{(1)} &= \mathbf{u}_2^{(0)} + \mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{f}_2 - \mathbf{K}_2 \mathbf{u}_2^{(0)} \right) \\
 &= \left(\frac{31}{5} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(14 - \frac{31}{5}(2-2)) \\ \frac{1}{2}(2 - \frac{31}{5}(-1+4-3)) \\ \frac{1}{2}(-10 - \frac{31}{5}(-2+6-4)) \\ \frac{1}{2}(2 - \frac{31}{5}(-3+8-5)) \\ 7 - \frac{31}{5}(-4+5) \end{Bmatrix} \right) \frac{f_0 h^2}{k} \\
 &= \begin{Bmatrix} 13.2 \\ 13.4 \\ 13.6 \\ 25.8 \\ 31.8 \end{Bmatrix} \frac{f_0 h^2}{k}.
 \end{aligned}$$

Muutaman relaksaatioiteraation jälkeen jäännös siirretään harvaan verkkoon, jossa ratkaisu suoritetaan tarkasti. Harvan verkon korjaus siirretään ja lisätään hienon verkon arvoihin jne. Voidaan todeta että tässä esimerkissä yksi moniverkkoalgoritmin kierros antoi hyvän likiarvon ratkaisun matalataajuuksisille komponentille.

16.4 Menetelmien vertailua

Lineaarisen yhtälösystemin ratkaisumenetelmiä voidaan vertailla toisiinsa ratkaisuun käytetyn työmäärän ja vaadittavan muistitilan määrän suhteen. Gaussin algoritmiin perustuvan $\mathbf{LDL}^T$ tai $\mathbf{LU}$ hajotelman suorittaminen on työmäärältään (peruslaskutoimitusten määrä) luokkaa

$$W \sim \frac{1}{2}NB^2$$

missä N on tuntemattomien lukumäärä ja B puolinauhan leveys. Kuormavektorin redusointi ja takaisinsijoitus vaatii $2NB$ operaatiota, joten asympotoottisesti hajotelman suorittaminen on selvästi työläämpi toimenpide. Kahdessa paikkadimensiossa puolinauhan leveys on luokkaa $\sqrt{N}$, joten tällöin yhtälösystemin ratkaisun vaatima työmäärä on luokkaa N^2 .

Iteratiivisten algoritmien työmäärän arviointi ei ole yhtä yksinkertaista. Mikäli iteraation lopetuskriteeriksi valitaan tarkkuus, joka on sama kuin diskretointitarkkuus, voidaan työmäärälle johtaa asympotoottisia lausekkeita. Taulukoon 16.3 on koottu vertailu muutaman menetelmän laskuoperaatioiden asympotoottisista arvioista tarkasteltuna erikseen toisen ja neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälöille

Taulukko 16.3 Lineaarisen yhtälösystemin ratkaisumenetelmien asymptoottisia laskutoimitusmääräarvioita, $W \sim CN^k$, N = tuntemattomien lkm.

kertaluku	$k - 2$ dim.	$k - 3$ dim.	menetelmä
2	1.5	1.33	konjugaattigradietti
	1.25	1.17	häiriövaimennettu konj. grad.
	2	2.33	Choleskyn ja Croutin hajotelmat
	1.5	2	alirakennetekniikka
	1	1	moniverkkoalgoritmi
4	2	1.67	konjugaattigradietti
	1.67	1.5	häiriövaimennettu konj. grad.
	2	2.33	Choleskyn ja Croutin hajotelmat
	1.5	1.67	alirakennetekniikka
	1	1	moniverkkoalgoritmi

sekä kahdessa että kolmessa dimensiossa [17]. Moniverkkoalgoritmi on asymptoottisesti optimaalinen yhtälösystemin ratkaisumenetelmä, ja sen työmääräestimaatti

$$W \sim CN$$

on johdettu lähteessä [49].

Muistitilaa suorat ratkaisijat vaativat NB alkion verran, kun taas iteratiiviset algoritmit selviävät vain tuntemattomien lukumäärään verrannollisella tilantarpeella.

Pelkästään työmääräestimaatin avulla ei voida päätellä kullekin tietokonearkkitehtuurille soveltuva optimaalista algoritmia. Esimerkiksi monitasomenetelmät ovat vaikeasti rinnakkastettavia ja melko mahdottomia saada toimimaan optimaalisesti vektoriprosessorikoneilla. Optimaalisen algoritmin valinta käytössä olevalle tietokoneelle monisyinen ongelma.

Luku 17

Etenemistehtävien numeerinen ratkaisu - diffuusioyhtälö

Tässä luvussa tarkastellaan ajasta riippuvan parabolisen diffuusioyhtälön numeerista ratkaisua. Kertauksena luvusta 1 palautetaan mieliin kyseisen yhtälön ominaispiirteet.

Ratkaisumenetelmät esitetään aluksi skalaariyhtälön tapauksessa. Johdannossa käsitellään joitain differenssimenetelmiä sekä globaali, askeleittain jatkuva että epäjatkuva Galerkinin menetelmä. Myös menetelmien stabiilius- ja tarkkuusominaisuuksia tutkitaan.

17.1 Diffuusioyhtälö

Tutkitaan yksiulotteisen diffuusioyhtälön

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in (0, L) \quad (17.1)$$

ratkaisua reunaehdoilla $u(0, t) = u(L, t) = 0$ ja alkuehdolla $u(x, 0) = \bar{u}_0 \sin(\pi x/L)$. Sijoittamalla yhtälöön (17.1) reunaehdot toteuttava yrite

$$u(x, t) = y(t) \sin \frac{\pi x}{L}$$

saadaan alkuarvotehtävä

$$\frac{dy}{dt} + \frac{k}{\rho c} \frac{\pi^2}{L^2} y = 0$$

alkuehdolla $y(0) = \bar{u}_0$. Otetaan käyttöön lyhennysmerkinnät $\dot{y} = dy/dt$ ja $a = k\pi^2/(\rho c L^2)$. Huomataan, että kerroin a on aina positiivinen. Ratkaistavana on siten alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} \dot{y} + ay = 0 \\ y(0) = \bar{y}_0 = \bar{u}_0. \end{cases} \quad (17.2)$$

Yhtälön (17.2) ratkaisu on

$$y(t) = \bar{y}_0 e^{-at}, \quad (17.3)$$

jolle $y(t) \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow \infty$.

17.2 Yksiaskeldifferenssimenetelmiä

17.2.1 Eulerin menetelmät

Yksinkertaisin mahdollinen aikaintegrointimenetelmä on Eulerin menetelmä, jossa aikaderivaatta korvataan joko taaksepäin tai eteenpäin lausutulla aika-askeleen pituudella jaetulla differenssillä eli erotusosamäärällä. Oletetaan ratkaisu tunnetuksi ajanhetkellä t_n ja merkitään $y(t_n) = y_n$. Eteenpäin lausuttu Eulerin menetelmä saa siten muodon

$$\dot{y}_n + ay_n \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} + ay_n = 0,$$

missä $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Ratkaisu ajanhetkelle t_{n+1} on

$$y_{n+1} = (1 - \Delta ta)y_n. \quad (17.4)$$

Koska yhtälön (17.2) ratkaisu (17.3) on monotoonisesti pienenevä, on numeerisen ratkaisun (17.4) myös toteutettava ehto

$$|1 - \Delta ta| \leq 1,$$

josta seuraa stabiiliusehto suurimmalle sallitulle aika-askeleelle Δt :

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{kr}} = \frac{2}{a} = 2 \frac{\rho c L^2}{k \pi^2}.$$

Aikaintegrointimenetelmää, jonka käytettävyyttä rajoittaa suurin sallittu aika-askeleen pituus, sanotaan *ehdollisesti stabiiliksi*.

Taaksepäin lausuttu Eulerin menetelmä saadaan, kun aikaderivaattaa approksimoidaan ajanhetkellä t_{n+1} taaksepäin lausutun erotusosamäärän avulla:

$$\dot{y}_{n+1} + ay_{n+1} \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} + ay_{n+1} = 0.$$

Ratkaisu ajanhetkellä t_{n+1} on

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 + \Delta ta} y_n, \quad (17.5)$$

mistä havaitaan stabiiliusehdon

$$\left| \frac{1}{1 + \Delta ta} \right| \leq 1$$

toteutuvan kaikilla mahdollisilla aika-askeleen arvoilla $\Delta t > 0$. Tällaista aikaintegointimenetelmää sanotaan *ehdoitta stabiiliksi*.

17.2.2 Crankin-Nicolsonin menetelmä

Crankin-Nicolsonin menetelmä tunnetaan myös havainnollisemmilla nimillä trapetsikaava tai puolisuunnikaskaava. Siinä aikaderivaattaa approksimoidaan aika-askeleen puolivälissä

$$\dot{y}(t_{n+\frac{1}{2}}) \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\Delta t} = \frac{1}{2} [\dot{y}(t_{n+1}) + \dot{y}(t_n)]. \quad (17.6)$$

Sijoittamalla edellä olevaan lausekkeeseen $\dot{y}(t_{n+1}) = -ay(t_{n+1})$ ja $\dot{y}(t_n) = -ay(t_n)$, saadaan yhtälö

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} + \frac{1}{2}a(y_{n+1} + y_n) = 0,$$

mistä y_{n+1} voidaan ratkaista:

$$y_{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta ta}{1 + \frac{1}{2}\Delta ta} y_n. \quad (17.7)$$

Trapetsikaava on ehdoitta stabiili, sillä

$$\left| \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta ta}{1 + \frac{1}{2}\Delta ta} \right| \leq 1$$

kaikilla $\Delta t > 0$.

17.2.3 Keskipistekaava

Tarkastellaan seuraavassa hieman yleisempää tapausta, nimittäin ei-autonomista ongelmaa¹

$$\dot{y}(t) + a(t)y(t) = 0 \quad \text{ja} \quad y(0) = \bar{y}_0. \quad (17.8)$$

Oletetaan kuitenkin, että kerroin $a(t) \geq 0 \forall t$. Tutkitaan trapetsikaavan (17.6)

$$\dot{y}(t_{n+\frac{1}{2}}) \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\Delta t} = \frac{1}{2} [\dot{y}(t_{n+1}) + \dot{y}(t_n)]$$

stabiiliutta kyseisessä tehtävässä. Sijoitetaan yhteydet $\dot{y}(t_{n+1}) = -a(t_{n+1})y(t_{n+1})$ sekä $\dot{y}(t_n) = -a(t_n)y(t_n)$ trapetsikaavaan, jolloin saadaan

$$y_{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta ta_n}{1 + \frac{1}{2}\Delta ta_{n+1}} y_n,$$

¹Yhtälöä $\dot{y} = f$ sanotaan autonomiseksi, mikäli funktio f ei riipu eksplisiittisesti ajasta.

missä on merkitty $a_n = a(t_n)$ jne. Havaitaan, että vakiokertoimisen yhtälön tapauksessa ehdoista stabiili trapetsikaava ei välttämättä ole sitä sovellettuina ei-autonomiseen yhtälöön. Stabiiliusehdoksi saadaan epäyhtälö

$$\Delta t(a_n - a_{n+1}) \leq 4.$$

Tarkastellaan nyt trapetsikaavan ns. keskipisteverstiota (engl. mid point rule). Tällöin yhtälö (17.8) lausutaan aika-askeleen puolivälissä

$$\dot{y}_{n+\frac{1}{2}} + a_{n+\frac{1}{2}} y_{n+\frac{1}{2}} = 0.$$

Ottamalla huomioon yhteydet

$$\dot{y}_{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} \quad \text{ja} \quad y_{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2}(y_{n+1} + y_n)$$

saadaan keskipistekaavan mukainen algoritmi

$$y_{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t a_{n+\frac{1}{2}}}{1 + \frac{1}{2}\Delta t a_{n+\frac{1}{2}}} y_n, \quad (17.9)$$

mikä helposti havaitaan ehdoista stabiiliksi.

Keskipistekaavan (17.9) käyttö onkin suositeltavaa, sillä sen stabiiliusominaisuudet säilyvät myös sovellettuina epälineaarisin ongelmiin, esim. jos kerroin a on ratkaisun y funktio.

17.2.4 Eksplisiittiset ja implisiittiset menetelmät

Alkuarvotehtävän

$$\dot{y} + f(y) = 0, \quad (17.10)$$

missä f on jokin y :n funktio, ratkaisumenetelmää kutsutaan *eksplisiittiseksi* eli *avomeksi*, mikäli y_{n+1} voidaan lausua pelkästään ajanhetkellä t_n (tai sitä aikaisemmilla) määriteltyjen suureiden avulla, eli

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(y_n).$$

Mikäli näin ei ole, on menetelmä *suljettu* eli *implisiittinen*, ja tällöin

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(y_{n+1}).$$

Tähän mennessä kuvatuista menetelmistä Euler eteenpäin on eksplisiittinen ja Euler taaksepäin sekä Crank-Nicolson ovat implisiittisiä menetelmiä. Jatkossa Eulerin menetelmiä kutsutaankin eksplisiittiseksi tai implisiittiseksi Eulerin menetelmäksi.

17.2.5 Menetelmien tarkkuus ja stabiilius

Aikaintegrointimenetelmät (17.4), (17.5) ja (17.7) voidaan kirjoittaa muodossa

$$y_{n+1} = Ay_n = A^{n+1}\bar{y}_0, \quad (17.11)$$

missä A on vahvennustekijä (engl. amplification factor):

$$A = \begin{cases} 1 - \Delta t a & \text{eksplisiittinen Euler,} \\ (1 + \Delta t a)^{-1} & \text{implisiittinen Euler,} \\ (1 + \frac{1}{2}\Delta t a)^{-1}(1 - \frac{1}{2}\Delta t a) & \text{Crank-Nicolson.} \end{cases}$$

Merkitään yhtälön (17.2) tarkkaa ratkaisua Y :llä ja numeerista ratkaisua y :llä, ja käytetään lyhennysmerkintöjä: $Y_n = Y(t_n)$, $y_n = y(t_n)$. Menetelmän paikallinen katkaisuvirhe τ aika-askeleella n määritellään seuraavasti:

$$Y_n = AY_{n-1} + \tau_n. \quad (17.12)$$

Määritellään aproksimaation y ja tarkan ratkaisun Y välinen virhe:

$$e_n = Y_n - y_n.$$

Ottamalla huomioon yhtälöt (17.11) ja (17.12) saadaan

$$\begin{aligned} e_n &= Ae_{n-1} + \tau_n \\ &= \tau_n + A\tau_{n-1} + \cdots + A^{n-1}\tau_1. \end{aligned}$$

Mikäli algoritmi on stabiili ts. $|A| \leq 1$, saadaan

$$\begin{aligned} |e_n| &\leq |\tau_n| + |A\tau_{n-1}| + \cdots + |A^{n-1}\tau_1| \\ &\leq |\tau_n| + |A||\tau_{n-1}| + \cdots + |A^{n-1}||\tau_1| \\ &\leq |\tau_n| + |\tau_{n-1}| + \cdots + |\tau_1| \\ &\leq n \max_{1 \leq i \leq n} |\tau_i|. \end{aligned}$$

Otaksumalla, että menetelmän paikallinen katkaisuvirhe on luokkaa

$$|\tau(t)| \leq C\Delta t^{q+1}, \quad (17.13)$$

missä C on positiivinen aika-askeleesta Δt riippumaton vakio, saadaan

$$|e_n| \leq nC\Delta t^{q+1}.$$

Ottamalla huomioon yhteys $n = t_n/\Delta t$, tulee

$$|e_n| \leq Ct_n \Delta t^q. \quad (17.14)$$

Mikäli ehto (17.13) toteutuu, on yhtälöllä (17.11) määritelty algoritmi konsistentti ja q on menetelmän suppenemisnopeus.

Määritetään nyt edellisessä kappaleessa esitettyjen algoritmien paikalliset katkaisuvirheet. Ekplisiittiselle Eulerin menetelmälle saadaan Taylorin lauseen perusteella

$$\begin{aligned} \tau_n &= Y_n - AY_{n-1} \\ &= Y_{n-1} + \dot{Y}_{n-1}\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{Y}(t^*)\Delta t^2 - (1 - \Delta ta)Y_{n-1} \\ &= (\dot{Y}_{n-1} + aY_{n-1})\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{Y}_*\Delta t^2 \\ &= \frac{1}{2}\ddot{Y}_*\Delta t^2 = O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

Ajanhetki t^* sijaitsee aika-askeleella (t_{n-1}, t_n) . Implisiittisen Eulerin menetelmän katkaisuvirhe on sama kuin eksplisiittisen Eulerin menetelmän, mutta trapetsikaavan eli Crankin-Nicolsonin menetelmän katkaisuvirhe on $O(\Delta t^3)$. Eulerin menetelmien tarkkuus on siten astetta $q = 1$ ja trapetsikaavan $q = 2$.

Eulerin menetelmissä kerroin C lausekkeissa (17.13) ja (17.14) on verrannollinen ratkaisun toiseen aikaderivaattaan. Mikäli ratkaisu on eksponentiaalisesti vaimeneva, kuten on laita esimekkitapauksessamme $\dot{Y} + aY = 0$, on $\ddot{Y}(t) \leq a^2 \bar{y}_0 \forall t$. Jos tarkastelisimme ongelmaa $\dot{Y} + aY = \bar{f}(t)$, missä $\bar{f}$:n muutokset ovat nopeita, voi $\ddot{Y}$ saada hyvinkin suuria arvoja.

17.3 Galerkinin menetelmät etenemistehtävien ratkaisussa

17.3.1 Globaali Galerkinin menetelmä

Aivan vastaavalla tavalla kuin elliptisten tasapaino-ongelmien yhteydessä voidaan alkuarvotyyppinen etenemistehtävä ratkaista Galerkinin menetelmällä. Olkoon ratkaistavana ongelma

$$\begin{cases} \dot{y} + ay = \bar{f}, & 0 < t \leq T, \\ y(0) = \bar{y}_0, \end{cases}$$

jonka heikko muoto saadaan kertomalla yhtälö puolittain painofunktiolla w sekä integroimalla saatu lauseke halutun aikavälin yli:

$$\int_0^T (\dot{y} + ay)w dt = \int_0^T \bar{f}w dt.$$

Valitaan ratkaistavalle suurelle y astetta q oleva polynomiapproksimaatio: $y = \bar{y}_0 + \sum_{i=1}^q t^i \alpha_i$ ja vastaavasti painofunktiolle $w = \sum_{i=1}^q t^i w_i$, eli matriisimerkinnöin

$$y = \bar{y}_0 + \mathbf{N}\boldsymbol{\alpha} = \bar{\mathbf{N}}\mathbf{y} \quad \text{ja} \quad w = \mathbf{N}w.$$

Heikko muoto saa täten muodon

$$\mathbf{w}^T \left(\int_0^T \left(\mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}} + a \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{N}} \right) dt \mathbf{y} - \int_0^T \mathbf{N}^T \bar{f} dt \right) = 0,$$

joka voidaan lyhyesti merkitä

$$\mathbf{w}^T (\bar{\mathbf{A}}\mathbf{y} - \bar{\mathbf{f}}) = 0,$$

missä

$$\bar{\mathbf{A}} = \int_0^T \left(\mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}} + a \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{N}} \right) dt \quad \text{ja} \quad \bar{\mathbf{f}} = \int_0^T \mathbf{N}^T \bar{f} dt.$$

Koska testifunktio on mielivaltainen on siten oltava

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{y} = [\bar{\mathbf{a}}_0 \quad \mathbf{A}] \tilde{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{f}}.$$

Siirretään alkuehtoon liittyvät termit yhtälön oikealle puolelle, jolloin saadaan

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{a}}_0 \bar{y}_0,$$

missä

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_0^T \left(\mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}} + a \mathbf{N}^T \mathbf{N} \right) dt \\ \bar{\mathbf{a}}_0 &= \int_0^T \mathbf{N}^T dt. \end{aligned}$$

Huomaa, että kerroinmatriisi $\mathbf{A}$ ei ole symmetrinen.

Globaali Galerkinin menetelmä kytkee toisiinsa ratkaistavan ongelman kaikki aikatasot. Siten se ei ole etenemistehtävissä luonteva ratkaisumenetelmä.

17.3.2 Aika-askeleittain jatkuva Galerkinin menetelmä

Globaalin Galerkinin menetelmän aika-askeleittain määritelty variantti voidaan muotoilla seuraavasti. Muodostetaan heikko muoto aika-askeleella (t_n, t_{n+1}) :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\dot{y} + ay) w dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{f} w dt,$$

ja etsitään polynomimuotoinen astetta q oleva approksimaatio y joka toteuttaa alkuehdon $y(t_n) = y_n$. Painofunktioiksi voidaan valita sama kanta kuin yritefunktioille, jolloin saadaan jatkuva Galerkinin menetelmä astetta q tai astetta alhaisempi, $t^i, i = 0, 1, \dots, q-1$, jolloin voidaan puhua jatkuvasta Petrovin-Galerkinin menetelmästä astetta q . Jatkossa käytetään lyhennysmerkintöjä $gG(q)$, $cG(q)$ ja $cPG(q)$ merkitsemään astetta q olevaa globaalia, paloittain jatkuvaa Galerkinin ja paloittain jatkuvaa Petrovin-Galerkinin menetelmää.²

Tarkastellaan nyt vain Petrovin-Galerkinin menetelmää $cPG(1)$. Mikäli $q = 1$, paloittain lineaarinen funktio y toteuttaa

$$y_{n+1} - y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} a y dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{f} dt.$$

Olkoon $y = N_1 y_n + N_2 y_{n+1}$, missä $N_1 = (t_{n+1} - t)/\Delta t$ ja $N_2 = (t - t_n)/\Delta t$. Tällöin on

$$y_{n+1} - y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} a \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t} dt y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} a \frac{t - t_n}{\Delta t} dt y_{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{f} dt,$$

joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$(1 + \beta_{n+1})y_{n+1} = (1 - \beta_n)y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{f} dt, \quad (17.15)$$

missä

$$\beta_{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} a \frac{t - t_n}{\Delta t} dt, \quad \beta_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} a \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t} dt.$$

Mikäli a on vakio ja $\bar{f} = 0$, saadaan $\beta_{n+1} = \frac{1}{2}\Delta t a = \beta_n$, jolloin lineaarinen jatkuva Petrovin-Galerkinin menetelmä, $cPG(1)$, johtaa samaan algoritmiin kuin trapetsikaava.

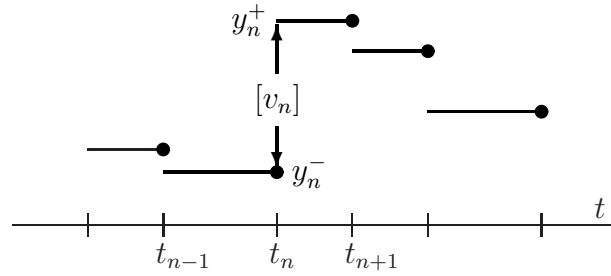
17.3.3 Epäjatkuva Galerkinin menetelmä

Epäjatkuvassa Galerkinin menetelmässä joudutaan alkuehto ottamaan variaatiomuotoon mukaan. Astetta q oleva epäjatkuva Galerkinin menetelmä, $dG(q)$, määritellään seuraavasti. Ratkaistaan aika-askeleittain epäjatkuva astetta q oleva polynomi y käyttäen heikkoa muotoa

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\dot{y} + ay) w dt + (y_n^+ - y_n^-) w_n^+ = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{f} w dt.$$

Painofunktioille w käytetään samaa aika-askeleittain epäjatkovaa astetta q olevaa polynomikantaa kuin yritefunktioillekin. Merkinnoilla y_n^+ ja y_n^- tarkoitetaan raja-

²Tämä merkintä poikkeaa lähteen [10] käyttämästä tavasta.



Kuva 17.1 Epäjatkuva Galerkinin menetelmä dG(0); merkintöjä.

arvoja lähestyttäessä vuoroin ylhäältä tai alhalta käsin, eli

$$y_n^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} y(t_n + |\epsilon|), \quad y_n^- = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} y(t_n - |\epsilon|), \quad [y_n] = y_n^+ - y_n^-.$$

Merkintöjä on havainnollistettu kuvassa 17.1.

Epäjatkuvassa Galerkinin menetelmässä voidaan käyttää paloittain vakiota approksimaationa. Tällöin $w = 1$ ja dG(0) menetelmä voidaan lausua seuraavasti

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} a y dt + y_n^+ = y_n^- + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{f} dt.$$

Koska y on vakio aika-askeleella (t_n, t_{n+1}) , on luonnollista merkitä tätä arvoa y_{n+1} :llä. Tällöin on myös $y_{n+1} = y_{n+1}^- = y_n^+$. Käyttäen näitä merkintöjä voidaan dG(0) menetelmä kirjoittaa muodossa

$$(1 + \gamma_{n+1})y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{f} dt, \quad (17.16)$$

missä

$$\gamma_{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} a dt.$$

Mikäli a on vakio ja $\bar{f} = 0$, on menetelmä dG(0) identtinen implisiittisen Eulerin menetelmän kanssa.

Yleinen dG(q) menetelmä voidaan kirjoittaa muodossa: määritetään astetta q oleva polynomi y siten, että

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\dot{y} + ay) w dt + [y_n] w_n^+ = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{f} w dt,$$

missä painofunktio w on astetta q .

17.4 Diffuusioyhtälön semidiskreetti muoto

Tarkastellaan nyt yksiulotteisen diffuusioyhtälön (17.1) numeerista käsittelyä, kun ratkaisua u approksimoidaan paikan suhteen elementtimenetelmällä, ts.

$$u(x, t) = \mathbf{N}(x)\mathbf{u}(t).$$

Lisätään nyt yhtälöön (17.1) lähdetermi, eli tarkastellaan ongelmaa

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = \bar{f},$$

missä q on lämpövuoto $q = -k\partial u/\partial x$. Kerrotaan tämä painofunktiolla w ja integroidaan alueen $x \in (0, L)$ yli, jolloin saadaan

$$\int_0^L \rho c \frac{\partial u}{\partial t} w dx + \int_0^L \frac{\partial q}{\partial x} w dx = \int_0^L \bar{f} w dx.$$

Osittaisintegroimalla keskimäinen termi saadaan muoto

$$\int_0^L \rho c \dot{u} w dx - \int_0^L q w' dx = \int_0^L \bar{f} w dx,$$

missä paikkakoordinaatin suhteen otettua derivaatta on merkitty pilkulla suureen oikeassa yläkulmassa. Sijoitetaan heikkoon muotoon elementtiapproksimaatio $u(x, t) = \mathbf{N}(x)\mathbf{u}(t)$, ja käytetään painofunktiolle sama kantaa, eli $w(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{w}$, jolloin saadaan yhtälö

$$\mathbf{w}^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}) = 0.$$

Vektori $\mathbf{f}$ voidaan lausua sisäisten ($\mathbf{r}$) ja ulkoisten ($\bar{\mathbf{f}}$) vuosuureiden erotuksena:

$$\mathbf{f} = \mathbf{r} - \bar{\mathbf{f}},$$

missä vektorit kootaan elementtiosuuksista

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^E \mathbf{r}^{(e)}, \quad \mathbf{r}^{(e)} = - \int_{I^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{q} dx, \quad (17.17)$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \sum_{e=1}^E \bar{\mathbf{f}}^{(e)}, \quad \bar{\mathbf{f}}^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \mathbf{N}^T \bar{f} dx. \quad (17.18)$$

Lämpökapasiteettimatriisi $\mathbf{M}$ kootaan myös elementtiosuuksista

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^E \mathbf{M}^{(e)}, \quad \mathbf{M}^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \rho c \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx.$$

Diffuusioyhtälön semidiskreetti muoto

$$\begin{cases} \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_0 = \bar{\mathbf{u}}_0, \end{cases} \quad (17.19)$$

on käyttökelpoinen lähtökohta myös, jos yhtälö on epälineaarinen. Mikäli vuon q ja lämpötilan u välillä on lineaarinen yhteys, esim. $q = -ku'$, jonka diskreetti muoto on $q = -k\mathbf{B}\mathbf{u}$, seuraa sisäisen vuovektorin lausekkeeksi

$$\mathbf{r}^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \mathbf{B}^T k \mathbf{B} dx \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}.$$

Lineaarisessa tapauksessa semidiskreetti muoto (17.19) voidaan kirjoittaa yksinkertaisesti

$$\begin{cases} \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{f}} \\ \mathbf{u}_0 = \bar{\mathbf{u}}_0, \end{cases} \quad (17.20)$$

missä lämmönjohtavuusmatriisi kootaan elementtiosuksista $\mathbf{K}^{(e)}$ tavalliseen tapaan.

17.5 Diskreetti diffuusioyhtälö

Suoritetaan lineaarisen semidiskreetin diffuusioyhtälön (17.20) aikaintegrointi yleistetyllä keskipistekaavalla

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_{n+\alpha} = (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n)/\Delta t, \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+\alpha} = (1 - \alpha)\dot{\mathbf{u}}_n + \alpha\dot{\mathbf{u}}_{n+1}, \\ \mathbf{u}_{n+\alpha} = (1 - \alpha)\mathbf{u}_n + \alpha\mathbf{u}_{n+1}, \end{cases} \quad (17.21)$$

mikä sisältää jo esitetyt algoritmit: eksplisiittinen Euler ($\alpha = 0$), keskipistekaava ($\alpha = \frac{1}{2}$) ja implisiittinen Euler ($\alpha = 1$). Lausutaan yhtälö (17.20) ajanhetkellä $t_{n+\alpha}$:

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_{n+\alpha} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+\alpha} = \bar{\mathbf{f}}_{n+\alpha},$$

johon sijoittamalla yleistetyn keskipistekaavan (17.21) lausekkeet saadaan tuntemattoman vektorin $\mathbf{u}_{n+1}$ ratkaisuyhtälöksi

$$(\mathbf{M} + \alpha\Delta t\mathbf{K})\mathbf{u}_{n+1} = (\mathbf{M} - (1 - \alpha)\Delta t\mathbf{K})\mathbf{u}_n + \Delta t\bar{\mathbf{f}}_{n+\alpha}. \quad (17.22)$$

Mikäli ratkaisu suoritetaan eksplisiittisellä Eulerin menetelmällä ja mikäli lämpökapasiteettimatriisi $\mathbf{M}$ on diagonaalinen, on eteneminen aikatasolle t_{n+1} triviaalia:

$$\mathbf{u}_{n+1} = (\mathbf{I} - \Delta t\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})\mathbf{u}_n + \Delta t\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{f}}_n.$$

Kuten skalaariyhtälönkin tapauksessa tämän yksinkertaisen ja askelta kohden vähän laskentatyötä vaativan algoritmin käyttöä haittaa stabiiliusrajoitteesta seuraava suurin mahdollinen aika-askeleen koko. Tarkastellaan seuraavassa algoritmin (17.22) stabiiliusominaisuuksia.

17.6 Yleistetyn keskipistekaavan analyysi

Numeerisen analyysin ehkä kuuluisin teoreema on Laxin ekvivalenssiteoreema, joka voidaan lausua seuraavasti:

konsistenssi + stabiilius = välttämätön ja riittävä ehto menetelmän suppenemiselle.

On olemassa lukuisia tekniikoita, joilla menetelmän ominaisuuksia voidaan tutkia. Seuraavassa semidiskreetti diffuusioyhtälö diagonalisoidaan ominaismuotoja superponoimalla, jolloin yhtälöiden välinen kytkentä häviää.

17.6.1 Diagonalisointi ominaismuotosuperpositiolla

Ominaismuotosuperpositiomenettelyssä, jota usein kutsutaan myös spektraali- tai Fourier-analyysiksi, ratkaisu $\mathbf{u}$ lausutaan ominaismuotojen $\boldsymbol{\psi}_i$ kombinaationa

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^N y_i(t) \boldsymbol{\psi}_i,$$

missä skalaariarvoista funktiota y_i kutsutaan Fourier-kertoimeksi. Ominaismuodot ja niihin liittyvät ominaisarvot λ_i saadaan yleistetyn ominaisarvotehtävän

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (17.23)$$

ratkaisuna. Ominaisarvot muodostavat kasvavan jonon

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N,$$

ja ominaismuodot voidaan ortonormeerata siten, että

$$\boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_j = \delta_{ij},$$

missä δ_{ij} on Kroneckerin delta. Ortonormaaliudesta seuraa välittömästi, että

$$\boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_i = \lambda_i \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_j = 0 \quad \text{kun} \quad i \neq j.$$

Sijoitetaan ominaismuotohajotelma semidiskreettiin diffuusioyhtälöön, jolloin saa-

daan

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{M}\psi_i \dot{y}_i + \mathbf{K}\psi_i y_i) = \bar{\mathbf{f}}.$$

Kerrotaan edellä oleva yhtälö skalaaritulon mielessä puolittain ominaisvektorilla ψ_j :

$$\sum_{i=1}^N (\psi_j^T \mathbf{M}\psi_i \dot{y}_i + \psi_j^T \mathbf{K}\psi_i y_i) = \psi_j^T \bar{\mathbf{f}}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

mistä seuraa ominaismuotojen ortogonaalisuuden avulla

$$\begin{cases} \dot{y}_1 + \lambda_1 y_1 &= \bar{f}_1 \\ \dot{y}_2 + \lambda_2 y_2 &= \bar{f}_2 \\ \vdots & \\ \dot{y}_N + \lambda_N y_N &= \bar{f}_N, \end{cases}$$

missä on merkitty $\bar{f}_i = \psi_i^T \bar{\mathbf{f}}$. Täten on riittävää tutkia vain skalaariyhtälön

$$\dot{y} + \lambda y = \bar{f} \quad (17.24)$$

ratkaisua alkuehdolla $y(0) = \bar{y}_0$.

17.6.2 Stabiilius

Suoritetaan alkuarvotehtävän (17.24) diskretointi yleistetyllä keskipistekaavalla (17.21), jolloin päädytään yhtälöön

$$(1 + \alpha \Delta t \lambda) y_{n+1} = (1 - (1 - \alpha) \Delta t \lambda) y_n + \Delta t \bar{f}_{n+\alpha}.$$

Vahvennustekijä on siten

$$A = \frac{1 - (1 - \alpha) \Delta t \lambda}{1 + \alpha \Delta t \lambda}.$$

Havaitaan, että yleistetty keskipistekaava on ehdoitta stabiili, mikäli parametri $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Mikäli näin ei ole, saadaan kriittiselle aika-askelelle lauseke

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{kr}} = \frac{2}{(1 - 2\alpha)\lambda}.$$

Kriittinen aika-askel on sitä pienempi mitä suurempi ominaisarvo λ on.

Mikäli ongelman (17.1) paikkadiskretointi suoritetaan lineaarisilla elementeillä, ovat elementin lämmönjohtavuus- ja kapasiteettimatriisit

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{M}^{(e)} = \frac{\rho c h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mikäli lämpökapasiteettimatriisi “lumpataan” eli käytetään diagonaalista muotoa³

$$\mathbf{M}^{(e)} = \frac{\rho ch}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

jakamalla alue $x \in (0, L)$ tasamittaisiin elementteihin ($N + 1$ kappaletta) saa ominaisarvotehtävä (17.23) muodon:

$$\left(\frac{k}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} - \lambda_n \rho ch \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \psi_{n,1} \\ \psi_{n,2} \\ \psi_{n,3} \\ \vdots \\ \psi_{n,N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Yritetään n :nnen ominaismuodon ratkaisua muodossa $\psi_{n,i} = \sin(\pi n i h / L)$, jolloin i :nnes yhtälö on

$$\frac{k}{h} [-\sin(\pi n(i-1)h/L) + 2\sin(\pi n i h / L) - \sin(\pi n(i+1)h/L)] = \lambda_n \rho ch \sin(\pi n i h / L).$$

Yhtälö toteutuu mikäli ominaisarvo on

$$\lambda_n = \frac{2k}{\rho ch^2} (1 - \cos(n\pi h / L)).$$

Systeemin suurin ja pienin ominaisarvo ovat siten ($h = L/(N + 1)$):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2k}{\rho ch^2} (1 - \cos(\pi h / L)) = \frac{k\pi^2}{\rho c L^2} + O((h/L)^2), \\ \lambda_N &= \frac{2k}{\rho ch^2} (1 - \cos(N\pi h / L)) \approx \frac{4k}{\rho ch^2} \end{aligned}$$

Eksplisiittisen Eulerin menetelmän kriittinen aika-askel on täten luokkaa

$$\Delta t_{\text{kr}} = \frac{2}{\lambda_N} \approx \frac{\rho ch^2}{2k} = \frac{\rho c L^2}{2k} \left(\frac{h}{L} \right)^2.$$

Mitä suurempi ratkaistava systeemi on, sitä pienemmäksi muuttuu kriittinen aika-askel. Alkuarvotehtäviä, joiden ominaisarvospektri $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ on laaja, sanotaan *kankeiksi* (engl. stiff).

³Lämpökapasiteettimatriisiin ja varsinkin massamatriisiin “lumpauksesta” kerrotaan lisää luvussa.

17.6.3 Konsistenssi ja konvergenssi

Tarkastellaan nyt yleistetyn keskipistekaavan

$$y_{n+1} = Ay_n, \quad \text{missä} \quad A = \frac{1 - (1 - \alpha)\Delta t\lambda}{1 + \alpha\Delta t\lambda},$$

katkaisuvirhettä. Kehitetään Y_{n+1} ja Y_n Taylorin sarjaksi ajanhetken $t_{n+\alpha}$ ympäristössä

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= Y_{n+\alpha} + \dot{Y}_{n+\alpha}(1 - \alpha\Delta t) + \frac{1}{2}\ddot{Y}_{n+\alpha}(1 - \alpha\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}\dddot{Y}_{n+\alpha}(1 - \alpha\Delta t)^3 + O(\Delta t^4), \\ Y_n &= Y_{n+\alpha} + \dot{Y}_{n+\alpha}(-\alpha\Delta t) + \frac{1}{2}\ddot{Y}_{n+\alpha}(-\alpha\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}\dddot{Y}_{n+\alpha}(-\alpha\Delta t)^3 + O(\Delta t^4), \end{aligned}$$

ja sijoitetaan ne katkaisuvirheen määritelmään, joka on kerrottu puolittain vahvenustekijän A nimittäjällä $1 + \alpha\Delta t\lambda$, jolloin saadaan:

$$\begin{aligned} (1 + \alpha\Delta t\lambda)\tau_{n+1} &= (1 + \alpha\Delta t\lambda)Y_{n+1} - [1 + (1 - \alpha)\Delta t\lambda]Y_n \\ &= (\dot{Y}_{n+\alpha} + \lambda Y_{n+\alpha})\Delta t + \frac{1}{2}[(1 - 2\alpha)\Delta t^2 + \alpha(1 - \alpha)\Delta t^3\lambda]\ddot{Y}_{n+\alpha} + O(\Delta t^3) \\ |\tau_{n+1}| &\leq \frac{1}{2}\ddot{Y}_{n+\alpha}(1 - 2\alpha)\Delta t^2 + O(\Delta t^3). \end{aligned}$$

Mikäli menetelmä on stabiili, eli $|A| \leq 1$, suppenee yleistetty keskipistekaava lineaarisesti, jos $\alpha \neq \frac{1}{2}$, ja kvadraattisesti ainoastaan kun $\alpha = \frac{1}{2}$, eli

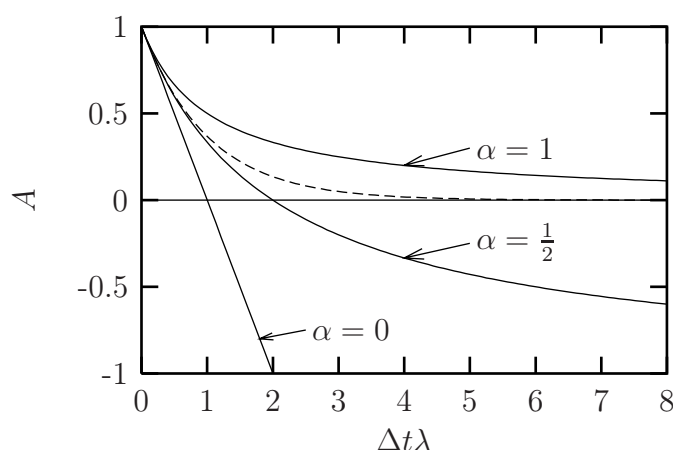
$$|e_n| < \begin{cases} Ct_n\Delta t, & \text{mikäli } \alpha \neq \frac{1}{2}, \\ Ct_n\Delta t^2, & \text{mikäli } \alpha = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

missä C on aika-askeleesta Δt riippumaton vakio.

17.6.4 Muutamia huomioita

Edellä esitetyn perusteella parametrin arvon $\alpha = \frac{1}{2}$ käyttö näyttäisi suositeltavalta, sillä se johtaa ehdoista stabiiliin ja kertaluokkaa tarkempaan algoritmiin kuin muut yleistetyn keskipistekaavan tuottamat menetelmät. Sillä on kuitenkin eräs haittapuoli: se ei vaimenna korkeataajuuksia komponentteja (λ suuri) ja tuottaa tällöin heilehteleviä tuloksia. Tämän voi helposti havaita ratkaisemalla keskipistekaavalla yksiulotteinen tehtävä (17.24) ilman lähdetermiä $\bar{f}$ ja käyttämällä vakioista aika-askelta. Numeeriseksi ratkaisuksi ajanhetkellä t_n saadaan

$$y_n = A^n \bar{y}_0 = \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\lambda\Delta t}{1 + \frac{1}{2}\lambda\Delta t} \right)^n \bar{y}_0.$$



Kuva 17.2 Vahvennustekijä A muutamalle yleistetyn keskipistekaavan menetelmälle: $\alpha = 0$ on eksplisiittinen Euler, $\alpha = \frac{1}{2}$ keskipistekaava ja $\alpha = 1$ implisiittinen Euler. Tarkka ratkaisu ($\exp(-\Delta t\lambda)$) on piirretty kuvaan katkoviivalla.

Mikäli nyt $\lambda\Delta t$ on suuri, heilahtelee ratkaisu arvojen $\pm\bar{y}_0$ ympärillä, sillä

$$A \rightarrow -1, \text{ kun } \lambda\Delta t \rightarrow \infty,$$

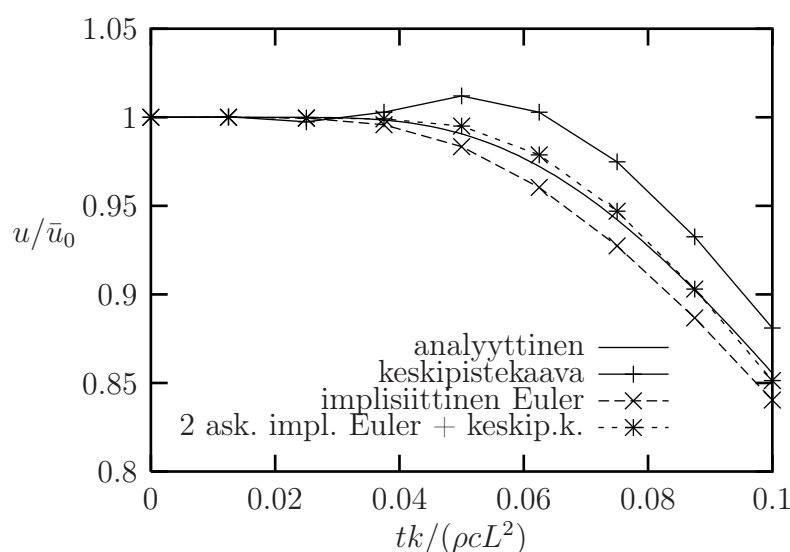
katso myös kuvaa 17.2. Heilahteluja ei tapahdu, mikäli vahvennustekijä A on positiivinen, eli $\Delta t < 2/\lambda$, mikä on sama kuin stabiiliusvaatimus eksplisiittiselle Eulerin menetelmälle. Näin pientä aika-askelta ei implisiittisten menetelmien kanssa kannata käyttää. Suurten systeemien tapauksessa heilahteluja esiintyy erityisesti silloin, kun alkuehdoissa on korkeataajuuksisia komponentteja tai ajan suhteen nopeita muutoksia.

Keskipistekaavan tuottamia heilahteluja voi välttää joko (a) keskiarvoistamalla tai (b) käyttämällä välittömästi transientin vaiheen jälkeen implisiittistä Eulerin menetelmää muutaman askeleen verran ja vaihtamalla tämän jälkeen tarkempaan keskipistekaavaan. Muutama askel implisiittisellä Eulerilla ei tuhoa ratkaisun pitkän aikavälin tarkkuutta mutta estää keskipistekaavan tuottamat heilahtelut.

Tarkastellaan kolmidimensioisen diffuusioyhtälön

$$\begin{cases} \rho c \dot{u} - k \Delta u = 0 & \text{alueessa } \Omega = \{|x, y, z| < L\}, \\ u(x, y, z, 0) = \bar{u}_0 = \text{vakio,} & \text{alueessa } \Omega \text{ ja reunapinnalla } \partial\Omega, \\ u(x, y, z, t) = 0 & \text{reunapinnalla } \partial\Omega, \quad t > 0, \end{cases}$$

numeerista ratkaisua aikavälillä $(0, 0.1\rho c L^2/k)$ kuution muotoisessa alueessa, kun alkuehtona on tasainen lämpötila $\bar{u}_0 > 0$ ja reunaehtona $u = 0$, kun $t > 0$. Tämä vastaa likimain vakio- lämpöisen kappaleen äkillistä siirtämistä olosuhteisiin, jossa



Kuva 17.3 Menetelmien vertailua kolmidimensioisessa äkillisen jäähtymisen esimerkkitapauksessa. Kuution keskipisteen lämpötilan muuttuminen.

reunalämpötila laskee arvon $\bar{u}_0$ verran. Koska analysoitava kappale ja sen reuna- sekä alkuehdot ovat symmetrisiä jokaisen koordinaattiakselin suhteen, voidaan tarkastella vain sen kahdeksasosaa, mikä on jaettu tasavälisesti trilineaarisiin elementteihin $4 \times 4 \times 4$ jaolla.

Kuvassa 17.3 on esitetty implisiittisen Eulerin ja keskipistekaavan antamat tulokset kuution keskipisteen lämpötilan kehityksen alkuvaiheelle. Keskipistekaavan antama tulos ”yliampuu”, joka on osoituksena edellä kuvatusta ongelmasta. Kuvaan on piirretty myös ratkaisu, jossa kaksi ensimmäistä askelta on suoritettu implisiittisellä Eulerin menetelmällä vaihtaen tämän jälkeen keskipistekaavaan. Näin saatu ratkaisu on lähinnä analyttistä ratkaisua, joka on myös piirretty kuvaan 17.3.

Luvussa 17.6.1 diagonalisointi suoritettiin semidiskreettiin yhtälöön, jonka diagonalisoituun muotoon ajan suhteen toteutettu diskreetointi muodostettiin. On syytä huomata, että tämä prosessi on kommutatiivinen, eli diagonalisointi voidaan suorittaa myös ajan suhteen diskreettiin yhtälösystemiin (17.22). Diagonalisoinnin ja aikadiskretoinnin kommutatiivisuutta on havainnollistettu seuraavalla diagrammilla.

$$\begin{array}{ccc}
 M\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = \bar{\mathbf{f}} & \xrightarrow{\text{aikadiskreetointi}} & (M + \alpha\Delta t K)\mathbf{u}_{n+1} = (M - (1 - \alpha)\Delta t K)\mathbf{u}_n + \Delta t\bar{\mathbf{f}}_{n+\alpha} \\
 \downarrow \text{ominaismuotohajotelma} & & \downarrow \text{ominaismuotohajotelma} \\
 \dot{y} + \lambda y = \bar{f} & \xrightarrow{\text{aikadiskreetointi}} & (1 + \alpha\Delta t\lambda)y_{n+1} = (1 - (1 - \alpha)\Delta t\lambda)y_n + \Delta t\bar{f}_{n+\alpha}
 \end{array}$$

17.6.5 Korkeamman asteen eksplisiittiset yksiaskelmenetelmät

Eksplisiittinen Eulerin menetelmä voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \dot{y}_n.$$

Sijoittamalla tähän $\dot{y}_n = -\lambda y_n$ saadaan yhtälö (17.4). Astetta tarkempi eksplisiittinen menetelmä saadaan, kun valitaan

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \dot{y}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{y}_n.$$

Sijoitetaan lausekkeeseen yhteys $\ddot{y}_n = -\lambda \dot{y}_n = \lambda^2 y_n$, jolloin saadaan kvadraattinen eksplisiittinen Eulerin menetelmä

$$y_{n+1} = (1 - \Delta t \lambda + \frac{1}{2} \Delta t^2 \lambda^2) y_n. \quad (17.25)$$

Stabiilusanalyysi, harjoitustehtävä 11, paljastaa kuitenkin, että kriittinen aika-askel ei kasva lineaariseen eksplisiittiseen Eulerin menetelmään verrattuna. Tämä on hyvin rajoittava vaatimus. Vaikka korkeamman asteen eksplisiittiset yksiaskelmenetelmät ovat tarkempia kuin yksinkertainen lineaarinen Eulerin menetelmä, ei niiden käyttö ei ole useinkaan taloudellisesti järkevää, sillä pienellä aika-askeleella laskettaessa lineaarisestikin suppeneva menetelmä on usein riittävän tarkka.

17.6.6 Korkeamman asteen implisiittiset yksiaskelmenetelmät

Korkea-asteinen implisiittinen yksiaskelmenetelmä voidaan konstruoida ennustamalla y_{n+1} arvojen $y_n, \dot{y}_n, \ddot{y}_n, \dot{y}_{n+1}$ ja $\ddot{y}_{n+1}$ avulla seuraavasti

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t(\alpha_0 \dot{y}_n + \alpha_1 \dot{y}_{n+1}) + \Delta t^2(\beta_0 \ddot{y}_n + \beta_1 \ddot{y}_{n+1}). \quad (17.26)$$

Yhtälössä on neljä vapaata parametria, jotka voidaan määrätä siten, että yhtälö toteutuu mahdollisimman korkea-asteiselle polynomille $y(t)$. Vaatimalla yhtälön (17.26) toteutumista polynomeille $y = t, y = t^2, y = t^3$ ja $y = t^4$, saadaan yhtälösystemi

$$\begin{cases} 1 &= \alpha_0 + \alpha_1, \\ 1 &= 2\alpha_1 + 2(\beta_0 + \beta_1), \\ 1 &= 3\alpha_1 + 6\beta_1, \\ 1 &= 4\alpha_1 + 12\beta_1, \end{cases}$$

jonka ratkaisu antaa parametreille arvot: $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}, \beta_0 = -\beta_1 = \frac{1}{12}$. Näin on saatu menetelmä

$$y_{n+1} = A y_n, \quad \text{missä} \quad A = \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta t \lambda + \frac{1}{12} \Delta t^2 \lambda^2}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \lambda + \frac{1}{12} \Delta t^2 \lambda^2}. \quad (17.27)$$

Havaitaan, että menetelmä on ehdoitta stabiili, mikäli $\Delta t \lambda > 0$ ja $A \rightarrow 1$ kun $\Delta t \lambda \rightarrow \infty$.

Sovellettaessa tätä algoritmia semidiskreettiin systeemiin $\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ saadaan ratkaisuyhtälöksi

$$(\mathbf{M} + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{K} + \frac{1}{12}\Delta t^2 \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) \mathbf{u}_{n+1} = (\mathbf{M} - \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{K} + \frac{1}{12}\Delta t^2 \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) \mathbf{u}_n. \quad (17.28)$$

Yhtälön ratkaisu on kuitenkin huomattavan työläs ja paljon muistitilaa vaativa. Mikäli lämpökapasiteettimatriisi ei ole diagonaalinen, tällöin $\mathbf{M}^{-1}$ on täysi, jolloin myös matriisitulo $\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ tuottaa täyden matriisin. Mikäli $\mathbf{K}$ ja $\mathbf{M}$ ovat harvoja ja dimensioiltaan suuria, ei ylimääräisen täyden apumatriisin varastoiminen tietokoneen muistiin ole mielekästä. Jos taas lämpökapasiteettimatriisi on diagonaalinen, matriisitulo $\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ voidaan helposti muodostaa, mutta tuloksena on edelleen matriisi, joka on huomattavasti tiheämpi kuin jäykkyysmatriisi $\mathbf{K}$. Mikäli systeemin (17.28) ratkaistaan jollain suoralla menetelmällä, on kerroinmatriisin hajotelman teko paljon enemmän aikaa ja muistitilaa vaativa toimenpide kuin yleistetyn keskipistekaavan (17.22) käyttö. Myös iteratiivisten lineaaristen ratkaisijoiden käyttö systeemiin (17.28) on ongelmallista. Yhtälön (17.28) kerroinmatriisin häiriöalttius on luokkaa $[C(\mathbf{K})]^2$, joten iteraatioimenetelmien suppenemisnopeus on huono.

Tarkastellaan nyt aproksimaatioon (17.26) perustuvaa menetelmää, jossa vahvennustekijän nimittäjään saadaan neliölauseke, jolla on merkittävä vaikutus semidiskreettiä ongelmaa ratkaistaessa. Tätä käyttökelpoista algoritmia kutsutaan Calahanin menetelmäksi. Vaaditaan, että approksimaatio (17.26) on tarkka kolmannen asteen polynomille, joten se jättää yhden parametrin α määräämättömäksi:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t [\alpha \dot{y}_n + (1 - \alpha) \dot{y}_{n+1}] + \frac{1}{6} [(3\alpha - 1) \ddot{y}_n + (3\alpha - 2) \ddot{y}_{n+1}].$$

Sovellettaessa yhtälöön $\dot{y} + \lambda y = 0$ saadaan implisiittinen yksiaskelkaava

$$y_{n+1} = \frac{1 + (1 - \alpha)\Delta t \lambda - \frac{1}{6}(3\alpha - 2)\Delta t^2 \lambda^2}{1 - \alpha\Delta t \lambda + \frac{1}{6}(3\alpha - 1)\Delta t^2 \lambda^2} y_n. \quad (17.29)$$

Etsitään sellainen parametrin α arvo, jolla vahvennustekijän nimittäjään saadaan neliölauseke

$$1 + (1 - \alpha)\Delta t \lambda - \frac{1}{6}(3\alpha - 2)\Delta t^2 \lambda^2 = (1 + \beta \Delta t \lambda)^2.$$

Mikäli

$$\beta = \frac{1}{2}(1 - \alpha) \quad \text{ja} \quad \alpha = \pm \sqrt{3}/3,$$

saadaan vahvennustekijäksi lauseke

$$A = \frac{1 - \alpha \Delta t \lambda + \frac{1}{6}(3\alpha - 1)\Delta t^2 \lambda^2}{\left[1 + \frac{1}{2}(1 - \alpha)\Delta t \lambda\right]^2}.$$

Koska $A(\Delta t \lambda = 0) = 1$ ja vahvennustekijän kaltevuuskulma

$$\left. \frac{dA}{d(\Delta t \lambda)} \right|_{\Delta t \lambda = 0} = -1$$

riippumatta parametrin α arvosta, menetelmä on ainakin ehdollisesti stabiili. Toisaalta

$$A \longrightarrow \frac{\frac{2}{3}(3\alpha - 1)}{(1 - \alpha)^2} \quad \text{kun} \quad \Delta t \lambda \longrightarrow \infty,$$

ja valinnasta $\alpha = -\sqrt{3}/3$ seuraa $A(\infty) = -0.372$. On helppo osoittaa, että tällä valinnalla $|A| \leq 1$, joten Calahanin menetelmä on ehdoitta stabiili.

Sovellettaessa Calahanin menetelmää semidiskreettiin systeemiin $\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ suoritetaan muuttujien vaihto

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{u},$$

jolloin semidiskreetti yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Käyttäen lyhennysmerkintää $\mathbf{K}^* = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ saadaan Calahanin menetelmän ratkaisuyhtälösystemiksi

$$\left[\mathbf{I} + \frac{1}{2}(1 - \alpha)\Delta t \mathbf{K}^*\right]^2 \mathbf{x}_{n+1} = \left[\mathbf{I} - \alpha \Delta t \mathbf{K}^* + \frac{1}{6}(3\alpha - 1)\Delta t^2 \mathbf{K}^*\right] \mathbf{x}_n.$$

Jos lämpökapasiteettimatriisi $\mathbf{M}$ on diagonaalinen, tarvitaan ainoastaan kerroinmatriisiin $(\mathbf{I} + \frac{1}{2}(1 - \alpha)\Delta t \mathbf{K}^*)$ hajotelma, mikäli ratkaisu suoritetaan suoralla menetelmällä. Tällä on myös sama rakenne kuin matriisilla $\mathbf{K}$, joten ylimääräistä muistitilaa ei tarvita.

17.7 Moniaskelmenetelmät

Edellisissä luvuissa on käsitelty vain yksiaskelmenetelmiä eli menetelmiä, jotka si-
toivat ratkaistavan suureen ja sen derivaattojen lausekkeet vain yhden aika-askelen
alku ja loppupäässä. Tässä luvussa tarkastellaan menetelmiä, joiden ratkaisussa on
mukana useampia aikatasoja. Syy useamman aikatason mukaanottoon on halu kon-
struoida korkeamman asteen menetelmiä, jotka eivät tarvitse korkeamman kertalu-
vun derivaattatermejä. Korotettaessa $\mathbf{u}$:n aikaderivaatan astetta, korotetaan myös
lausekkeissa esiintyvän $\mathbf{K}$:n potenssia, mikä ei ole suotavaa.

Eksplisiittisten moniaskelmenetelmien käytettävyyttä rajoittaa stabiilius. Vaikkakin näin voidaan konstruoida tarkempia integrointimenetelmiä kuin eksplisiittinen Euler, on niiden kriittinen aika-askel niin pieni, ettei katkaisuvirheen aste ole käytännössä merkitsevä. Täten tutkimmekin seuraavassa implisiittisiä moniaskelmenetelmiä.

Etsitään kaksiaskelmenetelmälle⁴

$$y_{n+1} = \alpha_{-1}y_{n-1} + \alpha_0y_n + \Delta t(\beta_{-1}\dot{y}_{n-1} + \beta_0\dot{y}_n + \beta_1\dot{y}_{n+1}) \quad (17.30)$$

parametrit siten, että lauseke on tarkka kolmannen asteen polynomeille. Näin saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 1 = \alpha_{-1} + \alpha_0, \\ 2 = \alpha_0 + \beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1, \\ 4 = \alpha_0 + 2\beta_0 + 4\beta_1, \\ 8 = \alpha_0 + 3\beta_0 + 12\beta_1, \end{cases}$$

jonka ratkaisu on parametria vaille yksikäsitteinen: $\alpha_{-1} = \alpha$, $\alpha_0 = 1 - \alpha$, $\beta_{-1} = -\frac{1}{12} + \frac{5}{12}\alpha$, $\beta_0 = \frac{2}{3}(1 - \alpha)$, $\beta_1 = \frac{5}{12} - \frac{1}{12}\alpha$. Yhtälö (17.30) redusoituu tällöin muotoon

$$y_{n+1} = \alpha y_{n-1} + (1 - \alpha)y_n + t \frac{1}{12} \Delta t [(5\alpha - 1)\dot{y}_{n-1} + 8(1 + \alpha)\dot{y}_n + (5 - \alpha)\dot{y}_{n+1}]. \quad (17.31)$$

Sijoittamalla yhtälöön yrite $y_n = cA^n$, missä c on määräämätön kerroin, ja ottamalla huomioon $\dot{y} + \lambda y = 0$, saadaan karakteristinen yhtälö

$$\left[1 + \frac{1}{12}\Delta t\lambda(5 - \alpha)\right] A^2 + \left[\alpha - 1 + \frac{2}{3}\Delta t\lambda(1 + \alpha)\right] A + \left[-\alpha + \frac{1}{12}\Delta t\lambda(5\alpha - 1)\right] = 0.$$

Mikäli $\Delta t\lambda = 0$, sen juuret ovat $A_1 = 1$ ja $A_2 = -\alpha$, joten välttämätön ehto menetelmän stabiiliudelle on, että $|\alpha| \leq 1$. Stabiiliusehto on

$$0 \leq \Delta t\lambda \leq \frac{6(1 - \alpha)}{1 + \alpha},$$

joten menetelmä on ehdoitta stabiili ainoastaan, kun $\alpha = -1$. Tällöin $A_2 = 1$ kaikilla $\Delta t\lambda$ joten menetelmän tarkkuus pienenee; odotuksissahan oli luokkaa Δt^4 oleva katkaisuvirhe, sillä menetelmä on konsistentti kolmannen asteen polynomille. Kun $\alpha = -1$, on karakteristisen yhtälön ratkaisu

$$A_1 = \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t\lambda}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\lambda}, \quad A_2 = 1 \quad \text{ja} \quad y_n = c_1 A_1^n + c_2.$$

Kun $\Delta t\lambda$ on pieni ja $y_1 = y_0 \exp(-\Delta t\lambda)$, saadaan $c_2 = \frac{1}{12}(\Delta t\lambda)^2$ ja kun $n \rightarrow \infty$,

⁴Kaavan menetelmä on eksplisiittinen ainoastaan mikäli $\beta_1 = 0$.

niin $y_\infty \rightarrow O(\Delta t^2) \neq 0$.

Dahlquist on kehittänyt kuuluisan teorian yleiselle k -askel menetelmälle, joka on muotoa

$$y_{n+1} = \alpha_1 y_n + \cdots + \alpha_{-k} y_{n+1-k} + \Delta t (\beta_1 \dot{y}_{n+1} + \cdots + \beta_{-k} \dot{y}_{n+1-k}) \quad (17.32)$$

ja on implisiittinen, mikäli $\beta_1 \neq 0$. Teorian päätulokset voidaan lausua kahtena teoreemana:

1. Ei ole olemassa eksplisiittistä moniaskelmenetelmää, joka on ehdoitta stabiili.
2. Ei ole olemassa ehdotta stabiilia moniaskelmenetelmää, jonka virhe olisi korkeampaa astetta kuin $O(\Delta t^2)$.

Harjoitustehtäviä

1. Ratkaise alkuarvotehtävä $\dot{y} + ay = 0, a = \beta/T > 0$, missä β on dimensioton vakio, aikavälillä $(0, T)$ ja alkuehdolla $y(0) = \bar{y}_0$ käyttäen globaalia Galerkinin menetelmää ja ajan suhteen astetta 2,3 ja 4 olevia yritepolynomeja. Tutki virhettä ajanhetkellä $t = T$ parametrin β funktiona. Piirrä kuva suhteellisen virheen riippuvuudesta parametrin β , kun $\beta \in [0, 1000]$.
2. Ratkaise edellinen tehtävä trapetsikaavaa ja implisiittistä Eulerin menetelmää käyttäen. Tutki virhettä ajanhetkellä $t = T$, kun aika-askel on $\Delta t = T/200, T/100, T/20$ ja $T/10$. Käytä β :lle arvoa 100.
3. Tutki implisiittisen Eulerin ja trapetsikaavan virhettä ajanhetkellä $t = T$ parametrin β funktiona. Piirrä kuva suhteellisen virheen riippuvuudesta parametrin β , kun $\beta \in [0, 1000]$.
4. Johda cG(1) menetelmän ratkaisuyhtälöt ongelmalle $\dot{y} + ay = \bar{f}$ ja $y(0) = \bar{y}_0$. Sovella niitä vakiokertoimisen yhtälön tapaukseen. Mikä on vastaava yleistetyn keskipiste-kaavan (17.21) menetelmä, eli mikä on parametri α ?
5. Toista tehtävät 2 ja 3 käyttäen cG(1) menetelmää.
6. Muodosta cPG(2) menetelmän ratkaisuyhtälöt alkuarvotehtävälle $\dot{y} + ay = \bar{f}$. Sovella sitä vakiokertoimiseen yhtälöön.
7. Tutki, millä ehdoilla dG(0) menetelmä on stabiili. Voiko parametri $a(t)$ saada negatiivisia arvoja välillä (t_n, t_{n+1}) ?
8. Muodosta dG(1) menetelmän ratkaisuyhtälöt alkuarvotehtävälle $\dot{y} + ay = \bar{f}$. Sovella sitä vakiokertoimiseen yhtälöön.
9. Suorita semidiskreetin probleeman (17.20) ratkaisu ajan suhteen globaalilla Galerkinin keinolla gG(q). Millainen on ratkaisuyhtälö ja mitä voit sanoa ratkaisun väärtimasta työmäärästä.

10. Ratkaistaan lineaarinen diffuusioyhtälö numeerisesti neliön muotoisessa tasoalueessa. Oleta, että lineaarinen yhtälösystemi ratkaistaan suoralla menetelmällä. Pohdi ja estimoi miten ratkaisuaikat seuraavissa tapauksissa suhtautuvat toisiinsa:
 - (a) käytetään implisiittistä Eulerin menetelmää ja aika-askelta T/n (vakio),
 - (b) aloitetaan implisiittisellä Eulerin menetelmällä ja muutetaan muutaman askelen jälkeen keskipistekaavaan,
 - (c) käytetään implisiittistä Eulerin menetelmää ja aika-askelta T/n , mutta laskennan puolivälissä ajanhetkellä $T/2$ aika-askelta kasvatetaan kaksinkertaiseksi.
11. Määritä kvadraattisen eksplisiittisen Eulerin menetelmän (17.25) stabiiliusvaatimus. Pohdi myös menetelmän implementointia semidiskreetin systeemin ratkaisussa.
12. Määritä kvadraattisen eksplisiittisen Eulerin menetelmän (17.25) paikallisen katkaisuvirheen aste.
13. Määritä algoritmin (17.27) katkaisuvirheen aste.
14. Miten algoritmi (17.28) implementoidaan mahdollisimman tehokkaasti, jos lineaarisen yhtälösystemin ratkaisu suoritetaan iteratiivisesti.
15. Näytä, että Calahanin menetelmä on ehdoitta stabiili valinnalla $\alpha = -\sqrt{3}/3$.
16. Määritä Calahanin menetelmän katkaisuvirheen aste.
17. Toista tehtävät 2 ja 3 käyttäen Calahanin menetelmää.
18. Mikä on Calahanin menetelmän ratkaisuyhtälö sovellettuna semidiskreettiin yhtälöön $\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{f}}$.
19. Ratkaise alkuarvotehtävä $\dot{y} + ay = 0, a = \beta/T > 0$, kaksiaskelmenetelmällä (17.31) ja alkuehdoilla $y_0 = \bar{y}_0, y_1 = \bar{y}_0 \exp(-\Delta t a)$ ja näytä, että kun $\alpha = -1$ menetelmä on ehdoitta stabiili ja lasketun $y(T)$:n tarkkuus on vain Δt^2 , mikä on sopusoinnussa Dahlquistin teoreeman kanssa. Mitä tapahtuu, jos $\alpha = -1 + O(\Delta t)$? Toista laskelmat arvolla $\alpha = \frac{1}{2}$ ja näytä, että menetelmä on vain ehdoitta stabiili. Osoita numeerisesti, että tarkkuus on nyt $O(\Delta t^3)$. Vertaa keskipistekaavan antamiin tuloksiin.
20. Ratkaise aikariippuva diffuusio-reaktioyhtälö

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \bar{f} \quad x \in (0, L)$$

ratkaisua reunaehdoilla $u(0, t) = u(L, t) = 0$ ja alkuehdolla $u(x, 0) = \bar{u}_0 \sin(\pi x/L)$. Reaktiotermi $\bar{f}$ riippuu lämpötilasta u lineaarisesti: $\bar{f} = cu$, missä $c = \beta^2 k L^{-2}$. Mitä kvalitatiivisesti erityyppisiä ratkaisuja saadaan parametrin β muuttuessa.

21. Mieti mitä tarkoittaa stabiiliusvaatimus edellisen tehtävän ongelmalle.

22. Ratkaise tehtävä 20 numeerisesti käyttäen kolmea tasamittaista lineaarista elementtiä paikkadiskreointiin ja implisiittistä Eulerin menetelmää aikaintegrointiin. Käytä parametrille β arvoja 3 ja 5. Mikä on kriittinen aika-askel ekplisiittiselle Eulerin menetelmälle?
23. Mitkä differenssikaavat saadaan, kun alkuarvotehtävä $\dot{y} + ay = \bar{f}$ alkuehdolla $y(0) = \bar{y}_0$ ratkaistaan numeerisesti pistekollokaatiomenetelmällä

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} w(\dot{y} + ay - \bar{f}) dt = 0,$$

ja painofunktioksi valitaan:

- (a) $w = \delta(t_n)$,
- (b) $w = \delta(t_{n+1})$,
- (c) $w = \delta(\frac{1}{2}(t_n + t_{n+1}))$,

missä δ on Diracin delta-funktio. Yritteelle y käytetään lineaarista approksimaatiota $y = \Delta t^{-1} [(t_{n+1} - t)y_n + (t - t_n)y_{n+1}]$.

24. Kirjoita lämmönjohtumisongelman

$$\begin{aligned} \rho c \dot{u} - k u'' &= 0, & 0 < x < L, \\ q(0) &= \bar{q}_0 = -\alpha_0(u - \bar{u}_0), \\ q(L) &= \bar{q}_L = \alpha_L(u - \bar{u}_L), \end{aligned}$$

semidiskreetti muoto. Käytä yhtä lineaarista elementtiä. Tehtävä kuvaa seinärakenteen lämpötilajakauman kehitystä. Otaksutaan, että ulkoilman lämpötila $\bar{u}_0$ muuttuu ajan mukana $\bar{u}_0 = \bar{u}_L \sin(\pi t/T)$ ja sisälämpötila on vakio $\bar{u}_L$.

Reunaehdoissa esiintyvä α parametri on lämmönsiirtokerroin. Yleensä se riippuu tarkasteltavan pinnan lämpötilasta, jolloin ongelmasta tulee epälineaarinen. Otaksutaan nyt lämmönsiirtokerroin vakioksi. Dimensiotonta lukua

$$\text{Bi} = \frac{\alpha L}{k}$$

kutsutaan Biotin luvuksi.

25. Edellinen tehtävä ratkaistaan eksplisiittisellä Eulerin menetelmällä. Määritä kriittinen aika-askel kun käytetään (a) konsistenttia, (b) lumpattua lämpökapasiteettimatriisia. Oleta, että $\alpha_0 = \alpha_L = \alpha$.
26. Ratkaise tehtävä 24 käyttäen (a) eksplisiittistä, (b) implisiittistä Eulerin ja (c) Crankin-Nicolsonin menetelmää aikavälillä $(0 < t \leq 2T)$. Tee laskelmat Biotin luvun arvoilla 0.5 ja 2. Laskuissa voidaan olettaa seinän materiaaliksi betoni, jolle $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$, $c = 880 \text{ J/(kgK)}$, $k = 1.7 \text{ W/(mK)}$, sekä ajalle $T = 12$ tuntia ja sisäilman lämpötilalle $\bar{u}_L = 20^\circ \text{C}$. Seinän paksuudelle voi käyttää arvoa $L = 0.2 \text{ m}$. Käytä implisiittimenetelmille aika-askelta 1, 10 ja 30 minuuttia. Eksplisiittisen Eulerin menetelmälle

käytä vain lumpattua lämpökapasiteettmatriisia mutta laske implisiittisillä menetelmillä käyttäen sekä konsistenttia että lumpattua versiota. Vertaile tuloksia ja piirrä seinän lämpötilat sekä ulko- että sisäpinnalla. Ratkaise Biotin luvun arvoilla 0.5 ja 2.

Luku 18

Etenemistehtävien numeerinen ratkaisu - liikeyhtälö

Tässä luvussa tarkastellaan ajasta riippuvan hyperbolisen aaltoyhtälön numeerista ratkaisua. Kertauksena luvusta 1 palautetaan mieliin kyseisen yhtälön ominaispiirteet.

Ratkaisumenetelmät esitetään aluksi skalaariyhtälön tapauksessa. Myös menetelmien stabiilius- ja tarkkuusominaisuuksia tutkitaan.

18.1 Yksivapausasteinen liikeyhtälö

Tutkitaan värähtelevän langan mallin

$$\begin{aligned}\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sigma A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ u(x, 0) &= \bar{u}_0 \sin(\pi x/L), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= v(x, 0) = \bar{v}_0 \sin(\pi x/L)\end{aligned}\tag{18.1}$$

ratkaisua. Sijoittamalla yhtälöön reuna- ja alkuehdot toteuttava yrite

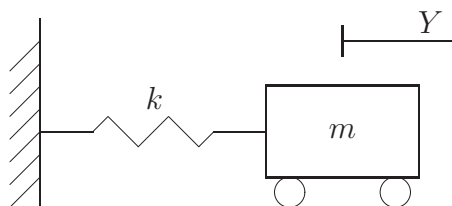
$$u(x, t) = Y(t) \sin \frac{\pi x}{L},$$

saadaan alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} \ddot{Y} + \omega^2 Y = 0, \\ Y(0) = \bar{u}_0, \\ \dot{Y}(0) = \bar{v}_0, \end{cases}\tag{18.2}$$

missä on merkitty $\omega^2 = \pi^2 \sigma / (\rho L^2)$. Tehtävän ratkaisu

$$Y(t) = \frac{\bar{v}_0 L}{c\pi} \sin \omega t + \bar{u}_0 \cos \omega t$$



Kuva 18.1 Yksivapausasteinen värähtelijä.

esittää jaksollista vaimentumatonta liikettä, jonka kulmataajuus on ω . Yhtälö (18.2) voitaisiin kirjoittaa myös muodossa

$$\begin{cases} m\ddot{Y} + kY = 0, \\ Y(0) = \bar{u}_0, \\ \dot{Y}(0) = \bar{v}_0, \end{cases} \quad (18.3)$$

missä massa $m = \rho A$, jousivakio $k = \pi^2 \sigma A / L^2$ ja kulmataajuudelle on lauseke $\omega^2 = k/m$. Kuvassa 18.1 on havainollistettu tällaista yksivapausasteita mekaanista värähtelijää.

18.2 Keskeisdifferenssimenetelmä

Eräs yksinkertaisimmista liikeyhtälön integroimismenetelmistä on keskeisdifferenssimenetelmä. Merkitään ajanhetken t_{n+1} ja t_n välistä aika-askelta Δt_{n+1} . Aika askeleiden (t_{n-1}, t_n) ja (t_n, t_{n+1}) keskipisteissä määritettyjen nopeuksien $\dot{y}_{n-\frac{1}{2}}$ ja $\dot{y}_{n+\frac{1}{2}}$ keskeisdifferenssiapproksimaatiot ovat

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{n-\frac{1}{2}} &\approx \dot{y}_{n-\frac{1}{2}} = \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t_n}, \\ \dot{Y}_{n+\frac{1}{2}} &\approx \dot{y}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t_{n+1}}. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Näitä nopeuksien arvoja käytetään laskettaessa kiihtyvyyden keskeisdifferenssiapproksimaatio ajanhetkellä t_n :

$$\ddot{Y}_n \approx \ddot{y}_n = \frac{\dot{y}_{n+\frac{1}{2}} - \dot{y}_{n-\frac{1}{2}}}{t_{n+\frac{1}{2}} - t_{n-\frac{1}{2}}} = \frac{\dot{y}_{n+\frac{1}{2}} - \dot{y}_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t_{n+\frac{1}{2}}}. \quad (18.5)$$

Yhdistämällä yhtälöt (18.4) ja (18.5) saadaan lauseke

$$\ddot{y}_n = \frac{\Delta t_n(y_{n+1} - y_n) - \Delta t_{n+1}(y_n - y_{n-1})}{\Delta t_n \Delta t_{n+\frac{1}{2}} \Delta t_{n+1}}. \quad (18.6)$$

Mikäli aika-askel on vakio, on tuloksena tuttu lauseke

$$\ddot{y}_n = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\Delta t^2} \quad (18.7)$$

Soveltamalla keskeisdifferenssikaavaa (18.7) liikeyhtälöön (18.2) voidaan ajanhetkelle t_{n+1} edetä yhtälön

$$y_{n+1} = (2 - \Delta t^2 \omega^2) y_n - y_{n-1} \quad (18.8)$$

mukaisesti. Edellä esitetystä muodosta keskeisdifferenssimenetelmä on eksplisiittinen kaksiaskelmenetelmä.

Tutkitaan algoritmin (18.8) stabiiliutta. Sijoitetaan differenssilausekkeeseen yrite $y_n = C\lambda^n$, jolloin karakteristiseksi yhtälöksi saadaan

$$\lambda^2 - (2 - \Delta t^2 \omega^2) \lambda + 1 = 0,$$

ja jonka juuret ovat

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{1}{2} \Delta t^2 \omega^2 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2} \Delta t^2 \omega^2\right)^2 - 1}.$$

Koska liikeyhtälön ratkaisun pitää olla oskilloiva ja jotta numeerinen ratkaisu olisi myös, on karakteristisen yhtälön juurien oltava kompleksisia. Tämä toteutuu mikäli

$$\left(1 - \frac{1}{2} \Delta t^2 \omega^2\right)^2 < 1,$$

mistä seuraa ehto aika-askeleen pituudelle:

$$\Delta t < \Delta t_{\text{kr}} = \frac{2}{\omega}. \quad (18.9)$$

Kun ehto $\Delta t < 2/\omega$ toteutuu, ovat karakteristisen yhtälön juuret kompleksilukuja

$$\lambda_{1,2} = a \pm \left(\sqrt{1 - a^2}\right) i,$$

missä $i^2 = -1$ ja $a = 1 - \frac{1}{2} \Delta t^2 \omega^2$. Tällöin juurten itseisarvo on 1 riippumatta aika-askeleen pituudesta. Täten keskeisdifferenssimenetelmä on koko stabiiliusalueellaan konservatiivinen, eikä numeerisissa tuloksissa esiinny amplitudivirhettä.

18.3 Newmarkin menetelmäperhe

18.3.1 Menetelmä ja sen stabiiliusanalyysi

Ehä kaikkein tunnetuin liikeyhtälön suora integrointimenetelmä on Newmarkin menetelmä, joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t \dot{y}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 [(1 - 2\beta)\ddot{y}_n + 2\beta\ddot{y}_{n+1}], \\ \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \Delta t [(1 - \gamma)\ddot{y}_n + \gamma\ddot{y}_{n+1}], \end{aligned} \quad (18.10)$$

missä parametrit β ja γ määrittävät spesifisen algoritmin. Sovellettaessa menetelmää liikeyhtälöön (18.2) saadaan muoto

$$\begin{bmatrix} 1 + \beta\Omega^2 & 0 \\ \gamma\Omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{n+1} \\ \Delta t \dot{y}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\Omega^2 & 1 \\ (\gamma - 1)\Omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_n \\ \Delta t \dot{y}_n \end{Bmatrix},$$

missä on merkitty $\Omega^2 = \Delta t^2 \omega^2$. Yhtälö voidaan kirjoittaa lyhyesti muodossa

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_n,$$

missä $\mathbf{x}_n = [y_n, \Delta t \dot{y}_n]^T$ jolloin vahvennusmatriisin lauseke on

$$\mathbf{A} = \frac{1}{1 + \beta\Omega^2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\Omega^2 & 1 \\ -\Omega^2 - (\beta - \frac{1}{2}\gamma)\Omega^4 & 1 + (\beta - \gamma)\Omega^2 \end{bmatrix}.$$

Vahvennusmatriisin ominaisarvot voidaan laskea karakteristisen polynomin nol-lakohdista

$$\lambda^2 - 2A_1\lambda + A_2 = 0, \quad (18.11)$$

missä

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \text{trace} \mathbf{A} = \frac{1}{2} (A_{11} + A_{22}) = 1 - \frac{1}{2} \frac{(\frac{1}{2} + \gamma) \Omega^2}{1 + \beta\Omega^2}, \\ A_2 &= \det \mathbf{A} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1 + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right) \frac{\Omega^2}{1 + \beta\Omega^2}. \end{aligned}$$

Juuret ovat

$$\lambda_{1,2} = A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - A_2}.$$

Jotta numeerinen ratkaisu esittäisi oskiloivaa vastetta, on juurien oltava kompleksisia, täten karakteristisen polynomin diskriminantin on toteutettava ehto

$$\begin{aligned} &A_1^2 - A_2 < 0 \\ \implies &-4\Omega^2 + \left[\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)^2 - 4\beta\right] \Omega^4 < 0. \end{aligned} \quad (18.12)$$

Mikäli Ω^4 :n kerroin on negatiivinen, ovat juuret aina kompleksisia kaikilla mahdollisilla Ω^2 :n arvoilla ($\Omega^2 = \omega^2 \Delta t^2 > 0$). Saadaan ehto

$$\beta > \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2. \quad (18.13)$$

Vahvennusmatriisin ominaisarvot ovat siten

$$\lambda_{1,2} = A_1 \pm \left(\sqrt{A_2 - A_1^2} \right) i.$$

Juurien on myös oltava itseisarvoltaan ykköstä pienempiä, jotta menetelmä olisi stabiili. Mikäli juuret ovat kompleksikonjugaatteja, on stabiiliusehto seuraava:

$$|\lambda|^2 = A_2 = 1 + \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) \frac{\Omega^2}{1 + \beta \Omega^2}, \quad (18.14)$$

Jos valitaan $\gamma = \frac{1}{2}$ on juurien itseisarvo aina 1 ja siten riippumaton käytetyn aika-askelen koosta. Juurien kompleksisuusehto (18.13) saa tällöin muodon $-4\Omega^2 + (1 - 4\beta)\Omega^4 < 0$, mikä toteutuu valinnalla $\beta = \frac{1}{4}$. Tämä alkuperäinen Newmarkin menetelmä saa siten muodon

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t \dot{y}_n + \frac{1}{4} \Delta t^2 (\ddot{y}_n + \ddot{y}_{n+1}), \\ \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \frac{1}{2} \Delta t (\ddot{y}_n + \ddot{y}_{n+1}). \end{aligned} \quad (18.15)$$

Menetelmästä käytetään myös trapetsikaavan tai keskimääräisen kiihtyvyyden menetelmän nimiä.

Stabiiliusehto (18.14) toteutuu kun $\gamma \geq \frac{1}{2}$. Newmarkin menetelmä (18.10) on ehdoitta stabiili ja sen vahvennusmatriisin ominaisarvot ovat kompleksisia, mikäli seuraavat ehdot toteutuvat

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad \beta > \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2. \quad (18.16)$$

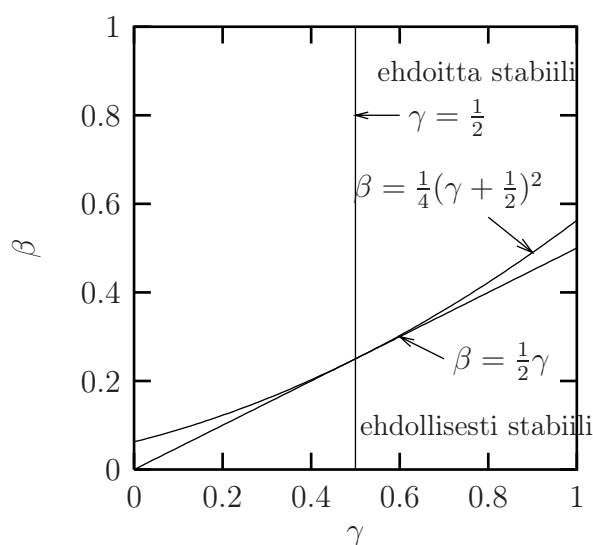
Stabiiliusalueita voidaan hieman laajentaa, mikäli juurien sallitaan olevan reaaliset. Tällöin $A_1^2 - A_2 > 0$ ja kriittinen ehto seuraa epäyhtälöistä

$$\begin{cases} -1 \leq A_1 \leq 0 \\ \max |\lambda| = A_1 - \sqrt{A_1^2 - A_2} \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} 0 < A_1 \leq 1 \\ \max |\lambda| = A_1 + \sqrt{A_1^2 - A_2} \end{cases}.$$

Ensimmäinen yllä olevista ehdoista osoittautuu kriittiseksi:

$$2A_1 + A_2 + 1 \geq 0 \quad \implies \quad 4 + 2(2\beta - \gamma)\Omega^2 \geq 0. \quad (18.17)$$

Ottamalla huomioon myös ehto (18.14), Newmarkin menetelmä (18.10) on ehdoitta



Kuva 18.2 Newmarkin menetelmän stabiiliusalue.

stabiili mikäli epäyhtälöt

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2} \quad (18.18)$$

toteutuvat. Ehto (18.16) on odotetusti rajoittavampi, sillä $\frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2 \equiv \frac{1}{4}[(\gamma - \frac{1}{2})^2 + 2\gamma]$, joten $\beta \geq \frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}(\gamma - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}\gamma \geq \frac{1}{2}\gamma$, katso myös kuvaa 18.2.

Mikäli $\beta < \gamma/2$ on Newmarkin menetelmä ehdollisesti stabiili. Kriittisen aika-askeleen pituus voidaan määrittää epäyhtälöstä (18.17), josta saadaan

$$\omega \Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\gamma - \beta}} = \Omega_{\text{kr}}. \quad (18.19)$$

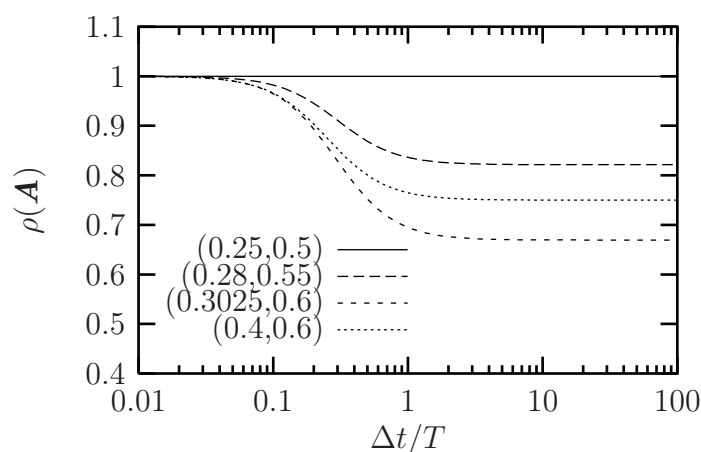
Edellä esitetty kriittisen aika-askeleen lauseke on usein havainnollisempi kirjoitettuna värähtelyn jaksonajan $T = 2\pi/\omega$ avulla:

$$\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{\Omega_{\text{kr}}}{2\pi}.$$

Erikoishuomion ansaitsevat pisteet $A_1 = \pm 1$, $A_2 = 1$, sillä tällöin karakteristisella yhtälöllä on kaksoisjuuri jonka itseisarvo on 1. Stabiiliusehto tarvitaan estämään tekijän $\mathbf{A}^n$ suurenemista kun n kasvaa. Jotta vahvenmatriisin potenssit pysyisivät rajoitettuna on seuraavien ehtojen oltava voimassa:¹

1. $\rho(\mathbf{A}) = \max_i |\lambda_i| \leq 1$
2. $\mathbf{A}$:n moninkertaisten ominaisarvojen on oltava itseisarvoltaan aidosti ykköstä pienempiä.

¹ $\rho(\mathbf{A})$ on matriisin $\mathbf{A}$ spektraalisäde.



Kuva 18.3 Newmarkin menetelmän vahvennusmatriisin spektraalisäde.

Ehdot (1) ja (2) määrittelevät *spektraalisesti stabiilin* vahvennusmatriisin $\mathbf{A}$. Mikäli ominaisarvot ovat erisuuria, on vahvennusmatriisi similaarinen diagonaalimatriisin kanssa

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}, \quad \text{missä} \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

missä $\mathbf{P}$ on ortogonaalinen $\mathbf{A}$:n lineaarisesti riippumattomista ominaisvektoreista koostuva matriisi. Mikäli $\mathbf{A}$:n ominaisarvot ovat yhtäsuuria, ovat sen ominaisvektorit lineaarisesti riippuvia ja tällöin $\mathbf{A}$ on similaarinen Jordanin lohkoista koostuvan matriisin kanssa

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1}, \quad \text{missä} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Vahvennusmatriisin n :s potennssi on

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1} \quad \text{tai} \quad \mathbf{A}^n = \mathbf{Q}\mathbf{J}^n\mathbf{Q}^{-1},$$

missä

$$\mathbf{\Lambda}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{J}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

Spektraalisen stabiiliusehon kohta 2 on siten ymmärrettävissä; jotta vahvennusmatriisin ei-diagonaali-alkiot pysyisivät rajoitettuna on oltava $\lambda < 1$, jolloin $n\lambda^{n-1} \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$.

18.3.2 Newmarkin menetelmäperheen tunnettuja edustajia

Valitsemalla Newmarkin parametreille arvot $\beta = 0, \gamma = \frac{1}{2}$ saadaan jo aikaisemmin esitelty keskeisdifferenssimenetelmä:

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \Delta t \dot{y}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{y}_n, \\ \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \frac{1}{2} \Delta t (\ddot{y}_n + \ddot{y}_{n+1}).\end{aligned}$$

Ratkaistaan ylemmästä yhtälöstä kiihtyvyyden lauseke $\ddot{y}_n$

$$\ddot{y}_n = \frac{2}{\Delta t} (y_{n+1} - y_n - \Delta t \dot{y}_n). \quad (18.20)$$

Sijoittamalla tämä nopeuden lausekkeeseen hetkellä n , saadaan nopeuden keskeisdifferenssiapproksimaatio:

$$\begin{aligned}\dot{y}_n &= \dot{y}_{n-1} + \frac{1}{2} (\ddot{y}_{n-1} + \ddot{y}_n) \\ &= \dot{y}_{n-1} + \frac{1}{2} \Delta t \left[\frac{2}{\Delta t} (y_{n+1} - y_n - \Delta t \dot{y}_n) + \frac{2}{\Delta t} (y_n - y_{n-1} - \Delta t \dot{y}_{n-1}) \right] \\ \Rightarrow \dot{y}_n &= \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta t}.\end{aligned}$$

Näin lauseke (18.20) saa tutun muodon

$$\ddot{y}_n = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\Delta t^2}.$$

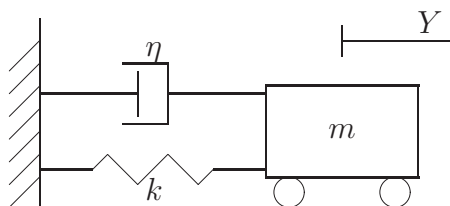
Keskeisdifferenssimenetelmä on ehdollisesti stabiili kuten todettiin jo luvussa 18.2 ja yleisemmin Newmarkin menetelmäperheen yhteydessä. Kriittinen taajuus $\Omega_{kr} = 2$ ja aika-askel $\Delta t_{kr} = 2/\omega$.

Keskimääräisen kiihtyvyyden eli trapetsikaavan ja keskeisdifferenssimenetelmän lisäksi Newmarkin menetelmäperheen tunnettuja esustajia ovat lineaarisen kiihtyvyyden menetelmä ($\beta = \frac{1}{6}, \gamma = \frac{1}{2}$) ja Foxin ja Goodwinin menetelmä ($\beta = \frac{1}{12}, \gamma = \frac{1}{2}$). Nämä ovat *implisiittisiä ehdollisesti stabiileja* menetelmiä, minkä vuoksi ne eivät ole taloudellisia suurten systeemien analysointiin.

18.4 Vaimennettu värähtelijä

Tarkastellaan kuvan 18.4 mukaista systeemiä, jossa vaimenninvoima on suoraan verrannollinen massan nopeuteen. Värähtelijän liikeyhtälö on

$$m\ddot{Y} + c\dot{Y} + kY = \bar{f}.$$



Kuva 18.4 Vaimennettu yksivapausasteinen värähtelijä.

Liikkeyhtälö voidaan saattaa myös muotoon

$$\ddot{Y} + 2\zeta\omega\dot{Y} + \omega^2 Y = \frac{\bar{f}}{m}\bar{F}, \quad (18.21)$$

missä $\zeta = c/(2m\omega)$ on suhteellinen vaimennuskerroin. Yhtälön (18.21) homogeenisen osan ratkaisu on muotoa $Y_h = C \exp(rt)$, ja tekijä r saadaan karakteristisen polynomin

$$r^2 + 2\zeta\omega r + \omega^2 = 0$$

nollakohdista

$$r_{1,2} = -\zeta\omega \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega.$$

Homogeenisen osan ratkaisun luonne riippuu nyt suhteellisen vaimennuksen ζ arvosta ja seuraavat kolme tapausta ovat mahdollisia.

1. Vaimennuksen sanotaan olevan ylikriittinen kun $\zeta > 1$. Tällöin karakteristisen yhtälön juuret ovat reaalisia, erisuuruisia ja negatiivisia. Liike vaimenee monotonisesti ja koska ratkaisu ei esitä värähtelyä kutsutaan sitä aperiodiseksi liikkeeksi.
2. Kun $\zeta = c/(2m\omega) = 1$ on karakteristisella yhtälöllä reaalinen kaksoisjuuri. Tällöin yhtälön (18.21) homogeenisen osan ratkaisu on muotoa

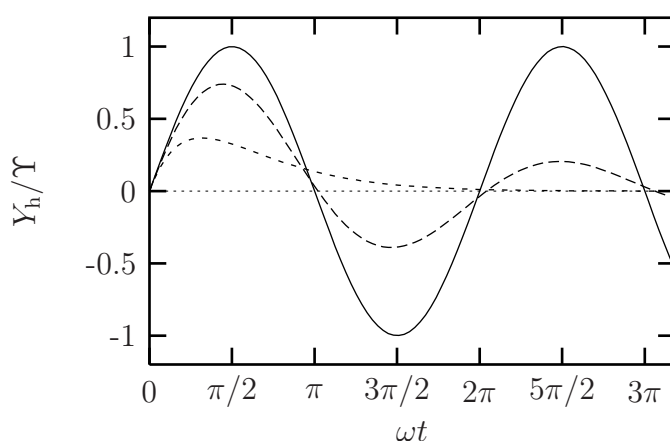
$$Y_h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega t},$$

mikä esittää aperiodista vaimenevaa liikettä, ks. kuva 18.5.

3. Sovellutusten kannalta tärkein tapaus on alikriittinen vaimennus kun $\zeta < 1$, jolloin juuret ovat kompleksisia konjugaattilukuja. Tällöin ratkaisu esittää taa-juudella ω tapahtuvaa harmonista värähtelyä jonka amplitudi pienenee eksponentiaalisesti ajan mukana (ks. kuva 18.5)

$$Y_h(t) = e^{-\zeta\omega t}(C_1 \sin \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t) = \Upsilon e^{-\zeta\omega t} \sin(\omega_d t + \phi), \quad (18.22)$$

missä $\Upsilon = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2}\omega$ ja $\phi = \arctan(C_2/C_1)$.



Kuva 18.5 Vaimentumaton värähtely, kriittinen ja alikriittinen vaimennettu värähtely ($\zeta = 0, 1, 0.2$).

18.4.1 Keskeisdifferenssimenetelmä vaimennetulle liikeyhtälölle

Sijoittamalla keskeisdifferenssimenetelmän kaavat

$$\ddot{y} = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\Delta t^2}, \quad (18.23)$$

$$\dot{y} = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta t} \quad (18.24)$$

liikeyhtälöön (18.21) tulee siitä järjestelyiden jälkeen differenssiyhtälö

$$y_{n+1} - \frac{2 - \Omega^2}{1 + \zeta\Omega} y_n + \frac{1 - \zeta\Omega}{1 + \zeta\Omega} y_{n-1} = \frac{\Delta t^2}{1 + \zeta\Omega} \bar{F}_n.$$

Yritteellä $y_n = C\lambda^n$ saadaan homogeenisen yhtälön avulla karakteristinen yhtälö

$$\lambda^2 - \frac{2 - \Omega^2}{1 + \zeta\Omega} \lambda + \frac{1 - \zeta\Omega}{1 + \zeta\Omega} = 0,$$

jonka juuret ovat

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - \Omega^2 \pm \Omega\sqrt{\Omega^2 - 4(1 - \zeta^2)}}{2(1 + \zeta\Omega)}.$$

Jotta ratkaisu esittäisi värähdysliikettä, täytyy karakterisen yhtälön juurten olla kompleksikonjugaatteja, ja juurrettavan on oltava negatiivinen, eli

$$\Omega^2 - 4(1 - \zeta^2) < 0 \quad \text{eli} \quad \omega\Delta t = \Omega < \Omega_{\text{kr}} = 2\sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Juuret ovat tällöin

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - \Omega^2 \pm i\Omega\sqrt{4(1 - \zeta^2) - \Omega^2}}{2(1 + \zeta\Omega)}$$

Vaihtoehtoisesti voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{z}_n + \mathbf{L}\bar{F}_n,$$

missä vahvennusmatriisi $\mathbf{A}$ ja vektorit $\mathbf{L}$ ja $\mathbf{z}_n$ ovat nyt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{2 - \Omega^2}{1 + \zeta\Omega} & -\frac{1 - \zeta\Omega}{1 + \zeta\Omega} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{(\Delta t)^2}{1 + \zeta\Omega} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_n = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaessa vahvennusmatriisin ominaisarvot saadaan teitenkin sama karakteristinen yhtälö ja samat juuret kuin edellä.

Differenssiyhtälön homogeenisen osan ratkaisu on

$$y_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

missä C_1 ja C_2 ovat alkuehtojen perusteella ratkaistavia vakioita. Differenssiyhtälön ratkaisu esittää värähdysliikettä, kun karakteristisen yhtälön juuret ovat kompleksikonjugaatteja, ja tällöin voidaan juuret kirjoittaa muotoon

$$\lambda_{1,2} = a \pm bi.$$

Merkitsemällä

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \phi = \frac{b}{a}$$

tulee ratkaisu muotoon

$$\begin{aligned} y_n &= \rho^n (C_3 \cos n\phi + C_4 \sin n\phi) \\ &= e^{\ln \rho^n} (C_3 \cos n\phi + C_4 \sin n\phi). \end{aligned}$$

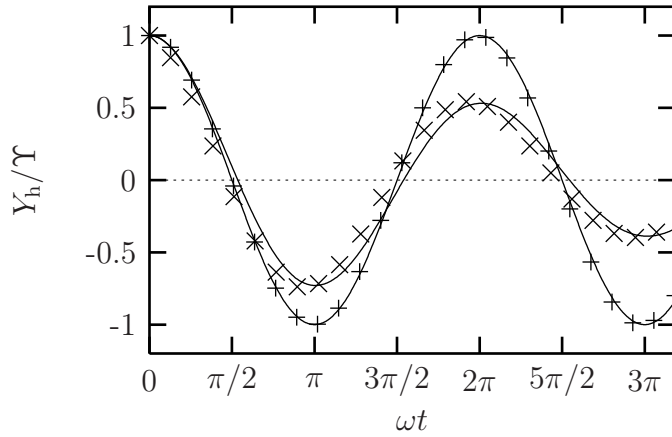
Keskeisdifferenssimenetelmän tapauksessa

$$\rho = \sqrt{\frac{1 - \zeta\Omega}{1 + \zeta\Omega}},$$

ja vaihekulma toteuttaa yhtälön

$$\tan \phi = \frac{\Omega\sqrt{4(1 - \zeta^2) - \Omega^2}}{2 - \Omega^2}$$

Homogeenisen liikeyhtälön tarkka ratkaisu (18.22) alkuehdoilla $y(0) = \bar{y}_0$, $\dot{y}(0) =$



Kuva 18.6 Vaimentamaton ja vaimennettu värähtelijä laskettuna Keskeisdifferenssimenetelmällä käyttäen askelpituutta $0.2\Delta t_{\text{kr}}$. Suhteelliselle vaimennuskertoimelle on käytetty arvoa 0.1. Analyytinen tulos on piirretty yhtenäisellä viivalla.

$\dot{\bar{y}}_0$ on

$$Y_h(t) = e^{-\zeta\omega t} \left[\bar{y}_0 \cos \omega_d t + \left(\frac{\dot{\bar{y}}_0}{\omega_d} + \frac{\zeta \bar{y}_0 \omega}{\omega_d} \right) \sin \omega_d t \right].$$

Numeerisen menetelmän vaimennus saadaan suhteen $\rho/(e^{-\zeta\omega\Delta t})$ avulla, ja vaihekulmaa ϕ verrataan suureeseen $\omega_d\Delta t$. Kuvassa 18.7 on esitty keskeisdifferenssimenetelmän jaksonajan virhe aika-askeen koon funktiona, samoin kuin yhden aika-askeleen aikana tapahtuva amplitudivirhe.

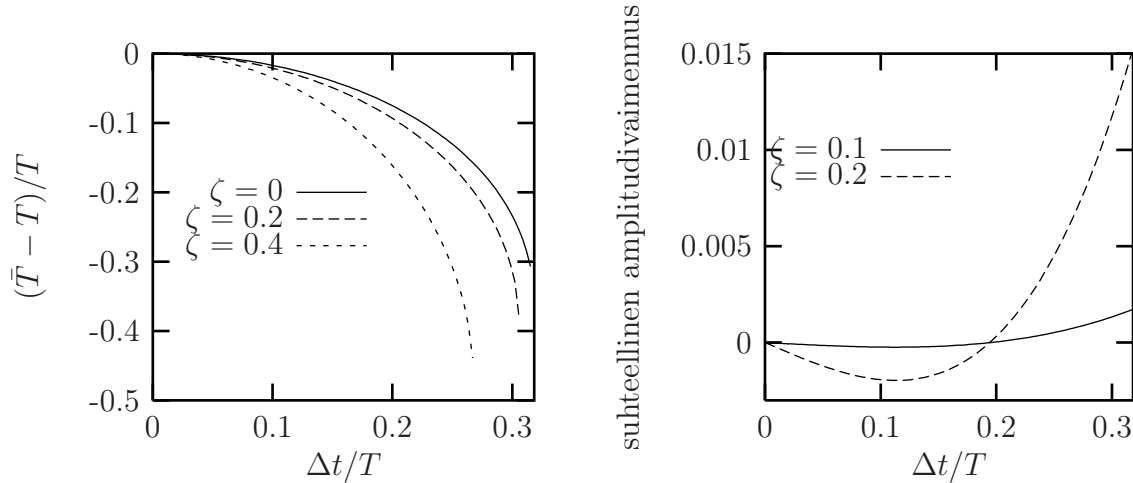
18.4.2 Newmarkin menetelmä vaimennetulle liikeyhtälölle

Käytettäessä Newmarkin algoritmia (18.10)

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t \dot{y}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 [(1 - 2\beta)\ddot{y}_n + 2\beta\ddot{y}_{n+1}], \\ \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \Delta t [(1 - \gamma)\ddot{y}_n + \gamma\ddot{y}_{n+1}], \end{aligned}$$

vaimennetun värähtelijän yhtälöön (18.21) askeleilla n ja $n + 1$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_n + 2\zeta\omega\dot{y}_n + \omega^2 y_n &= \bar{F}_n = \frac{\bar{f}_n}{m}, \\ \ddot{y}_{n+1} + 2\zeta\omega\dot{y}_{n+1} + \omega^2 y_{n+1} &= \bar{F}_{n+1} = \frac{\bar{f}_{n+1}}{m}, \end{aligned}$$



Kuva 18.7 Keskeisdifferenssimenetelmän vaihevirheen ja yhden aika-askeleen suhteellisen amplitudivirheen (vaimennus positiivisena) riippuvuus aika-askeleen koosta. Muista, että keskeisdifferenssimenetelmällä ei ole amplitudivirhettä vaimentumattomalle systeemille.

saadaan kaavat

$$\begin{bmatrix} 1 + \beta\Omega & 2\beta\zeta\Omega \\ \gamma\Omega^2 & 1 + 2\gamma\zeta\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{n+1} \\ \Delta t \dot{y}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\Omega^2 & 1 - (1 - 2\beta)\zeta\Omega \\ (\gamma - 1)\Omega^2 & 1 + 2(\gamma - 1)\zeta\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_n \\ \Delta t \dot{y}_n \end{Bmatrix} + \Delta t^2 \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\bar{F}_n + \beta\bar{F}_{n+1} \\ (1 - \gamma)\bar{F}_n + \gamma\bar{F}_{n+1} \end{Bmatrix}.$$

Kuten luvussa 18.3.1 menetelmä voidaan kirjoittaa kompaktissa muodossa

$$\dot{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{L}_n \quad (18.25)$$

missä $\mathbf{x} = [y, \Delta t \dot{y}]^T$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2$ ja

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 + \beta\Omega^2 & 2\beta\zeta\Omega \\ \gamma\Omega^2 & 1 + 2\gamma\zeta\Omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\Omega^2 & 1 - (1 - 2\beta)\zeta\Omega \\ (\gamma - 1)\Omega^2 & 1 + 2(\gamma - 1)\zeta\Omega \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_n = \mathbf{A}_1^{-1} \Delta t^2 \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\bar{F}_n + \beta\bar{F}_{n+1} \\ (1 - \gamma)\bar{F}_n + \gamma\bar{F}_{n+1} \end{Bmatrix}.$$

Menetelmän (18.25) stabiiliusanalyysi on periaatteeltaan aivan sama kuin luvussa 18.3.1. Vahvennusmatriisin invariantit ovat

$$A_1 = 1 - \frac{\zeta\Omega + \frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{2})\Omega^2}{D},$$

$$A_2 = 1 - \frac{2\zeta\Omega + \frac{1}{2}(\gamma - \frac{1}{2})\Omega^2}{D},$$

missä $D = 1 + 2\gamma\zeta\Omega + \beta\Omega^2$ ja karakteristinen polynomi on kuten yhtälössä 18.11. Jotta vahvennusmatriisin ominaisarvot olisivat kompleksisia, on oltava voimassa ehto

$$A_1^2 < A_2,$$

mistä seuraa

$$\left[\frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2 - \beta\right]\Omega^2 + \zeta(\frac{1}{2} - \gamma)\Omega + \zeta^2 - 1 < 0. \quad (18.26)$$

Havaitaan, että ehdot vahvennusmatriisin juurien kompleksisuudelle ovat vaimennettun liikeyhtälön tapauksessa samat kuin vaimentamattomallekin, eli ehdot (18.16) ovat

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad \beta > \frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2. \quad (18.27)$$

Tällöin juurien itseisarvo on myös ykköistä pienempi, joten menetelmä on ehdoitusta stabiili. Mikäli edellä mainittu ehto ei toteudu ja mikäli $\gamma \geq \frac{1}{2}$, on menetelmä ehdollisesti stabiili ja kriittinen taajuus saadaan yhtälöstä (18.26):

$$\Omega \leq \Omega^{\text{bif}} = \frac{\frac{1}{2}\zeta(\gamma - \frac{1}{2}) + \sqrt{\frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2 - \beta + \zeta^2(\beta - \frac{1}{2}\gamma)}}{\frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2 - \beta}.$$

Kuten vaimentamattomassakin tapauksessa stabiiliusaluetta voidaan laajentaa epäyhtälöiden (??) rajoittamaa aluetta suuremmaksi. Tällöin juurien reaalisuus sallitaan ($A_1^2 - A_2 > 0$), ja rajoittavat ehdot ovat:

$$\begin{cases} -1 \leq A_1 \leq 0 \\ \max |\lambda| = A_1 - \sqrt{A_1^2 - A_2} \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} 0 < A_1 \leq 1 \\ \max |\lambda| = A_1 + \sqrt{A_1^2 - A_2} \end{cases}.$$

Ensimmäinen epäyhtälö osoittautuu kriittiseksi: ²

$$2(2\beta - \gamma)\Omega^2 + 4\zeta(2\gamma - 1)\Omega^2 + 4 \geq 0,$$

mistä saadaan ehdot $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$ Newmarkin menetelmän ehdoista stabiiliudelle vaimennettun värähtelijän tapauksessa. Nämä ovat samat ehdot kuin vaimentamattomalle systeemillekin.

18.4.2.1 Menetelmän korkeataajuuskäyttäytyminen

Mikäli Newmarkin menetelmää käytetään systeemien ratkaisuun, jotka perustuvat rakennemallien semidiskretoituihin yhtälöihin joissa korkeimmat taajuudet ovat virheellisiä, on korkeiden taajuuksien algoritmien vaimennus suotava ominaisuus. Edellisissä luvuissa on näytetty, että Newmarkin menetelmällä ei ole vaimentamattomalle systeemille amplitudivaimennusta, mikäli γ parametrilla on arvo $1/2$. Mi-

²Jälkimmäinen ehto toteutuu aina: $\Omega^2/(1 + 2\gamma\zeta\Omega + \beta\Omega^2) > 0$.

käli $\gamma > 1/2$, Newmarkin menetelmässä on algoritmista vaimennusta, mitä voidaan mitata vahvennusmatriisin spektraalisäteen avulla.

Maksimaalinen korkeiden taajuuksien vaimennus saadaan aikaan kun valitaan parametreille arvot (k-newmark-ehto-juuret-kompleksisia) joka on vahvennusmatriisin juurien kompleksisuusehto. Tällöin vahvennusmatriisilla $\mathbf{A}$ on kaksi yhtäsuurta ominaisarvoa

$$\lambda_{1,2} = A_1 = 1 - \frac{\zeta\Omega + \frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{2})\Omega^2}{1 + 2\zeta\gamma\Omega + \beta\Omega^2}.$$

Kun aika-askel kasvaa, lähestyy spektraalisäde raja-arvoa

$$\rho_{\infty}^{\text{bif}} = \lim_{\Delta t/T \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{A}) = \left| 1 - \frac{2}{\gamma + \frac{1}{2}} \right|.$$

Tehokkain korkeiden taajuuksien vaimennus saataisiin kun valitaan $\beta = 1, \gamma = \frac{3}{2}$. Valitettavasti tällä algoritmilla on hyvin huono tarkkuus matalien taajuuksien alueella, joten se ei ole käyttökelpoinen rakenteiden transienttianalyyseissä.

18.5 Yleistetty α -menetelmä

Newmarkin menetelmäperheen jäsenistä ainoastaan trapetsikaava on ehdoitta stabiili ja tarkkuudeltaan toista kertalukua. Trapetsikaavan haittapuolena on kuitenkin se ettei sillä ole minkäänlaista algoritmista vaimennusta. Seuraavassa esitetään menetelmä, jonka tarkkuus on samaa luokkaa kuin trapetsikaavalla, mutta jonka algoritmista vaimennusta voidaan säätää yhdellä parametrilla.

Yleistetyn α -menetelmän siirtymän ja nopeuden kaavat ovat samat kuin Newmarkin menetelmässä, eli

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \dot{y}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)(\Delta t)^2 \ddot{y}_n + \beta(\Delta t)^2 \ddot{y}_{n+1},$$

$$\dot{y}_{n+1} = \dot{y}_n + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{y}_n + \gamma\Delta t \ddot{y}_{n+1},$$

mutta nyt liikeyhtälö kirjoitetaan muodossa

$$m\ddot{y}_{n+1-\alpha_m} + c\dot{y}_{n+1-\alpha_f} + ky_{n+1-\alpha_f} = f(t_{n+1-\alpha_f}), \quad (18.28)$$

missä α_m, α_f ovat menetelmän parametrejä ja

$$y_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)y_{n+1} + \alpha_f y_n,$$

$$\dot{y}_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)\dot{y}_{n+1} + \alpha_f \dot{y}_n,$$

$$\ddot{y}_{n+1-\alpha_m} = (1 - \alpha_m)\ddot{y}_{n+1} + \alpha_m \ddot{y}_n,$$

$$t_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)t_{n+1} + \alpha_f t_n.$$

Siirtymän ja nopeuden alkuarvot ovat $y(0) = y_0$ ja $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$. Kiihtyvyyden alkuarvo saadaan liikeyhtälöstä

$$\ddot{y}(0) = m^{-1}(f(0) - c\dot{y}_0 - ky_0).$$

Yleistetyn α -menetelmän stabiiliutta ja tarkkuutta tutkitaan samalla tavalla kuin Newmarkin menetelmän ominaisuuksia edellä soveltamalla menetelmää yhden vauvasasteen värähtelijän liikeyhtälöön

$$\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \omega^2 y = f$$

alkuehdoin $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$.

Homogeenisessa tapauksessa $f = 0$ saadaan kaava

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

missä $\mathbf{A}$ on vahvistusmatriisi ja

$$\mathbf{X}_n = \begin{Bmatrix} y_n \\ \Delta t \dot{y}_n \\ (\Delta t)^2 \ddot{y}_n \end{Bmatrix}.$$

Algoritmin stabiilius, amplitudin virhe ja vaihevirhe riippuvat vahvistusmatriisin ominaisarvoista. Vahvennumatriisin spektraalisäde on

$$\rho = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\},$$

missä $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ ovat matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot. Voidaan osoittaa, että yleistetty α -menetelmä on ehdoilla stabiili, jos

$$\alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2}, \quad \beta \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_f - \alpha_m).$$

Spektraalisäde mittaa myös menetelmän numeerista vaimennusta. Korkeiden taa-

juuksien vaimennus on integrointimenetelmän suotava ominaisuus, mutta se ei saa vaimentaa liikaa matalia taajuuksia. Yleistetyn α -menetelmän matalien taajuuksien vaimennus minimoituu, kun $\alpha_f = (\alpha_m + 1)/\sqrt{3}$.

Yleistetyn α -menetelmän katkaisuvirhe on suuruusluokkaa $O[(\Delta t)^2]$, eli sen tarkkuus on toista kertalukua, jos

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f.$$

18.6 Moniaskelmenetelmät

Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$\dot{y} = f(y, t), \quad y(0) = y_0. \quad (18.29)$$

Haetaan tehtävän ratkaisua ajanhetkillä $t = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Merkitään, että y_n on tarkan ratkaisun $y(t_n)$ approksimaatio ajanhetkellä t_n , ja $f_n \equiv f(y_n, t_n)$.

Yleinen lineaarinen moniaskelmenetelmä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}, \quad (18.30)$$

missä α_j ja β_j ovat vakioita. Asetetaan $\alpha_k = 1$. k -askelmenetelmän tapauksessa tarvitaan k alkuarvoa, $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$. Yksiaskelmenetelmälle tarvitaan vain alkuarvo y_0 .

Moniaskelmenetelmä on eksplisiittinen, jos $\beta_k = 0$, ja implisiittinen, jos $\beta_k \neq 0$. Eksplisiittisen menetelmän tapauksessa differenssiyhtälöstä (18.30) saadaan y_{n+k} suoraan, kun y_{n+j} ja f_{n+j} , $j = 0, 1, \dots, k-1$ tunnetaan edellisten aika-askeleiden ratkaisujen perusteella. Sitä vastoin implisiittisen menetelmän tapauksessa on jokaisella aika-askeleella ratkaistava yhtälö

$$y_{n+k} = \Delta t \beta_k f(y_{n+k}, t_{n+k}) + g, \quad (18.31)$$

missä g on (tässä vaiheessa) tunnetuista arvoista y_{n+j} ja f_{n+j} , $j = 0, 1, \dots, k-1$ riippuva funktio. Lineaarisen funktion f tapauksessa yhtälön (18.31) ratkaisu on helppo. Sensijaan, jos funktio $f(t, y)$ riippuu epälineaarisesti ratkaistavasta funktiosta y , niin myös differenssiyhtälöistä (18.30) tulee epälineaarisia, ja ratkaisu on haettava iteratiivisesti.

18.6.1 Johto Taylorin kehitelmän avulla

Tarkastellaan seuraavaksi moniaskelmenetelmien kertoimien määrittystä. Kehitetään funktio $y(t)$ hetkellä t_n Taylorin sarjaksi

$$y(t_n + \Delta t) = y(t_n) + \Delta t y^{(1)}(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} y^{(2)}(t_n) + \dots, \quad (18.32)$$

missä on merkitty

$$y^{(p)}(t_n) \equiv \frac{d^p y}{dt^p}(t_n), \quad p = 1, 2, \dots \quad (18.33)$$

Katkaisemalla toisen termin jälkeen ja ottamalla huomioon, että $\dot{y}(t) = f(y, t)$, Taylorin kehitelmästä saadaan differentiaaliyhtälön (18.29) tarkkojen ratkaisujen välille likikaava

$$y(t_n + \Delta t) \approx y(t_n) + \Delta t f(y(t_n), t_n), \quad (18.34)$$

jonka virhe on

$$\frac{(\Delta t)^2}{2!} y^{(2)}(t_n) + \frac{(\Delta t)^3}{3!} y^{(3)}(t_n) + \dots \quad (18.35)$$

Kaava (18.34) voidaan tulkita myös yhtälön (18.29) likiratkaisujen väliseksi tarkaksi kaavaksi

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f_n, \quad (18.36)$$

joka on eksplisiittinen Eulerin menetelmä. Menetelmän (18.36) katkaisuvirhe on $O((\Delta t)^2)$, ja se integroi tarkasti yhtälön (18.29) lineaarisen polynomin mukaisen ratkaisun.

Taylorin kehitelmistä

$$y(t_n + \Delta t) = y(t_n) + \Delta t y^{(1)}(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} y^{(2)}(t_n) + \frac{(\Delta t)^3}{3!} y^{(3)}(t_n) + \dots, \quad (18.37)$$

$$y(t_n - \Delta t) = y(t_n) - \Delta t y^{(1)}(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} y^{(2)}(t_n) - \frac{(\Delta t)^3}{3!} y^{(3)}(t_n) + \dots \quad (18.38)$$

saadaan vähentämällä

$$y(t_n + \Delta t) - y(t_n - \Delta t) = 2\Delta t y^{(1)}(t_n) - \frac{(\Delta t)^3}{3} y^{(3)}(t_n) + \dots, \quad (18.39)$$

josta johdetaan keskeisdifferenssimenetelmä

$$y_{n+2} = y_n + 2\Delta t f_{n+1}. \quad (18.40)$$

Menetelmän (18.40) katkaisuvirhe on $\pm \frac{1}{3}(\Delta t)^3 y^{(3)}(t_n) + \dots$.

Yleinen yksiaskelmenetelmä on

$$y_{n+1} + \alpha_0 y_n = \Delta t (\beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n). \quad (18.41)$$

Haetaan parametreille α_0 , β_0 ja β_1 optimaaliset arvot.

Sijoittamalla vastaavaan likikaavaan

$$y(t_n + \Delta t) + \alpha_0 y(t_n) \approx \Delta t [\beta_1 \dot{y}(t_n + \Delta t) + \beta_0 \dot{y}(t_n)] \quad (18.42)$$

kehitemät

$$\begin{aligned} y(t_n + \Delta t) &= y(t_n) + \Delta t y^{(1)}(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} y^{(2)}(t_n) + \dots, \\ y^{(1)}(t_n + \Delta t) &= y^{(1)}(t_n) + \Delta t y^{(2)}(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} y^{(3)}(t_n) + \dots \end{aligned} \quad (18.43)$$

saadaan

$$C_0 y(t_n) + C_1 \Delta t y^{(1)}(t_n) + C_2 (\Delta t)^2 y^{(2)}(t_n) + C_3 (\Delta t)^3 y^{(3)}(t_n) + \dots \approx 0, \quad (18.44)$$

missä

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 + \alpha_0, \quad C_1 = 1 - \beta_1 - \beta_0, \\ C_2 &= \frac{1}{2} - \beta_1, \quad C_3 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\beta_1. \end{aligned} \quad (18.45)$$

Mahdollisimman tarkka yksiaskelmenetelmä saadaan ottamalla $\alpha_0 = -1$, $\beta_1 = \beta_0 = \frac{1}{2}$. Tällöin saadaan menetelmä

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \Delta t (f_{n+1} + f_n), \quad (18.46)$$

joka on nimeltään trapetsikaava. Tässä tapauksessa $C_3 = -\frac{1}{12}$, ja trapetsikaavan katkaisuvirhe on $\pm \frac{1}{12} (\Delta t)^3 y^{(3)}(t_n) + \dots$.

18.6.2 Moniaskelmenetelmän kertaluku

Moniaskelmenetelmään (18.30) liitty differenssioperaattori

$$\mathcal{L}[y(t); \Delta t] = \sum_{j=0}^k [\alpha_j y(t + j\Delta t) - \Delta t \beta_j \dot{y}(t + j\Delta t)], \quad (18.47)$$

missä $y(t)$ on jakuvasti derivoituva funktio tarkasteluvälillä. Kehittämällä funktio $y(t + j\Delta t)$ ja sen derivaatta $\dot{y}(t + j\Delta t)$ Taylorin sarjoiksi saadaan kaavasta (18.47)

$$\mathcal{L}[y(t); \Delta t] = C_0 y(t) + C_1 \Delta t y^{(1)}(t) + \dots + C_p (\Delta t)^p y^{(p)}(t) + \dots \quad (18.48)$$

Differenssioperaattorin (18.47) tarkkuus on kertalukua q , jos $C_0 = C_1 = \dots =$

$C_q = 0$ ja $C_{q+1} \neq 0$. Vakioiden α_j ja β_j avulla saadaan

$$\begin{aligned} C_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k, \\ C_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k), \\ C_p &= \frac{1}{p!}(\alpha_1 + 2^p\alpha_2 + \cdots + k^p\alpha_k) \\ &\quad - \frac{1}{(p-1)!}(\beta_1 + 2^{p-1}\beta_2 + \cdots + k^{p-1}\beta_k), \quad p = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (18.49)$$

Kehitelmän (18.48) ensimmäistä nolasta poikkeavaa kerrointa C_{q+1} nimitetään virhekerrotimeksi.

Moniaskelmenetelmän (18.30) katkaisuvirhe ajanhetkellä t_{n+k} on

$$\mathcal{L}[y(t_n); \Delta t] = \sum_{j=0}^k [\alpha_j y(t_n + j\Delta t) - \Delta t \beta_j \dot{y}(t_n + j\Delta t)], \quad (18.50)$$

missä $y(t)$ on differentiaaliyhtälön (18.29) tarkka ratkaisu. Katkaisuvirhe $T_{n+k} \equiv \mathcal{L}[y(t_n); \Delta t]$ on luonteltaan paikallinen. Otaksumalla, että $y_{n+j} = y(t_{n+j})$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, eli näillä ajanhetkillä katkaisuvirhe on nolla, saadaan kaavasta (18.50)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \alpha_j y(t_n + j\Delta t) &= \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j \dot{y}(t_n + j\Delta t) + \mathcal{L}[y(t_n); \Delta t] \\ &= \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j f(y(t_n + j\Delta t), t_n + j\Delta t) + \mathcal{L}[y(t_n); \Delta t], \end{aligned} \quad (18.51)$$

missä $y(t)$ on tarkka ratkaisu. Likiratkaisu y_{n+k} toteuttaa moniaskelmenetelmän kaavan

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j f(y_{n+j}, t_{n+j}). \quad (18.52)$$

Vähentämällä kaavat (18.51) ja (18.52) toisistaan tulee, kun $\alpha_k = 1$, tarkoilla alkuarvoilla

$$y(t_{n+k}) - y_{n+k} = \Delta t \beta_k [f(y(t_{n+k}), t_{n+k}) - f(y_{n+k}, t_{n+k})] + \mathcal{L}[y(t_n); \Delta t]. \quad (18.53)$$

Jos $\eta_{n+k} \in (y_{n+k}, y(t_{n+k}))$, niin saadaan

$$f(y(t_{n+k}), t_{n+k}) - f(y_{n+k}, t_{n+k}) = \frac{\partial f(\eta_{n+k}, t_{n+k})}{\partial y} [y(t_{n+k}) - y_{n+k}], \quad (18.54)$$

joten

$$\mathcal{L}[y(t_n); \Delta t] \equiv T_{n+k} = \left[1 - \Delta t \beta_k \frac{\partial f(\eta_{n+k}, t_{n+k})}{\partial y} \right] [y(t_{n+k}) - y_{n+k}]. \quad (18.55)$$

Eksplisiittisen menetelmän, ($\beta_k = 0$), katkaisuvirhe on tarkan ratkaisun ja tarkkoilla alkuarvoilla lasketun moniaskelmenetelmän ratkaisun erotus, ja implisiittisen menetelmän katkaisuvirhe on ko. erotukseen verrannollinen. Jos tarkka teoreettinen ratkaisu on riittävän monta kertaa derivoituva, niin sekä eksplisiittiselle että implisiittiselle moniaskelmenetelmälle

$$y(t_{n+k}) - y_{n+k} = C_{q+1}(\Delta t)^{q+1} y^{(q+1)}(t_n) + O((\Delta t)^{q+2}), \quad (18.56)$$

missä q on menetelmän kertaluku. Termi $C_{q+1}(\Delta t)^{q+1} y^{(q+1)}(t_n)$ on paikallinen pää(pään?)katkaisuvirhe, joka tunnetaan, jos moniaskelmenetelmän kertaluku q ja virhevakio C_{q+1} tunnetaan.

18.6.3 Konsistenssi

Lineaarisen moniaskelmenetelmän sanotaan olevan konsistentti, jos sen kertaluku on $q \geq 1$. Kaavoista (18.49) seuraa, että moniaskelmenetelmä (18.30) on konsistentti, jos

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0, \quad \sum_{j=0}^k j \alpha_j = 0 = \sum_{j=0}^k \beta_j. \quad (18.57)$$

Määrittelemällä polynomit

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \zeta^j, \quad \sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^k \beta_j \zeta^j \quad (18.58)$$

konsistenssiehdot (18.57) saadaan muotoon

$$\rho(1) = 0, \quad \rho'(1) = \sigma(1), \quad (18.59)$$

missä $\rho'(\zeta) = \frac{d\rho(\zeta)}{d\zeta}$. Konsistentin moniaskelmenetelmän ensimmäisellä karakteristisella polynomilla $\rho(\zeta)$ on aina juurena $\zeta_1 = +1$. Juurta ζ_1 sanotaan pääjuureksi. Myös muita juuria, lisäjuuria ζ_i , $i = 2, 3, \dots, k$ esiintyy, kun moniaskelmenetelmän askelluku on suurempi kuin yksi.

Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$\dot{y} = 0, \quad y_0 = 0, \quad (18.60)$$

jonka ratkaisu on $y(t) = 0$. Soveltamalla moniaskelmenetelmää (18.30) tähän tehtä-

vään tulee differenssiyhtälö

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = 0. \quad (18.61)$$

Jos polynomin $\rho(\zeta)$ juuret ζ_i ovat reaaliset ja erisuuret, niin differenssiyhtälön ratkaisu on

$$y_n = \Delta t \sum_{j=1}^k d_j \zeta_j^n, \quad (18.62)$$

missä d_j ovat vakioita ja pääjuuri $\zeta_1 = 1$. Menetelmä suppenee ajanhetkellä $t = n\Delta t$, eli

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ t = n\Delta t}} \Delta t \zeta_i^n = t \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\zeta_i^n}{n} = 0, \quad (18.63)$$

jos ja vain jos juuret toteuttavat ehdot

$$|\zeta_i| \leq 1. \quad (18.64)$$

Jos polynomin $\rho(\zeta)$ juuri ζ_s on m -kertainen, niin tämän juuren osuus differenssiyhtälön ratkaisuun on muotoa

$$\Delta t [d_{s,1} + d_{s,2}n + d_{s,3}n(n-1) + \cdots + d_{s,m}n(n-1)\cdots(n-m+2)] \zeta_s^n. \quad (18.65)$$

Ratkaisu suppenee nyt ajanhetkellä $t = n\Delta t$, eli

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ t = n\Delta t}} \Delta t n^p \zeta_s^n = t \lim_{n \rightarrow \infty} n^{p-1} \zeta_s^n = 0, \quad p \geq 1, \quad (18.66)$$

jos ja vain jos

$$|\zeta_i| < 1, \quad (18.67)$$

eli moninkertaisen juuren on oltava ykköstä pienempi.

Määritellään, että lineaarinen moniaskelmenetelmä on **nolla-stabiili**, jos sen ensimmäisen karakteristisen polynomin $\rho(\zeta)$ juuret toteuttavat ehdot $|\zeta_j| \leq 1$ ja sen mahdolliset moninkertaiset juuret toteuttavat ehdot $|\zeta_j| < 1$. Juuret voivat olla myös kompleksisia.

Kun ensimmäisen kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö ratkaistaan korvaamalla se korkeamman kertaluvun differenssiyhtälöllä, syntyy em. lisäjuuria. Nolla-stabiilius takaa sen, että lisäjuurten vaikutus menee kohti nollaa aika-askelta pienennettäessä.

Dahlquistin teoreeman mukaan lineaarinen moniaskelmenetelmä suppenee, jos se on konsistentti ja nolla-stabiili.

Lineaarisia ensimmäisen kertaluvun moniaskelmenetelmiä voidaan soveltaa myös

toisen kertaluvun yhtälöille

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \quad (18.68)$$

tekemällä muuttujien vaihdos

$$y = u, \quad \dot{y} = v, \quad (18.69)$$

jolloin saadaan kahden yhtälön systeemi

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ m\dot{v} + cv + ku &= f, \end{aligned} \quad (18.70)$$

eli

$$\begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{u} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -m^{-1}c & -m^{-1}k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ u \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m^{-1}f \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (18.71)$$

Moniaskelmenetelmä voidaan yleistää tavallisten differentiaaliyhtälöiden systeemille

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \quad (18.72)$$

Vastaavasti toisen kertaluvun yhtälöryhmän tapauksessa

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \dot{\mathbf{y}}(0) = \dot{\mathbf{y}}_0 \quad (18.73)$$

tekemällä muuttujien vaihdos

$$\mathbf{y} = \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{v}, \quad (18.74)$$

tulee

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{v}, \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{K}\mathbf{u} &= \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (18.75)$$

eli

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (18.76)$$

18.6.4 Kankeat yhtälöt

Tavallisten differentiaaliyhtälöiden ryhmän

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \quad (18.77)$$

ratkaisu, kun matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot λ_i ovat erisuuret, on

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^m k_i e^{\lambda_i t} \mathbf{c}_i + \mathbf{g}(t), \quad (18.78)$$

missä $\mathbf{c}_i$ ovat ominaisarvoihin λ_i liittyvät ominaisvektorit.

Otaksutaan, että ominaisarvojen reaalisosat ovat negatiiviset, eli $\Re \lambda_i < 0$. Tällöin ratkaisun ensimmäinen osa

$$\mathbf{y}_t(t) = \sum_{i=1}^m k_i e^{\lambda_i t} \mathbf{c}_i \rightarrow 0, \quad \text{kun } t \rightarrow \infty. \quad (18.79)$$

Ratkaisun osa $\mathbf{y}_t(t)$ on nimeltään transientti ratkaisu (ohimenevä). Jos kiinnostuksen kohteena on vakiintuneen tilan ratkaisu $\mathbf{h}(t)$, niin numeerista ratkaisua täytyy jatkaa niin pitkälle, että transientin ratkaisun hitaimmin vaimentuva komponentti on mennyt riittävän pieneksi.

Lineaarista systeemiä $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(t)$ sanotaan kankeaksi, jos matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvojen reaalisosat ovat $\Re \lambda_i < 0$ ja $\max |\Re \lambda_i| \gg \min |\Re \lambda_i|$.

18.6.5 Moniaskelmenetelmän stabiiliusalue

Soveltamalla moniaskelmenetelmää

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}, \quad (18.80)$$

testiprobleemaan tai mallitehtävään

$$\dot{y} = \lambda y, \quad \lambda < 0, \quad (18.81)$$

saadaan yrittien $y_n = Cr^n$ avulla polynomiyhtälö

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j r^j - \Delta t \lambda \sum_{j=0}^k \beta_j r^j = 0, \quad (18.82)$$

eli

$$P(\Delta t \lambda) = \rho(r) - \Delta t \lambda \sigma(r) = 0, \quad (18.83)$$

missä $P(r, \Delta t \lambda)$ on menetelmän karakteristinen polynomi. Karakteristisen polynomiyhtälön juuret ovat yleisessä tapauksessa kompleksilukuja, joten myös $\Delta t \lambda$ on kompleksinen. Menetelmän stabiiliusalue on kompleksisessa $\Delta t \lambda$ -tasossa sellainen, että polynomiyhtälön $P(r, \Delta t \lambda) = 0$ juuret ovat yksikköympyrällä, kun $\Delta t \lambda$ on alueen sisällä.

Stabiiliusalueen reuna voidaan piirtää nyt kulman θ funktiona

$$\Delta t \lambda(\theta) = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}. \quad (18.84)$$

Esimerkki 18.1 Määritetään implisiittisen ja eksplisiittisen Eulerin menetelmän stabiiliusalueet.

Implisiittisen Eulerin menetelmän

$$y_{n+1} - y_n = \Delta t f_{n+1} \quad (18.85)$$

ja mallitehtävän $\dot{y} = \lambda y$, $\lambda < 0$ tapauksessa $y_{n+1} - y_n = \Delta t \lambda y_{n+1}$ ja

$$\rho(r) = r - 1, \quad \sigma(r) = r. \quad (18.86)$$

Stabiiliusalueen määrittäväksi yhtälöksi saadaan

$$\Delta t \lambda(\theta) = \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta}} = 1 - e^{-i\theta}, \quad (18.87)$$

joka on yksikköympyrä keskipisteenä $(1, 0)$ kompleksisessa $\Delta t \lambda$ -tasossa. Implisiittinen Eulerin menetelmä on stabiili ympyrän ulkopuolella.

Eksplisiittisen Eulerin menetelmän

$$y_{n+1} - y_n = \Delta t f_n \quad (18.88)$$

ja testiongelman $\dot{y} = \lambda y$ tapauksessa saadaan karakteristinen polynomi yhtälö

$$r - 1 - \Delta t \lambda = 0, \quad (18.89)$$

ja stabiiliusalueen määrittäväksi yhtälöksi tulee

$$\Delta t \lambda(\theta) = e^{i\theta} - 1, \quad (18.90)$$

joka on yksikköympyrä keskipisteenään $(-1, 0)$ kompleksisessa $\Delta t \lambda$ -tasossa.

Eksplisiittinen Eulerin menetelmä on stabiili ympyrän sisäpuolella.

Määritellään, että numeerinen menetelmä on **A-stabiili**, jos sen absoluuttisen stabiiliuden alue sisältää koko puolitason $\Re(\Delta t \lambda) < 0$.

A-stabiilit menetelmät soveltuvat hyvin kankeille systeemeille, joille $\Re \lambda_i < 0$ eli ominaisarvojen reaali-osat ovat negatiiviset.

A-stabiilien moniaskelmenetelmien joukkoa rajoittaa Dahlquistin teoreema, jonka mukaan

- eksplisiittinen moniaskelmenetelmä ei voi olla A-stabiili,
- A-stabiilin implisiittisen moniaskelmenetelmän tarkkuuden kertaluku ei voi olla suurempi kuin kaksi,

- pienin virhevakio $C_3 = -\frac{1}{12}$ on implisiittisellä toisen kertaluvun moniaskelmenetelmällä, trapetsikaavalla.

Koska Dahlquistin teoreema rajoittaa A -stabiilin moniaskelmenetelmän kertaluvun arvoon kaksi, on ehdotettu vähemmän vaativia stabiilius-määritelmiä.

Numeerista menetelmää sanotaan $A(\alpha)$ -stabiiliksi, jos sen stabiiliusalue sisältää kompleksitasossa kiilan $\{|\Delta t\lambda| - \alpha < \pi - \arg(\Delta t\lambda) < \alpha\}$. Esimerkiksi, jos ratkaistavan systeemin kaikki ominaisarvot ovat reaalisia, niin voidaan käyttää $A(0)$ -stabiilia menetelmää.

Numeerista menetelmää sanotaan jäykkä-stabiiliksi, jos sen absoluuttisen stabiiliuden alue koostuu kahdesta osasta $\mathcal{R}_1$ ja $\mathcal{R}_2$, siten, että se on tarkka alueessa $\mathcal{R}_2$ sovellettuna mallitehtävään $\dot{y} = \lambda y$, $\Re \lambda < 0$, kun alueet ovat

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \{\Delta t\lambda \mid \Re(\Delta t\lambda) < -a\}, \\ \mathcal{R}_2 &= \{\Delta t\lambda \mid -a \leq \Re(\Delta t\lambda) \leq b, -c \leq \Im(\Delta t\lambda) \leq c\},\end{aligned}\tag{18.91}$$

missä a , b ja c ovat positiivisia vakioita.

Joskus tarvitaan vielä A -stabiiliutta voimakkaampaa ominaisuutta.

Numeerista yksiaskelmenetelmää sanotaan L -stabiiliksi, jos se on A -stabiili ja lisäksi sovelletaessa sitä mallitehtävään $\dot{y} = \lambda y$, $\Re \lambda < 0$ se tuottaa kaavan $y_{n+1} = A(\Delta t\lambda)y_n$, missä $|A(\Delta t\lambda)| \rightarrow 0$, kun $\Re(\Delta t\lambda) \rightarrow -\infty$.

L -stabiiliudesta seuraa A -stabiiliuus, josta puolestaan seuraa $A(\alpha)$ -stabiilius.

Soveltamalla trapetsikaavaa mallitehtävään $\dot{y} = \lambda y$, $\Re \lambda < 0$, saadaan

$$y_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{2}\Delta t\lambda}{1 - \frac{1}{2}\Delta t\lambda} y_n.\tag{18.92}$$

Kiinteällä arvolla $\Delta t\lambda$ $y_n \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$, joten trapetsikaava on A -stabiili. Trapetsikaavan

$$y_{n+1} - y_n = \Delta t \frac{1}{2} (f_{n+1} + f_n)\tag{18.93}$$

ja testitehtävän $\dot{y} = \lambda y$, $\lambda < 0$ tapauksessa

$$y_{n+1} - y_n = \Delta t \lambda \frac{1}{2} (y_{n+1} + y_n)\tag{18.94}$$

karakteristinen polynomiyhtälö on

$$r - 1 - \Delta t \lambda \left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}\right),\tag{18.95}$$

ja stabiiliusalueen rajan määrittää kompleksitasossa yhtälö

$$\Delta t \lambda(\theta) = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1},\tag{18.96}$$

joka on imaginaariakseli. Trapetsikaava on stabiili koko puolitasossa $\Delta t\lambda \leq 0$, eli se on A -stabiili.

Funktion y numeerisen ratkaisun itseisarvot $|y_n|$ voivat supeta kuitenkin hyvin hitaasti, sillä suurilla arvoilla $|\Re(\Delta t\lambda)|$

$$|y_{n+1}| = \left| \frac{1 + \frac{1}{2}\Delta t\lambda}{1 - \frac{1}{2}\Delta t\lambda} \right| |y_n|. \quad (18.97)$$

18.6.6 Toisen kertaluvun yhtälöt

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön avulla annetulle alkuarvotehtävälle

$$\ddot{y} = f(y, t), \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \quad (18.98)$$

suoraan soveltuva lineaarinen moniaskelmenetelmä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = (\Delta t)^2 \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}, \quad (18.99)$$

missä $\alpha_k = 1$ ja α_0 ja β_0 eivät molemmat ole nollia. Toisen derivaatan $\ddot{y}$ approksimointiin tarvitaan vähintään kolme funktion y arvoa, ja k :n arvon on oltava vähintään kaksi.

18.6.6.1 Kertaluku

Toisen kertaluvun tavalliselle differentiaaliyhtälölle soveltuvaan moniaskelmenetelmään (18.99) liittyy differenssioperaattori

$$\mathcal{L}[y(t); \Delta t] = \sum_{j=0}^k [\alpha_j y(t + j\Delta t) - (\Delta t)^2 \beta_j \ddot{y}(t + j\Delta t)], \quad (18.100)$$

missä $y(t)$ otaksutaan jakuvasti derivoituvaksi funktioksi tarkasteluvälillä. Kehittämällä funktio $y(t + j\Delta t)$ ja sen toinen derivaatta $\ddot{y}(t + j\Delta t)$ Taylorin sarjoiksi saadaan kaavasta (18.100)

$$\mathcal{L}[y(t); \Delta t] = C_0 y(t) + C_1 \Delta t y^{(1)}(t) + \cdots + C_p (\Delta t)^p y^{(p)}(t) + \cdots \quad (18.101)$$

Differenssioperaattorin (18.100) tarkkuus on kertalukua q , jos $C_0 = C_1 = \cdots =$

$C_q = C_{q+1} = 0$ ja $C_{q+2} \neq 0$. Vakuioiden α_j ja β_j avulla saadaan

$$\begin{aligned} C_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k, \\ C_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k, \\ C_2 &= \frac{1}{2!}(\alpha_1 + 2^2\alpha_2 + \cdots + k^2\alpha_k) \\ &\quad - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k), \\ C_p &= \frac{1}{p!}(\alpha_1 + 2^p\alpha_2 + \cdots + k^p\alpha_k) \\ &\quad - \frac{1}{(p-2)!}(\beta_1 + 2^{p-2}\beta_2 + \cdots + k^{p-2}\beta_k), \quad p = 3, 4, \dots \end{aligned} \tag{18.102}$$

Kehitelmän (18.101) ensimmäistä nollasta poikkeavaa kerrointa C_{q+2} nimitetään virhekerroimeksi.

Moniaskelmenetelmän (18.99) katkaisuvirheen päätermi ajanhetkellä t_n on $C_{q+2}(\Delta t)^{q+2}y^{(q+2)}(t_n)$. Se on paikallinen pääkatkaisuvirhe, joka tunnetaan, jos moniaskelmenetelmän kertaluku q ja virhekerroin C_{q+2} tunnetaan.

18.6.6.2 Konsistenssi

Lineaarisen moniaskelmenetelmän (18.99) sanotaan olevan konsistentti, jos sen kertaluku on vähintään yksi.

Määrittelemällä polynomit

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \zeta^j, \quad \sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^k \beta_j \zeta^j \tag{18.103}$$

konsistenssiehdot voidaan esittää toisen kertaluvun yhtälön tapauksessa muodossa

$$\rho(1) = \rho'(1) = 0, \quad \rho''(1) = 2\sigma(1), \tag{18.104}$$

missä $\rho'(\zeta) = \frac{d\rho(\zeta)}{d\zeta}$. Tapauksessa $k = 1$ olisi $\rho(1) = \rho'(1) = 0$ ja siten $\alpha_1 = \alpha_0 = 0$, joten vaaditaan, että $k \geq 2$. Konsistentin moniaskelmenetelmän (18.99) ensimmäisellä karakteristisella polynomilla $\rho(\zeta)$ on kaksoisjuuri $\zeta_1 = +1$. Juurta ζ_1 sanotaan pääjuureksi. Muut juuret ovat lisäjuuria.

Määritellään, että lineaarinen, toisen kertaluvun yhtälölle suoraan soveltuva moniaskelmenetelmä (18.99) **nolla-stabiili**, jos sen ensimmäisen karakteristisen polynomin $\rho(\zeta)$ juuret toteuttavat ehdot $|\zeta_j| \leq 1$ ja jokainen juuri, jolle $|\zeta_k| = 1$, on

korkeintaan kaksinkertainen juuri.

Soveltamalla moniaskelmenetelmää (18.99)

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}, \quad (18.105)$$

testiprobleemaan

$$m\ddot{y} + ky = 0 \quad (18.106)$$

eli

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (18.107)$$

missä $\omega^2 = \frac{k}{m}$, saadaan yrittäen $y_n = Cr^n$ avulla polynomiyhtälö

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j r^j + (\Delta t \omega)^2 \sum_{j=0}^k \beta_j r^j = 0, \quad (18.108)$$

eli

$$P(r, \Delta t \omega) = \rho(r) + (\Delta t \omega)^2 \sigma(r) = 0, \quad (18.109)$$

missä $P(r, \Delta t \omega)$ on menetelmän karakteristinen polynomi. Menetelmän stabiiliusalue on on kompleksisessa $\Delta t \omega$ -tasossa sellainen, että polynomiyhtälön $P(r, \Delta t \omega) = 0$ juuret ovat yksikköympyrällä, kun $\Delta t \omega$ on alueen sisällä.

Stabiiliusalueen reuna voidaan piirtää nyt kulman θ funktiona

$$\Delta t \omega(\theta) = \sqrt{\frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}}. \quad (18.110)$$

Esimerkki 18.2 Määritetään Newmarkin menetelmän $\beta = \frac{1}{12}$, $\gamma = \frac{1}{2}$ ja Houboltin menetelmän stabiiliusalueet.

Parametrien arvoilla $\beta = \frac{1}{12}$ ja $\gamma = \frac{1}{2}$ Newmarkin menetelmä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_2 y_{n+2} = (\Delta t)^2 (\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \beta_2 f_{n+2}), \quad (18.111)$$

missä kertoimet ovat nyt

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1, & \alpha_1 &= -2, & \alpha_2 &= 1, \\ \beta_0 &= \frac{1}{12}, & \beta_1 &= \frac{10}{12}, & \beta_2 &= \frac{1}{12}. \end{aligned} \quad (18.112)$$

Mallitehtävän $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ tapauksessa tulee

$$y_{n+2} - 2y_n + y_n = \frac{(\Delta t \omega)^2}{12} (y_{n+2} + 10y_{n+1} + y_n). \quad (18.113)$$

Karakteristisen polynomin osat ovat

$$\rho(r) = r^2 - 2r + 1, \quad \sigma(r) = \frac{1}{12}r^2 + \frac{10}{12}r + \frac{1}{12}, \quad (18.114)$$

ja stabiiliusalueen määrittäväksi yhtälöksi saadaan

$$\Delta t \omega(\theta) = \sqrt{\frac{e^{2i\theta} - 2e^{i\theta} + 1}{e^{2i\theta} + 10e^{i\theta} + 1}}. \quad (18.115)$$

Houboltin menetelmässä nopeutta ja kiihtyvyyttä approksimoidaan taaksepäin otettujen differenssien avulla

$$11y_{n+3} - 18y_{n+2} + 9y_{n+1} - 2y_n = 6\Delta t \dot{y}_{n+3}, \quad (18.116)$$

$$2y_{n+3} - 5y_{n+2} + 4y_{n+1} - y_n = (\Delta t)^2 \ddot{y}_{n+3}.$$

Mallitehtävän $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ tapauksessa saadaan karakteristinen polynomiyhtälö

$$2r^3 - 5r^2 + 4r - 1 + (\Delta t \omega)^2 r^3 = 0, \quad (18.117)$$

ja stabiiliusalueen määrittää yhtälö

$$\Delta t \omega(\theta) = \sqrt{\frac{2e^{3i\theta} - 5e^{2i\theta} + 4e^{i\theta} + 1}{e^{3i\theta}}}. \quad (18.118)$$

Stabiiliusalue leikkaa reaaliakselin kohdassa $\Re(\Delta t \omega) = 3.46$.

18.7 Vaimennuksen mallintaminen

Vaimennus on hyvin monimutkainen ilmiö, joka riippuu useista eri tekijöistä jonka vuoksi sen mallintaminen on usein vaikeaa. Vaimennettu systeemi ei ole konservatiivinen, eli energiaa säilyttävä. Vaimennuksen syntyvät jaotellaan usein seuraavasti:

1. neste l. viskoosi vaimennus, joka syntyy esim. ympäröivän väliaineen vastuksesta,
2. kitkavaimennus (ns. kuiva eli Coulombin kitka)
3. materiaalin vaimennus.

Tarkastellaan seuraavissa luvuissa väliaineen vastuksen ja materiaalin vaimennuksen malleja.

18.7.1 Väliaineen vastus

Tarkastellaan edelleen värähtelevän langan ongelmaa ottaen nyt huomioon ympäröivän väliaineen vastus. Otaksutaan, että väliaine voidaan mallintaa kokoonpuristumattomana viskoosina nesteenä, eli Stokesin nesteenä. Tällöin ratkaistavana on ns. kytketty ongelma, joka sitoo toisiinsa värähtelevän langan mallin (18.1)

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sigma A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \bar{f}, \\ u(x, 0) = \bar{u}_0 \sin(\pi x/L), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v(x, 0) = \bar{v}_0 \sin(\pi x/L) \end{cases} \quad (18.119)$$

ja Stokesin nesteen

$$\begin{cases} \rho_n \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \mu \Delta \vec{v} + \nabla p = \rho_n \vec{b}, \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0, \\ \boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \mu (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) \end{cases} \quad (18.120)$$

yhtälöt. Nesteen tiheyttä on merkitty ρ_n , viskositeetti μ , nopeusvektori $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$ ja paine on p . Langan liikeyhtälön kuormatermi $\bar{f}$ määräytyy nesteen lankaan kohdistamasta traktiosta. Yksinkertaistetaan mallia siten, että oletetaan virtauksen tapahtuvan vain värähtelevän langan tasossa. Oletetaan myös nesteen tilavuusvoimat häviävän pieniksi, eli $\vec{b} \approx 0$. Yhtälö

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (18.121)$$

on nesteen kokoonpuristumattomuusehto. Stokesin nesteen liikeyhtälöissä (18.120) esiintyvät Laplace- ja gradienttioperaattorit kohdistuvat vektoriin $\vec{v}$:

$$\Delta \vec{v} = (\nabla \cdot \nabla) \vec{v} = \begin{cases} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \end{cases}, \quad \text{ja} \quad \nabla \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Jännitysmatriisin $\boldsymbol{\sigma}$ muoto on tasotapauksessa

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

ja leikkausjännitykset ovat pareittain yhtäsuuret $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Etsitään langan värähtelylle ratkaisua edelleekin muodossa

$$u(x, t) = Y(t) \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Tällöin langan nopeus on $v(x, t) = \partial u / \partial t = \dot{Y}(t) \sin(\pi x / L)$. Nesteen nopeus langan välittömässä läheisyydessä on oltava sama kuin langan, joten yritetään nesteen nopeuskentän y -komponentille lauseketta

$$v_y = \dot{Y}(t) \sin \frac{\pi x}{L} e^{\pi y / L}, \quad \text{kun } y < 0.$$

Kokoonpuristumattomuusehdosta (18.121) saadaan

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\pi}{L} \dot{Y} \sin \frac{\pi x}{L} e^{\pi y / L} \implies v_x = \dot{Y} \cos \frac{\pi x}{L} e^{\pi y / L}.$$

Paine voidaan ratkaista integroimalla yhtälöt

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho_n \frac{\partial v_x}{\partial t} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) = -\rho_n \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\rho_n \ddot{Y} \cos \frac{\pi x}{L} e^{\pi y / L}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho_n \frac{\partial v_y}{\partial t} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) = -\rho_n \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\rho_n \ddot{Y} \sin \frac{\pi x}{L} e^{\pi y / L}, \end{aligned}$$

josta saadaan

$$p = -\frac{L}{\pi} \rho_n \ddot{Y} \sin \frac{\pi x}{L} e^{\pi y / L}.$$

Langan kuormitus $\bar{f}$ saadaan tasapainoehdosta

$$\bar{f} = -2D\sigma_y,$$

missä D on langan halkaisija. Pystysuuntaisen jännityksen σ_y lauseke on

$$\sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{L}{\pi} \rho_n \ddot{Y} \sin \frac{\pi x}{L} e^{\pi y / L} + 2\mu \frac{\pi}{L} \dot{Y} \sin \frac{\pi x}{L} e^{\pi y / L}$$

jonka arvo langan kohdalla on

$$\sigma_y(x, 0, t) = \left(\frac{L}{\pi} \rho_n \ddot{Y} + 2\mu \frac{\pi}{L} \dot{Y} \right) \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Väärähtelevän langan liikeyhtälöksi (18.119) saadaan siten

$$\begin{aligned} \rho A \ddot{Y} \sin \frac{\pi x}{L} + \sigma A \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 Y \sin \frac{\pi x}{L} &= -2 \left(\frac{LD}{\pi} \rho_n \ddot{Y} + 2\mu D \frac{\pi}{L} \dot{Y} \right) \sin \frac{\pi x}{L} \\ \implies \left[\left(\rho A + 2 \frac{LD}{\pi} \rho_n \right) \ddot{Y} + 4\pi\mu \frac{D}{L} \dot{Y} + \sigma A \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 Y \right] \sin \frac{\pi x}{L} &= 0, \end{aligned} \quad (18.122)$$

mikä voidaan lyhyesti kirjoittaa muodossa

$$M\ddot{Y} + c\dot{Y} + kY = 0. \quad (18.123)$$

Väliaineen vaikutuksesta liikeyhtälön massatermi M koostuu kahdesta osasta, langan omasta massasta m ja ns. lisätystä massasta m_{lm} :

$$m = \rho A, \quad m_{\text{lm}} = 2 \frac{LD}{\pi} \rho_n. \quad (18.124)$$

Mikäli problemaa ei olisi analysoitu kytkettynä tehtävänä, joudutaan massatermiä muuttamaan yhtälön (18.124) mukaisesti. Yleisessä tapauksessa lisätyn massan jakauman ja suuruuden arviointi on vaikea ongelma.

18.7.2 Materiaalin vaimennus

Ainemallin viskoosit ominaisuudet aikaansaavat liikeyhtälöön vaimennusefektin. Tarkastellaan aksiaalisesti kuormitettua sauvaa, jonka liikeyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial N}{\partial x} = \bar{f}(t), \quad (18.125)$$

missä N on sauvan normaalivoima. Mikäli materiaalia kuvataan lineaarisesti kimmoisalla mallilla on normaalivoiman lauseke $N = EA\epsilon = EA\partial u/\partial x$, jolloin päädytään samanlaiseen osittaisdifferentiaaliyhtälöön kuin värähtelevän langan tapauksessa (18.1). Oletetaan nyt materiaalin noudattavan Kelvinin mallia, jossa jännityksen σ , muodonmuutoksen ϵ ja muodonmuutosnopeuden $\dot{\epsilon}$ välillä on yhteys

$$\sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon}, \quad (18.126)$$

missä η on materiaalivakio, joka kuvaa materiaalin viskooseja ominaisuuksia. Sijoittamalla jännityksen (18.126) lauseke sauvan liikeyhtälöön (18.125) saadaan

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \eta A \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \bar{f}(t). \quad (18.127)$$

Luku 19

Elementtimenetelmän ohjelmointi

19.1 Johdanto

Elementtimenetelmän analyysi sisältää usein kolme erillistä osuutta:

- elementtimallin luonti,
- ratkaisu ja
- tulosten jälkikäsittely ja tarkastelu.

Usein myös edellä mainittuja tehtäviä hoitaa eri ohjelmat, jotka kommunikoivat keskenään malli- ja tulostustiedostojen avulla.

Vaikka elementtimallin luonti ja tulosten visualisointi kuuluvat olennaisena osana FEM-ohjelmistoon tarkastellaan seuraavissa luvuissa vain itse elementtiratkaisijan ohjelmointiin liittyviä kysymyksiä. Elementtiratkaisijan pääosat ovat

- elementtimatriisien muodostaminen,
- globaalin yhtälösystemin kokoaminen,
- globaalin yhtälösystemin ratkaisu ja
- jännitys ym. vuosuureiden laskenta.

Elementtimenetelmällä diskretoitu ongelma palautuu aina lineaarisen yhtälösystemin ratkaisuun vaikka itse ongelma olisikin epälineaarinen ajasta riippuva etenemistehtävä. Tämän systemin ratkaisu on prosessin eniten tietokoneresursseja vaativa toimenpide ¹

¹Elementtimallin luonti voi vaatia vielä kertaluokkaa suurempia resursseja, mikäli henkilötyö lasketaan mukaan.

19.2 Elementtimatriisien muodostaminen

Elementtimatriisi lasketaan yleensä termeistä, jotka ovat muotoa

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV,$$

joka yleensä lasketaan numeerisesti kvadratuurien avulla. Matriisi $\mathbf{B}$ sisältää interpolaatiofunktioiden ja/tai niiden derivaattojen lausekkeita ja $\mathbf{D}$ on parametrimatriisi, joiden arvot voivat myös muuttua elementin alueella. Elementtimatriisin muodostamiseksi on

1. alustettava integrointipisteiden paikat ja painokertoimet
2. summataan kaikkien integrointipisteiden osuudet, jolloin jokaisessa integrointipisteessä i :
 - (a) lasketaan interpolaatiofunktioiden ja niiden derivaattojen arvot peruselementin luonnollisissa koordinaateissa $\xi_i \dots$,
 - (b) muodostetaan geometriakuvauksen Jacobiaanimatriisi ja muodostetaan interpolaatiofunktioiden derivaatat globaalien koordinaattien suhteen,
 - (c) muodostetaan $\mathbf{B}(\xi_i, \dots)$ ja $\mathbf{D}(\xi_i, \dots)$ matriisit
 - (d) lasketaan tulo $\mathbf{E}(\xi_i, \dots) = \mathbf{B}(\xi_i, \dots)^T \mathbf{D}(\xi_i, \dots) \mathbf{B}(\xi_i, \dots)$ ja summataan tulos elementin jäykkyysmatriisiin

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} + w_i \mathbf{E}(\xi_i, \dots)$$

missä termi w_i sisältää integrointipisteen painokertoimen ja geometriakuvauksen mittakaavatekijän.

Kun elementin e jäykkyysmatriisi on laskettu sijoitetaan se globaalille jäykkyysmatriisille varattuun taulukkoon. Kokoamisalgoritmi riippuu siitä millä tavalla globaali jäykkyysmatriisi on varastoitu. Tätä seikkaa käsitellään tarkemmin tulevaisuudessa.

19.2.1 Interpolaatiofunktiot

19.3 Matriisin varastointitavat ja kokoamisprosessi

19.4 Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu

19.4.1 Johdanto

Merkitään ratkaistavaa globaalia yhtälösystemiä seuraavasti:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{19.1}$$

missä kerroinmatriisi $\mathbf{A}$:n ominaisuudet riippuvat ratkaistavasta ongelmasta. Tyyppillisissä rakenteiden mekaniikan tehtävissä se on usein symmetrinen ja positiivisesti definiitti.

Systeemin (19.1) ratkaisun periaatteellisesta helppoudesta huolimatta, optimaalisen ratkaisualgoritmin valinta on monimutkainen ongelma, erityisesti mikäli yhtälösystemi on suuri. Ratkaisualgoritmin valintaan vaikuttavat kerroinmatriisin ominaisuuksien lisäksi myös käytettävissä olevan tietokoneen arkkitehtuuri.

19.4.2 Suorat ratkaisijat

Yleisimmät Gaussin eliminatioon perustuvat tekniikat vähentävät jollain luvulla kerrotun vaakarivin jostain toisesta systeemin (19.1) vaakarivistä jotta systemi saataisiin yläkolmiomuotoon, joka sitten voidaan ratkaista takaisinsijoittamalla.

Tarkastelaan ensin yleistä LU hajotelmaa, jonka suorittamiseen soveltuvat rivi- ja sarakemuotoiset algoritmit on esitetty kuvassa 19.2. Rivimuotoisessa esityksessä 19.2a sisin silmukka käy matriisia lävitse riveittäin, joten matriisin varastointi on myös syytä tehdä riveittäin, jotta silmukan muistiviittaukset osoittaisivat peräkkäisiin muistipaikkoihin.

Kuvassa 19.2 esitetyt algoritmit eivät ole LU-hajotelman ainoat mahdolliset variaatiot. Kuten esitetyistä rivi- ja sarakemuotoisista algoritmeista voidaan havaita, ovat aritmeettiset perusoperaatiot samoja kummassakin tavassa. Yleistämällä saadaan LU-hajotelman erilaiset ns. *ijk*-muodot, joiden geneerinen muoto:

```

do
  do
    do
       $A_{ij} = A_{ij} - L_{ik}/A_{kj}$ 
    end do
  end do
end do

```

missä do silmukoiden indeksit i, j ja k esintyvät eri järjestyksessä.

Eri *ijk*-muodot viittaavat ja laskevat hajotelman $\mathbf{L}$ ja $\mathbf{U}$ tekijät eri tavalla. Kuvassa 19.3 on pyritty havainnollistamaan eri versioiden eroja, alkioiden saatavuuden ja hajotelman tekijöiden suhteen.

Kuvassa 19.5 on esitetty nauhamuotoon tallennetun matriisin LU-hajotelma *kji*-sarakemuodossa.

```

      SUBROUTINE HIF1D(F,X,N,IORD)
C=====
C      Program to evaluate 1-D hierarchical interpolation functions
C-----
C      F      = interpolation functions of degree N
C              F(1) = (1-X)/2, F(2) = (1+X)/2 : nodal interpolation
C              F(3) ... F(N+1) : internal interpolation functions
C              generated from Legendre polynomials
C      X      = argument
C      N      = degree of the polynomial
C      IORD   = order of derivative (0 or 1)
C=====
      INTEGER          N,IORD,I
      DOUBLE PRECISION F(*),X
C
C --- generate Legendre polynomials using a stable recursion formula
C
      F(1) = 1.D0
      F(2) = X
      DO I = 1, N-1
         F(I+2) = 2.D0*X*F(I+1)-F(I)-(X*F(I+1)-F(I))/REAL(I+1)
      END DO
C
C --- set up interpolation functions or their derivatives
C
      IF(IORD.EQ.0) THEN
         DO I = N, 2, -1
            F(I+1) = (F(I+1)-F(I-1))/DSQRT(REAL(4*I)-2.D0)
         END DO
         F(1) = 0.5D0*(1.D0 - X)
         F(2) = 0.5D0*(1.D0 + X)
      ELSE IF(IORD.EQ.1) THEN
         DO I = N, 2, -1
            F(I+1) = DSQRT(REAL(I) - 0.5D0)*F(I)
         END DO
         F(1) = -0.5D0
         F(2) = 0.5D0
      END IF
C
      RETURN
      END

```

Kuva 19.1 Hierarkiset Legendren polynomeihin perustuvat interpolaatiofunktio

```

do k = 1, n - 1
  do i = k + 1, n
     $L_{ik} = A_{ik} / A_{kk}$ 
    do j = k + 1, n
       $A_{ij} = A_{ij} - L_{ik} / A_{kj}$ 
    end do
  end do
end do

```

(a)

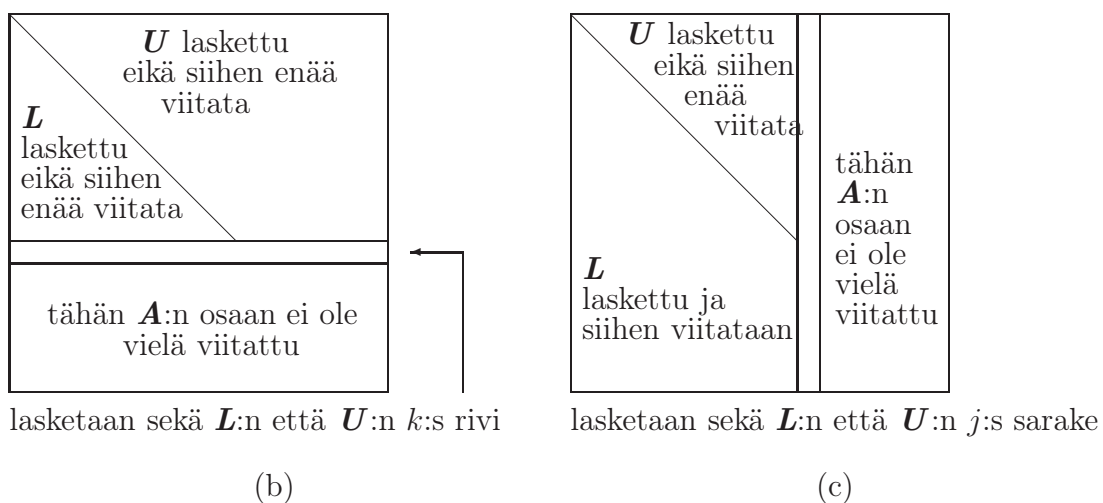
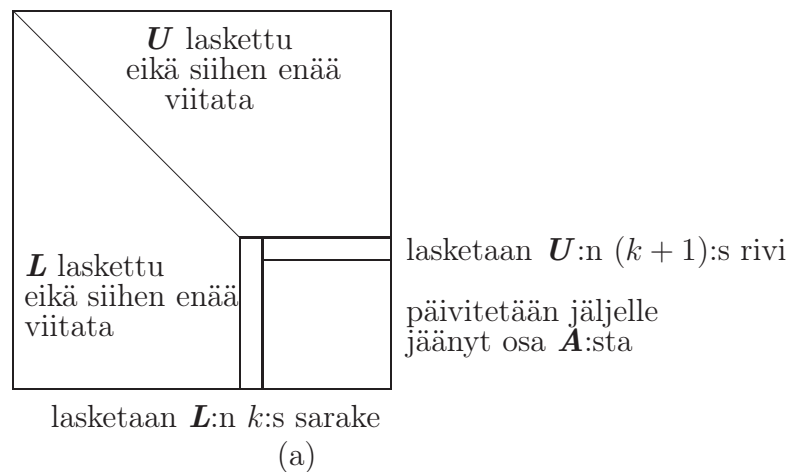
```

do k = 1, n - 1
  do r = k + 1, n
     $L_{rk} = A_{rk} / A_{kk}$ 
  end do
  do j = k + 1, n
    do i = k + 1, n
       $A_{ij} = A_{ij} - L_{ik} / A_{kj}$ 
    end do
  end do
end do

```

(b)

Kuva 19.2 LU-hajotelma: (a) Rivimuotoinen kij -versio ja (b) sarakemuotoinen kji -versio.



Kuva 19.3 Matriisialkioden saatavuus LU-hajotelman eri ijk -muodoissa: (a) kij, kji , (b) ikj, ijk , (c) jki, jik .


```
do   $j = 2, n$ 
  do  $r = j, n$ 
     $L_{r,j-1} = A_{r,j-1}/A_{j-1,j-1}$ 
  end do
  do  $k = 1, j - 1$ 
    do  $i = k + 1, n$ 
       $A_{ij} = A_{ij} - L_{ik}/A_{kj}$ 
    end do
  end do
end do
```

Kuva 19.4 Sarakemuotoinen viivästyneeseen päivitykseen perustuva LU-hajotelma (*jki*-muoto).

```

      SUBROUTINE FACBLU(A,NB,N,NU,NL,IOUT)
C=====
C   Program for LU factorization of a band matrix
C   Column oriented kji-version
C-----
C   Calling parameters:
C   A      : array storing a N x N matrix in a band format
C   NB     : bandwidth = NU + 1 + NL
C   N      : dimension of the system
C   NU     : bandwidth of the upper triangular part of A
C   NL     : bandwidth of the lower triangular part of A
C   IOUT   : output unit number
C=====
      IMPLICIT NONE
      INTEGER      N,NB,NL,NU,IOUT
      DOUBLE PRECISION A(NB,N)
C --- local variables -----
      INTEGER      I,J,K,ND,I1,I2,KK,L,IK
      DOUBLE PRECISION C,ZERO
      PARAMETER      (ZERO = 0.DO)
C
      ND = NU + 1
      DO K = 1, N - 1
         IF( A(ND,K) .EQ. ZERO ) THEN
            WRITE(IOUT,5000) K
            STOP
         END IF
         C = 1.DO / A(ND,K)
         DO L = NU + 2, NB
            A(L,K) = C*A(L,K)
         END DO
         DO J = K + 1, K + NU
            KK = NU + K - J + 1
            I1 = MAX(1,NU+2+K-J)
            I2 = NB + K - J
            C = A(KK,J)
            DO I = I1, I2
               IK = I + J - K
               A(I,J) = A(I,J) - A(IK,K)*C
            END DO
         END DO
      END DO
C
      5000 FORMAT(' *** ERROR **** Singular matrix ',/
&              ' zero diagonal in equation ',I6)
      END

```

Kuva 19.5 Nauhamuodossa tallennetun matriisin LU-hajotelma.

```

      SUBROUTINE FACBCH(A,NB,N,IOUT)
C=====
C   Program for Cholesky factorization of a band matrix
C   column oriented jki-version -- lower part of the matrix stored
C-----
C   Calling parameters:
C   A   : array storing a N x N matrix in a band format
C   NB  : (half)bandwidth including diagonal
C   N   : dimension of the system
C   IOUT : output unit number
C=====
      IMPLICIT NONE
      INTEGER          N,NB,IOUT
      DOUBLE PRECISION A(NB,N)
C --- local variables -----
      INTEGER          I,J,K,I1,JK,L,IK,K1
      DOUBLE PRECISION C,ZERO
      PARAMETER        (ZERO = 0.DO)
C
      IF( A(1,1) .LE. ZERO ) THEN
        WRITE(IOUT,5000) 1
        STOP
      END IF
      A(1,1) = DSQRT(A(1,1))
C
      DO J = 2, N
        DO L = 2, NB
          A(L,J-1) = A(L,J-1) / A(1,J-1)
        END DO
        K1 = MAX(1,J-NB+1)
        DO K = K1, J - 1
          JK = J - K + 1
          C = A(JK,K)
          I1 = NB + K - J
          DO I = 1, I1
            IK = I + J - K
            A(I,J) = A(I,J) - A(IK,K)*C
          END DO
        END DO
        IF( A(1,J) .LE. ZERO ) THEN
          WRITE(IOUT,5000) J
          STOP
        END IF
        A(1,J) = DSQRT(A(1,J))
      END DO
C
      5000 FORMAT(' *** ERROR **** Matrix not positive definite ',/
&              ' non-positive diagonal in equation ',I6)
      END

```

Kuva 19.6 Nauhamuodossa tallennetun matriisin Choleskin hajotelma.

Kirjallisuutta

Oppikirjoja

- [1] E. Ahola, *Lujuusoppi, elementtimenetelmä*, Otakustantamo 342, toinen painos, 1977.
- [2] O. Axelsson, V.A. Barker, *Finite element solution of boundary value problems, theory and computation*, Academic Press, 1984.
- [3] S.C. Brenner, L.R. Scott, *The Mathematical theory of finite element methods*, Springer-Verlag, Texts in Applied Mathematics 15, 1996.
- [4] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, Springer Series in Computational Mathematics 15, 1991.
- [5] R.D. Cook, D.S. Malkus, M.E. Plesha, *Concepts and applications of finite element analysis*, John Wiley & Sons, kolmas painos 1989.
- [6] M.A. Crisfield, *Finite elements and solution procedures for structural analysis, vol 1, linear analysis*, Pineridge Press 1986.
- [7] G. Dhatt, G. Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine, toinen painos 1984.
- [8] J.J. Dongarra, I.S. Duff, D.C. Sorensen, H.A. van der Vorst, *Numerical linear algebra for high-performance computers*, SIAM, 1998.
- [9] I.S. Duff, A.M. Erisman, J.K. Reid, *Direct methods for sparse matrices*, Oxford science publications, 1986.
- [10] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, C. Johnson, *Computational differential equations*, Studentlitteratur, 1996.
- [11] R.H. Gallagher, *Finite element analysis: fundamentals*, Prentice-Hall, 1975.
- [12] A. George, J.W.H. Liu, *Computer solution of large sparse positive-definite systems*, Prentice-Hall, 1981.
- [13] M.K. Hakala, *Lujuusopin elementtimenetelmä*, Otatieto 457, neljäs painos 1991.

- [14] K.H. Huebner, E.A. Thornton, *The finite element method for engineers*, John Wiley & Sons, toinen painos 1982.
- [15] T.J.R. Hughes, *The Finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice-Hall, 1987.
- [16] B. Irons, S. Ahmad, *Techniques of finite elements*, Ellis Horwood, 1980.
- [17] C. Johnson, *Numerical solutions of partial differential equations by the finite element method*, Cambridge University Press, 1987.
- [18] N. Kikuchi, *Finite element methods in mechanics*, Cambridge University Press, ensimmäinen painos 1986.
- [19] C. Lanczos, *The variational principles of mechanics*, Dover, neljäs painos 1970.
- [20] H.P. Langtangen, *Computational partial differential equations: numerical methods and diffpack programming*, Springer, lecture notes in computational science and engineering 2, 1999.
- [21] J.L. Meek, *Computer methods in structural analysis*, E & FN Spon, ensimmäinen painos, 1991.
- [22] G. Meurant, *Computer solution of large linear systems*, North Holland, Studies in Mathematics and its applications 28, Elsevier, 1999.
- [23] S. Orivuori, *Rakenteiden mekaniikan numeeriset menetelmät*, TKK, Rakennetekniikan laitoksen julkaisu 122.
- [24] J.M. Ortega, *Introduction to parallel and vector solution of linear systems*, Plenum Press, 1988.
- [25] B.D. Reddy, *Functional analysis and boundary-value problems: an introductory treatment*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 30, 1986.
- [26] J. Robinson, *Integrated theory of finite element methods*, John Wiley & Sons, 1973.
- [27] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, PWS Publishing Company, 1996.
- [28] E.-M. Salonen, *Mekaniikan käsitteitä ja kaavoja*, TKK, Mekaniikka, opetusmoniste 6, 1987.
- [29] G. Strang, *Introduction to applied mathematics*, Wellesley-Cambridge Press, 1986.
- [30] G. Strang, G.J. Fix, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, 1973.
- [31] B. Szabó, I. Babuška, *Finite element analysis*, John Wiley & Sons, 1991.

- [32] K. Washizu, *Variational methods in elasticity and plasticity*, Pergamon Press, kolmas painos 1982.
- [33] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, *The finite element method, volume 1, basic formulation and linear problems*, McGraw-Hill, neljäs painos 1989.

Artikkeleita

- [34] D.N. Arnold, R.S. Falk, Edge effects in Reissner-Mindlin plate theory, *Analytical and Computational Models of Shells* ss. 71-89, 1989 ASME toim. A.K. Noor, T. Belytschko ja J.C. Simo.
- [35] D.N. Arnold, R.S. Falk, A uniformly accurate finite element method for the Reissner-Mindlin plate, *SIAM, Journal on Numerical Analysis*, vol 26, ss. 1276-1290, 1989.
- [36] K.-J. Bathe, E.N. Dvorkin, A four node plate bending element based on Mindlin-Reissner plate theory and mixed interpolation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, ss. 367-383, 1985.
- [37] K.-J. Bathe, E.N. Dvorkin, A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 22, ss. 697-722, 1986.
- [38] F. Brezzi, M. Fortin, R. Stenberg, Error analysis of mixed-interpolated elements for Reissner-Mindlin plates, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol 1, ss. 125-151, 1991.
- [39] E.H. Dill, A triangular finite element for thick and thin plates, *Computers and Structures*, vol. 35, ss. 301-308, 1990.
- [40] L. Franca, R. Stenberg, A modification of a low-order Reissner-Mindlin plate bending element.
- [41] J. Freund, E.-M. Salonen, Heikkojen muotojen painofunktioista, *Rakenteiden Mekaniikka*, Vol 23, 1990, No 3, sivut 18-61.
- [42] I. Fried, Shear in C^0 and C^1 bending finite elements, *Int. J. Solids Structures*, **9** 1973, ss. 449-460.
- [43] B. Häggblad, K.-J. Bathe, Specifications of boundary conditions for Reissner/Mindlin plate bending finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 30. ss. 981-1011, 1990.
- [44] T. Kant, E.Hinton, Mindlin plate analysis by segmentation method, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol 109, ss.537-556, 1983.

- [45] M. Lyly, R. Stenberg, T. Vihinen, A stable bilinear element for Reissner-Mindlin plate model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 110, ss. 343-357, 1993
- [46] M. Lyly, R. Stenberg, New three and four node plate bending elements, *Rakenteiden Mekaniikka*, vol 27, no 2, ss. 3-29, 1994.
- [47] M. Lyly, R. Stenberg, Stabilized MITC plate bending elements *Advances in Finite Element Techniques*, ss. 11-16, 1994, toim. M. Papadrakakis, B.H.V. Topping.
- [48] R.H. MacNeal, A simple quadrilateral shell element, *Computers & Structures*, **8** 1987, ss. 175-183.
- [49] J. Pitkäranta, Reuna-arvotehtävien moniverkkoratkaisijat - numeronmurskauksesta numeroiden pehmittelyyn, *Arkhimedes*, vol. 38, 1986, ss. 55-66.
- [50] J.K. Reid, On the method of conjugate gradients for the solution of large sparse systems of equations, *Large Sparse Sets of Linear Equations*, ss. 231-254, Academic Press, 1971, toim. J.K. Reid.
- [51] W.T. Russell, R.H. MacNeal, An improved electrical analogy for the analysis of beams in bending, *J. Appl. Mech.*, Sept. 1953.
- [52] E.-M. Salonen, Heikkojen muotojen johtamisesta, *Rakenteiden Mekaniikka*, Vol 21, 1988, No 1, sivut 66-75.
- [53] R. Stenberg, T. Vihinen, Calculations with some linear elements for Reissner-Mindlin plates, *Proceedings of the European Conference on New Advances in Computational Structural Mechanics*, ss. 505-511, 1991, toim. P. Ladeveze, O.C. Zienkiewicz.
- [54] P. Tong, Exact solution of certain problems by finite element method, *AIAA Journal*, **7** 1969, ss. 178-180.
- [55] M. Lyly, R. Stenberg, T. Vihinen, A stable bilinear element for Reissner-Mindlin plates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 110, ss. 343-357, 1993.
- [56] M. Lyly, R. Stenberg, Error analysis of the stabilized MITC plate elements, *Proceedings of the 6th Finnish Mechanics Days*, ss. 67-83, 1997, toim. J. Aalto, T. Salmi.

Muuta

- [57] C. Reid, *Courant*, Springer-Verlag, New York, 1996.

Luku A

Hermiten interpolaatiopolynomit

A.1 Solmuinterpolatio

Lagrange'n interpolaatiopolynomi on yksinkertainen tapa interpoloida funktiota kun tunnetaan pelkästään funktion arvot tietyissä pisteissä. Elementtimenetelmässä voidaan Lagrange'n interpolaatiota käyttää hyväksi kun interpolaatiolta vaaditaan vain funktion jatkuvuutta elementtien välillä. Mikäli interpolaatiolta vaaditaan korkeampaa jatkuvuuden astetta elementtien rajapintojen yli siirryttäessä on kätevää konstruoida ne Hermiten interpolaatiopolynomeista, jotka mahdollistavat funktion interpolaation käyttäen funktion ja sen derivaattojen arvoja solmupisteissä. Astetta n oleva Hermiten polynomi $H^n(\xi)$ on ξ :n suhteen astetta $2n + 1$ oleva polynomi jonka derivaatat astelukuun n saakka ovat jatkuvia. Hermiten polynomi voidaan varustaa kahdella alaindeksillä, joista ensimmäinen viittaa kertoimena olevan solmuarvon derivaatan astelukuun ja toinen välin päätesolmuun, eli $H_{mi}^n(\xi)$.

Hermiten polynomin ja sen derivaatan arvot välin päätepisteessä ξ_i saavat arvon nolla tai yksi seuraavasti:

$$\frac{d^k H_{mi}^n(\xi_j)}{dx^k} = \delta_{km} \delta_{ij}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq m \leq n, \quad i, j = 1, 2, \quad (\text{A.1})$$

jossa δ_{ij} on Kroneckerin delta, joka saa arvon 1 kun $i = j$ ja 0 muulloin. Tästä ehdosta määräytyvät Hermiten polynomin lausekkeet.

Nollannen asteen Hermiten interpolaatiopolynomit toteuttavat siis $H_{01}^0(\xi_1) = 1, H_{01}^0(\xi_2) = 0$ ja $H_{02}^0(\xi_1) = 0, H_{02}^0(\xi_2) = 1$, joten ne ovat välillä $\xi \in (-1, 1)$ tutut lineaariset interpolaatiofunktiot

$$H_{01}^0(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad H_{02}^0(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi), \quad (\text{A.2})$$

eli samat kuin Lagrange'n lineaariset interpolaatiopolynomit.

Ensimmäisen asteen Hermiten polynomi määräytyy ehdoista:

$$\begin{aligned}
H_{01}^1(-1) &= 1, & \frac{dH_{01}^1}{d\xi}(-1) &= 0, & H_{01}^1(1) &= 0, & \frac{dH_{01}^1}{d\xi}(1) &= 0, \\
H_{11}^1(-1) &= 0, & \frac{dH_{11}^1}{d\xi}(-1) &= 1, & H_{11}^1(1) &= 0, & \frac{dH_{11}^1}{d\xi}(1) &= 0, \\
H_{02}^1(-1) &= 0, & \frac{dH_{02}^1}{d\xi}(-1) &= 0, & H_{02}^1(1) &= 1, & \frac{dH_{02}^1}{d\xi}(1) &= 0, \\
H_{12}^1(-1) &= 0, & \frac{dH_{12}^1}{d\xi}(-1) &= 0, & H_{12}^1(1) &= 0, & \frac{dH_{12}^1}{d\xi}(1) &= 1,
\end{aligned} \tag{A.3}$$

josta seuraa

$$\begin{aligned}
H_{01}^1(\xi) &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) = (H_{01}^0)^2(1+2H_{02}^0), \\
H_{11}^1(\xi) &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(1+\xi) = 2(H_{01}^0)^2H_{02}^0, \\
H_{02}^1(\xi) &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) = (H_{02}^0)^2(1+2H_{01}^0), \\
H_{12}^1(\xi) &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(\xi-1) = -2H_{01}^0(H_{02}^0)^2.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

A.2 Hierarkiset C_1 -interpolaatiofunktiot

Luvussa 3.2.2 käsiteltiin yksidimensioisten hierarkisten C_0 -jatkuvien interpolaatiofunktioiden muodostamista. Ne konstruointiin integroimalla Legendren polynomeista, ja ne toteuttivat ortogonaalisuusehdon

$$\int_{-1}^1 \frac{d\psi_i}{d\xi} \frac{d\psi_j}{d\xi} d\xi = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j, \\ 0, & \text{jos } i \neq j. \end{cases} \tag{A.5}$$

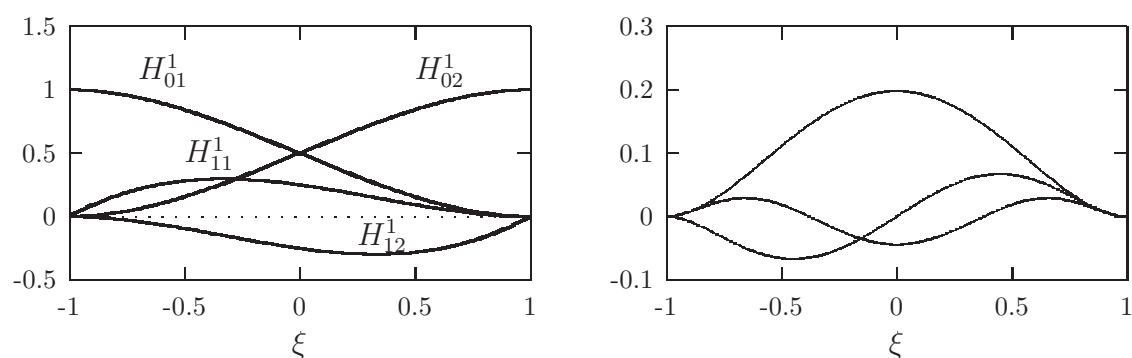
Koska C_1 -jatkuva interpolaatiota tarvitaan neljännen kertaluvun ongelmissa, on C_1 -jatkuvien interpolaatiopolynomien konstruoinnissa järkevää vaatia ortogonaalisuusehto toisille derivaatoille, eli siis:

$$\int_{-1}^1 \frac{d^2\psi_i}{d\xi^2} \frac{d^2\psi_j}{d\xi^2} d\xi = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j, \\ 0, & \text{jos } i \neq j. \end{cases} \tag{A.6}$$

Hierarkinen C_1 -interpolaatiofunktiojärjestelmä sisältää neljä solmuinterpolaatiofunktia (A.4), joita voidaan kutsua myös ulkoisiksi interpolaatiofunktioiksi, ja sisäiset muodot

$$N_i^1(\xi), \quad i = 1, \dots, p-3. \tag{A.7}$$

Jotta sisäiset muodot olisivat toisen derivaatan suhteen ortogonaalisia, saadaan



Kuva A.1 Hierarkiset Hermiten C_1 -interpolaatiopolynomit asteeseen $p = 6$ saakka.

ne integroimalla Legendren polynomeja kahdesti

$$\begin{aligned} {}^1N_i(\xi) &= \sqrt{\frac{2i+3}{2}} \int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^t P_{i+1}(s) ds dt \\ &= \sqrt{\frac{2i+3}{2}} \int_{-1}^{\xi} (\xi - t) P_{i+1}(t) dt \quad i = 1, \dots, p-3. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Osittaisintegroimalla ja käyttämällä Bonnetin rekursiokaavaa (3.24) muodossa

$$\xi P_n(\xi) = \frac{1}{2n+1} ((n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}), \quad (\text{A.9})$$

päädytään lausekkeisiin

$${}^1N_i(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(2i+3)}} \left(\frac{P_{i+3} - P_{i+1}}{2i+5} - \frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{2i+1} \right) \quad i = 1, \dots, p-3. \quad (\text{A.10})$$

Derivaatoille saadaan lausekkeet

$$\begin{aligned} \frac{d {}^1N_i}{d\xi} &= \frac{P_{i+2} - P_i}{\sqrt{2(2i+3)}}, \\ \frac{d^2 {}^1N_i}{d\xi^2} &= \sqrt{\frac{1}{2}(2i+3)} P_{i+1}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Hierarkisen Hermiten C_1 interpolaation ulkoiset ja muutama ensimmäinen sisäistä muodoista on esitetty kuvassa A.1.

Harjoitustehäviä

1. Määritä toisen asteen Hermiten polynomi ja piirrä kuvaajat.

2. Käy läpi yksityiskohtaisesti vaiheet muodon (A.8) ja (A.10) välillä.
3. Laske auki muutama alin sisäinen hierarkinen muoto (A.10).

Luku B

Lagrangen kertojamenettely

Monissa käytännön tehtävissä funktionaalien minimointitehtävä ei esiinny aivan selkeässä muodossa kuin on edellä esitetty, vaan on olemassa tiettyjä rajoitusehtoja joita funktionaalien tulee noudattaa. Johdatuksena aloitetaan kuitenkin tutkimalla tavallisen funktion

$$z = f(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (\text{B.1})$$

ääriarvon määrittämisestä sidosehtojen

$$g(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0 \quad (\text{B.2})$$

vallitessa. Ensimmäinen ajatus saattaisi olla yhden muuttujan eliminointi rajoitteesta (B.2), ja sijoittaa se funktioon (B.1), jolloin saadaan rajoittamaton minimointitehtävä jossa funktio f riippuu vain $(n - 1)$:stä muuttujasta. Usein tällainen eliminointi johtaa mutkikkaisiin lausekkeisiin, mikäli on ollenkaan mahdollinen. Lisäksi funktio f saattaa olla symmetrinen muuttujien $u_1, u_2, \dots, u_n$ suhteen, jolloin ei ole olemassa mitään syytä miksi jokin tietty muuttuja keinovalitettavasti valittaisiin riippuvaksi kun muut taasen saavat olla riippumattomia.

J.-L. Lagrange on kehittänyt menetelmän ylimääräisten sidosehtojen käsittelemiseksi, joka säilyttää symmetrian muuttujien suhteen ja muuntaa sidotun ääriarvotekävän vapaaksi. Menetelmää nimitetään Lagrangen määräämättömien kertojien keinoksi, tai lyhyesti Lagrangen kertojamenettelyksi, jossa muodostetaan funktio

$$L(u_1, u_2, \dots, u_n, \lambda) = f(u_1, u_2, \dots, u_n) + \lambda g(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

ja ääriarvon etsintä suoritetaan nyt muuttujien $u_1, u_2, \dots, u_n$ ja λ suhteen. Siis hinta, joka joudutaan systemaattisesta menettelystä maksamaan on yhden lisätuntemattoman mukaantulo.

Lagrangen kertojamenettely yleistyy mutkattomasti tapauksiin, joissa sideyhtälöitä on m -kappaletta.

Lagrangen kertojien fysikaalinen tutkinta on usein havainnollinen ja se on voima, joka tarvitaan kyseisen rajoitteen ylläpitämiseen.

Esimerkki B.1 *Etsi funktion*

$$z = f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 5x - 4y + 4$$

ääriarvo, rajoitteella

$$g(x, y) = x + 2y - 5 = 0.$$

Yksi tapa ratkaista tehtävä on eliminoida vaikkapa muuttuja x sidosyhtälöstä, ja sijoittamalla näin saatu x :n lauseke funktioon f jolloin siitä tulee vain muuttujan y funktio

$$f^*(y, x(y)) = 11y^2 - 44y + 54.$$

ääriarvo löytyy stationäärisyysehdosta

$$\frac{df^*}{dy} = 22y - 44 = 0,$$

josta seuraa y :lle arvo $y = 2$. Sijoittamalla saatu arvo eliminoidun muuttujan yhtälöön ja näin saadut arvot itse funktioon, saadaan funktion sidotuksi ääriarvoksi arvo $z = 10$.

Systemaattisempi tapa on ratkaista tehtävä Lagrangen kertojan avulla. Muodostetaan Lagrangen funktio

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 5x - 4y + 4 + \lambda(x + 2y - 5),$$

jonka stationäärisuusehdosta

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - 2y + 5 + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -2x + 6y - 4 + 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x + 2y - 5 = 0, \end{aligned}$$

voidaan tuntemattomat parametrit ratkaista suoraan. Kirjoitetaan yhtälösystemi matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix},$$

jonka ratkaisu on $x = 1, y = 2, \lambda = -3$. Funktion minimiarvo saadaan sijoittamalla

$$L(1, 2, -3) = f(1, 2) = 10 = f^*(2).$$

Funktionaalin variointi side-ehtojen vallitessa on suoraviivainen yleistys funktion rajoitetun ääriarvon etsimiselle. Olkoon funktionaali

$$I(w) = \int_a^b F(x; w, w') dx$$

jonka statonääriarvoa etsitään rajoitteella

$$G(x; w) = 0.$$

Kerrotaan rajoite tuntemalla funktiolla $\lambda(x)$ ja integroidaan välin (a, b) yli ja lisätään näin saatu termi funktionaaliin

$$L(w, \lambda) = \int_a^b [F(x; w, w') + \lambda(x)G(x; w)] dx,$$

jolloin variointi suoritetaan molempien tuntemattomien funktioiden w ja λ suhteen.

Esimerkki B.2 Keskimääräisen poikkittaisen leikkausmuodonmuutoksen huomioonottavasta Timoshenkon palkkimallista saadaan Eulerin-Bernoullin palkkimalli kun palkin poikkileikkauksen leikkausmuodonmuutos γ häviää, eli

$$\gamma(x) = v'(x) - \theta(x) = 0,$$

jossa θ on palkin poikkileikkauksen kiertymä ja v on palkin akselin taipuma. Timoshenkon palkkiteorian potentiaalienergian funktionaali on

$$\Pi(v, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(\theta')^2 + GA(v' - \theta)^2] dx - \int_0^L f v dx,$$

jossa EI on palkin poikkileikkauksen taivutusjäykkyys ja GA leikkausjäykkyys. Muodosta Lagrangen funktionaali ja johda Eulerin yhtälöt. Mikä on Lagrangen kertojan $\lambda(x)$ fysikaalinen tulkinta? Totea myös, että tuloksena saaduista yhtälöistä voidaan päätyä Eulerin-Bernoullin palkkiteorian yhtälöön

$$EIv'''' = f.$$

Koska rajoitteen vuoksi leikkausenergiatermi $GA(v' - \theta)^2$ häviää identtisesti, voidaan se jättää pois ja saadaan minimoitavaksi funktionaaliksi

$$\Pi(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L EI(\theta')^2 dx - \int_0^L f v dx,$$

rajoite-ehdolla

$$v' - \theta = 0.$$

Lagrangen funktionaali on siten

$$L(v, \phi, \lambda) = \frac{1}{2} \int_0^L EI(\theta')^2 dx + \int_0^L \lambda(v' - \theta) dx - \int_0^L f v dx.$$

Varioidaan funktioita v, θ ja λ , eli $v \rightarrow v + \epsilon \hat{v}, \theta \rightarrow \theta + \eta \hat{\theta}, \lambda \rightarrow \lambda + \zeta \hat{\lambda}$, jolloin saadaan

$$L(v + \epsilon \hat{v}, \theta + \eta \hat{\theta}, \lambda + \zeta \hat{\lambda}) = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(\theta' + \eta \hat{\theta}')^2] dx + \int_0^L (\lambda + \zeta \hat{\lambda})(v' + \epsilon \hat{v}' - \theta - \eta \hat{\theta}) dx - \int_0^L f(v + \epsilon \hat{v}) dx.$$

Stationäärisyysehdoista

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0, \eta=0, \zeta=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial L}{\partial \eta} \right|_{\epsilon=0, \eta=0, \zeta=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial L}{\partial \zeta} \right|_{\epsilon=0, \eta=0, \zeta=0} = 0,$$

saadaan

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial L}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0, \eta=0, \zeta=0} &= \int_0^L (\lambda \hat{v}' - f \hat{v}) dx = 0, \\ \left. \frac{\partial L}{\partial \eta} \right|_{\epsilon=0, \eta=0, \zeta=0} &= \int_0^L (EI \theta' \hat{\theta}' - \lambda \hat{\theta}) dx = 0, \\ \left. \frac{\partial L}{\partial \zeta} \right|_{\epsilon=0, \eta=0, \zeta=0} &= \int_0^L \hat{\lambda} (v' - \theta) dx = 0. \end{aligned}$$

Alimmaisesta yhtälöstä seuraa rajoite-ehto, sillä Lagrangen kertojafunktion variaatio $\hat{\lambda}$ on mielivaltainen. Jotta kahdesta ylimmäisestä yhtälöstä voidaan tehdä päätelmiä, on suoritettava osittaisintegrointeja, joista seuraa

$$\begin{aligned} \int_0^L (\lambda \hat{v}' - f \hat{v}) dx &= \left|_0^L \lambda \hat{v} - \int_0^L (\lambda' + f) \hat{v} dx = 0, \right. \\ \int_0^L (EI \theta' \hat{\theta}' - \lambda \hat{\theta}) dx &= \left|_0^L EI \theta' \hat{\theta} - \int_0^L (EI \theta'' + \lambda) \hat{\theta} dx = 0. \right. \end{aligned}$$

Koska variaatiot $\hat{v}, \hat{\theta}$ ja $\hat{\lambda}$ ovat homogeeniset reunaehdot toteuttavia mielivaltaisia ¹ funktioita, saadaan Eulerin yhtälöiksi

$$\begin{aligned} \lambda' + f &= 0, \\ EI \theta'' + \lambda &= 0, \\ v' - \theta &= 0. \end{aligned}$$

Yhtälöistä havaitaan heti, että Lagrangen kertojan λ fysikaalinen tulkinta on leikkausvoima Q . Suorittamalla yhtälöissä funktioiden θ ja λ eliminointi, saa-

¹Tiettyjä sileysominaisuuksia kuitenkin vaaditaan.

vutaan Eulerin-Bernoullin palkkiteorian yhtälöön

$$\theta = v' \quad \text{ja} \quad \lambda = -EIv''' \Rightarrow EIv'''' = f.$$

Joissain tapauksissa rajoiteyhtälö on muotoa, jossa integraalilauseke saa tietyn vakioarvon

$$\int_a^b G(x; w) dx = C.$$

Tämänmuotoisia rajoiteyhtälöitä kutsutaan *isoperimetrisiksi ehdoiksi*. Ainoa ero tämän ja edellisen tapauksen välillä on, että Lagrangen kertoja on nyt paljas luku eikä funktio. Lagrangen funktionaaliksi saadaan

$$L(w, \lambda) = \int_a^b F(x; w, w') dx + \lambda \left(\int_a^b G(x, w) dx - C \right) v$$

ja sen variaatioksi

$$\delta L = \delta \int_a^b [F(x; w, w') + \lambda G(x; w)] dx.$$

Esimerkki B.3 Määritä variaatiolaskentaa käyttäen sen lyhimmän käyrän yhtälö $y = f(x)$, joka rajoittaa alan A alapuolelleen (x -akselin ja käyrän $y = f(x)$ väliin jäävä alue) välillä $(0, 1)$. Rajoite on siis

$$\int_0^1 f(x) dx = A.$$

Otetaan rajoiteyhtälö mukaan Lagrangen kertojan λ avulla, jolloin saadaan Lagrangen funktionaali

$$L(y, \lambda) = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx + \lambda \left(\int_0^1 y dx - A \right).$$

Suoritetaan variaatio $y \rightarrow y + \epsilon \hat{y}$, ja asetetaan funktionaalin ensimmäinen variaatio häviämään

$$\begin{aligned} \left. \frac{dL}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \int_0^1 \left[\frac{y' \hat{y}'}{\sqrt{1 + (y')^2}} + \lambda \hat{y} \right] dx = 0 \\ &= \left|_0^1 \frac{y' \hat{y}}{\sqrt{1 + (y')^2}} - \int_0^1 \left\{ \frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right] - \lambda \right\} \hat{y} dx = 0. \end{aligned}$$

Otaksutaan, että käyrän y päätepisteiden arvot ovat annetut, joten variaation

on toteutettava homogeeniset reunaehdot jolloin sijoitustermi yllä olevasta lausekkeesta häviää. Koska variaatio $\hat{y}$ on muuten mielivaltainen on seuraavan yhtälön toteuduttava

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \right] &= \lambda \\ y' &= (\lambda x + c) \sqrt{1+(y')^2} \\ y' &= \frac{\lambda x + c}{\sqrt{1-(\lambda x + c)^2}} \\ y &= \frac{1}{\lambda} \sqrt{1-(\lambda x + c)^2} + d\end{aligned}$$

jossa c ja d ovat vakioita. Alin yhtälö saadaan muotoon

$$(x + c/\lambda)^2 + (y - d)^2 = (1/\lambda)^2,$$

eli

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (1/\lambda)^2,$$

jossa vakiot x_0, y_0 ja λ määritetään ehdoista

$$y(0) = a, \quad y(1) = b, \quad \int_0^1 y dx = A.$$

Tämä suoraviivainen esitys Lagrangen kertojista on kirjoitettu menetelmän soveltamista silmälläpitäen. Syvällisempi ja yksityiskohtaisempi käsittely määräämätömiä kertojien menettelystä on löydettävissä esimerkiksi Lanczosin kirjasta [19] kappaleesta 2.

Harjoitustehtäviä

1. Johda funktionaalin

$$I(w) = \frac{1}{2} \int_0^L k(w'')^2 dx$$

Eulerin yhtälö, rajoitteella

$$\int_0^L w^2 dx = 1.$$

Mitä fysikaalista ongelmaa yhtälö kuvaa?

Luku C

R-M laattamallin reunahäiriöt

Kirchhoffin ja Reissnerin-Mindlinin laattamallien perustavanlaatuinen ero on se, että Kirchhoffin mallin ratkaisut ovat riippumattomia laatan suhteellisesta paksuudesta t/L (mikäli kuorma ajatellaan skaalatuksi tekijällä t^3 , L =laatan karakteristinen mita keskipinnan tasossa) kun taas Reissnerin-Mindlinin laattamallin ratkaisut riippuvat paksuudesta hyvin monimutkaisella tavalla. Erityisesti R-M mallin ratkaisuisa voi esiintyä reunahäiriö pienillä paksuuden arvoilla.

Reunahäiriön luonne riippuu ratkaisevasti laatan geometriasta ja reunaehdoista ja sen voimakkuus on eriasteinen eri suureilla. Laatan taipumassa ei esiinny reunahäiriötä millään geometrialla eikä reunaehdotapauksella, mutta muissa suureissa kuten kiertymissä, taivutusmomenteissa ja leikkausvoimissa reunahäiriöitä esiintyy lievimmillään kiertymissä ja voimakkaimmillaan leikkausvoimissa.

C.1 Tasapainoyhtälöiden muokkaus

Reissnerin-Mindlinin laattamallin tasapainoyhtälöt ovat kolmen osittaisdifferentiaaliyhtälön muodostama kytketty yhtälöryhmä kolmen tuntemattoman funktion (taipuman w ja kiertymien β) ratkaisemiseksi. Sen analyyttinen ratkaisu on hankalaa yksinkertaisimmissakin reunaehdotapauksissa. Eräällä muunnoksella se voidaan saattaa ekvivalenttiin muotoon, josta kytkentä häviää, jolloin systeemin ratkaisu olennaisesti helpottuu. Tarkastellaan seuraavassa tätä prosessia. Esitys pohjautuu D.N. Arnoldin ja R.S. Falkin artikkeliin [34].

Reissnerin Mindlinin laattamallin tasapainoyhtälöt ovat siis (10.121):

$$kGt(\nabla \cdot \beta - \Delta w) = \bar{f}, \quad (\text{C.1a})$$

$$D[\Delta \beta_x + \frac{1}{2}(1 + \nu)(\beta_{y,xy} - \beta_{x,yy})] + kGt(w_{,x} - \beta_x) = 0, \quad (\text{C.1b})$$

$$D[\Delta \beta_y + \frac{1}{2}(1 + \nu)(\beta_{x,xy} - \beta_{y,xx})] + kGt(w_{,y} - \beta_y) = 0, \quad (\text{C.1c})$$

jotka voidaan kirjoittaa lyhyemmässä muodossa

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} = \bar{f}, \quad (\text{C.2a})$$

$$-\mathbf{div} \mathbf{M} + \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (\text{C.2b})$$

missä leikkausvoimavektori $\mathbf{q}$ ja momenttitensori (matriisi) $\mathbf{M}$ ovat

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_s(\mathbf{grad} w - \boldsymbol{\beta}), \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{xy} & M_y \end{bmatrix} = \mathcal{D}_b \boldsymbol{\kappa},$$

ja jossa $\mathcal{D}_b$ on laatan taivutusjäykkyyssensori ja $\mathbf{D}_s$ leikkausjäykkyyssmatriisi. Käyritysmatriisi $\boldsymbol{\kappa}$ on

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_x & \kappa_{xy} \\ \kappa_{xy} & \kappa_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_{x,x} & -\beta_{x,y} - \beta_{y,x} \\ -\beta_{x,y} - \beta_{y,x} & -\beta_{y,y} \end{bmatrix}.$$

Taivutusjäykkyyssensori voidaan määritellä kaavalla

$$\mathcal{D}_b \boldsymbol{\kappa} = D [(1 - \nu) \boldsymbol{\kappa} + \nu \operatorname{tr}(\boldsymbol{\kappa}) \mathbf{I}],$$

jossa tr on matriisin jälki (eli diagonaalialkioiden summa) ja $\mathbf{I}$ on 2×2 yksikkömatriisi. Differentiaalioperaattorit div , $\mathbf{div}$ ja $\mathbf{grad}$ määritellään seuraavasti:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = Q_{x,x} + Q_{y,y}, \quad \mathbf{div} \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_{x,x} + M_{xy,y} \\ M_{xy,x} + M_{y,y} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{grad} w = \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Otaksumalla laatta tasapaksuksi ja homogeeniseksi sekä materiaali kimmoisaksi isotrooppiseksi voidaan yhtälöt (C.2) kirjoittaa siirtymäsuureiden avulla seuraavasti

$$-kGt \operatorname{div}(\mathbf{grad} w - \boldsymbol{\beta}) = \bar{f}, \quad (\text{C.4a})$$

$$-\mathbf{div}(\mathcal{D}_b \boldsymbol{\kappa}) + kGt(\mathbf{grad} w - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}. \quad (\text{C.4b})$$

Jotta rajatapauksena $t \rightarrow 0$ saadaan äärellinen ratkaisu, skaalataan kuorma tekijällä t^3 (eli $\bar{f} = t^3 \bar{g}$), jolloin saadaan

$$-kGt^{-2} \operatorname{div}(\mathbf{grad} w - \boldsymbol{\beta}) = \bar{g}, \quad (\text{C.5a})$$

$$-\mathbf{div} \tilde{\mathcal{D}}_b \boldsymbol{\kappa} + kGt^{-2}(\mathbf{grad} w - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}, \quad (\text{C.5b})$$

missä skaalattu taivutusjäykkyyssensori on

$$\tilde{\mathcal{D}}_b = t^{-3} \mathcal{D}_b.$$

Jatkossa käytetään merkintää

$$B = \frac{E}{12(1 - \nu^2)}$$

lausekkeiden yksinkertaistamiseksi.

Tarkkojen ratkaisujen konstruoimiseksi Arnold ja Falk onnistuvat häivyttämään kytkennän kolmen yhtälön (C.5) välillä siirtymällä uusiin tuntemattomiin funktioihin v, m ja q . Alkuperäiset tuntemattomat funktiot w, β_x ja β_y määritellään uusien avulla seuraavasti:

$$\beta = \mathbf{grad}v - \frac{t^2}{kG}(\mathbf{grad}m + \mathbf{rot}q), \quad w = v - \frac{Bt^2}{kG}\Delta v - \frac{t^2}{kG}m, \quad (\text{C.6})$$

jossa skalaarifunktion vektoriarvoinen roottorioperaattori määritellään

$$\mathbf{rot}q = \left\{ \begin{array}{c} q_{,y} \\ -q_{,x} \end{array} \right\}.$$

Tällöin yhtälösystemi (C.5) muuntuu kolmeksi erilliseksi osittaisdifferentiaaliyhtälöksi

$$B\Delta^2 v = \bar{g}, \quad (\text{C.7a})$$

$$\Delta m = 0, \quad (\text{C.7b})$$

$$-\frac{t^2}{12k}\Delta q + q = 0. \quad (\text{C.7c})$$

Alkuperäinen systeemi (C.2) on kolmen toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälön systeemi. Täten sen jokaisella reunalla voidaan antaa täsmälleen kolme reunaehto. Muunnettu systeemi (C.7) sen sijaan on yhden neljännen ja kahden toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöiden systeemi, jolle voidaan antaa neljä reunaehto jokaisella reunan osalla. Näistä kolme reunaehto seuraa luonnollisesti alkuperäisen ongelman reunaehdoista, mutta puuttuvan neljännen ehdon asettamista tarkastellaan esimerkkitapauksen yhteydessä, sillä sen järkevä valinta määräytyy reunaehdon tyypistä.

C.2 Esimerkkinä puoliääretön laatta

Tarkastellaan puoliäärettömän laatan ($y > 0$) ja pehmeän vapaasti tuettu reunaehdon tapausta. Laatan kuormitukseksi otaksutaan $\bar{f}(x, y) = f_0 \cos(\pi x/L)$ jolloin skaalattu kuorma on $\bar{g}(x, y) = g_0 \cos(\pi x/L)$, eli $f_0 = g_0 t^3$.

Laatan kuormituksesta johtuen voidaan osittaisdifferentiaaliyhtälösystemin (C.7)

ratkaisua yrittää etsiä muodossa

$$v(x, y) = V(y) \cos \frac{\pi x}{L}, \quad m(x, y) = M(y) \cos \frac{\pi x}{L}, \quad q(x, y) = Q(y) \sin \frac{\pi x}{L},$$

missä $V(y)$, $M(y)$ ja $Q(y)$ ovat vain y :n funktioita ja toteuttavat tavalliset differentiaaliyhtälöt

$$B(V'''' - 2\alpha^2 V'' + \alpha^4 V) = g_0, \quad (\text{C.8a})$$

$$M'' - \alpha^2 M = 0, \quad (\text{C.8b})$$

$$-\frac{t^2}{12k}(Q'' - \alpha^2 Q) + Q = 0, \quad (\text{C.8c})$$

missä on merkitty $\alpha = \pi/L$. Yhtälöiden ratkaisut ovat

$$V(y) = \frac{g_0}{\alpha^4 B} + ae^{-\alpha y} + \alpha y be^{-\alpha y}, \quad (\text{C.9a})$$

$$M(y) = ce^{-\alpha y}, \quad (\text{C.9b})$$

$$Q(y) = de^{-\delta y/t}, \quad (\text{C.9c})$$

jossa dimensioton vakio $\delta = \sqrt{12k + \alpha^2 t^2}$ ja vakiot a, b, c, d määräytyvät reunaehdoista.

Alkuperäisten muuttujien avulla lausuttuna pehmeän vapaasti tuetun reunan reunaehdot ovat yleisessä muodossa seuraavat:

$$w = 0, \quad M_n = \mathbf{n}^T \mathbf{M} \mathbf{n} = 0, \quad M_{ns} = \mathbf{s}^T \mathbf{M} \mathbf{n} = 0,$$

jossa $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{s}$ merkitsevät reunakäyrän normaalin ja tangentin suuntaisia yksikkövektoreita. Puoliäärettömän laatan reunalla $y = 0$ reunaehdot saavat muodon

$$w = 0, \quad (\text{C.10a})$$

$$\beta_{y,y} + \nu \beta_{x,x} = 0, \quad (\text{C.10b})$$

$$\beta_{x,y} + \beta_{y,x} = 0. \quad (\text{C.10c})$$

Siirtymällä uusiin muuttujiin saadaan reunaehtojen lausekkeiksi

$$v - \frac{Bt^2}{kG} \Delta v - \frac{t^2}{kG} m = 0, \quad (\text{C.11a})$$

$$v_{,yy} - \frac{t^2}{kG}(m_{,yy} - q_{,xy}) + \nu \left[v_{,xx} - \frac{t^2}{kG}(m_{,xx} + q_{,xy}) \right] = 0, \quad (\text{C.11b})$$

$$2v_{,xy} - \frac{t^2}{kG}(2m_{,xy} + q_{,yy} - q_{,xx}) = 0, \quad (\text{C.11c})$$

jotka muuntuvat muotoon

$$V(0) - \frac{Bt^2}{kG} [V''(0) - \alpha^2 V(0)] - \frac{t^2}{kG} M(0) = 0, \quad (\text{C.12a})$$

$$V''(0) - \nu\alpha^2 V(0) - \frac{t^2}{kG} [M''(0) - \nu\alpha^2 M(0)] + \frac{t^2}{kG} \alpha(1 - \nu)Q'(0) = 0, \quad (\text{C.12b})$$

$$-2\alpha V'(0) + 2\frac{t^2}{kG} \alpha M'(0) - \frac{t^2}{kG} [Q''(0) + \alpha^2 Q(0)] = 0. \quad (\text{C.12c})$$

Nyt joudutaan keksimään neljäs reunaehto, joksi kyseisessä tapauksessa valitaan

$$v(x, 0) = 0, \quad \Rightarrow \quad V(0) = 0.$$

Yksinkertaisten mutta pitkäkköjen algebrallisten laskutoimitusten jälkeen saadaan vakioiden a, b, c ja d arvoiksi

$$a = -\frac{g_0}{\alpha^4 B}, \quad (\text{C.13a})$$

$$b = -\frac{g_0}{2\alpha^4 B} (1 + \alpha t(1 - \nu)\delta p^{-1}), \quad (\text{C.13b})$$

$$c = \frac{g_0}{\alpha^2} \delta \alpha t(1 - \nu)p^{-1}, \quad (\text{C.13c})$$

$$d = \frac{g_0 kG}{\alpha^2 B} \left(1 + \frac{1}{6k} \alpha^2 t^2\right) p^{-1}, \quad (\text{C.13d})$$

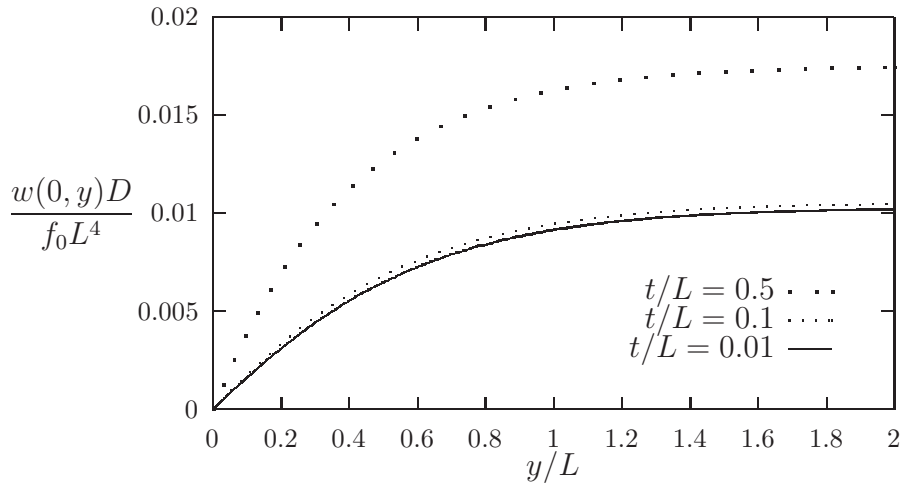
jossa on käytetty lyhennysmerkintää

$$p = \alpha t(1 - \nu)\delta \left(1 + 2\alpha^2 t^2 \frac{B}{kG}\right) - (\delta^2 + \alpha^2 t^2) \left(1 + \frac{1}{6k} \alpha^2 t^2\right).$$

Huomaa, että kertoimet a, b ja d ovat laatan paksuuden t suhteen ykkösen luokkaa, eli $a, b, d \sim \mathcal{O}(1)$ ja c :n hallitseva termi on luokkaa $\mathcal{O}(t/L)$.

Taipuman lausekkeeksi saadaan täten

$$\begin{aligned} w &= v - \frac{t^2 B}{kG} \Delta v - \frac{t^2}{kG} m, \\ &= \left[\left(1 + \alpha^2 t^2 \frac{B}{kG}\right) V - \frac{t^2 B}{kG} (V'' + M) \right] \cos \alpha x \\ &= \left\{ \left(1 + \alpha^2 t^2 \frac{B}{kG}\right) \frac{g_0}{\alpha^4 B} - \left[a + b \left(\alpha y + 2\alpha^2 t^2 \frac{B}{kG} \right) - \frac{t^2}{kG} c \right] e^{-\alpha y} \right\} \cos \alpha y \\ &= \frac{g_0 L^4}{\pi^4 B} (c_1 - c_2 e^{-\alpha y}) \cos \alpha y = \frac{f_0 L^4}{\pi^4 D} (c_1 - c_2 e^{-\alpha y}) \cos \alpha y \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$



Kuva C.1 Taipuma y -akselilla.

jossa dimensiottomat vakiot c_1 ja c_2 ovat:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 + \alpha^2 t^2 \frac{B}{kG}, \\ c_2 &= 1 + \frac{1}{2} \left(\alpha y + 2\alpha^2 t^2 \frac{B}{kG} \right) (1 + \alpha t(1 - \nu)\delta f^{-1}) \frac{1}{6k} \alpha^3 t^3 \delta p^{-1} \end{aligned}$$

Taipumaprofiili y -akselilla on piirretty kolmella eri suhteellisen paksuuden t/L arvolla kuvaan C.1.

Määritelmiä (C.6) hyväksikäyttäen saadaan leikkausvoimille lauseke

$$\mathbf{q} = kGt(\mathbf{grad}w - \boldsymbol{\beta}) = -t^3(B\mathbf{grad}\Delta v - \mathbf{rot}q),$$

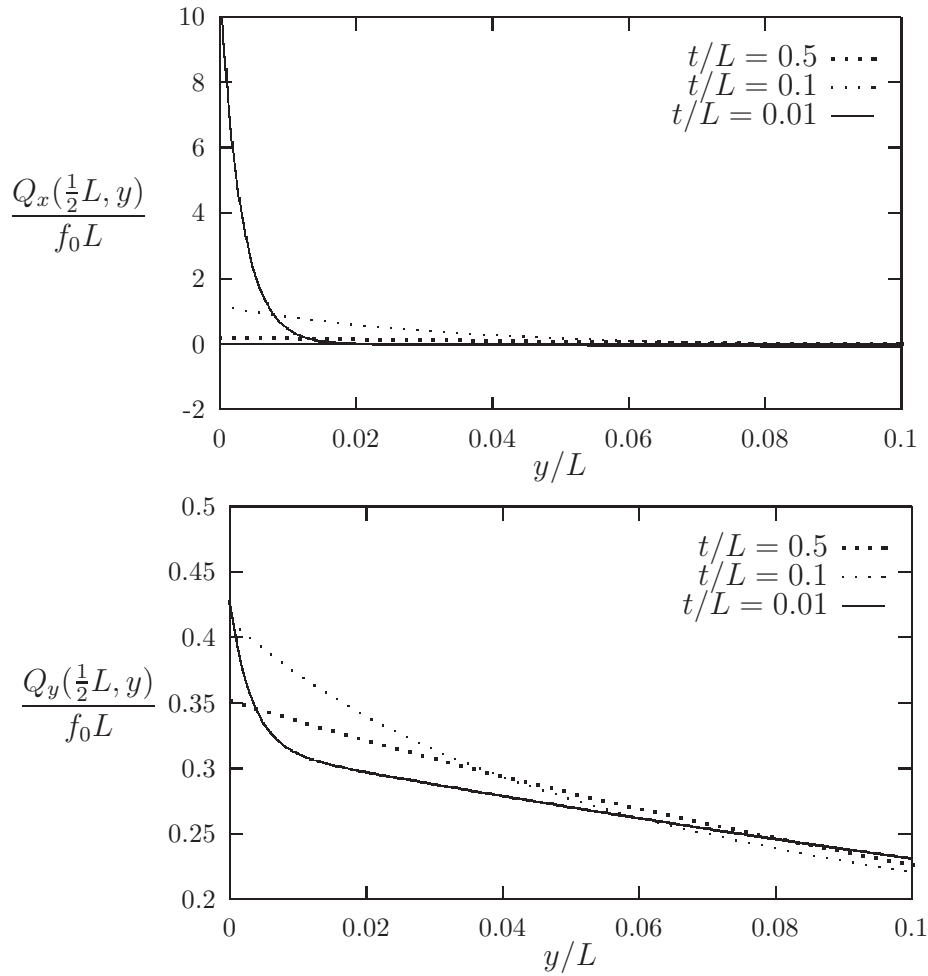
joka komponenttimuodossa lausuttuna on

$$\begin{aligned} Q_x &= -t^3 \left(B \frac{\partial}{\partial x} \Delta v - \frac{\partial q}{\partial y} \right) = t^3 [\alpha B(V'' - \alpha^2 V) + Q'] \sin \alpha x, \\ Q_y &= -t^3 \left(B \frac{\partial}{\partial y} \Delta v - \frac{\partial q}{\partial x} \right) = -t^3 [B(V''' - \alpha^2 V') + \alpha Q] \cos \alpha x, \end{aligned}$$

ja josta saadaan lopullinen muoto

$$Q_x = \frac{g_0 t^3 L}{\pi} \left(c_3 e^{-\alpha y} - \frac{\delta}{\alpha t} c_4 e^{-\delta y/t} - 1 \right) \sin \alpha x, \quad (\text{C.15a})$$

$$Q_y = \frac{g_0 t^3 L}{\pi} (c_3 e^{-\alpha y} - c_4 e^{-\delta y/t}) \cos \alpha x, \quad (\text{C.15b})$$



Kuva C.2 Leikkausvoimajakaumat.

joissa

$$\begin{aligned} c_3 &= 1 + \alpha t(1 - \nu)\delta p^{-1}, \\ c_4 &= \frac{kG}{B} \left(1 + \frac{1}{6k}\alpha^2 t^2 \right) p^{-1}. \end{aligned}$$

Ohuen laatan tapauksessa termi $\exp(-\delta y/t)$ aiheuttaa reunahäiriön, jonka leveys on laatan paksuuden t luokkaa. Huomaa ero leikkausvoimien Q_x ja Q_y lausekkeissa. Leikkausvoiman Q_x lausekkeessa reunahäiriötä aiheuttava termi kerrotaan vielä lausekkeella $\delta/(\alpha t) = (\delta/\pi)(L/t)$, joka ohuen laatan tapauksessa on suuri. Täten voidaan päätellä reunahäiriön olevan voimakkaampi Q_x :n kuin Q_y :n tapauksessa. Leikkausjännitysten jakaumat reunan läheisyydessä kolmella eri suhteellisen paksuuden arvolla on piirretty kuvaan C.2.

Taivutusmomenttien määrittämiseen tarvitaan kiertymien lausekkeet, jotka saa-

daan määritelmästä (C.6):

$$\begin{aligned}\beta_x &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{t^2}{kG} \left(\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right), \\ \beta_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{t^2}{kG} \left(\frac{\partial m}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right),\end{aligned}$$

josta seuraa

$$\beta_x = \frac{g_0}{\alpha^3 B} (c_5 e^{-\alpha y} + \alpha t \delta c_6 e^{-\delta y/t} - 1) \sin \alpha x, \quad (\text{C.18a})$$

$$\beta_y = \frac{g_0}{\alpha^3 B} (c_7 e^{-\alpha y} + \alpha^2 t^2 c_6 e^{-\delta y/t} - 1) \cos \alpha x, \quad (\text{C.18b})$$

missä

$$\begin{aligned}c_5 &= 1 + \frac{1}{2} \alpha y c_3 - \frac{1}{6k} \alpha^3 t^3 \delta p^{-1}, \\ c_6 &= \left(1 + \frac{1}{6k} \alpha^2 t^2 \right) p^{-1}, \\ c_7 &= 1 - \frac{1}{2} (1 - \alpha y) c_3 - \frac{1}{6k} \alpha^3 t^3 \delta p^{-1}.\end{aligned}$$

Edellä olevissa lausekkeissa (C.14), (C.15) ja (C.18) esiintyvät c_i vakiot on kirjoitettu siten, että niiden riippuvuus laatan paksuudesta on ykkösen luokkaa, eli $c_i \sim \mathcal{O}(1)$. Täten t -riippuvuus voidaan helpoimmin nähdä lausekkeista (C.14), (C.15) ja (C.18).

Taivutusmomentit M_x, M_y ja vääntömomentti M_{xy} voidaan määrittää tutuista yhtälöistä

$$\begin{aligned}M_x &= -D(\beta_{x,x} + \nu \beta_{y,y}), \\ M_y &= -D(\beta_{y,y} + \nu \beta_{x,x}), \\ M_{xy} &= -\frac{1}{2}(1 - \nu)D(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}).\end{aligned}$$

Kiertymien lausekkeista voidaan havaita, että reunahäiriö on voimakkaimmillaan vääntömomentissa M_{xy} , jossa se on luokkaa

$$M_{xy} \sim e^{-\delta y/t},$$

kun se taivutusmomenteissa on luokkaa

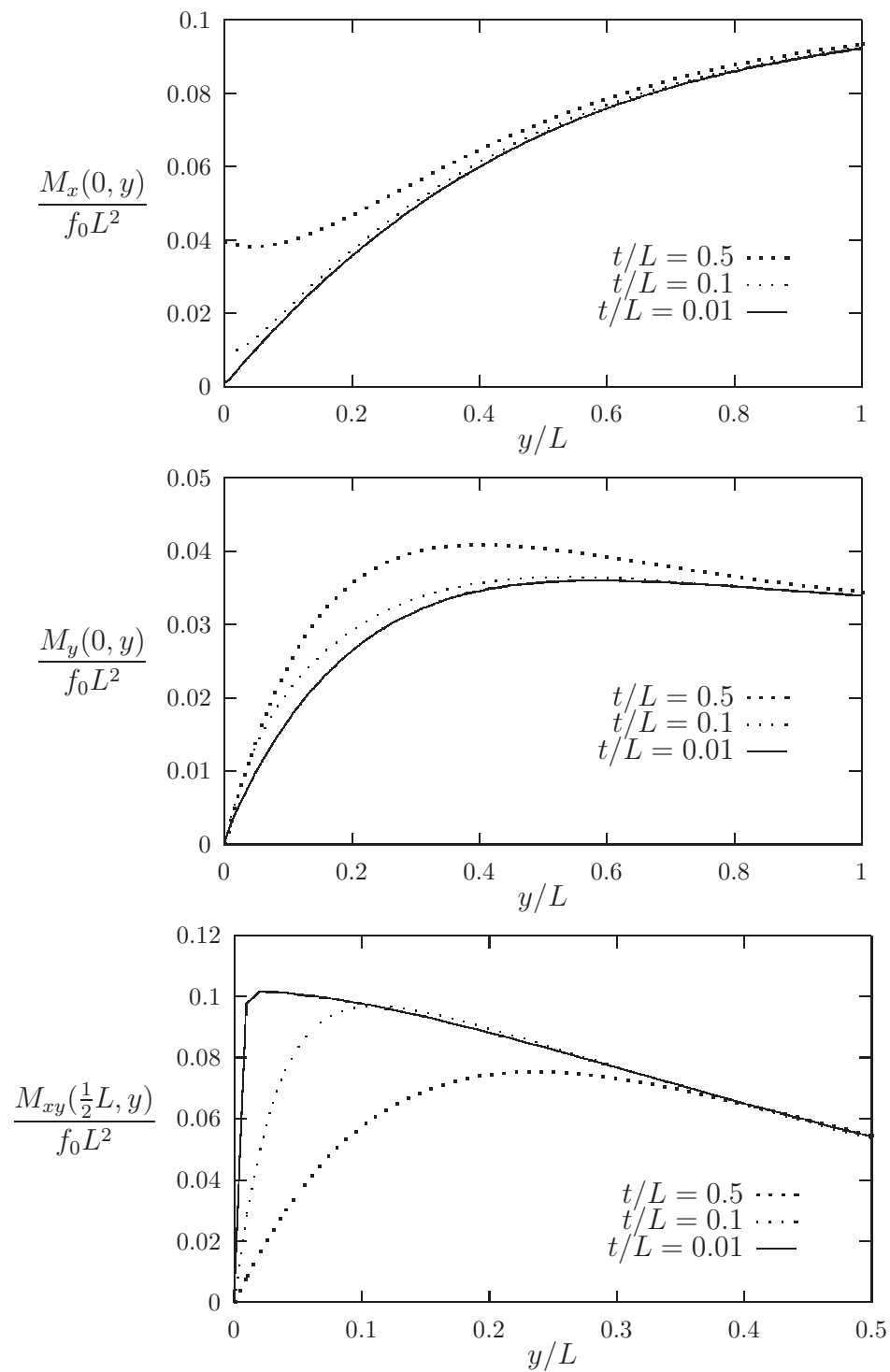
$$M_x, M_y \sim (t/L)e^{-\delta y/t}.$$

Momenttien jakaumat y -akselin suuntaisilla suorilla $x = 0$ ja $x = L/2$ on piirretty kuvaan C.3 kolmella eri suhteellisen paksuuden arvolla.

C.3 Yhteenveto

Arnoldin ja Falkin tutkimusten perusteella voimakkaimmat reunahäiriöt esiintyvät laatan reunanosilla jotka ovat pehmeästi vapaasti tuetut tai vapaat. Heikoin reunahäiriö esiintyy pehmeän jäykästi kiinnitetyn reunan tapauksessa. Suoraviivaisella reunalla reunahäiriötä ei esiinny pehmeän jäykästi kiinnitetyn ja kovan yksinkertaisen tuennan tapauksissa. Pyörähdyssymmetrisesti kuormitetun ympyrälaatan tapauksessa reunahäiriöt häviävät kokonaan kaikista suureista ja kaikilla reunaehtotapauksilla, joten tätä tapausta voidaan pitää hyvin erikoisena Reissnerin-Mindlinin laattamallissa. Vaikka kyseinen tapaus on suosittu R-M laattamalliin perustuvien laattaelementtien testauskohde, on se edellisen perusteella mahdollisimman epätydyttävä testiesimerkiksi.

Edellä esitetty puoliäärettömän laatan tapaus on myös hieman akateeminen esimerkki. Jännityssuureiden käyttäytyminen kulmien läheisyydessä olisi myös tärkeä tietää. Kirchhoffin laattamallissa esiintyvää singulariteettia, eli vapaasti tuetun laatan kulman pistemäistä tukireaktiota ei esiinny Reissnerin-Mindlinin laattamallissa. Sitä vastaa reunahäiriömäinen ‘piikki’ leikkausvoimajakaumassa. Lisäinformaatiota jännityssuureiden jakaumasta kulmien läheisyydessä saa artikkeleista [44], [43].



Kuva C.3 Momenttijakaumat.