

Luku 9

Palkkielementtejä

Tämä luku toimii johdatuksena laattaelementteihin, sillä ne ongelmat joihin laattaelementtien kehittämisessä on törmätty esiintyvät yksinkertaistetussa muodossa usein myös palkkielementtien yhteydessä. Yksidimensioisen rakenteen käsittelyn helppoudesta johtuen, ilmiöiden luonteen ymmärtäminen onnistuu täten joutuisammin. On kuitenkin syytä huomauttaa, että kaikkia laattatehtäville ominaisia ongelmakohtia ei palkkimallissa voi luonnollisestikaan esiintyä.

9.1 Eulerin-Bernoullin palkkimalli

Yksinkertaisin palkin käyttäytymistä kuvaava malli on ns. ohuen palkin malli. Sitä kutsutaan myös kehittäjöönsä mukaan Eulerin-Bernoullin palkkimalliksi¹ ja sen perusotaksumat ovat:

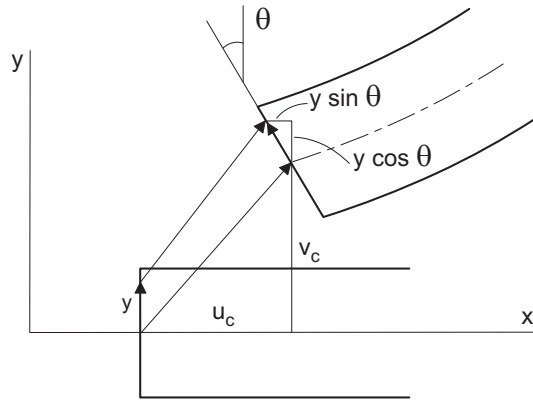
1. palkin akselin normaalit säilyvät suorina,
2. palkin akselin normaalit eivät veny ja
3. poikittainen leikkausmuodonmuutos on merkityksetön.

Kaksi ensimmäistä otaksumaa voidaan toteuttaa valitsemalla siirtymille u ja v lausekkeet (ks. kuva 9.1)

$$u(x, y) = u_c(x) - y \sin \theta(x), \quad (9.1a)$$

$$v(x, y) = v_c(x) - y(1 - \cos \theta(x)), \quad (9.1b)$$

¹Ohuen palkin mallista olisi oikeutettua käyttää nimeä Bernoulli-Euler-Parent, sillä vasta Parent (1666-1716) määrittäi oikein palkin neutraaliakselin paikan (julkaisu 1713) ja sitä kautta palkin taivutusjäykkyydelle saadaan oikea arvo. Jacob Bernoulli (1654-1705) tutki palkin taipumaviivan määrittämisestä. Hän päätteli taivutusmomentin olevan suoraan verrannollinen taipumaviivan kaarevuuteen, mikä on oikein, mutta ei saanut oikeaa arvoa palkin taivutusjäykkyydelle. Daniel Bernoulli (1700-1782) esitti ensimmäisenä prismaattisen palkin poikittaisten värähtelyjen differentiaaliyhtälön. Leonard Euler (1707-1783) julkaisi 1744 kirjan variaatiolaskennasta ja joka sisälsi myös ensimmäisen systemaattisen esityksen elastisten palkkien analyysistä.



Kuva 9.1 Palkin deformaatio.

missä u_c ja v_c ovat keskipisteakselin pisteen x siirtymäkomponentit ja θ on palkin akselin normaalin kiertymäkulma. Rajoittamalla pieniin siirtymiin, $u/L, v/L, \theta \ll 1$, saadaan likilausekkeet

$$u(x, y) = u_c(x) - y\theta(x), \quad (9.2a)$$

$$v(x, y) = v_c(x). \quad (9.2b)$$

Otaksutaan palkin akseli kokoonpuristumattomaksi, jolloin aksiaalisen siirtymän lauseke voidaan yksinkertaistaa muotoon

$$u(x, y) = -y\theta(x). \quad (9.3)$$

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi jätetään keskiakselia kuvaava alaindeksi c pois taipuman v lausekkeesta, joten siirtymien lausekkeet ovat:

$$u(x, y) = -y\theta(x), \quad (9.4a)$$

$$v(x, y) = v(x). \quad (9.4b)$$

Edellä oleviin siirtymäotaksumiin perustuvat muodonmuutoskomponenttien lausekkeet ovat:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{d\theta}{dx}, \quad (9.5a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{dx} - \theta. \quad (9.5b)$$

Eulerin-Bernoullin palkkimallin otaksumasta 3 seuraa siten

$$\gamma_{xy} = \frac{dv}{dx} - \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{dv}{dx}, \quad (9.6)$$

jolloin siirtymäotaksumat (9.4a) saavat muodon

$$u(x, y) = -yv'(x), \quad (9.7a)$$

$$v(x, y) = v(x). \quad (9.7b)$$

Eulerin-Bernoullin palkkimallin virtuaalisen työn yhtälö on

$$\int_0^L \int_A \sigma_x \delta \epsilon_x dA dx = \int_0^L f \delta v dx, \quad (9.8)$$

jossa virtuaalinen venymä $\delta \epsilon_x$ on

$$\delta \epsilon_x = -y \delta \theta' = -y \delta v''. \quad (9.9)$$

Otaksumalla lineaarinen materiaalilaki ($\sigma_x = E \epsilon_x$), saadaan

$$\int_0^L \int_A E y^2 \delta v'' v'' dA dx = \int_0^L f \delta v dx, \quad (9.10)$$

josta suorittamalla integrointi palkin poikkileikkauksen yli seuraa

$$\int_0^L EI \delta v'' v'' dx = \int_0^L f \delta v dx, \quad (9.11)$$

jossa I on palkin poikkileikkauksen jäyhyysmomentti. Tämä variaatiomuoto toimii perustana elementtimenetelmän yhtälöiden muodostamiselle. Heikko muoto (9.11) voidaan kirjoittaa myös taivutusmomentin $M = EI \kappa = -EI v''$ ja virtuaalisen käyritymän $\delta \kappa = -\delta v''$ avulla muodossa

$$\int_0^L M \delta \kappa dx = \int_0^L f \delta v dx. \quad (9.12)$$

Variaatiomuodosta (9.11) nähdään, että taipuman v elementti-interpolaation on oltava vähintään C_1 -jatkuva, jotta lausekkeen ensimmäinen integraali olisi äärellinen. Konstruoidaan yksinkertaisin mahdollinen C_1 -jatkuva interpolaatio. On ilmeistä, että kaksisolmuoisessa elementissä tuntemattomina solmusuureina olisi oltava funktion ja sen derivaatan arvot. Täten interpolaatio elementin alueella on muotoa

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x) \left. \frac{dv}{dx} \right|_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x) \left. \frac{dv}{dx} \right|_2. \quad (9.13)$$

Interpolaatiofunktioiden $N_i, i = 1, \dots, 4$ muodostamiseksi siirretään tarkastelu luonnolliseen ξ -koordinaatistoon, joka määritellään tavanomaiseen tapaan välillä $(-1, 1)$. Kirjoitetaan interpolaatio muodossa

$$\tilde{v}(x) = H_{01}^1(\xi)v_1 + H_{11}^1(\xi) \left. \frac{dv}{d\xi} \right|_1 + H_{02}^1(\xi)v_2 + H_{12}^1(\xi) \left. \frac{dv}{d\xi} \right|_2. \quad (9.14)$$

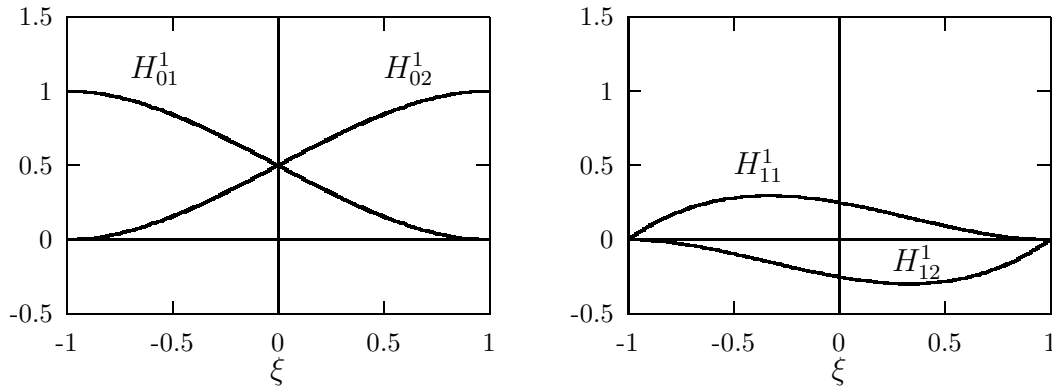
Vaaditaan funktioilta $H_{kj}^1, k = 0, 1; j = 1, 2$ seuraavat ominaisuudet:

$$H_{01}^1(-1) = 1, \quad \frac{dH_{01}^1}{d\xi}(-1) = 0, \quad H_{01}^1(1) = 0, \quad \frac{dH_{01}^1}{d\xi}(1) = 0, \quad (9.15a)$$

$$H_{11}^1(-1) = 0, \quad \frac{dH_{11}^1}{d\xi}(-1) = 1, \quad H_{11}^1(1) = 0, \quad \frac{dH_{11}^1}{d\xi}(1) = 0, \quad (9.15b)$$

$$H_{02}^1(-1) = 0, \quad \frac{dH_{02}^1}{d\xi}(-1) = 0, \quad H_{02}^1(1) = 1, \quad \frac{dH_{02}^1}{d\xi}(1) = 0, \quad (9.15c)$$

$$H_{12}^1(-1) = 0, \quad \frac{dH_{12}^1}{d\xi}(-1) = 0, \quad H_{12}^1(1) = 0, \quad \frac{dH_{12}^1}{d\xi}(1) = 1, \quad (9.15d)$$



Kuva 9.2 Hermiten kuubiset C_1 -interpolaatiopolynomit.

Jokainen funktioista $H_{01}^1, \dots, H_{12}^1$ on siten kolmannen asteen polynomi, joka määräytyy yksikäsitteisesti neljästä ehdosta.

Funktioille $H_{kj}^1, k = 0, 1; j = 1, 2$ saadaan lausekkeet

$$H_{01}^1(\xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi) = (H_{01}^0)^2(1 + 2H_{02}^0), \quad (9.16a)$$

$$H_{11}^1(\xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(1 + \xi) = 2(H_{01}^0)^2H_{02}^0, \quad (9.16b)$$

$$H_{02}^1(\xi) = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi) = (H_{02}^0)^2(1 + 2H_{01}^0), \quad (9.16c)$$

$$H_{12}^1(\xi) = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(\xi - 1) = -2H_{01}^0(H_{02}^0)^2, \quad (9.16d)$$

jossa lineaarisia perusinterpolaatiofunktioita on merkitty $H_{01}^0 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$ ja $H_{02}^0 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$. Funktiot H_{kj}^1 on piirretty kuvaan 9.2. Interpolaatiofunktioiksi (9.13) saadaan

$$\begin{aligned} N_1(x) &= H_{01}^1(\xi(x)), & N_2(x) &= \frac{1}{2}h^{(e)}H_{11}^1(\xi(x)), \\ N_3(x) &= H_{02}^1(\xi(x)), & N_4(x) &= \frac{1}{2}h^{(e)}H_{12}^1(\xi(x)), \end{aligned} \quad (9.17)$$

Edellä esitettyjä polynomeja kutsutaan ensimmäisen asteen Hermiten interpolaatiopolynomeiksi (ks. liite ??).

Eulerin-Bernoullin palkkielementin jäykkymatriisiin ja kuormavektorin alkioiksi saadaan siten

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} EI \frac{d^2 N_i}{dx^2} \frac{d^2 N_j}{dx^2} dx = \frac{8}{h^{(e)3}} \int_{-1}^1 EI \frac{d^2 N_i}{d\xi^2} \frac{d^2 N_j}{d\xi^2} d\xi, \quad (9.18)$$

$$f_i^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_i(x) dx = \frac{1}{2}h^{(e)} \int_{-1}^1 f(\xi) N_i(\xi) d\xi. \quad (9.19)$$

9.2 Timoshenkon palkkimalli

9.2.1 Virtuaalisen työn yhtälö

Palkin kinemaattisista otaksumista

$$u(x, y) = -y\theta(x), \quad (9.20a)$$

$$v(x, y) = v(x) \quad (9.20b)$$

voidaan päätyä malliin, jossa palkin poikittainen leikkausmuodonmuutos tulee keskimääräisesti huomioonotetuksi. Timoshenkon palkkimallissa muodonmuutokset ovat

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{d\theta}{dx}, \quad (9.21a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{dx} - \theta, \quad (9.21b)$$

ja virtuaalisen työn yhtälö on muotoa

$$\int_0^L \int_A (\sigma \delta \epsilon + \tau \delta \gamma) dA dx = \int_0^L f \delta v dx, \quad (9.22)$$

josta alaindeksit x ja xy on merkintöjen yksinkertaistamiseksi jätetty pois. Sijoittamalla tähän muodonmuutosten lausekkeet (9.21a) sekä lineaarisesti kimmoisa materiaalilaki $\sigma = E\epsilon$, $\tau = G\gamma$ ($G = E/2(1 + \nu)$ = leikkausmoduuli), saadaan lauseke

$$\int_0^L [EI\theta' \delta \theta' + GA(v' - \theta)(\delta v' - \delta \theta)] dx = \int_0^L f \delta v dx. \quad (9.23)$$

Muodonmuutoksen lausekkeesta (9.21ab) havaitaan, että liukuma on vakio koko poikkileikkauksessa. Tämä ei tietenkään pidä paikkaansa, vaan liukumalla on jokin poikkileikkauksen muodosta riippuva jakauma. Leikkausmuodonmuutoksen poikittainen jakauma voidaan kuitenkin keskimääräisesti ottaa huomioon modifioimalla leikkausjäykkyyden lauseketta muotoon GA_s , missä A_s on leikkauspinta-ala (suora-kaiteelle $A_s = \frac{5}{6}A$ ja I-profilille $A_s = A_{uumma}$). Virtuaalisen työn lauseke saadaan siten muotoon

$$\int_0^L [EI\theta' \delta \theta' + GA_s \theta \delta \theta - GA_s (v' \delta \theta + \theta \delta v') + GA_s v' \delta v'] dx = \int_0^L f \delta v dx. \quad (9.24)$$

9.2.2 Yksinkertainen elementti

Variaatioyhtälön likiratkaisussa on nyt kaksi toisistaan riippumatonta suuretta: taipuma v ja palkin akselin normaalin kiertymäkulma θ . Havaitaan myös, että kummallekin suurelle riittää C_0 -jatkuva elementti-interpolaatio. Yksinkertaisin mahdollinen Timoshenkon palkkimallin elementti saadaan valitsemalla sekä taipumalle että kiertymälle lineaarinen interpolaatio:

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)v_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)v_2 = \mathbf{N}_v \mathbf{v}^{(e)}, \quad (9.25a)$$

$$\theta = N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2 = \mathbf{N}_\theta \boldsymbol{\theta}^{(e)}. \quad (9.25b)$$

Variaatioyhtälön termien elementtiosuudet ovat, nyt $\mathbf{N}_v = \mathbf{N}_\theta = [N_1, N_2]$:

$$\int_{x_1}^{x_2} (EI\theta'\delta\theta' + GA_s\theta\delta\theta) dx = \delta\boldsymbol{\theta}^{(e)T} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} \boldsymbol{\theta}^{(e)}, \quad (9.26a)$$

$$- \int_{x_1}^{x_2} GA_s v' \delta\theta dx = \delta\boldsymbol{\theta}^{(e)T} \mathbf{K}_{\theta v}^{(e)} \mathbf{v}^{(e)}, \quad (9.26b)$$

$$- \int_{x_1}^{x_2} GA_s \theta \delta v' dx = \delta\mathbf{v}^{(e)T} \mathbf{K}_{v\theta}^{(e)} \boldsymbol{\theta}^{(e)}, \quad (9.26c)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} GA_s v' \delta v' dx = \delta\mathbf{v}^{(e)T} \mathbf{K}_{vv}^{(e)} \mathbf{v}^{(e)}, \quad (9.26d)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f \delta v dx = \delta\mathbf{v}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)}. \quad (9.26e)$$

Osamatriisien $\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(e)}$ lausekkeet ovat:

$$\mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} = \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 EIN_\theta'^T N_\theta' d\xi + \frac{h^{(e)}}{2} \int_{-1}^1 GA_s \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{N}_\theta d\xi, \quad (9.27a)$$

$$\mathbf{K}_{\theta v}^{(e)} = - \int_{-1}^1 GA_s \mathbf{N}_\theta^T N_v' d\xi, \quad (9.27b)$$

$$\mathbf{K}_{v\theta}^{(e)} = - \int_{-1}^1 GA_s N_v'^T \mathbf{N}_\theta d\xi, \quad (9.27c)$$

$$\mathbf{K}_{vv}^{(e)} = \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 GA_s N_v'^T N_v' d\xi. \quad (9.27d)$$

Elementin jäykkymatriisi on koottu edellä esitetyistä lohkoista seuraavasti:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} & \mathbf{K}_{\theta v}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{v\theta}^{(e)} & \mathbf{K}_{vv}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

Otaksumalla taivutusjäykkyys EI ja leikkausjäykkyys GA_s vakioiksi saadaan lineaarista interpolaatiota käytettäessä matriisit:

$$\mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} = \frac{EI}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{GA_s h^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (9.29a)$$

$$\mathbf{K}_{\theta v}^{(e)} = \frac{GA_s}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{v\theta}^{(e)} = \mathbf{K}_{\theta v}^{(e)T}, \quad (9.29b)$$

$$\mathbf{K}_{vv}^{(e)} = \frac{GA_s}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.29c)$$

Mikäli vapausasteet ryhmitellään elementin siirtymävektoriin $\mathbf{u}^{(e)}$ seuraavasti

$$\mathbf{u}^{(e)T} = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2], \quad (9.30)$$

saadaan elementin jäykkymatriisi muotoon

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} GA_s h^{(e)-1} & \frac{1}{2}GA_s & -GA_s h^{(e)-1} & \frac{1}{2}GA_s \\ & E Ih^{(e)-1} + \frac{1}{3}GA_s h^{(e)} & -\frac{1}{2}GA_s & -E Ih^{(e)-1} + \frac{1}{6}GA_s h^{(e)} \\ & & GA_s h^{(e)-1} & -\frac{1}{2}GA_s \\ \text{symm.} & & & E Ih^{(e)-1} + \frac{1}{3}GA_s h^{(e)} \end{bmatrix} \quad (9.31)$$

Tutkitaan nyt tämän yksinkertaisen elementin toimivuutta. Valitaan testitapaukseksi ulokepalkki, jonka poikkileikkaus on suorakaide $b \times t$ (b =leveys, t =korkeus) ja jota kuormittaa pistemomentti M_L palkin vapaassa päässä.

Käytetään vain yhtä elementtiä, jolloin yhtälösystemiksi saadaan

$$\begin{bmatrix} GA_s L^{-1} & -\frac{1}{2}GA_s \\ -\frac{1}{2}GA_s & E IL^{-1} + \frac{1}{3}GA_s L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_L \end{Bmatrix}. \quad (9.32)$$

Otaksutaan suppeamaluku ν nolaksi, jolloin $G = E/2$ ja lisäksi otaksutaan $A_s = A = bt$, jolloin yhtälösystemi muuntuu muotoon

$$\frac{Ebt}{4} \begin{bmatrix} 2L^{-1} & -1 \\ -1 & \frac{2}{3}L + \frac{1}{3}t^2 L^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_L \end{Bmatrix}. \quad (9.33)$$

Ottamalla käyttöön dimensioton siirtymä v_2/L ja jakamalla alempi yhtälöistä L :llä, saadaan

$$\frac{Ebt}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{3}(2 + a^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2/L \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_L/L \end{Bmatrix}, \quad (9.34)$$

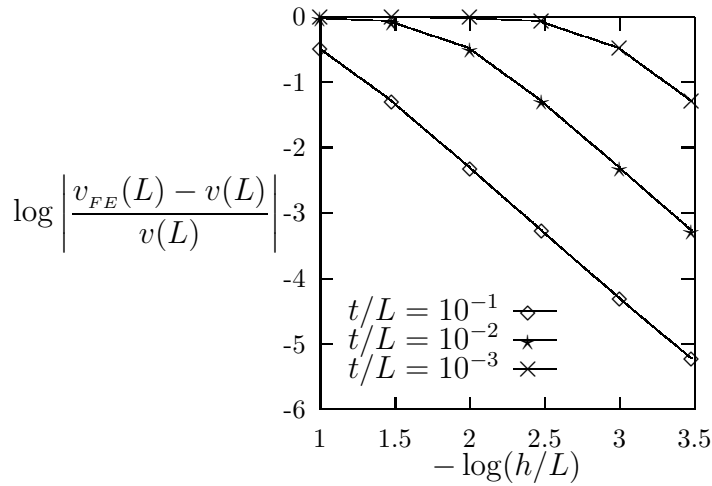
missä on merkitty $a = t/L$. Ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} v_2/L \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 24 \end{Bmatrix} \frac{M_L}{EbtL(1 + 2a^2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{a^2}{1 + 2a^2} \frac{M_L L}{EI}. \quad (9.35)$$

Ulokkeen pään taipuman palkkimallin mukainen tarkka ratkaisu on $v/L = M_L L / (2EI)$, joten likiratkaisun virhe on huomattava paksulla palkilla ja suorastaan pöyristyttävä ohuella palkilla. Elementtiratkaisu lähestyy nolaa kun $a = t/L \rightarrow 0$. Ilmiötä kutsutaan *lukkiutumiseksi*. Elementtiratkaisun kukkiutuminen johtaa kelvottomiin ratkaisuihin ohuissa palkeissa, vaikka elementtijakoa kohtuullisesti tihennettäisiin. Verkkoa tihennettäessä ratkaisu lähestyy hyvin hitaasti kohti palkkimallin tarkkaa ratkaisua. Lukkiutumisesta päästään eroon vasta kun palkin korkeus on likimain elementin pituuden luokkaa (katso kuva 9.3), jolloin virheen pienenemisnopeus lähestyy elementin teoreettista asymptoottista suppenemisnopeutta.

Lukkiutumisen syy on leikkausmuodonmuutoksessa, joita muodostuu vaikka kyseessä on puhdas taivutus, sillä

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= v'(x) - \theta(x) = \frac{v_2}{L} - \theta_2 \frac{x}{L} \\ &= \left(1 - 2\frac{x}{L}\right) \frac{a^2}{1 + 2a^2} \frac{M_L L}{EI}. \end{aligned} \quad (9.36a)$$



Kuva 9.3 Suhteellinen virhe ulokepalkin pään taipuman arvossa verkontiheyden funktiona käytettäessä lineaarista Timoshenkon elementtiä erilaisilla suhteellisen paksuuden arvoilla.

Havaitaan, että leikkausmuodonmuutos häviää elementin keskipisteessä, joten se pystyy kuvaamaan ohuen palkin Eulerin-Bernoullin otaksumaa keskimääräisesti oikein. Yleisesti, elementin leikkausmuodonmuutoksen lauseke on

$$\begin{aligned} \gamma(\xi) &= \frac{v_2 - v_1}{h^{(e)}} - \left[\frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2 \right] \\ &= \frac{v_2 - v_1}{h^{(e)}} - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) - \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)\xi, \end{aligned} \quad (9.37)$$

josta heti havaitaan, että liukuma voi olla identtisesti nolla vain, kun $v_1 = v_2 = \theta_1 = \theta_2 = 0$ tai kun $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ ja $v_2 = v_1 + h^{(e)}\theta$. Jälkimmäinen siirtymätila ei kuitenkaan kuvaa taivutustilaa vaan jäykän kappaleen liikettä, joten ratkaisun lukkiutuminen on ilmeistä.

Tarkastellaan vielä lukkiutumista tutkimalla muodonmuutosenergian lauseketta. Variaatioyhtälöstä (9.24) voidaan muodostaa Timoshenkon palkin potentiaalienergian lauseke, joka on

$$\Pi(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(\theta')^2 + GA_s(v' - \theta)^2] dx - \int_0^L f v dx. \quad (9.38)$$

Otetaan käyttöön merkinnät $I = Ar^2$, jossa r on poikkileikkauksen jäyhyys säde ja $A_s = kA$, jossa k on poikkileikkauksen leikkauskorjauskerroin. Potentiaalienergian lauseke voidaan täten saattaa muotoon

$$\Pi(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[(\theta')^2 + \frac{k}{2(1 + \nu)} \frac{1}{r^2} (v' - \theta)^2 \right] dx - \int_0^L f v dx. \quad (9.39)$$

Siirtymällä dimensiottomiin suureisiin $\vartheta = v/L$ ja $\xi = x/L$, saadaan

$$\begin{aligned}\Pi(\vartheta, \theta) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{EI}{L} \left[\left(\frac{d\vartheta}{d\xi} \right)^2 + \frac{k}{2(1+\nu)} \left(\frac{L}{r} \right)^2 \left(\frac{d\vartheta}{d\xi} - \theta \right)^2 \right] d\xi - \int_0^1 fL^2\vartheta d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{EI}{L} \left[\kappa^2 + \frac{k}{2(1+\nu)} \left(\frac{L}{r} \right)^2 \gamma^2 \right] d\xi - \int_0^1 fL^2\vartheta d\xi.\end{aligned}\quad (9.40)$$

Potentiaalienergian lausekkeesta havaitaan, että leikkausenergiassa oleva kerroin $(L/r)^2$ suurenee kun palkki hoikkenee. Täten pienikin virhe leikkausmuodonmuutoksen laskennassa aiheuttaa suuren virheen muodonmuutosenergiassa.

9.2.3 Parannettu elementti

Yhteenvedona (sekä hieman yleistäen) voidaan todeta, että samanasteinen approksimaatio sekä taipumalle v että kiertymälle θ ei voi koskaan mahdollistaa leikkausmuodonmuutoksen häviämistä koko elementin alueella muutoin kuin tapauksessa $v \equiv \theta \equiv 0$. Yksinkertainen parannusehdotus on käyttää taipumalle astetta korkeampaa interpolaatiota kuin kiertymälle. Lisätään taipuman lineaariseen perusinterpolaatioon kvadraattinen kuplamuoto, jolloin siirtymäkentän interpolaatio voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}v(\xi) &= N_1(\xi)v_1 + N_2(\xi)v_2 + N_3(\xi)\Delta v \\ &= \frac{1}{2}(1-\xi)v_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)v_2 + (\xi^2-1)\Delta v,\end{aligned}\quad (9.41a)$$

$$\theta(\xi) = N_1(\xi)\theta_1 + N_2(\xi)\theta_2 = \frac{1}{2}(1-\xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)\theta_2 \quad (9.41b)$$

Elementin jäykkyysmatriisia johdettaessa voidaan käyttää hyväksi jo johdettuja lineaarisen elementin jäykkyysmatriisin lohkoja. Tarkastellaan koko rakenteen globaaleja tasapainoyhtälöitä, jotka on koottu elementtikohtaisista osista. Näin saadaan lohkotussa muodossa seuraava yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vv} & \mathbf{K}_{v\Delta} & \mathbf{K}_{v\theta} \\ \mathbf{K}_{\Delta v} & \mathbf{K}_{\Delta\Delta} & \mathbf{K}_{\Delta\theta} \\ \mathbf{K}_{\theta v} & \mathbf{K}_{\theta\Delta} & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \Delta\mathbf{v} \\ \boldsymbol{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_v \\ \mathbf{f}_\Delta \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}.\quad (9.42)$$

Uusia osia ovat vain $\mathbf{K}_{\Delta v}$, $\mathbf{K}_{\Delta\theta}$, $\mathbf{K}_{\Delta\Delta}$ ja \mathbf{f}_Δ . Ratkaistaan hierarkisten vapausasteiden arvot yllä olevasta yhtälöryhmästä, jolloin saadaan

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1}(\mathbf{f}_\Delta - \mathbf{K}_{\Delta v}\mathbf{v} - \mathbf{K}_{\Delta\theta}\boldsymbol{\theta}).\quad (9.43)$$

Sijoitetaan kondensoidut hierarkiset vapausasteet takaisin yhtälösystemiin, jolloin saadaan kondensoitu yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vv} - \mathbf{K}_{v\Delta}\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1}\mathbf{K}_{\Delta v} & \mathbf{K}_{v\theta} - \mathbf{K}_{v\Delta}\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1}\mathbf{K}_{\Delta\theta} \\ \mathbf{K}_{\theta v} - \mathbf{K}_{\theta\Delta}\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1}\mathbf{K}_{\Delta v} & \mathbf{K}_{\theta\theta} - \mathbf{K}_{\theta\Delta}\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1}\mathbf{K}_{\Delta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_v - \mathbf{K}_{v\Delta}\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1}\mathbf{f}_\Delta \\ -\mathbf{K}_{\theta\Delta}\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1}\mathbf{f}_\Delta \end{Bmatrix} \quad (9.44)$$

Koska hierarkiset vapausasteet ovat vain kunkin elementin sisäisiä vapausasteita, voidaan ne kondensoida jo elementtitasolla. Yksittäisen elementin kondensoiduksi jäykkyysmatriisiksi saadaan globaalissa tasapainoyhtälössä (9.44) esiintyvän kerroinmatriisin kaltainen elementtimatriisi kuten myös vastaavasti elementin voimavektorillekin. Elementtiosuudet, jotka muodostavat matriisit $\mathbf{K}_{\Delta v}$, $\mathbf{K}_{\Delta\theta}$, $\mathbf{K}_{\Delta\Delta}$ ovat $\mathbf{K}_{\Delta v}^{(e)}$, $\mathbf{K}_{\Delta\theta}^{(e)}$, $\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{(e)}$. Mikäli käytetään hierarkista kantaa, joka on derivaattojen suhteen ortogonaalinen, kuten taipuman interpolaatiossa (9.41a), on matriisi $\mathbf{K}_{v\Delta}^{(e)}$ nollamatriisi, joten kondensoidun elementin jäykkyysmatriisiksi ja kuormavektoriksi saadaan

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vv}^{(e)} & \mathbf{K}_{v\theta}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{\theta v}^{(e)} & \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} - \mathbf{K}_{\theta\Delta}^{(e)} \mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{(e)-1} \mathbf{K}_{\Delta\theta}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_v^{(e)} \\ -\mathbf{K}_{\theta\Delta}^{(e)} \mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{(e)-1} \mathbf{f}_\Delta \end{Bmatrix} \quad (9.45)$$

Osuudet $\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{(e)}$ ja $\mathbf{K}_{\theta\Delta}^{(e)}$ ovat (mikäli leikkausjäykkyys on vakio) seuraavanlaiset:

$$\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{(e)} = K_{\Delta\Delta}^{(e)} = \frac{2GA_s}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \left[\frac{d}{d\xi} (\xi^2 - 1) \right]^2 d\xi = \frac{16GA_s}{3h^{(e)}}, \quad (9.46a)$$

$$\mathbf{K}_{\theta\Delta}^{(e)} = -GA_s \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{bmatrix} 2\xi d\xi = \frac{2}{3}GA_s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (9.46b)$$

Elementin jäykkyysmatriisin uudeksi $\theta\theta$ -lohkoksi saadaan

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} - \mathbf{K}_{\theta\Delta}^{(e)} \mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{(e)-1} \mathbf{K}_{\Delta\theta}^{(e)} \\ &= \frac{EI}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{GA_s h^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{GA_s h^{(e)}}{12} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{EI}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{GA_s h^{(e)}}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9.47)$$

Leikkausmuodonmuutoksen lauseke on tällä elementillä muotoa

$$\gamma(\xi) = \frac{v_2 - v_1}{h^{(e)}} - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) + \left[\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) + 4 \frac{\Delta v}{h^{(e)}} \right] \xi, \quad (9.48)$$

josta nähdään, että leikkausmuodonmuutos voi hävitä identtisesti, mikäli

$$v_2 = v_1 + \frac{1}{2}h^{(e)}(\theta_1 + \theta_2), \quad (9.49a)$$

$$\Delta v = \frac{1}{8}h^{(e)}(\theta_2 - \theta_1). \quad (9.49b)$$

Yllä esitetty elementti toimii hyvin. Yhden elementin taivutusesimerkissä se antaa tarkan ratkaisun, sillä ratkaisuyhtälö on

$$\begin{bmatrix} GA_s L^{-1} & -\frac{1}{2}GA_s \\ -\frac{1}{2}GA_s & EIL^{-1} + \frac{1}{4}GA_s L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_L \end{Bmatrix}, \quad (9.50)$$

joka saadaan muotoon

$$\frac{Ebt}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{3}a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2/L \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_L/L \end{Bmatrix}, \quad (9.51)$$

missä on merkitty $a = t/L$. Havaitaan, että kerroinmatriisin determinantti on $\frac{2}{3}a^2$ ja ratkaisu

$$\begin{Bmatrix} v_2/L \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 12 \end{Bmatrix} \frac{M_L}{EbtL} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{M_LL}{EI}. \quad (9.52)$$

Elementissä on vielä eräs pieni kauneusvirhe. Käyrityksen approksimaatio on elementin alueella vakio, kun taas leikkausmuodonmuutos on lineaarisesti muuttuva. Tämä on kuitenkin yksinkertaisesti korjattavissa asettamalla rajoite (9.49ab) leikkausmuodonmuutosta laskettaessa, eli asettamalla pysyvästi

$$\Delta v = \frac{1}{8}h^{(e)}(\theta_2 - \theta_1). \quad (9.53)$$

Tämä ei tietenkään vaikuta elementin jäykkyysmatriisin lausekkeisiin.

Edellä esitetty konstruktio tuottaa mahdollisimman yksinkertaisen hyvin toimivan palkkielementin. Elementin käyttäytymistä voidaan vielä parantaa tempulla, joka selitetään luvussa 9.2.5.

9.2.4 Numeerinen ali-integrointi

Edellisen perusteella on lineaarisesti interpoloidun Timoshenkon palkkielementin harmia tuottava osa identifioitavissa $\theta\theta$ -lohkon leikkausmuodonmuutososaan

$$\mathbf{K}_{s\theta\theta}^{(e)} = \frac{1}{2}GA_s h^{(e)} \int_{-1}^1 \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{N}_\theta d\xi = \frac{GA_s h^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (9.54)$$

joka parabolisen hierarkisen taipumamuodon kondensoinnin jälkeen muuttuu muotoon

$$\frac{GA_s h^{(e)}}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.55)$$

Lineaarisen interpolaation tapauksessa lohkon $\mathbf{K}_{s\theta\theta}^{(e)}$ tarkka integrointi edellyttää kahden pisteen Gaussin-Legendren kaavaa. Mikäli elementin jäykkyysmatriisi, ja erityisesti sen osa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}GA_s h^{(e)} \int_{-1}^1 \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{N}_\theta d\xi \\ &= \frac{1}{2}GA_s h^{(e)} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} d\xi \\ &= \frac{1}{2}GA_s h^{(e)} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\xi)^2 & \frac{1}{4}(1-\xi^2) \\ \frac{1}{4}(1-\xi^2) & \frac{1}{4}(1+\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi \end{aligned} \quad (9.56)$$

integroidaan vain yhden pisteen kvadratuurilla, saadaan tulokseksi täsmälleen matriisi (9.55). Muut jäykkyysmatriisin integroitavat osat ovat vakioita tai lineaarisesti muuttuvia lausekkeita, joten yhden pisteen kaava integroi ne tarkasti. Näin on saatu hyvin käyttäytyvä elementti, joka on vielä numeerisesti edullinen muodostaa.

9.2.5 Leikkausjäykkyyden redusointi

9.2.5.1 MacNealin menettely

Kahdessa edellisessä luvussa esitetyn yksinkertaisen elementin käyttäytymistä voidaan vielä entisestäänkin parantaa pienentämällä leikkausjäykkyyden GA_s arvoa. Potentiaalienergian lausekkeesta (9.40) nähdään, että ohuilla palkeilla ($L \gg r$) leikkausenergiassa esiintyvä kerroin on suhteettoman suuri verrattuna vastaavaan taivutusenergian lausekkeeseen. Tarkastellaan seuraavassa MacNealin [51] esittämää tapaa tasapainottaa taivutus- ja leikkausenergioiden suhdetta. Tarkastelun idea on muodostaa sellainen leikkausjäykkyyden korjattu arvo, jolla lineaarisesti interpoloidun ja ali-integroidun elementin muodonmuutosenergia on yhtäsuuri vakioliukumaja lineaarista käyritystilaa vastaavan tarkan ratkaisun muodonmuutosenergian kanssa.

Elementin muodonmuutosenergian lauseke on

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} (EI\kappa^2 + GA_s\gamma^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (EI\kappa^2 + GA_s\gamma^2) \frac{1}{2} h^{(e)} d\xi. \quad (9.57)$$

Mikäli leikkausmuodonmuutos on vakio elementin alueella, on taipuman tarkka lauseke esitettävissä kolmannen asteen polynomina ja kiertymän lauseke kvadraattisena polynomina muodoissa²

$$v = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \frac{1}{2}h\gamma_0\xi \quad (9.58a)$$

$$\theta = \frac{2}{h}(a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2). \quad (9.58b)$$

Nämä lausekkeet johtavat lineaarisesti muuttuvaan käyritymään κ ja vakiroleikkausmuodonmuutokseen γ :

$$\kappa = -\theta' = -\frac{4}{h^2}(2a_2 + 6a_3\xi), \quad (9.59a)$$

$$\gamma = v' - \theta = \gamma_0. \quad (9.59b)$$

Interpoloidaan taipuman ja kiertymän tarkkoja lausekkeita (9.58a) lineaarisilla polynomeilla \tilde{v} ja $\tilde{\theta}$:

$$\tilde{v} = N_1(\xi)v_1 + N_2(\xi)v_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)v_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)v_2, \quad (9.60a)$$

$$\tilde{\theta} = N_1(\xi)\theta_1 + N_2(\xi)\theta_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2. \quad (9.60b)$$

Asetetaan interpolaatio yhtäsuureksi solmupisteissä tarkan ratkaisun kanssa, jolloin

²Elementtiä osoittava yläindeksi (e) on mukavuussyistä jätetty merkitsemättä.

solmupistevapausasteet v_1, v_2, θ_1 ja θ_2 voidaan ratkaista

$$v_1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 - \frac{1}{2}h\gamma_0, \quad (9.61a)$$

$$v_2 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \frac{1}{2}h\gamma_0, \quad (9.61b)$$

$$\theta_1 = \frac{2}{h}(a_1 - 2a_2 + 3a_3), \quad (9.61c)$$

$$\theta_2 = \frac{2}{h}(a_1 + 2a_2 + 3a_3). \quad (9.61d)$$

Täten taipuman ja kiertymän interpolaatiot ovat

$$\tilde{v} = a_0 + a_2 + (a_1 + a_3 + \frac{1}{2}h\gamma_0)\xi, \quad (9.62a)$$

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{h}(2a_1 + 6a_3 + 4a_2\xi), \quad (9.62b)$$

mistä voidaan derivoida käyristymän ja leikkausmuodonmuutosten lausekkeet³

$$\tilde{\kappa} = -\tilde{\theta}' = -\frac{1}{h^2}8a_2, \quad (9.63a)$$

$$\tilde{\gamma} = \tilde{v}' - \tilde{\theta} = \gamma_0 - \frac{1}{h}(4a_3 + 4a_2\xi). \quad (9.63b)$$

Lasketaan nyt elementin muodonmuutosenergia interpolaatiosta saaduilla arvoilla ja verrataan sitä tarkan ratkaisun antamaan arvoon. Muodonmuutosenergian tarkka arvo on

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (EI\kappa^2 + GA_s\gamma^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{EI}{h^3}(32a_2^2 + 192a_3^2) + GA_s h\gamma_0^2 \right]. \end{aligned} \quad (9.64)$$

Vastaavasti lineaaristen interpolaatiodefunktioiden tapauksessa muodonmuutosenergian arvo on

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (EI\tilde{\kappa}^2 + GA_s\tilde{\gamma}^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[32 \frac{EI}{h^3} a_2^2 + GA_s h \left(\gamma_0 - \frac{4}{h} a_3 \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (9.65)$$

missä leikkausmuodonmuutos on otettu vakiona elementin keskipisteessä, vastaten siten jäykkyysmatriisin ali-integrointia yhden pisteen Gaussin kaavalla.

Tavoitteena on saada interpolaatioiden avulla laskettu muodonmuutosenergian arvo yhtäsuureksi tarkan arvon kanssa kaikilla parametrien γ_0 :n ja a_3 :n arvoilla. Nyt on huomattava, että tarkassa ratkaisussa (9.58a) parametrit γ_0 ja a_3 eivät voi olla

³Pilkku suureen oikeassa yläkulmassa merkitsee nyt derivointia x -koordinaatin suhteen.

riippumattomia, vaan niitä sitoo leikkausvoiman Q ja taivutusmomentin M välinen tasapainoyhtälö

$$Q = M' \quad \text{eli} \quad GA_s \gamma = -EI\theta'' \quad \Rightarrow \quad GA_s \gamma_0 = -48 \frac{EI}{h^3} a_3, \quad (9.66)$$

josta saadaan

$$a_3 = -\frac{GA_s h^3}{48EI} \gamma_0. \quad (9.67)$$

Sijoittamalla tämä yhtäsuuruus tarkan muodonmuutosenergian lausekkeeseen (9.64) saadaan

$$U_{ex} = \frac{1}{2} \left[32 \frac{EI}{h^3} a_2^2 + \left(1 + \frac{GA_s h^2}{12EI} \right) GA_s h \gamma_0^2 \right]. \quad (9.68)$$

Merkitään interpolaatiosta lasketun muodonmuutosenergian lausekkeessa (9.65) leikkausjäykkyyden arvoa GA_s symbolilla $(GA_s)^*$ ja otetaan huomioon yhteys (9.67), jolloin saadaan

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \left[32 \frac{EI}{h^3} a_2^2 + (GA_s)^* h \left(1 + \frac{GA_s h^2}{12EI} \right)^2 \gamma_0^2 \right]. \quad (9.69)$$

Havaitaan, että muodonmuutosenergiat (9.68) ja (9.69) ovat yhtäsuuret mikäli valitaan

$$GA_s^* = \frac{GA_s}{1 + \frac{GA_s h^2}{12EI}}. \quad (9.70)$$

Leikkausjäykkyyden redusoidun lausekkeen (9.70) ovat esittäneet W.T. Russell ja R.H. MacNeal jo 1953 palkkirakenteiden analogia-analyseissä [54]. Elementtimenetelmän yhteydessä MacNeal on johtanut lausekkeen (9.70) vuonna 1978 lähteessä [51]. Idean leikkausjäykkyyden pienentämiseen on esittänyt myös I. Fried 1973 [45], ja hän tarkastelee jäykkyydsmatriisia muodossa

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{h^3} \left[\mathbf{K}_b + \frac{2G}{E} \left(\frac{h}{t} \right)^2 \mathbf{K}_s \right], \quad (9.71)$$

jossa \mathbf{K}_b ja \mathbf{K}_s ovat jäykkyydsmatriisin taivutuksesta ja leikkauksesta syntyvät osat. Fried esitti asian korjaamiseksi leikkaustermissä esiintyvän palkin korkeuden muuttamista, eli korvaamista tekijällä h/c , jossa c on määräämätön positiivinen vakio (esimerkissämme arvo $c = \sqrt{2}$ vastaa lauseketta 9.70). Menettely pienentää myös yhtälösystemin häiriöalttiutta, mikä on tärkeää ratkaistaessa tehtäviä tietokoneella äärellisellä laskentatarkkuudella. Sittemmin tämä strategia on saavuttanut suosion matemaatikkojen keskuudessa formuloitaessa hyvin toimivia Reissnerin-Mindlinin laattamalliin perustuvia elementtejä. Usein tämä esitetään korvaamalla leikkausjäykkyyden termissä t lausekkeella $t + \alpha h$ kaavassa (9.71) ja jossa α on ns. stabilointivakio ja h tuttuun tapaan elementin karakteristinen mitta, joka palkkielementin tapauksessa on elementin pituus.

Menettelyn matemaattinen pohja nojaa huonosti asetettujen tehtävien regularisointiteoriaan ja virheanalyysi sekaelementtimenetelmien teoriaan.

Esimerkki 9.1 Ratkaistaan jo tutuksi tullut ulokepalkki kuormitettuna nyt vain poikittaisella pistekuormalla F palkin vapaassa päässä. Otaksutaan nyt kuitenkin hieman yleisempi tapaus, jossa palkin poikkileikkaussuureet on annettu vain yleisessä muodossa I ja A_s .

Käytetään edelleen yhtä elementtiä, jolloin ratkaisuyhtälö on luvun 9.2.4 elementin tapauksessa (siis lineaarinen interpolaatio ja leikkausjäykkyyden ali-integrointi)

$$\begin{bmatrix} GA_s L^{-1} & -\frac{1}{2}GA_s \\ -\frac{1}{2}GA_s & EIL^{-1} + \frac{1}{4}GA_s L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (9.72)$$

joka saadaan dimensiottomaan muotoon

$$\frac{EA_s}{4(1+\nu)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} + 4\frac{a^2}{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2/L \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (9.73)$$

missä on merkitty

$$\beta = \frac{A_s r^2}{I(1+\nu)} \quad \text{ja} \quad a = \frac{r}{L}. \quad (9.74)$$

Palkin pään taipumaksi saadaan siten

$$\frac{v_2}{L} = \left(\frac{1}{4} + 2\frac{a^2}{\beta} \right) \frac{FL^2}{EI}. \quad (9.75)$$

Timoshenkon palkkimallin mukainen taipuman tarkka ratkaisu on

$$\frac{v_{2,\text{tarkka}}}{L} = \frac{1}{3} \frac{FL^2}{EI} + \frac{F}{GA_s} = \left(\frac{1}{3} + 2\frac{a^2}{\beta} \right) \frac{FL^2}{EI}. \quad (9.76)$$

Virhe ulokkeen pään taipumassa on siten -25%.

Mikäli elementissä käytetään leikkausjäykkyyden redusointia (9.70) saadaan yhdellä elementillä tarkka taipuman arvo.

Myös muille kuormitustapauksille saadaan solmupisteissä tarkat siirtymän arvot mikäli kuormitusvektoria integroitaessa käytetään taipumalle rajoitteen (9.49a) mukaista kvadraattista interpolaatiota

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 \Delta v = N_1 v_1 + N_2 v_2 - \frac{1}{8} h^{(e)} (\theta_2 - \theta_1) N_3. \quad (9.77)$$

9.2.5.2 Redusoidun leikkausjäykkyyden vaihtoehtoinen johtotapa

Leikkausjäykkyyden korjauskertoimen lauseke (9.70) voidaan saada myös ilman energiataarkastelua, operoiden pelkästään interpolaatiofunktioilla. Lähtökohtana on tasapainoyhtälön

$$Q - M' = GA_s (v' - \theta) + EI\theta'' = 0 \quad (9.78)$$

keskimääräinen toteutuminen elementin alueella. Jotta tasapainoyhtälön testaaminen onnistuu on kiertymän interpolaatio oltava vähintään kvadraattinen. Yksinkertaisin mahdollinen interpolaatio on siten lineaarinen taipuma ja kvadraattinen kiertymä:

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)v_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)v_2, \quad (9.79a)$$

$$\begin{aligned} \theta &= N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + N_3 \Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2 + (\xi^2 - 1)\Delta\theta. \end{aligned} \quad (9.79b)$$

Tasapainoyhtälön (9.78) toteutuminen keskimääräisesti

$$\frac{h}{2} \int_{-1}^1 [GA_s(v' - \theta) + EI\theta''] d\xi = 0, \quad (9.80)$$

mahdollistaa kiertymän hierarkista kuplamuotoa vastaavan parametrin eliminoimisen, josta saadaan

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{3GA_s h^2}{24EI + 2GA_s h} \left[\frac{1}{h}(v_1 - v_2) + \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \\ &= \frac{GA_s h^2}{8EI} \frac{1}{1 + \frac{GA_s h^2}{12EI}} \left[\frac{1}{h}(v_1 - v_2) + \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right]. \end{aligned} \quad (9.81)$$

Elementin virtuaalisen työn yhtälön termissä

$$\int Q \delta\gamma dx \quad (9.82)$$

leikkausvoima lasketaan tasapainoyhtälön (9.78) avulla:

$$Q = -EI\theta'' = -\frac{8EI}{h^2} \Delta\theta = \frac{GA_s}{GA_s h^2} \left[\frac{1}{h}(v_2 - v_1) - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right]. \quad (9.83)$$

Virtuaalinen muodonmuutos on tavalliseen tapaan

$$\delta\gamma = \delta v' - \delta\theta \quad (9.84)$$

laskettuna elementin keskipisteessä, eli

$$\delta\gamma = \frac{1}{h}(\delta v_2 - \delta v_1) - \frac{1}{2}(\delta\theta_1 + \delta\theta_2). \quad (9.85)$$

Näin konstruoitu elementti on identtinen lineaarisen Timoshenkon palkkielementin kanssa, joka integroidaan yhden pisteen kaavalla ja johon sovelletaan leikkausjäykkyyden redusointia (9.70). Tätä ideaa voidaan soveltaa myös stabiloitujen Reissnerin-Mindlinin laattaelementtien yhteydessä (ks. luku 10.8), mikäli stabilointiparametrille α halutaan fyysikaalisesti mielekäs arvo.

9.2.6 Viisivapausasteinen elementti

Tarkastellaan vielä lopuksi yhtä Timoshenkon palkkimallin elementtiä. Mikäli taivutusmomentille halutaan lineaarinen lauseke, on kiertymän oltava parabolinen. Tällöin, jotta elementillä olisi mahdollisuus toteuttaa Bernoullin otaksuma, on taipuman oltava kolmatta astetta oleva polynomi. Käytetään hierarkisia muotoja nyt kaikille 'lisävapausasteille', joten interpolaatioiksi valitaan lausekkeet

$$\begin{aligned} v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 \Delta v_1 + N_4 \Delta v_2, \\ &= \frac{1}{2}(1 - \xi)v_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)v_2 + (\xi^2 - 1)\Delta v_1 + (\xi^3 - \xi)\Delta v_2, \end{aligned} \quad (9.86a)$$

$$\begin{aligned} \theta &= N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + N_3 \Delta \theta \\ &= \frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2 + (\xi^2 - 1)\Delta \theta. \end{aligned} \quad (9.86b)$$

Leikkausmuodonmuutoksen lausekkeeksi saadaan nyt

$$\gamma = g_0 + g_1 \xi + g_2 \xi^2, \quad (9.87)$$

jossa

$$g_0 = \frac{1}{h}(v_2 - v_1 - 2\Delta v_2) - \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_1) + \Delta \theta, \quad (9.88a)$$

$$g_1 = \frac{4}{h}\Delta v_1 + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2), \quad (9.88b)$$

$$g_2 = \frac{6\Delta v_2}{h} - \Delta \theta, \quad (9.88c)$$

jossa elementin pituuden h symbolista on elementtiä indikoiva merkintä (e) jätetty yksinkertaisuuden vuoksi pois. Kun taivutusmomentti on lineaarisesti muuttuva, on leikkausvoima momentin derivaattana vakio. Täten tuntuu luonnolliselta asettaa vaatimus leikkausmuodonmuutoksen vakioisuudesta elementin alueella. Näin kolmesta lisävapausasteesta Δv_1 , Δv_2 ja $\Delta \theta$ voidaan kaksi eliminoida rajoitteilla

$$g_1 = \frac{4}{h}\Delta v_1 + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) = 0, \quad (9.89a)$$

$$g_2 = \frac{6\Delta v_2}{h} - \Delta \theta = 0. \quad (9.89b)$$

Eliminoidaan taipuman hierarkiset muodot:

$$\Delta v_1 = \frac{1}{8}h(\theta_2 - \theta_1), \quad (9.90a)$$

$$\Delta v_2 = \frac{1}{6}h\Delta \theta. \quad (9.90b)$$

Elementin jää nyt viisi vapausastetta $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2, \Delta \theta$. Kiertymän hierarkinen vapausaste voidaan toki kondensoida elementtitasolla, joten elementin vapausasteiden määrä saadaan redusoitua neljään.

9.3 Diskreetti EB-palkkimallin elementti

9.3.1 Tapa 1: kuubinen taipuma, kvadraattinen kiertymä

Rajoittamalla leikkausmuodonmuutos kokonaan häviämään, saadaan Timoshenkon palkkimallin avulla muodostettu Eulerin-Bernoullin palkkimallin elementti. Otaksamalla taipumalle ja kiertymälle interpolaatio (9.86a) ja rajoittamalla leikkausmuodonmuutoksen lauseke (9.87) nolaksi saadaan ehtojen (9.89a) lisäksi myös rajoite

$$g_0 = \frac{1}{h}(v_2 - v_1 - 2\Delta v_2) - \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_1) + \Delta\theta = 0, \quad (9.91)$$

josta seuraa kiertymän hierarkiselle vapausasteelle arvo

$$\Delta\theta = \frac{3}{2}\frac{v_1 - v_2}{h} + \frac{3}{4}(\theta_1 + \theta_2). \quad (9.92)$$

Taipuman interpolaatiolle saadaan nyt lauseke

$$\begin{aligned} v &= N_1v_1 + N_2v_2 + N_3\frac{h}{8}(\theta_2 - \theta_1) + N_4\frac{1}{6}h\Delta\theta \\ &= (N_1 + \frac{1}{4}N_4)v_1 + \frac{1}{8}h(N_4 - N_3)\theta_1 + (N_2 - \frac{1}{4}N_4)v_2 + \frac{1}{8}h(N_3 + N_4)\theta_2. \end{aligned} \quad (9.93)$$

Kiertymän interpolaatio on

$$\begin{aligned} \theta &= N_1\theta_1 + N_2\theta_2 + N_3\Delta\theta \\ &= (N_1 + \frac{3}{4}N_3)\theta_1 + (N_2 + \frac{3}{4}N_3)\theta_2 + \frac{3}{2}N_3\frac{v_1 - v_2}{h}. \end{aligned} \quad (9.94)$$

Koska leikkausmuodonmuutos häviää, voidaan Timoshenkon palkkimallin virtuaalisen työn yhtälöstä jättää leikkausmuodonmuutosta vastaava termi pois, jolloin saadaan yhtälö

$$\int_0^L EI\theta'\delta\theta' dx = \int_0^L f v dx, \quad (9.95)$$

jonka perusteella elementin jäykkyysmatriisi ja kuormitusvektori voidaan johtaa.

Leikkausmuodonmuutosrajoitteet $g_0 = g_1 = g_2 = 0$ voidaan toteuttaa myös pisteittäisesti eli diskreetisti. Kolmen ehdon toteutumiseen vaaditaan tietenkin rajoitteen asettaminen kolmessa eri pisteessä. Valitaan näiksi pisteiksi Gaussin pisteet $\xi = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}, 0$. Rajoiteyhtälöt ovat siten

$$\gamma(-\sqrt{\frac{3}{5}}) = g_0 - \sqrt{\frac{3}{5}}g_1 + \frac{3}{5}g_2 = 0, \quad (9.96a)$$

$$\gamma(0) = g_0 = 0, \quad (9.96b)$$

$$\gamma(+\sqrt{\frac{3}{5}}) = g_0 + \sqrt{\frac{3}{5}}g_1 + \frac{3}{5}g_2 = 0. \quad (9.96c)$$

Rajoitteiden asettaminen voidaan ohjelmointiteknisesti toteuttaa suoraan siirtymämuodonmuutosmatriisiin \mathbf{B} .

9.3.2 Tapa 2: sekä taipuma että kiertymä kvadraattinen

Periaatteeseen (9.95) perustuvan elementin käyristymä on interpolaation (9.94) tapauksessa lineaarinen lauseke. Täten elementin jäykkyysmatriisia muodostettaessa joudutaan integroimaan toisen asteen polynomi, joka integroituisi tarkasti jo kahden pisteen Gaussin kvadratuurilla. Otaksumalla taipumalle kvadraattinen interpolaatio

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 \Delta v \quad (9.97)$$

kuubisen lausekkeen (9.86aa) sijaan, on eliminotavana ainoastaan kaksi hierarkista lisävapausastetta Δv ja $\Delta\theta$. Siitä huolimatta leikkausmuodonmuutoksen lauseke on kvadraattinen, eli

$$\gamma = g_0 + g_1 \xi + g_2 \xi^2, \quad (9.98)$$

missä

$$g_0 = \frac{1}{h}(v_2 - v_1) - \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_1) + \Delta\theta, \quad (9.99a)$$

$$g_1 = \frac{4}{h}\Delta v + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2), \quad (9.99b)$$

$$g_2 = -\Delta\theta. \quad (9.99c)$$

Mikäli leikkausmuodonmuutos (9.98) vaaditaan häviämään Gaussin kahden pisteen kaavan integroimispisteissä $\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, on lineaarisen termin kertoimen g_1 hävitävä, eli

$$g_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta v = \frac{1}{8}h(\theta_2 - \theta_1), \quad (9.100)$$

joten Δv saatiin eliminotua. Jäljelle jäänyt ainoa eliminotava vapausaste $\Delta\theta$, voidaan ratkaista ehdosta

$$\gamma(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}) = g_0 + \frac{1}{3}g_2 = 0, \quad (9.101)$$

josta seuraa kiertymän hierarkiselle vapausasteelle arvo

$$\Delta\theta = \frac{3}{2} \frac{v_1 - v_2}{h} + \frac{3}{4}(\theta_1 + \theta_2), \quad (9.102)$$

mikä on identtinen ensimmäisellä tavalla saadun arvon (9.92) kanssa. Täten myös kiertymän interpolaatio on sama kummallakin tavalla muodostettaessa ja vastaavat elementtien jäykkyysmatriisit ovat identtiset.

Kun elementtimatriisin alkiot integroidaan kahden pisteen Gaussin kvadratuurilla häviävät leikkausmuodonmuutokseen liittyvät termit elementtimenetelmän kannalta 'identtisesti', sillä kaikki informaatio tulee integroimispisteistä.

Esimerkki 9.2 Määritä ns. diskreetin Eulerin-Bernoullin palkkielementin jäykkyysmatriisi otaksumalla taipumalle ja kiertymälle kvadraattinen lauseke. Ota Bernoullin otaksuma huomioon diskreetisti kahdessa Gaussin pisteessä ja suorita elementtimatriisin integrointi numeerisesti kahden pisteen Gaussin kaavalla. Elementtimatriisin lauseke on

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} E I \mathbf{N}_{\theta,x}^T \mathbf{N}_{\theta,x} dx, \quad (9.103)$$

jossa \mathbf{N}_θ on kiertymän θ interpolaatiofunktioit sisältävä matriisi.

Kiertymän interpolaatio on siten

$$\begin{aligned}\theta &= (N_1 + \frac{3}{4}N_3)\theta_1 + (N_2 + \frac{3}{4}N_3)\theta_1 + \frac{3}{2}N_3\frac{v_1 - v_2}{h} \\ &= \frac{3}{2}(\xi^2 - 1)\frac{v_1}{h} + \frac{3}{2}(1 - \xi^2)\frac{v_2}{h} + (\frac{3}{4}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{4})\theta_1 + (\frac{3}{4}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{4})\theta_2 \\ &= \tilde{N}_1v_1 + \tilde{N}_2\theta_2 + \tilde{N}_3v_2 + \tilde{N}_4\theta_2\end{aligned}\quad (9.104)$$

Jäykkyysmatriisin muodostamista varten tarvitaan kiertymän derivaattaa

$$\theta_{,\xi} = \tilde{N}_{1,\xi}v_1 + \tilde{N}_{2,\xi}\theta_1 + \tilde{N}_{3,\xi}v_2 + \tilde{N}_{4,\xi}\theta_2, \quad (9.105)$$

jossa siis

$$\begin{aligned}\tilde{N}_{1,\xi} &= \frac{3\xi}{h}, & \tilde{N}_{2,\xi} &= \frac{1}{2}(3\xi - 1), \\ \tilde{N}_{3,\xi} &= -\frac{3\xi}{h}, & \tilde{N}_{4,\xi} &= \frac{1}{2}(1 + 3\xi).\end{aligned}\quad (9.106)$$

Jäykkyysmatriisin alkio on muotoa

$$K_{ij}^{(e)} = \int EI\tilde{N}_{i,x}\tilde{N}_{j,x}dx = \frac{2}{h} \int_{-1}^1 EI\tilde{N}_{i,\xi}\tilde{N}_{j,\xi}d\xi, \quad (9.107)$$

joten alkioiden lausekkeet ovat (otaksutaan taivutusjäykkyys vakioksi)

$$\begin{aligned}K_{11}^{(e)} &= \frac{2}{h}EI \int_{-1}^1 \left(\frac{3\xi}{h}\right)^2 d\xi = \frac{18EI}{h^3} \int_{-1}^1 \xi^2 d\xi = \frac{18EI}{h^3} \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \right] \\ &= \frac{12EI}{h^3},\end{aligned}\quad (9.108a)$$

$$K_{12}^{(e)} = \frac{2EI}{h} \int_{-1}^1 \frac{3\xi}{h} \frac{1}{2}(3\xi - 1) d\xi = \frac{3EI}{h^2} \int_{-1}^1 (3\xi^2 - \xi) d\xi = \frac{6EI}{h^2}, \quad (9.108b)$$

$$K_{13}^{(e)} = \frac{2EI}{h} \int_{-1}^1 \left(\frac{3\xi}{h}\right) \left(-\frac{3\xi}{h}\right) d\xi = -K_{11}^{(e)} \quad (9.108c)$$

jne.. Havaitaan, että saatiin sama standardi Eulerin-Bernoullin palkkimallin jäykkyysmatriisi jossa taipumalle käytetään Hermiten kuubisia polynomeja.

9.4 Harjoitustehtäviä

1. Tutki ratkaisuyhtälön häiriöalttiutta lineaarisesti interpoloidun Timoshenkon palkkielementin tapauksessa esimerkin ulokepalkille yhden elementin verkolla. Tutki tapaukset: (a) ali-integroitu elementti ja (b) stabiloitu eli leikkausjäykkyydeltään redusoitu ali-integroitu elementti. Symmetrisen positiivisesti definiitin matriisin \mathbf{K} häiriöalttiutta $C_2(\mathbf{K})$ voidaan laskea suhteena

$$C_2 = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}, \quad (9.109)$$

missä λ_{max} ja λ_{min} ovat matriisin \mathbf{K} suurin ja pienin ominaisarvo. Piirrä kuvaajat suhteen $a = t/L$ funktiona välillä $10^{-3} < a < 1$ logaritmisella asteikolla. Tällöin (a) kohdan kuvaaja on suora, ja häiriöalttiuden paksuusriippuvuus on siten muotoa

$$C_2(\mathbf{K}) \sim ct^p, \quad (9.110)$$

missä c on jokin positiivinen vakio ja p on kokonaisluku, mikä? Entä stabiloidun elementin tapaus (c)? Mitä johtopäätelmiä elementtien käyttökelpoisuudesta voidaan tehdä?

Oleta suorakaidepoikkileikkaus ja että $A_s = A$, sekä $\nu = 0$.

2. Näytä, että interpolaatiofunktioit lausekkeessa (9.93) ovat samat kuin Hermiten kuubiset interpolaatiofunktioit (9.17).
3. Muodosta Eulerin-Bernoullin palkkimalliin perustuvan nelivapausasteisen elementin kiertymän θ interpolaatiofunktioit lähtien Timoshenkon palkkimallista, jossa taipumalla v ja kiertymällä θ on erilliset C_0 -interpolaatioit:

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)v_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)v_2, \quad (9.111a)$$

$$\begin{aligned} \theta &= N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + N_3 \Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2 + (\xi^2 - 1)\Delta\theta. \end{aligned} \quad (9.111b)$$

Kiertymän interpolaation $\Delta\theta$ vapausaste eliminoidaan soveltamalla Bernoullin rajoitetta diskreetisti palkin keskipisteessä $\xi = 0$. Lopulliset vapausasteet ovat tietenkin $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$. Mikäli vapausasteet numeroidaan edellä kirjoitetussa järjestyksessä, laske elementin jäykkyysmatriisin alkiot K_{ij} .

4. Kuten edellisessä tehtävässä muodosta Eulerin-Bernoullin palkkimalliin perustuvan nelivapausasteisen elementin kiertymän θ interpolaatiofunktioit lähtien Timoshenkon palkkimallista. Taipumalle ja kiertymälle käytetään samoja interpolaatioita kuin edellisessä tehtävässä. Kiertymän interpolaation $\Delta\theta$ vapausaste eliminoidaan soveltamalla Bernoullin rajoitetta *keskimääräisesti elementin alueella*

$$\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \gamma dx = 0. \quad (9.112)$$

Lopulliset vapausasteet ovat tietenkin $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$. Mikäli vapausasteet numeroidaan edellä kirjoitetussa järjestyksessä, laske elementin jäykkyysmatriisin alkiot K_{ij} . Vertaa tulosta edellisen tehtävän ratkaisuun.

5. Timoshenkon palkkimallin tasapainoyhtälöt ovat:

$$M' - Q = 0, \quad (9.113a)$$

$$-Q' = f, \quad (9.113b)$$

jotka voidaan kirjoittaa konstitutiivisen lain ja kinemaattisten relaatioiden avulla muotoon (oletetaan EI ja GA_s vakioiksi)

$$-EI\theta'' - GA_s(v' - \theta) = 0, \quad (9.114a)$$

$$-GA_s(v'' - \theta') = f. \quad (9.114b)$$

Systeemissä on siten kaksi tuntematonta funktiota: taipuma v ja poikkileikkaustason kiertymä θ . Timoshenkon palkki-probleema voidaan myös formuloida kolmen tuntemattoman avulla, lisäämällä leikkausvoima primaarisesti ratkaistavien suureiden joukkoon seuraavasti:

$$-EI\theta'' - Q = 0, \quad (9.115a)$$

$$-Q' = f, \quad (9.115b)$$

$$GA_s(v' - \theta) - Q = 0, \quad (9.115c)$$

Näytä, että kertomalla yllä olevat yhtälöt painofunktioilla $\hat{\theta}$, \hat{v} ja \hat{Q} ja integroimalla palkin pituuden yli, päädytään lopulta seuraavanlaiseen variaatioyhtälöön (oletetaan jäykästi tuetut reunaehdot):

$$EI \int_0^L \theta' \hat{\theta}' dx + \int_0^L Q(\hat{v}' - \hat{\theta}) dx = \int_0^L f \hat{v} dx, \quad (9.116a)$$

$$GA_s \int_0^L (v' - \theta) \hat{Q} dx - \int_0^L Q \hat{Q} dx = 0. \quad (9.116b)$$

Yllä oleva systeemi voidaan stabiloida lisäämällä elementtikohtaisesti määritellyt termit

$$\sum_{e=1}^N \alpha h^2 \int_{I^{(e)}} (EI\theta'' + Q) \hat{\theta}'' dx, \quad (9.117a)$$

$$\sum_{e=1}^N \alpha h^2 \frac{GA_s}{EI} \int_{I^{(e)}} (EI\theta'' + Q) \hat{Q} dx \quad (9.117b)$$

yhtälöiden (9.116a) oikealle puolelle. Näin päädytään seuraavanlaiseen systeemiin:

$$EI \int_0^L \theta' \hat{\theta}' dx + \int_0^L Q(\hat{v}' - \hat{\theta}) dx = \int_0^L f \hat{v} dx + \sum_{e=1}^N \alpha h^2 \int_{I^{(e)}} (EI\theta'' + Q) \hat{\theta}'' dx,$$

$$GA_s \int_0^L (v' - \theta) \hat{Q} dx - \int_0^L Q \hat{Q} dx = \sum_{e=1}^N \alpha h^2 \frac{GA_s}{EI} \int_{I^{(e)}} (EI\theta'' + Q) \hat{Q} dx.$$

Yhtälöissä esiintyvä stabilointiparametri α on positiivinen vakio. Miksi stabilointitermit (9.117a) voidaan lisätä variaatiomuotoon (9.116a)? Näytä, että stabiloitu systeemi voidaan termien uudelleenjärjestelyllä muuntaa symmetriseen muotoon. Näytä lisäksi, että olettamalla leikkausvoiman elementtiapproksimaatio elementtirajojen yli epäjatkovaksi, saadusta symmetristä muodosta voidaan leikkausvoima Q elementtikohtaisesti eliminoida, ja jolloin päädytään siirtymämenetelmään perustuvan elementtimenetelmän perustaksi kelpaavaan heikkoon muotoon:

$$\begin{aligned} EI \int_0^L \theta' \hat{\theta}' dx - \sum_{e=1}^N \alpha h^2 EI \int_{I^{(e)}} \theta'' \hat{\theta}'' dx + \\ + \sum_{e=1}^N \frac{GA_s}{1 + \alpha h^2 GA_s / EI} \int_{I^{(e)}} (v' - \theta - \alpha h^2 \theta'') (\hat{v}' - \hat{\theta} - \alpha h^2 \hat{\theta}'') dx \\ = \int_0^L f \hat{v} dx. \end{aligned} \quad (9.118)$$

6. Ratkaise molemmista päästään vapaasti tuettu palkki elementtimenetelmällä, joka perustuu edellisen tehtävän stabiloituun formulaatioon (9.118). Käytä yhtä elementtiä ja kvadraattista interpolaatiota sekä v :lle että θ :lle. Ota huomioon symmetria. Kuormituksena on vakiokuorma f .

Tehtävän jäykkyyssmatriisiin jää riippuvuus stabilointiparametrin α . Koska taivutusenergiaan liittyvä termi

$$EI \int_0^L \theta' \hat{\theta}' dx - \sum_{e=1}^N \alpha h^2 EI \int_{I^{(e)}} \theta'' \hat{\theta}'' dx \quad (9.119)$$

on oltava positiivisesti definiitti, rajoittaa se stabilointiparametrin sallitut arvot välille:

$$0 < \alpha < C. \quad (9.120)$$

Määritä C ja käytä tehtävän ratkaisussa jotain positiivisuusehdon (9.120) toteuttavaa arvoa. Määritä ja piirrä myös elementtiratkaisun leikkausvoimajakauma.

Luku 10

Laattaelementtejä

Tämä luku noudattaa edellisen luvun, eli palkkimalleihin perustuvien elementtien esittelyn, kaltaista jaottelua. Ensin selvitetään ohuen laatan mallia, jota kutsutaan myös Kirchhoffin laattamalliksi,¹ jonka jälkeen esitellään keskimääräiset poikittaiset leikkausmuodonmuutokset huomioonottavaa laattamallia, jota kutsutaan kehittelijöidensä mukaan myös Reissnerin-Mindlinin laattamalliksi. Lopuksi esitellään diskreetti-Kirchhoff-tyyppisiä elementtejä, joiden lähtökohta on Reissnerin-Mindlinin malli² ja joista saadaan Kirchhoffin mallin mukaisia sopivien rajoitteiden asettamisella.

10.1 Kirchhoffin laattamalli

10.1.1 Kinemaattiset otaksumat

Aivan vastaavasti kuin ohuen palkin tapauksessa, ohuen laatan mallin perusotaksumat ovat:

1. laatan keskipinnan normaalit säilyvät suorina deformaation aikana,
2. laatan keskipinnan normaalit eivät veny ja
3. poikittaiset leikkausmuodonmuutokset ovat merkityksettömiä.

Otaksumat nyt laatan keskipinnan tasoksi xy -taso. Kaksi ensimmäistä otaksumaa voidaan toteuttaa valitsemalla siirtymille u, v ja w seuraavat lausekkeet:

$$u(x, y, z) = z\theta_y(x, y), \quad (10.1a)$$

$$v(x, y, z) = -z\theta_x(x, y), \quad (10.1b)$$

$$w(x, y, z) = w_c(x, y), \quad (10.1c)$$

jossa akselien x ja y ympäri kiertävät rotaatiot ovat θ_x ja θ_y , ks. kuva 10.1. Huomaa, että oheiset linearisoidut lausekkeet voidaan kirjoittaa vain, jos kiertymät θ_x

¹Gustave Robert Kirchhoff (1824-1887) julkaisi 1850 artikkelin, jossa ohuen laatan ongelma esitettiin ensimmäistä kertaa täydellisesti formuloituna.

²E. Reissner 1945 ja R.D. Mindlin 1951

ja θ_y ovat pieniä. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi jätetään jatkossa keskipintaa osoittava alaindeksi c pois laatan taipuman w lausekkeesta.

Laattateoriassa käytetään usein kiertymille toisenlaista merkintätapaa. Määritellään kiertymät, katso kuva 10.1, ³

$$\beta_x = -\theta_y, \quad \beta_y = \theta_x. \quad (10.2)$$

Tällöin kinemaattiset otaksumat (10.1a) voidaan kirjoittaa muodossa

$$u(x, y, z) = -z\beta_x(x, y), \quad (10.3a)$$

$$v(x, y, z) = -z\beta_y(x, y), \quad (10.3b)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y). \quad (10.3c)$$

Edellä esitettyihin siirtymäotaksumiin perustuvat muodonmuutoskomponentit ovat

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\beta_{x,x}, \quad (10.4a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\beta_{y,y}, \quad (10.4b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}), \quad (10.4c)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = w_{,x} - \beta_x, \quad (10.4d)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = w_{,y} - \beta_y. \quad (10.4e)$$

Kirchhoffin laattamallin otaksuman 3 perusteella poikittaiset leikkausmuodonmuutokset γ_{zx} ja γ_{zy} häviävät, joten

$$w_{,x} = \beta_x, \quad w_{,y} = \beta_y, \quad (10.5)$$

ja lopulliset kinemaattiset yhtälöt ovat muotoa

$$u(x, y, z) = -zw_{,x}, \quad (10.6a)$$

$$v(x, y, z) = -zw_{,y}, \quad (10.6b)$$

$$w(x, y, z) = w. \quad (10.6c)$$

Ainoat nolasta eroavat muodonmuutoskomponentit ovat

$$\epsilon_x = -zw_{,xx} = z\kappa_x, \quad (10.7a)$$

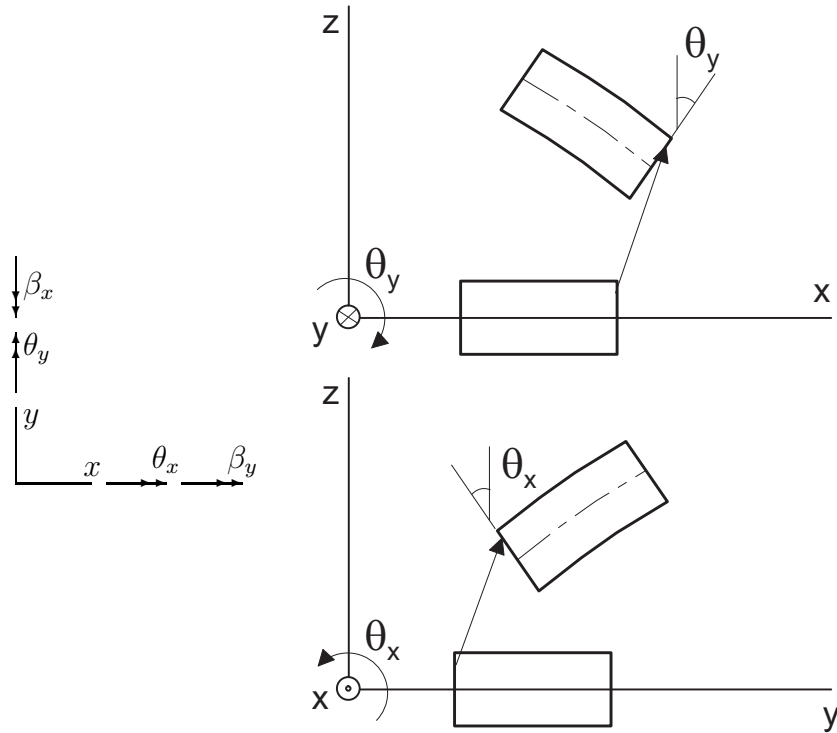
$$\epsilon_y = -zw_{,yy} = z\kappa_y, \quad (10.7b)$$

$$\gamma_{xy} = -2zw_{,xy} = z\kappa_{xy}, \quad (10.7c)$$

missä κ_x ja κ_y ovat keskipinnan käyrityksiä ja κ_{xy} on vääntymä.⁴

³Joissain lähteissä määritellään $\beta_x = \theta_y$ ja $\beta_y = -\theta_x$.

⁴Tässä esityksessä käytetään "vääntymälle" määritelmää $\kappa_{xy} = -2w_{,xy}$.



Kuva 10.1 Laatan deformaatio ja kiertymäsuureiden määritelmät.

10.1.2 Virtuaalisen työn yhtälö

Kirchhoffin laattamallin virtuaalisen työn yhtälö on

$$\begin{aligned} & \int_A \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dz dA \\ &= \int_A f \delta w dA + \int_{\Gamma_t} (\bar{V}_n \delta w - \bar{M}_n \delta w_{,n}) ds, \end{aligned} \quad (10.8)$$

missä Γ_t on tasoalueen A reunakäyrän osa, jolla on annettu reunakuormituksena korvikeleikkausvoima \bar{V}_n ja momentti \bar{M}_n . Korvikeleikkausvoiman lauseke on $V_n = Q_n + M_{ns,s}$. Laatan reunan osalla S_w tunnetaan siirtymät, eli

$$w = \bar{w}, \quad w_{,n} = \bar{w}_{,n}. \quad (10.9)$$

Integroimalla laatan paksuuden yli, muuntuu virtuaalisen työn yhtälö muotoon

$$\begin{aligned} & \int_A (M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + M_{xy} \delta \kappa_{xy}) dA \\ &= \int_A f \delta w dA + \int_{\Gamma_\sigma} (\bar{V}_n \delta w - \bar{M}_n \delta w_{,n}) ds, \end{aligned} \quad (10.10)$$

jossa taivutusmomentit M_x , M_y ja vääntömomentti M_{xy} määritellään kaavoilla

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_x dz, \quad M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_y dz, \quad M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \tau_{xy} dz. \quad (10.11)$$

Otaksutaan laatussa vallitsevan tasojäännitystilän, joten jännitykset saadaan lineaarisesti kimmoisan isotrooppisen materiaalin tapauksessa yhtälöistä

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (10.12)$$

Huomaa, että tasojäännitystilaotaksuma on ristiriidassa otaksuman 2 kanssa, joka edellyttäisi tasomuodonmuutostilaa. Mikäli näin valittaisiin, tulisi laattamallista liian jäykkä. Voidaan kuitenkin osoittaa, että kyseinen laattamalli on oikea redusointi yleisestä kolmidimensioisesta jännitys- ja muodonmuutostilasta, ja laattamalli konvergoi tätä kohti, kun laatan paksuus pienenee.

Sijoittamalla tasomuodonmuutostilan yhtälöt ja kinemaattiset otaksumat momenttien määrittely-yhtälöihin saadaan niille lausekkeet

$$M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_y), \quad (10.13a)$$

$$M_y = D(\kappa_y + \nu\kappa_x), \quad (10.13b)$$

$$M_{xy} = \frac{1}{2}D(1-\nu)\kappa_{xy}, \quad (10.13c)$$

missä D on laatan taivutusjäykkyys

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (10.14)$$

Otetaan käyttöön käyritymien ja momenttien vektorit $\boldsymbol{\kappa}$ ja \boldsymbol{m} :

$$\boldsymbol{\kappa} = [\kappa_x \quad \kappa_y \quad \kappa_{xy}]^T, \quad \boldsymbol{m} = [M_x \quad M_y \quad M_{xy}]^T. \quad (10.15)$$

Laatan jännitysresultanttien ja käyritymien välinen yhteys on

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{D}_b \boldsymbol{\kappa}, \quad (10.16)$$

missä

$$\boldsymbol{D}_b = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}. \quad (10.17)$$

Virtuaalisen työn lauseke (10.10) saadaan kompaktiin muotoon

$$\int_A \boldsymbol{\delta\kappa}^T \boldsymbol{m} dA = \int_A \boldsymbol{\delta\kappa}^T \boldsymbol{D}_b \boldsymbol{\kappa} dA = \int_A f \delta w dA + \int_{S_\sigma} (\bar{V}_n \delta w - \bar{M}_n \delta w_{,n}) ds. \quad (10.18)$$

Tämä voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\begin{aligned} & \int_A \begin{Bmatrix} -\delta w_{,xx} \\ -\delta w_{,yy} \\ -2\delta w_{,xy} \end{Bmatrix}^T D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{Bmatrix} dA \\ &= \int_A f \delta w dA + \int_{S_\sigma} (\bar{V}_n \delta w - \bar{M}_n \delta w_{,n}) ds. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Otaksumalla elementtimenetelmän mukainen interpolaatio taipumafunktiolle

$$w = \mathbf{N} \mathbf{w}^{(e)}, \quad (10.20)$$

missä $\mathbf{w}^{(e)}$ pitää sisällään elementin vapausasteet, saadaan elementin jäykkyyismatriisiksi tutunnäköinen lauseke

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B} dA, \quad (10.21)$$

missä siirtymä-käyritysmatriisi \mathbf{B} on

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{N}_{,xx} \\ -\mathbf{N}_{,yy} \\ -2\mathbf{N}_{,xy} \end{bmatrix}, \quad (10.22)$$

jonka avulla voidaan lausua käyritysmävektori

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B} \mathbf{w}^{(e)}. \quad (10.23)$$

10.1.3 Ohuen laatan elementin yhteensopivuus- ja täydellisyysvaatimukset

Elementin koon pienentyessä verkkoa tihennettäessä lähestyy taipuma elementin alueella tilaa, joka koostuu jäykänkappaleen liikkeestä ja vakiokaarevuustilasta. Vakiokaarevuustila on yksinkertaisin taipumamuoto, joka aiheuttaa laattaan muodonmuutoksia. Päätellään, että elementin taipumainterpolaation on toteutettava seuraavat *täydellisyysvaatimukset*:

- w :n täytyy sisältää jäykänkappaleen liikettä kuvaavat termit,
- ja taipuman approksimaation tulee pystyä esittämään vakiokaarevuustilat.

Ensimmäisen vaatimuksen perusteella w :n lausekkeen tulee sisältää termit

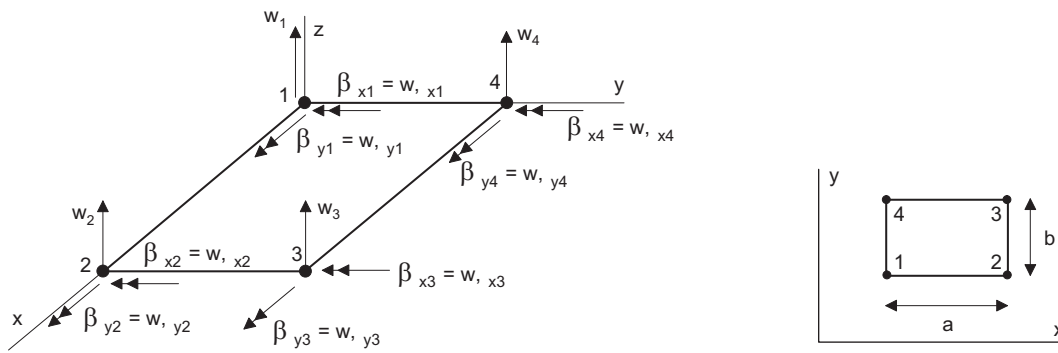
$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \quad (10.24)$$

Toisen ehdon toteuttamiseksi tarvitaan lisäksi vähintään toisen asteen termit, eli yhteensä

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2. \quad (10.25)$$

Kuten Eulerin-Bernoullin palkkimallin tapauksessakin, on virtuaalisen työn lausekkeessa taipuman toisia derivaattoja. *Yhteensopivuusvaatimus* johtaa siihen, että interpolaatiofunktioiden on oltava C_1 -jatkuvia, eli itse funktion ja sen derivaattojen tulee olla jatkuvia elementistä toiseen.

Täydellisyysvaatimukset ovat ehdottomia. Sensijaan jatkuvuusvaatimuksia voidaan lieventää, jolloin elementistä tulee ei-yhteensopiva eli ei-konforminen. Elementin on oltava kuitenkin numeerisesti stabiili ja konsistentti, jotta tulokset suppenisivat kohti oikeita arvoja. Alhaisasteisiin polynomeihin perustuvien laattaelementtien



Kuva 10.2 12 vapausasteinen suorakaide-elementti (ACM).

kehittäminen on osoittautunut hyvin hankalaksi tehtäväksi. Useimmat ohuen laatan, eli Kirchhoffin laattamallin, elementit ovat ei-konformisia.

Ei-konformisten elementtien suppenevuusominaisuuksien todistaminen on hankalaa ja se sivuutetaan tässä esityksessä.

10.2 Laattaelementtejä historian lehdiltä

10.2.1 Suorakaide-elementti

Eräs ensimmäisiä laattaelementtejä on 12 vapausasteinen suorakaidelattaelementti, jota kutsutaan myös ACM-elementiksi kehittelijöidensä A. Adini, R. Clough (1961) ja R.J. Melosh (1963) mukaan. Vapausasteina solmuissa ovat taipuma ja sen derivaatat $w_i, w_{i,x}, w_{i,y}$ tai taipuma ja kiertymät koordinaattiakseleiden ympäri eli $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$, katso kuva 10.2. Täten taipuman interpolaatiossa on 12 termiä, ja se voidaan esittää seuraavasti

$$w = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3] \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}, \quad (10.26)$$

missä vektori $\boldsymbol{\alpha}$ sisältää 12 yleistettyä vapausastetta $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, 12$. Lauseke toteuttaa täydellisyysvaatimukset, mutta elementti ei ole yhteensopiva.

Esimerkiksi reunalla $x = vakio$ taipuma on muotoa

$$w = A_1 + A_2y + A_3y^2 + A_4y^3, \quad (10.27)$$

ja

$$w_{,y} = A_2 + 2A_3y + 3A_4y^2, \quad (10.28)$$

missä A_1, \dots, A_4 ovat vakioita, jotka voidaan määrittää kiinnittämällä taipuman w ja sen derivaatan $w_{,y}$ arvot sivun päätepisteissä. Taipuma on siten jatkuva elementin reunan yli. Sensijaan derivaatta $w_{,x}$ on epäjatkuva reunan $x = vakio$ yli. Derivaatta $w_{,x}$ on

$$w_{,x} = B_1 + B_2y + B_3y^2 + B_4y^3, \quad (10.29)$$

missä B_1, \dots, B_4 ovat vakioita. Neljän vakion B_i määrittämiseksi on käytettävissä vain kaksi ehtoa eli derivaatan $w_{,x}$ arvot sivun päätepisteissä.

Muodostamalla kaavan (10.26) avulla $w, w_{,x}$ ja $w_{,y}$ solmuissa $1, \dots, 4$ saadaan yhteys

$$\mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{w}^{(e)}, \quad (10.30)$$

josta saadaan

$$w = \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{N}\mathbf{w}^{(e)}. \quad (10.31)$$

Interpolaatiofunktio matriisi \mathbf{N} on muotoa

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad \cdots \quad N_{12}], \quad (10.32)$$

missä solmuun i liittyvät interpolaatiopolynomit ovat

$$N_{3i-2} = \frac{1}{8}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(2 + \xi_i\xi + \eta_i\eta - \xi^2 - \eta^2), \quad (10.33a)$$

$$N_{3i-1} = -\frac{1}{16}a\xi_i(1 + \xi_i\xi)^2(1 - \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta), \quad (10.33b)$$

$$N_{3i} = -\frac{1}{16}b\eta_i(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)^2(1 - \eta_i\eta). \quad (10.33c)$$

Interpolaatiomatriisia vastaava vapausastejärjestely on

$$\mathbf{w}^{(e)} = [w_1 \quad w_{1,x} \quad w_{1,y} \quad w_2 \quad w_{2,x} \quad w_{2,y} \quad \cdots \quad w_4 \quad w_{4,x} \quad w_{4,y}]^T. \quad (10.34)$$

10.2.2 Bikuubinen suorakaide-elementti

Eräs yksinkertaisimmista hyvin toimivista laattaelementeistä on bikuubinen, eli BFS-elementti (F.K. Bogner, R.L. Fox, L.A. Schmit 1965), jossa on 16 vapausastetta, neljä vapausastetta $w_i, w_{i,x}, w_{i,y}$ ja $w_{i,xy}$ jokaisessa neljässä nurkkasolmussa. Interpolaatiofunktioina käytetään ensimmäisen asteen Hermiten polynomeja kummassakin suunnassa tulomuodossa. BFS-elementin taipuma on

$$w(x, y) = [N_1 \quad N_2 \quad \cdots \quad N_{16}] \mathbf{w}^{(e)}, \quad (10.35)$$

missä solmuun 1 liittyvät interpolaatiopolynomit ovat

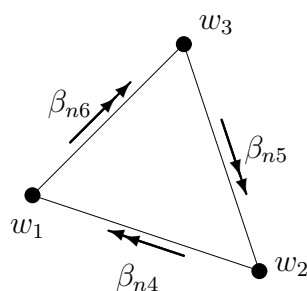
$$\begin{aligned} N_1 &= H_{01}(\xi)H_{01}(\eta), & N_2 &= \frac{1}{2}aH_{11}(\xi)H_{01}(\eta), \\ N_3 &= \frac{1}{2}bH_{01}(\xi)H_{11}(\eta), & N_4 &= \frac{1}{4}abH_{11}(\xi)H_{11}(\eta), \end{aligned} \quad (10.36)$$

ja vastaavasti solmuun 2 liittyvät interpolaatiopolynomit ovat

$$\begin{aligned} N_5 &= H_{02}(\xi)H_{01}(\eta), & N_6 &= \frac{1}{2}aH_{12}(\xi)H_{01}(\eta), \\ N_7 &= \frac{1}{2}bH_{02}(\xi)H_{11}(\eta), & N_8 &= \frac{1}{4}abH_{12}(\xi)H_{11}(\eta), \end{aligned} \quad (10.37)$$

jne.. Ensimmäisen asteen Hermiten interpolaatiofunktioit ovat (määriteltynä luonnollisten koordinaattien ξ ja η avulla välillä $(-1, 1)$) yhtälöillä (9.16a).

Elementti toteuttaa vaadittavat yhteensopivuusvaatimukset ja hieman enemmänkin, sillä myös sekaderivaatat $w_{,xy}$ ovat solmupisteissä jatkuvat, jonka perusteella elementtiä joissain lähteissä luonnehditaan $C_{1,1}$ -jatkuvaksi.



Kuva 10.3 Morleyn vakiokaarevuuselementti.

10.2.3 Morleyn vakiokaarevuuselementti

L.S.D. Morley on esittänyt 1971 kuvan 10.3 kolmiolaattaelementin, jonka taipumaa interpoloidaan funktiolla

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2. \quad (10.38)$$

Lauseke (10.38) on yksinkertaisin taipuman muoto, joka toteuttaa täydellisyysvaatimukset. Taipuman toiset derivaatat ovat vakioita, mistä johtuen myös momentit ovat vakioita elementin alueella.

Elementin vapausasteet ovat taipumat w_1, w_2 ja w_3 sekä kiertymät β_{n4}, β_{n5} ja β_{n6} , missä

$$\beta_{ni} = \frac{\partial w}{\partial n_i} \quad (10.39)$$

ja n on reunan normaalin suuntainen koordinaatti.

Ketjusäännön mukaan

$$w_{,n} = w_{,x} \frac{\partial x}{\partial n} + w_{,y} \frac{\partial y}{\partial n}, \quad (10.40)$$

eli

$$w_{,n} = w_{,x} n_x + w_{,y} n_y = (\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y) n_x + (\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y) n_y. \quad (10.41)$$

Elementin reunasuoran yhtälö on

$$y = C_1 x + C_2 \quad (10.42)$$

ja reunalla taipuma on

$$w = A_1 + A_2 x + A_3 x^2, \quad (10.43)$$

sekä

$$\frac{\partial w}{\partial n} = B_1 + B_2 x, \quad (10.44)$$

missä A_1, A_2, A_3, B_1 ja B_2 ovat vakioita.

Tietyllä reunalla voidaan kiinnittää pääty pisteiden taipumien arvot ja reunan keskipisteen kiertymän arvo, eli saadaan kolme ehtoa, jotka eivät kuitenkaan riitä

viiden vakion määrittämiseen yksikäsitteisellä tavalla. Päättellään, että sekä taipuma w että deriaatta $w_{,n}$ eli θ muuttuvat yleensä epäjatkovasti elementistä toiseen.

Morleyn elementti voidaan johtaa monella tavalla, ehkä elegantein tapa on käyttää diskreetti-Kirchhoff kondensaatiota, katso harjoitustehtäviä luvun lopussa.

10.2.4 Muita kolmioelementtejä

Täydellinen kolmannen asteen polynomi sisältää 10 termiä, joten 9-vapausasteisessa kolmiolaattaelementissä (taipuma ja kiertymät solmuissa) on jokin kolmannen asteen termeistä jätettävä pois.

Varhaisessa laattaelementtien kehitysvaiheessa käytettiin mm. seuraavia lausekeita:

$$w = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3] \boldsymbol{\alpha}, \quad (10.45)$$

ja

$$w = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y + xy^2 \quad y^3] \boldsymbol{\alpha}. \quad (10.46)$$

Ylemmstä kaavasta puuttuu termi xy ja elementti ei pysty esittämään vakioväntötilaa kunnollisesti. Alempi yritelmä ei ole koordinaattien suhteen isotrooppinen, ja elementin konvegenssiominaisuudet ovat huonot. Myös tietyille elementin muodoille yhtälöryhmä

$$\boldsymbol{w}^{(e)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} \quad (10.47)$$

tulee singulaariseksi.

Geometrisesti isotrooppisia interpolaatioita saadaan alakoordinaattien avulla. Zienkiewicz on esittänyt seuraavanlaiset interpolaatiofunktioit (liittyen solmuun 1):

$$N_1 = L_1 + L_1^2L_2 + L_1^2L_3 - L_1L_2^2 - L_1L_3^2, \quad (10.48a)$$

$$N_2 = -y_{12}(L_1^2L_2 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3) + y_{31}(L_3L_1^2 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3), \quad (10.48b)$$

$$N_3 = -x_{21}(L_1^2L_2 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3) + x_{13}(L_3L_1^2 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3), \quad (10.48c)$$

missä

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j. \quad (10.49)$$

Solmuihin 2 ja 3 liittyvät interpolaatiofunktioit muodostetaan samalla tavalla. Taipuman interpolaatio ei ole C_1 -jatkuva sillä normaaliderivaatta $w_{,n}$ ei ole jatkuva, joten elementti on epäkonforminen.

Mikäli solmupisteparametreiksi sallitaan korkeampia derivaattoja kuin ensimmäiset, on kiertymäyhteensopivuuden aikaansaaminen helpompaa. Mikäli kolmion kärkisolmujen vapausasteiksi valitaan

$$w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (10.50)$$

saadaan elementti, jossa olisi 18 vapausastetta. Mikäli elementtiin lisättäisiin kolme vapausastetta, esimerkiksi sivujen keskipisteiden normaaliderivaatat, saataisiin

interpolaatioksi täydellinen viidennen asteen polynomi, joka sisältää 21 termiä. Tällaiseen elementtiin päätyivät vuoden 1968 tienoilla seuraavat elementtitutkijat: J.H. Argyris, I. Fried, D.W. Scharpf (1968), K. Bell (1969), W. Bosshard (1968), B.M. Irons (1969) ja W. Wisser (1968).

Mikäli elementin taipuman normaaliderivaatan lauseke (neljättä astetta) rajoitetaan kuubiseksi saadaan kolme rajoitetta, jolloin elementtiin jää 18 vapausastetta, eli kuusi jokaiseen solmuun.

Useita muita samankaltaisia konformisia elementtejä on esitetty, joiden vapausasteina on taipuman korkeampia derivaattoja kuin ensimmäiset. Tällaiset elementit ovat kuitenkin 'epämukavia', sillä reunaehtojen antaminen mutkistuu ja materiaaliominaisuuksien ja/tai paksuuden epäjatkuvuuden huomioonotto on hankalampaa.

10.3 Reissnerin-Mindlinin laattamalli

10.3.1 Elementin formulointi

Poikittaisilla leikkausmuodonmuutoksilla on merkitystä paitsi paksun homogeenisen laatan tapauksessa myös esimerkiksi kerroslaatan tai sandwich-laatan tapauksissa. Yksinkertaisin poikittaiset leikkausmuodonmuutokset huomioonottava laattamalli saadaan, kun otaksutaan laatan keskipinnan normaalien pysyvän suorina mutta ei välttämättä kohtisuorassa deformoitunutta laatan keskipintaa vastaan. Tämäns. Reissnerin-Mindlinin laattamalli on yksidimensioisen Timoshenkon palkkimallin vastine laatoilla. Kinemaattisesta otaksumasta seuraa siirtymäkomponenteille lausekkeet (10.3a)

$$u(x, y, z) = -z\beta_x(x, y), \quad (10.51a)$$

$$v(x, y, z) = -z\beta_y(x, y), \quad (10.51b)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y). \quad (10.51c)$$

Reissnerin-Mindlinin laattamallin nollasta eroavat muodonmuutoskomponentit ovat

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\beta_{x,x}, \quad (10.52a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\beta_{y,y}, \quad (10.52b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}), \quad (10.52c)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = w_{,x} - \beta_x, \quad (10.52d)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = w_{,y} - \beta_y. \quad (10.52e)$$

Käyritysmävektori $\boldsymbol{\kappa}$ määritellään kuten Kirchhoffin laattamallin tapauksessa

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_x & \kappa_y & \kappa_{xy} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\beta_{x,x} & -\beta_{y,y} & -(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \end{bmatrix}^T. \quad (10.53)$$

Tämän lisäksi tarvitaan myös keskimääräisten poikittaisten leikkaumuodonmuutosten vektori

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix}^T. \quad (10.54)$$

Momenttien ja käyritysten välillä pätee yhteys

$$\mathbf{m} = \mathbf{D}_b \boldsymbol{\kappa}, \quad (10.55)$$

ja leikkausvoimien sekä keskimääräisten liukumien välinen yhteys on

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}_s \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D}_s = kGt \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (10.56)$$

missä k on leikkauskorjauskerroin. Leikkausjännitysresultantit määritellään kaavoilla

$$Q_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz. \quad (10.57)$$

Reissnerin-Mindlinin laattamallin virtuaalisen työn yhtälö on

$$\begin{aligned} & \int_A \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dz dA \\ &= \int_A f \delta w dA + \int_{S_\sigma} (\bar{Q}_n \delta w - \bar{M}_n \delta \beta_n - \bar{M}_{ns} \delta \beta_s) ds. \end{aligned} \quad (10.58)$$

Integroimalla laatan paksuuden yli muuntuu se muotoon

$$\begin{aligned} & \int_A (M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + M_{xy} \delta \kappa_{xy} + Q_x \delta \gamma_{xz} + Q_y \delta \gamma_{yz}) dA \\ &= \int_A f \delta w dA + \int_{S_\sigma} (\bar{Q}_n \delta w - \bar{M}_n \delta \beta_n - \bar{M}_{ns} \delta \beta_s) ds. \end{aligned} \quad (10.59)$$

Toisin kuin Kirchhoffin laattamallissa, on virtuaalisen työn yhtälössä (10.59) vain ensimmäisiä derivaattoja. Täten funktioille w , β_x ja β_y riittää vain C_0 -jatkuva interpolatio, jotta yhteensopivuusvaatimukset toteutuisivat. Otaksutaan nyt, että sekä taipumaa että kiertymiä interpoloidaan samanasteisilla polynomeilla, eli n -solmuisen elementin tapauksessa voidaan kirjoittaa

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i, \quad \beta_x = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{xi}, \quad \beta_y = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{yi}. \quad (10.60)$$

Elementin mielivaltaisen pisteen käyritysmävektori on

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} -\beta_{x,x} \\ -\beta_{y,y} \\ -\beta_{x,y} - \beta_{y,x} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & -N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{i,y} \\ 0 & -N_{i,y} & -N_{i,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{Bmatrix}, \quad (10.61)$$

eli

$$\boldsymbol{\kappa} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{bi} \mathbf{w}_i^{(e)} \quad (10.62)$$

missä

$$\mathbf{w}_i^{(e)} = [w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi}]^T. \quad (10.63)$$

Poikittaiset leikkausmuodonmuutokset voidaan kirjoittaa muotoon

$$\boldsymbol{\gamma} = \left\{ \begin{array}{l} w_{,x} - \beta_x \\ w_{,y} - \beta_y \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^n \left[\begin{array}{ccc} N_{i,x} & -N_i & 0 \\ N_{i,y} & 0 & -N_i \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} w_i \\ \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{array} \right\}, \quad (10.64)$$

eli

$$\boldsymbol{\gamma} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{si} \mathbf{w}_i^{(e)}. \quad (10.65)$$

Elementin osuus sisäisen virtuaalisen työn lausekkeessa voidaan kirjoittaa siten muodossa

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta \mathbf{w}_i^{(e)T} \left(\mathbf{K}_{bij}^{(e)} + \mathbf{K}_{sij}^{(e)} \right) \mathbf{w}_j^{(e)}, \quad (10.66)$$

missä elementin jäykkyyismatriisin taivutuksesta ja leikkauksesta solmuihin i ja j aiheutuvat termit ovat

$$\mathbf{K}_{bij}^{(e)} = \int_A \mathbf{B}_{bi}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_{bj} dA, \quad \mathbf{K}_{sij}^{(e)} = \int_A \mathbf{B}_{si}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{sj} dA. \quad (10.67)$$

Paksun laatan mallin tapauksessa on helppo muodostaa isoparametrinen elementti. Geometriaa voidaan interpoloida samoilla funktioilla kuin siirtymäsuureita-kin aivan vastaavaan tapaan kuin jo esitetyissä kaksidimensioisissa tehtävissä (lämmönjohtuminen, levytehtävä). Osuudet (10.67) ovat siten laskettavissa kaavoilla

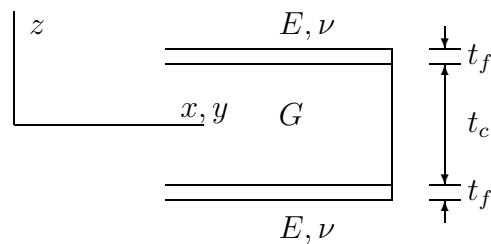
$$\mathbf{K}_{bij}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{bi}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_{bj} J d\xi d\eta, \quad \mathbf{K}_{sij}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{si}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{sj} J d\xi d\eta, \quad (10.68)$$

joissa siirtymä-muodonmuutosmatriiseissa olevat derivaatat globaalien suuntien suhteen lasketaan kaavoilla (4.165).

Sandwich-laattoja voidaan analysoida Reissnerin-Mindlinin laattamallilla. Lineaaraisesti kimmoisalle ohutkuoriselle isotrooppiselle sandwich-laatalle voidaan johtaa matriisit:

$$\mathbf{D}_b = \frac{Et_f(t_c + t_f)^2}{2(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_s = \frac{G(t_c + t_f)^2}{t_c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (10.69)$$

missä E, ν ovat pintakerroksen kimmovakiot, G on ytimen leikkausmoduuli ja t_f, t_c ovat pinta- ja ydinkerroksen paksuudet, katso kuva 10.4.



Kuva 10.4 Ohutkuorinen sandwich-laatta.

10.3.2 Numeerinen integrointi

Integraalit kaavoissa (10.68) lasketaan numeerisesti Gaussin menetelmällä. Alhaisasteisia interpolaatiofunktioita käytettäessä tarkka integointi tuottaa elementin, joka on liian jäykkä ohuen laatan tapauksessa. Ilmiötä nimitetään leikkauslukkiutumiseksi ja se on aivan analoginen Timoshenkon palkkielementin lukkiutumisen kanssa. Laatan ohentuessa jäykkyyssmatriisin leikkaustermi toimii sakkofunktion tapaan ja pakottaa poikittaiset leikkausmuodonmuutokset nolnaan, jolloin taipuman ja kiertymätermien samanasteisesta interpolaatiosta johtuen taipuman on myös hävitävä.

Täydellä integroinnilla, joka määritelmänsä mukaan tuottaa tarkan tuloksen suorakaiteen muotoisille säännöllisille elementeille, rajoitusehtoja poikittaiselle liukumalle tulee liian paljon ja elementtiverkko lukkiutuu. Tämän välttämiseksi sovelletaan elementin leikkaustermiin redusoitua integrointia. Elementin käyttäytymistä voidaan myös parantaa käyttämällä uudelleen määriteltyjä, korvaavia interpolaatiofunktioita poikittaisille liukumille.

Redusoidun integroinnin ongelma on, että se tuottaa elementtiin nollaenergiamuotoja, jotka voivat levitä elementistä toiseen ja tuhota ratkaisun. Tämän vuoksi sovelletaan ns. selektiivistä eli valikoivaa ali-integrointia, jossa taivutuksen osuus jäykkyyssmatriisissa integroidaan tarkasti ja vain leikkaukseen liittyvät termit ali-integroidaan. Selektiivinen menettely tuottaa stabiilimman jäykkyyssmatriisin, jonka rangi on suurempi kuin täysin ali-integroidun elementin.

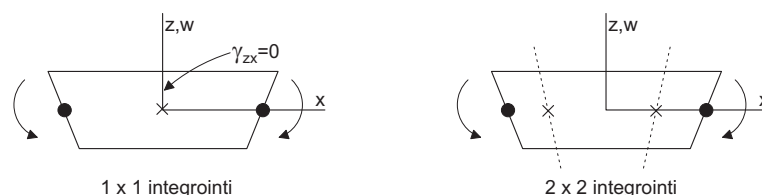
Eräitä Lagrangen ja Serendip-tyyppisiin interpolaatiofunktioihin perustuvia elementtejä on esitetty taulukossa 10.1. T.J.R. Hughes ja M. Cohen ovat esittäneet vuonna 1978 Heterosis-elementin, jossa taipumaa interpoloidaan 8-solmuisen elementin Serendip-muoto/-funk/-ti/-oilla ja kiertymille käytetään toisen asteen Lagrangen polynomeja, eli 9-solmuista interpolaatiota.

Bilineaarinen nelisolmuinen elementti toimii kunnollisesti puhtaassa taivutuksessa sekä redusoidulla, että selektiivisellä integroinnilla. Täydellä 2×2 -integroinnilla poikittaiset liukummat eivät mene nolliksi Gaussin pisteissä puhtaassa taivutuksessa. Paksuuden t pienentyessä lähes kaikki muodonmuutosenergia on virheellistä leikkausenergiaa, taivutusmuodonmuutos lähestyy nolaa ja elementti lukkiutuu, katso kuva 10.5.

Yhdeksänsolmuinen elementti toimii oikein puhtaassa taivutuksessa integroimis-

Taulukko 10.1 Reissnerin-Mindlinin laattamallin elementtejä.

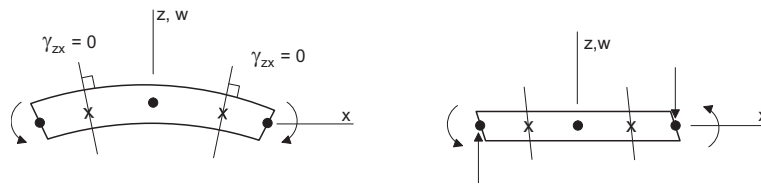
| Elementti | integrointi tyyppi | integrointi | | liukuman raj. ehdot | mekanismien lukumäärä |
|---|-----------------------|----------------|----------------|------------------------|--------------------------|
| | | \mathbf{K}_b | \mathbf{K}_s | | |
| bilineaarinen 4 solmua 12 vap. ast. | redu. | 1×1 | 1×1 | 2 | 4 |
| | selekt. | 2×2 | 1×1 | 2 | 2 |
| | täysi | 2×2 | 2×2 | 4 | 0 |
| bikvadraatt. 9 solmua 27 vap. ast. | redu. | 2×2 | 2×2 | 8 | 4 |
| | selekt. | 3×3 | 2×2 | 8 | 1 |
| | täysi | 3×3 | 3×3 | 18 | 0 |
| Serendip 8 solmua 24 vap. ast. | redu. | 2×2 | 2×2 | 8 | 1 |
| | selekt. | 3×3 | 2×2 | 8 | 0 |
| | täysi | 3×3 | 3×3 | 18 | 0 |
| Heterosis | | | | | |
| 9 solmua 26 vap. ast. | selekt. | 3×3 | 2×2 | 8 | 0 |

**Kuva 10.5** Bilineaarinen elementti puhtaassa taivutuksessa.

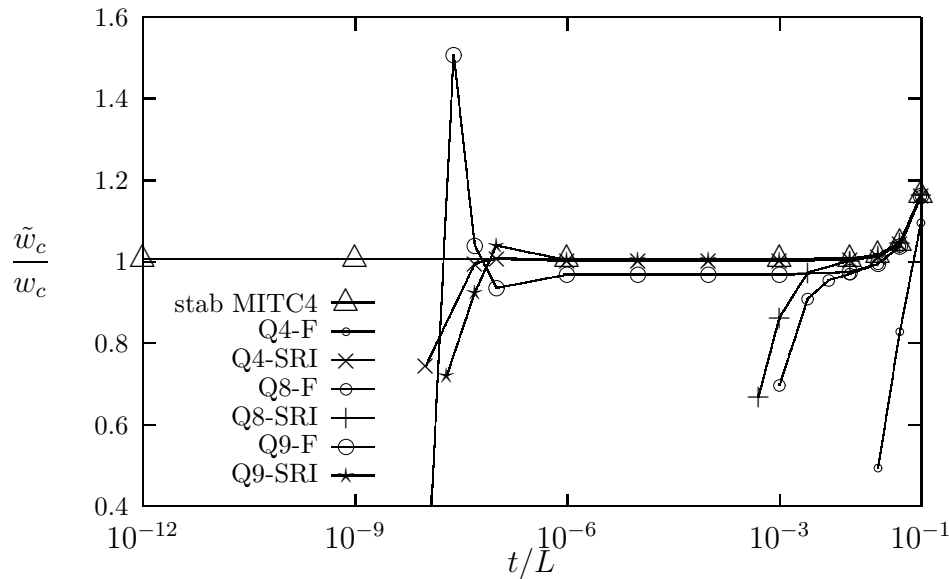
menetelmästä riippumatta. Koska taipuma w on toisen asteen polynomi, liukuman γ_{xz} asettaminen nolllaksi pakottaa elementtiin puhtaan taivutuksen, kuva 10.6a. Kuvan 10.6b elementissä taivutusmomentti muuttuu lineaarisesti x :n funktiona. Lineaarisesti muuttuvaa momenttia vastaa ohuen palkin tai sylinterimäisesti taivutetun ohuen laatan tapauksissa kolmannen asteen polynomin mukainen taipuma, jota kvadraattinen elementti ei pysty esittämään, vaan kuvan 10.6b tapauksessa $w = 0$ ja β_x muuttuu parabolisesti. Yhdeksänsolmuinen Lagrangen elementti pystyy esittämään tämän tilan kunnollisesti vain, jos jäykkymatriisin osa \mathbf{K}_s integroidaan redusoidusti 2×2 Gaussin kaavalla.

Kahdeksansolmuinen elementti toimii luotettavasti vain pienillä laatan tukivälin ja paksuuden suhteen L/t arvoilla.

Kuvassa 10.7 on esitetty tasaisesti kuormitetun ja jäykästi tuetun neliölaatan keskipisteen taipuman arvoja Kirchhoffin laattamallin antamaan arvoon verrattuna suhteellisen paksuuden t/L funktiona. Tulokset on laskettu 10×10 verkolla käytettäessä bilineaarista interpolaatiota ja 5×5 verkolla bikvadraattisilla elementeillä



Kuva 10.6 Kvadraattinen elementti: (a) puhdas taivutus ja (b) lineaarisesti muuttuva taivutusmomentti.

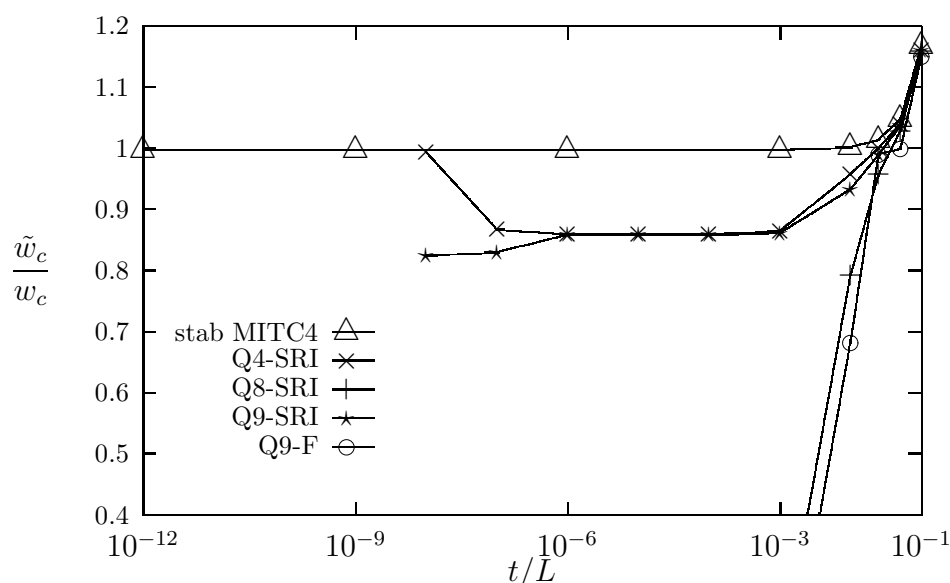


Kuva 10.7 Tasaisesti kuormitettu jäykästi tuettu laatta: tasajakoinen 10×10 (bilineaariset elementit) tai 5×5 verkko (bikvadraattiset elementit). Elementtimenetelmän antama keskipisteen taipuma \tilde{w}_c verrattuna Kirchhoffin laattamallin keskipisteen taipumaan w_c . SRI= selektiivinen ali-integrointi ja F on täysi integrointi.

analysoituna.

Jotkut ratkaisut kuvassa (10.7) hajaantuvat pienillä suhteen t/L arvoilla. Ilmiö aiheutuu siitä, että matriisin \mathbf{K}_s termit tulevat numerollisesti paljon suuremmiksi kuin matriisin \mathbf{K}_b alkiot suhteen t/L pienentyessä, jolloin luvun esitystarkkuudesta riippuen \mathbf{K}_b :n alkioiden merkitys \mathbf{K}_s :n alkioiden rinnalla katoaa. Hajaantuminen voidaan välttää käyttämällä stabiloituja elementtejä kuten Timoshenkon palkkimallin yhteydessä. Tällöin poikittainen liukuma tulee väärin lasketuksi, mutta sillä ei ole muutoinkaan merkitystä ohuiden laattojen tapauksessa.

Vääristyneen elementtiverkon vaikutus on esitetty kuvassa 10.8. Sisäsolmupisteiden koordinaatit on siirretty $0.01L$:n etäisyydelle ideaalista paikasta satunnaiseen suuntaan. Standardi isoparametristen elementtien huono käyttäytyminen on vieläkin dramaattisempaa kuin kuvassa 10.7.



Kuva 10.8 Tasaisesti kuormitettu jäykästi tuettu laatta: vääristetty 10×10 (bilineaariset elementit) tai 5×5 verkko (bikvadraattiset elementit). Elementtimenetelmän antama keskipisteen taipuma \tilde{w}_c verrattuna Kirchhoffin laattamallin keskipisteen taipumaan w_c . SRI= selektiivinen ali-integrointi ja F on täysi integrointi.

10.3.3 Reissnerin-Mindlinin laattaelementtien mekanismit

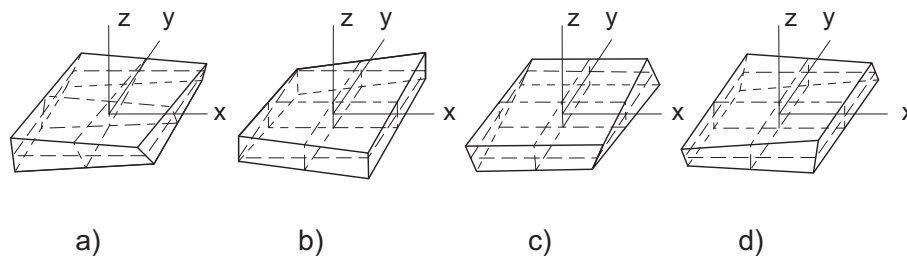
Siirtymätilan kuvaamiseen on käytetty samoja interpolaatiofunktioita kuin levyelementissä ja redusoidun integroinnin tuottamat nollaenergiamuodot ovat samantapaisia kuin isoparametrisilla vastaavanlaisiin interpolaatiofunktioihin perustuvilla levyelementeillä. Laatan tapauksessa voidaan nähdä vastaavuus

$$u = -z\beta_x \quad \text{ja} \quad v = -z\beta_y. \quad (10.70)$$

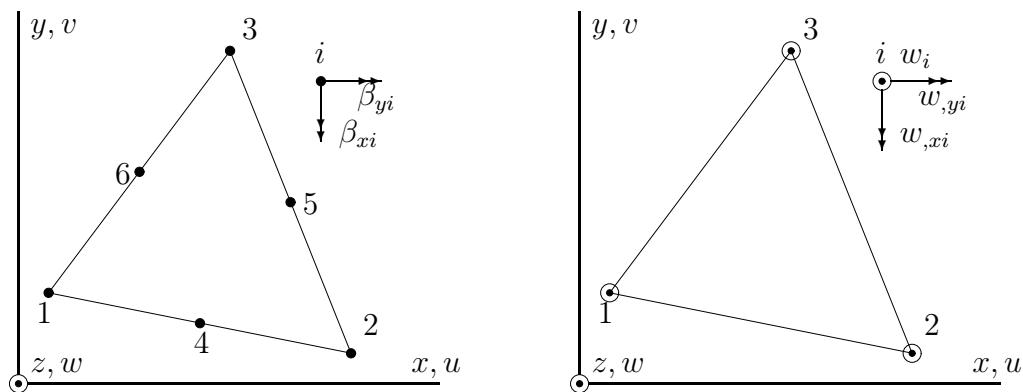
Bilineaarisen laattaelementin redusoidun 1×1 -integroinnin nollaenergiamuodot on esitetty kuvassa 10.9. Selektiivisen integroinnin tapauksessa nollaenergiamuotoja ovat kuvan 10.9 muodot (a) ja (b). Vääntöön liittyvä muoto (a) ei ole yhteensopiva naapurielementtien vastaavan muodon kanssa, joten se ei esiinny kahdesta tai useammasta elementistä koostuvassa verkossa. Mekanismeja voidaan kontrolloida numeerisesti samaan tapaan kuin levyelementeissä.

Kvadraattisten laattaelementtien redusoidun ja selektiivisen integroinnin tuottamat mekanismit ovat samanlaisia kuin vastaavien levyelementtien nollaenergiamuodot. Yhdeksänsolmuisella elementillä on redusoidun integroinnin tapauksessa kolme muuta mahdollista mekanismia, joista kaksi ovat samoja kuin levyelementin mekanismit ja kolmas on määritelty yhtälöllä

$$u = v = 0 \quad \text{ja} \quad w = 3\xi^2\eta^2 - \xi^2 - \eta^2. \quad (10.71)$$



Kuva 10.9 Nelisolmuisen laattaelementin 1×1 -integroinnin mekanismit.



Kuva 10.10 Klassisen DKT-elementtikonstruktion alkuperäiset vapausasteet.

Tämä mekanismi ei ole mahdollinen Heterosis-elementissä, koska termiä $\xi^2 \eta^2$ ei ole taipuman w interpolaatiossa.

10.4 DK otaksumaan perustuvat elementit

Ohuen laatan elementin konstruoinnissa kohdattuja vaikeuksia voidaan kiertää, jos Kirchhoffin laattateorian otaksumista seuraavat rajoitusyhtälöt

$$\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0, \quad (10.72)$$

eli

$$w_{,x} = \beta_x \quad \text{ja} \quad w_{,y} = \beta_y \quad (10.73)$$

vaaditaan toteutumaan tietyissä pisteissä eli diskreetisti elementissä. Muodonmuutokset määritellään Reissnerin-Mindlinin laattamallin kaavoilla, jossa taipuma w ja kiertymät β_x ja β_y ovat toisistaan riippumattomia. Diskreettien rajoitusyhtälöiden huomioonottamisen jälkeen ne tulevat toisistaan riippuviksi.

Idean Kirchhoffin rajoitteiden pisteittäisestä soveltamisesta ovat esittäneet G.A. Wempner (1968), G.A. Wempner, J.T. Oden, D.K. Cross (1968), J.H. Stricklin, W. Haisler, P. Tisdale, K. Gunderson (1969), G.S. Dhatt (1969).

Yhdeksänvapausasteista diskreettiin Kirchhoffin otaksumaan perustuvaa elementtiä nimitetään DKT-elementiksi (Discrete-Kirchhoff-Triangle).

DKT-elementin muodostamisvaiheet esitetään lyhyesti seuraavassa. Olennainen vaihe on *poikittaisten leikkausmuodonmuutosten asettaminen nollassa tietyissä pisteissä*. Samalla periaattella muodostetaan muut diskreettiin Kirchhoffin otaksumaan perustuvat elementit.

Kiertymiä β_x ja β_y (kuva 10.10) interpoloidaan kuten Reissnerin-Mindlinin teoriaan perustuvissa elementeissä taipumasta w riippumattomasti kaavoilla

$$\beta_x = \sum_{i=1}^6 N_i \beta_{xi}, \quad \beta_y = \sum_{i=1}^6 N_i \beta_{yi}, \quad (10.74)$$

missä

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1(2L_1 - 1) & N_4 &= 4L_1L_2 \\ N_2 &= L_2(2L_2 - 1) & N_5 &= 4L_2L_3, \\ N_3 &= L_3(2L_3 - 1) & N_6 &= 4L_3L_1 \end{aligned} \quad (10.75)$$

ovat alakoordinaattien L_i avulla lausutut kvadraattiset interpolaatiofunktiot. Kiertymävapausasteita on siten yhteensä 12. Taipuman w otaksutaan muuttuvan sivua pitkin koordinaatin s suunnassa kolmannen asteen polynomin mukaisesti. Tämän perusteella voidaan laskea derivaatta $w_{,s}$. Esimerkiksi sivulla 2-3

$$w|_{s_{23}} = H_{01}(s)w_2 + H_{11}(s)w_{,s2} + H_{02}(s)w_3 + H_{12}(s)w_{,s3}, \quad (10.76)$$

missä H_{ij} :t ovat Hermiten kuubiset interpolaatiopolynomit. Derivaatta $w_{,s}$ solmussa 5 ($s = 0$) on

$$w_{,s5} = -\frac{3}{2l_{23}}w_2 - \frac{1}{4}w_{,s2} + \frac{3}{2l_{23}}w_3 - \frac{1}{4}w_{,s3}. \quad (10.77)$$

Samoin voidaan määrittää $w_{,s4}$ ja $w_{,s6}$.

Muunnoskaavoilla

$$\begin{Bmatrix} w_{,n} \\ w_{,s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix}, \quad (10.78)$$

missä ϕ on reunan normaalin ja x -akselin välinen kulma (kuva 10.10), voidaan määrittää $w_{,s}$ derivaattojen $w_{,x}$ ja $w_{,y}$ avulla solmuissa 1,2 ja 3. Tällöin derivaattojen $w_{,s4}$, $w_{,s5}$ ja $w_{,s6}$ määrittelykaavojen oikeat puolet saadaan lausutuiksi solmujen 1,2 ja 3 vapausasteiden w , $w_{,x}$ ja $w_{,y}$ avulla. Rotaatioiden β_x, β_y interpolaatiokaavoissa ja derivaattojen $w_{,s4}$, $w_{,s5}$, $w_{,s6}$ kaavoissa on yhteensä $12+9 = 21$ vapausastetta: (β_x, β_y) solmuissa 1,...,6 ja $(w, w_{,x}, w_{,y})$ solmuissa 1,2 ja 3. Elementin vapausasteiksi halutaan taipuma w ja derivaatat $w_{,x}, w_{,y}$ nurkkasolmuissa. Kaksitoista vapausastetta (β_x, β_y) solmuissa 1,...,6 on sen tähden lausuttava vapausasteiden $(w, w_{,x}, w_{,y})_i, i = 1, 2, 3$ avulla. Tällöin sovelletaan seuraavia rajoitusyhtälöitä:

1. Poikittaiset leikkausmuodonmuutokset γ_{xz} ja γ_{yz} ovat nollia solmuissa 1,2, ja 3, eli

$$\beta_{xi} = w_{,xi}, \quad \beta_{yi} = w_{,yi}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10.79)$$

2. Poikittainen leikkausmuodonmuutos γ_{sz} on nolla solmuissa 4,5 ja 6, eli

$$\beta_{si} = w_{,si}, \quad i = 4, 5, 6. \quad (10.80)$$

Sovellettaessa kaavoja (10.80) tarvitaan muunnoskaavoja (10.78).

3. Kiertymä β_n muuttuu lineaarisesti elementin sivua pitkin s :n funktiona, eli

$$\beta_{n4} = \frac{1}{2}(w_{,n1} + w_{,n2}), \quad \beta_{n5} = \frac{1}{2}(w_{,n2} + w_{,n3}), \quad \beta_{n6} = \frac{1}{2}(w_{,n3} + w_{,n1}). \quad (10.81)$$

Soveltamalla rajoitusehtoja (10.79), (10.80) ja (10.81) saadaan yhtälöryhmä

$$[\beta_{x1} \ \beta_{y1} \ \beta_{x2} \ \cdots \ \beta_{y6}]^T = \mathbf{T} [w_1 \ w_{,x1} \ w_{,y1} \ w_2 \ \cdots \ w_{,y3}]^T \quad (10.82)$$

jonka avulla solmujen 1,...,6 kiertymät β_x ja β_y saadaan lausutuksi nurkkasolmujen vapausasteiden $w_i, w_{,xi}$ ja $w_{,yi}$ avulla.

Elementin jäykkymatriisin muodostamiseksi sovelletaan ensin Reissnerin-Mindlinin laattamallin kaavoja

$$u = -z\beta_x \quad \text{ja} \quad v = -z\beta_y \quad (10.83)$$

ja

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (10.84)$$

josta

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & \cdots & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & \cdots & 0 & N_{6,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & \cdots & N_{6,y} & N_{6,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{x1} \\ \beta_{y1} \\ \beta_{x2} \\ \vdots \\ \beta_{y6} \end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = -z \mathbf{B}_\beta \mathbf{w}_\beta^{(e)}. \quad (10.85)$$

Matriisin \mathbf{B}_β muodostamisessa tarvitaan alakoordinaattien derivoimiskaavoja.

Virtuaalisen työn yhtälön perusteella saadaan muodonmuutosenergian variaatioksi (oletetaan kimmoinen materiaalilaki) elementille e :

$$\delta U^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \boldsymbol{\delta \epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} dV. \quad (10.86)$$

Suorittamalla integrointi laatan paksuuden yli saadaan

$$\delta U^{(e)} = \delta \mathbf{w}_\beta^{(e)T} \mathbf{K}_\beta^{(e)} \mathbf{w}_\beta^{(e)}, \quad (10.87)$$

missä

$$\mathbf{K}_\beta^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_\beta^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_\beta dA. \quad (10.88)$$

Laatan kimmomatriisi \mathbf{D}_b on jo aiemmin määritelty kaavassa (10.17). Muunnoskaavan (10.82) perusteella saadaan DKT-elementin jäykkyysmatriisiksi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_\beta^{(e)} \mathbf{T}. \quad (10.89)$$

Tällainen menettely on suoraviivainen ja helppo ohjelmoida. Laskentatyön kannalta on suotavaa suorittaa muunnos (10.82) jo muodonmuutos-siirtymä-matriisiin \mathbf{B} , jolloin

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_\beta \mathbf{T}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = -z \mathbf{B} \mathbf{w}^{(e)}, \quad (10.90)$$

ja jäykkyysmatriisi muodostetaan operoimalla suoraan 3×9 -matriisilla \mathbf{B} eikä 3×12 -matriisilla \mathbf{B}_β .

DKT-elementti voidaan ajatella koostuvan päällekkäin pinotuista kvadraattisista kolmioleveytelementeistä, joita sitovat toisiinsa jäykät laatan paksuussuuntaiset sauvat nurkissa ja lisäksi sidosehdot (10.80) ja (10.81).

Homogeenisen vakiopaksuuksisen laatan tapauksessa kolmen pisteen integroimis-kaava antaa tarkan tuloksen jäykkyysmatriisiin laskennassa. Jäykkyysmatriisin termien eksplisiittinen muodostaminen analyttisellä integroinnilla on myös mahdollista. Kun siirtymäsuureet on laskettu saadaan muodonmuutokset kaavasta (10.90) ja jännitykset kimmomatriisin välityksellä kaavasta $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}$.

Koska taipuma on määritelty ainoastaan reunaviivoilla, aiheuttaa tämä epäselvyyden konsistentin kuormavektorin muodostamisessa, kun elementin alueella on jakautunut painekuorma. Käytännössä riittäväksi on kuitenkin osoittautunut kuorman jako taipumavapausasteille lineaaristen interpolaatiodunktioiden avulla.

Samalla idealla voidaan muodostaa myös nelisolmuinen elementti DKQ (Discrete Kirchhoff Quadrilateral). Sen käyttäytyminen ei ole kuitenkaan osoittautunut yhtä hyväksi kuin DKT-elementin. DK-elementteihin voidaan lukea myös sellaiset elementit, joissa on integraalirajoitteita, esimerkiksi vaaditaan liukumien häviäminen keskimääräisesti elementin alueelta. Maininnan arvoisia ovat B.M. Ironsin ja P. Lyonsin kehittämät elementit, joista kiinnostunut löytää seikkaperäiset kuvaukset lähteestä [6]

10.5 Toinen DK-elementtien johtotapa

DKT-elementin ekvivalentti vastine voidaan konstruoida hieman helpommin käyttäen taipumalle w lineaarista interpolaatiota elementin alueella ja ottamalla leikkausmuodonmuutoksen rajoiteyhtälö huomioon keskimääräisesti elementin sivuilla.

Tällä tavoin voidaan käsitellä myös nelikulmioelementtiä, joten johdetaan seuraavassa analytyttiset lausekkeet kolmisolmuisen kolmioelementin ja nelisolmuisen nelikulmioelementin kiertymien interpolaatiofunktioiksi. Kutsutaan elementtejä DKT ja DKQ elementeiksi vaikka oikeammin ehkä pitäisi kirjoittaa IKT ja IKQ (Integral Kirchhoff Triangle/Quadrilateral).

Elementin taipumaa w interpoloidaan lineaarisilla (kolmio) tai bilineaarisilla (nelikulmio) funktioilla, kun taas kiertymille käytetään kvadraattista (kolmio) tai supistettua bikvadraattista (nelikulmio) interpolaatiota, joka mukavuussyistä valitaan hierarkiseksi. Interpolaatio voidaan siten kirjoittaa muodossa

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i, \quad (10.91a)$$

$$\beta_x = \sum_{i=1}^n (N_i \beta_{xi} + N_{n+i} \Delta \beta_{xi}), \quad (10.91b)$$

$$\beta_y = \sum_{i=1}^n (N_i \beta_{yi} + N_{n+i} \Delta \beta_{yi}), \quad (10.91c)$$

jossa n on elementin solmujen lukumäärä (3/4) ja merkintä $i+$ tarkoittaa solmua i seuraavaa solmua elementin reunaa pitkin positiiviseen kiertosuuntaan kierrettäessä. Kolmioelementin tapauksessa käytetään siis funktioita

$$N_i = L_i, \quad (10.92a)$$

$$N_{3+i} = 4L_i L_{i+}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10.92b)$$

kun taas nelikulmioelementille

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), \quad (10.93a)$$

$$N_{4+i} = \frac{1}{2}(1 - \eta_{4+i}^2 \xi^2 - \xi_{4+i}^2 \eta^2)(1 + \xi_{4+i} \xi + \eta_{4+i} \eta), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (10.93b)$$

Huomaa, että tällä tavoin määriteltyille hierarkisille muodoille N_{3+i} , N_{4+i} indeksin i voidaan ajatella viittaavan myös elementin sivun numeroon. Tällöin sivu i on solmusta i solmuun $i+$ oleva elementin reunan osa. Kuvaan 10.11 on piirretty elementtien solmukonfiguraatiot ja solmujen sekä sivujen numerointi.

Otetaan käyttöön merkinnät \vec{n}_i ja \vec{s}_i , jotka tarkoittavat elementin sivun i normaalin ja tangentin suuntaisia yksikkövektoreita, jotka voidaan määritellä lausekkeilla

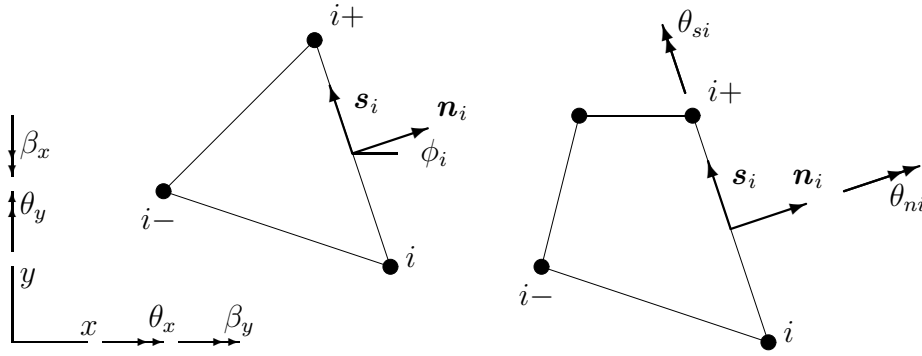
$$\vec{n}_i = \cos \phi_i \vec{i} + \sin \phi_i \vec{j}, \quad \vec{s}_i = -\sin \phi_i \vec{i} + \cos \phi_i \vec{j}, \quad (10.94)$$

jossa ϕ_i on x -akselin ja sivun normaalin \vec{n}_i välinen kulma. Kulman sini ja kosini määräytyvät solmujen aseman perusteella seuraavasti

$$\sin \phi_i = \frac{x_i - x_{i+}}{\ell_i}, \quad (10.95a)$$

$$\cos \phi_i = \frac{y_{i+} - y_i}{\ell_i}, \quad (10.95b)$$

$$(10.95c)$$



Kuva 10.11 DK-elementtien solmukonfiguraatiot ja merkinnät.

jossa $l_i = \sqrt{(x_{i+} - x_i)^2 + (y_{i+} - y_i)^2}$ on sivun i pituus. Sivun normaalin ja tangentin suuntaisille yksikkövektoreille käytetään myös merkintää

$$\mathbf{n}_i = \begin{Bmatrix} \cos \phi_i \\ \sin \phi_i \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{s}_i = \begin{Bmatrix} -\sin \phi_i \\ \cos \phi_i \end{Bmatrix}, \quad (10.96)$$

samaten kuin β -kiertymistä koostuvalle pystyvektorille

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\theta_y \\ \theta_x \end{Bmatrix}. \quad (10.97)$$

Huomaa, että $\boldsymbol{\beta}$ ei ole fyysikaalinen vektori, joten sitä ei merkitä ylänuolella. Mikäli käyttäisimme todellisia kiertymiä θ voitaisiin kirjoittaa

$$\vec{\theta} = \theta_x \vec{i} + \theta_y \vec{j}. \quad (10.98)$$

Elementissä on nyt $5n$ vapausastetta, jotka pitää redusoida määrään $3n$, jolloin elementin jokaisessa kärkisolmussa on kolme vapausastetta ($w_i, \beta_{xi}, \beta_{yi}$). Tarvitaan siten $2n$ rajoiteyhtälöä, eli kaksi rajoitetta sivua kohden, jotka ovat:

- sivun i suuntainen leikkausmuodonmuutos γ_{si} häviää keskimääräisesti, eli

$$\int_{S_i^{(e)}} \gamma_{si} ds = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (10.99)$$

- kiertymä $\beta_{ni} = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{n}_i$ muuttuu lineaarisesti elementin sivua pitkin s :n funktiona, joten

$$\Delta \boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{n}_i = \cos \phi_i \Delta \beta_{xi} + \sin \phi_i \Delta \beta_{yi} = 0. \quad (10.100)$$

Huomaa, että $-\beta_{ni}$ kuvaa todellista kiertymää tangenttivektorin \vec{s}_i suunnassa, eli $\beta_{ni} = -\theta_{si} = -\vec{\theta} \cdot \vec{s}_i$.

Otetaan käyttöön lyhennysmerkinnät $C_i = \cos \phi_i$ ja $S_i = \sin \phi_i$. Leikkausmuodonmuutoksen γ_{si} lauseke on

$$\gamma_{si} = w_{,si} - \beta_{si} = w_{,si} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{s}_i. \quad (10.101)$$

Sivun normaalin suuntainen kiertymä β_{si} on toisen asteen polynomi pitkin reuna-
viivaa i , eli

$$\begin{aligned}\beta_{si} &= \frac{1}{2}(1 - \zeta)\beta_{si} + \frac{1}{2}(1 + \zeta)\beta_{si+} + (1 - \zeta^2)\Delta\beta_{si} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \zeta)\boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{s}_i + \frac{1}{2}(1 + \zeta)\boldsymbol{\beta}_{i+}^T \mathbf{s}_i + (1 - \zeta^2)\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{s}_i \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T(\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_{i+} + 2\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i) + \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T(\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\beta}_{i+})\zeta - \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i \zeta^2, \quad (10.102)\end{aligned}$$

jossa ζ on sivua pitkin määritelty luonnollinen koordinaatti $\zeta = 2s/\ell_i$. Taipuman
derivaatta sivun suunnassa on vakio

$$w_{,si} = \frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i}. \quad (10.103)$$

Leikkausmuodonmuutoksen γ_{si} lauseke on siten

$$\gamma_{si} = g_{0i} + g_{1i}\zeta + g_{2i}\zeta^2, \quad (10.104)$$

missä

$$g_{0i} = \frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i} - \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T(\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_{i+} + 2\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i), \quad (10.105a)$$

$$g_{1i} = -\frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T(\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\beta}_{i+}), \quad (10.105b)$$

$$g_{2i} = \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i. \quad (10.105c)$$

Rajoitteesta (10.99) seuraa

$$\int_{S_i^{(e)}} \gamma_{si} ds = \frac{1}{2}\ell_i \int_{-1}^1 (g_{0i} + g_{1i}\zeta + g_{2i}\zeta^2) d\zeta = 0 \quad (10.106a)$$

$$\Rightarrow g_{0i} + \frac{1}{3}g_{2i} = 0, \quad (10.106b)$$

$$\Rightarrow \frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i} - \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T(\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_{i+} + 2\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i) + \frac{1}{3}\mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i = 0, \quad (10.106c)$$

$$\Rightarrow \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i = \frac{3}{2}\frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i} - \frac{3}{4}\mathbf{s}_i^T(\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_{i+}). \quad (10.106d)$$

Rajoiteyhtälöt (10.99) ja (10.100) muodostavat täten yhtälöparin

$$\mathbf{n}_i^T \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i = 0, \quad (10.107a)$$

$$\mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i = \frac{3}{2}\frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i} - \frac{3}{4}\mathbf{s}_i^T(\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_{i+}) \quad (10.107b)$$

kutakin sivua kohden hierarkisten kiertymävapausasteiden eliminoimiseksi. Ratkai-
semalla esimerkiksi $\Delta\beta_{xi}$ yhtälöstä (10.107aa) ja sijoittamalla se yhtälöön (10.107ab)
saadaan ratkaisuksi

$$\Delta\beta_{xi} = -\frac{3}{2}\frac{S_i}{\ell_i}(w_{i+} - w_i) + \frac{3}{4}S_i [C_i(\beta_{yi} + \beta_{yi+}) - S_i(\beta_{xi} + \beta_{xi+})], \quad (10.108a)$$

$$\Delta\beta_{yi} = \frac{3}{2}\frac{C_i}{\ell_i}(w_{i+} - w_i) - \frac{3}{4}S_i [C_i(\beta_{yi} + \beta_{yi+}) - S_i(\beta_{xi} + \beta_{xi+})], \quad (10.108b)$$

joka voidaan kirjoittaa lyhyesti vektorimuodossa

$$\Delta \boldsymbol{\beta}_i = \left[\frac{3}{2} \frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i} - \frac{3}{4} \mathbf{s}_i^T (\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_{i+}) \right] \mathbf{s}_i. \quad (10.109)$$

Kiertymien interpolaatiofunktioiksi saadaan siten seuraavat lausekkeet:

$$\begin{aligned} \beta_x &= \sum_{i=1}^n \left\{ N_i \beta_{xi} + N_{n+i} \left\{ -\frac{3}{2} \frac{S_i}{\ell_i} (w_{i+} - w_i) + \frac{3}{4} S_i [C_i (\beta_{yi} + \beta_{yi+}) - S_i (\beta_{xi} + \beta_{xi+})] \right\} \right\} \\ &= \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{S_i}{\ell_i} N_{n+i} - \frac{S_{i-}}{\ell_{i-}} N_{n+i-} \right) w_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^n [N_i - \frac{3}{4} (S_i^2 N_{n+i} + S_{i-}^2 N_{n+i-})] \beta_{xi} \\ &\quad + \frac{3}{4} \sum_{i=1}^n (S_i C_i N_{n+i} + S_{i-} C_{i-} N_{n+i-}) \beta_{yi} \end{aligned} \quad (10.110)$$

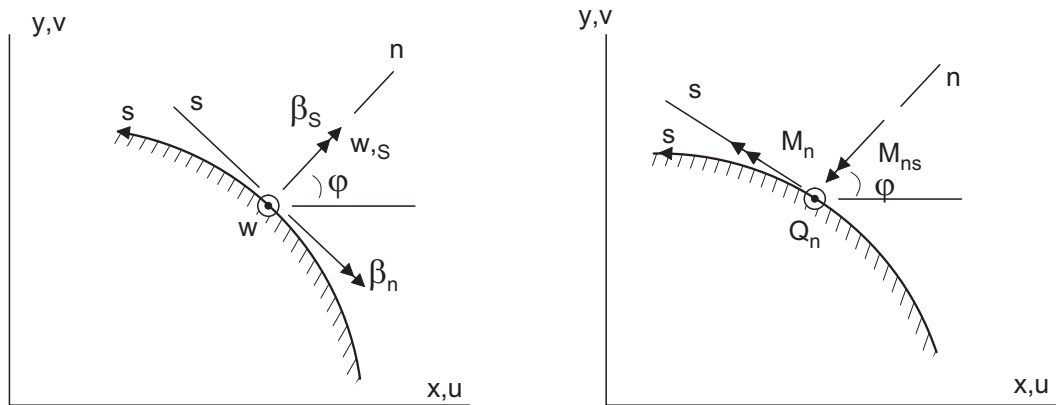
$$\begin{aligned} \beta_y &= \sum_{i=1}^n \left\{ N_i \beta_{yi} + N_{n+i} \left\{ \frac{3}{2} \frac{C_i}{\ell_i} (w_{i+} - w_i) + \frac{3}{4} S_i [C_i (\beta_{yi} + \beta_{yi+}) - S_i (\beta_{xi} + \beta_{xi+})] \right\} \right\} \\ &= \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{C_i}{\ell_i} N_{n+i} - \frac{C_{i-}}{\ell_{i-}} N_{n+i-} \right) w_i \\ &\quad + \frac{3}{4} \sum_{i=1}^n (S_i C_i N_{n+i} + S_{i-} C_{i-} N_{n+i-}) \beta_{xi} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n [N_i - \frac{3}{4} (C_i^2 N_{n+i} + C_{i-}^2 N_{n+i-})] \beta_{yi}, \end{aligned} \quad (10.111)$$

jossa on käytetty merkintää $i-$ tarkoittamaan solmua i edeltävää solmua positiiviseen suuntaan kierrettäessä. Korostettakoon vielä, että kiertymille johdetut lausekkeet pätevät sekä kolmisolmukselle kolmioelementille että nelisolmukselle nelikulmioelementille kunhan interpolaatiofunktioina N_i ja N_{n+i} käytetään joko lausekkeitä (10.92a) tai (10.93a).

10.6 Laatan reunaehdot

Laatan reuna voi olla jäykästi kiinnitetty, vapaa tai vapaasti tuettu. Tavallisesti tuentatapa on erilainen laatan reunan eri osissa. On myös syytä huomata, että reunaehdot klassisen Kirchhoffin laattamallin ja keskimääräiset leikkausmuodonmuutokset huomioonottavan Reissnerin-Mindlinin laattamallin välillä ovat erilaiset. Kirchhoffin laattamallissa laatan jokaisella reunanosalla voidaan antaa täsmälleen kaksi reunaehto, kun taas Reissnerin-Mindlinin mallissa niitä on kolme.

Laattamallien reunaehtotapaukset on koottu taulukkoon 10.2.



Kuva 10.12 Laatan reuna: (a) siirtymäsuureet, (b) voimasuureet.

Taulukko 10.2 Laatan reunaehdot. Korvikeleikkausvoima $V_n = Q_n + M_{ns,s}$.

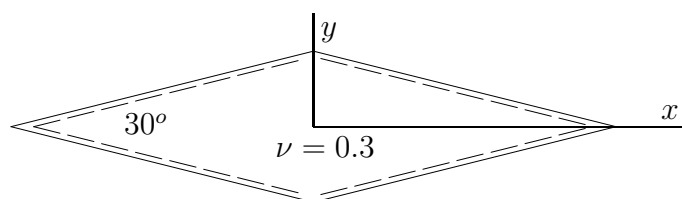
| | jäykkä kiinnitys | vapaa reuna | vapaasti tuettu (1) | vapaasti tuettu (2) |
|---|---|--|--------------------------------------|---------------------------------------|
| Kirchhoffin laattamalli | $w = 0$ $\beta_n = 0$ | $M_n = 0$ $V_n = 0$ | | $w = 0$ $M_n = 0$ |
| Reissnerin- Mindlinin laattamalli | $w = 0$ $\beta_n = 0$ $\beta_s = 0$ | $M_n = 0$ $M_{ns} = 0$ $Q_n = 0$ | $w = 0$ $M_n = 0$ $M_{ns} = 0$ | $w = 0$ $M_n = 0$ $\beta_s = 0$ |

Taulukosta 10.2 havaitaan, että Reissnerin-Mindlinin mallilla on kaksi mahdollisuutta vapaasti tuetun reunanosan reunaehdoille. Ensimmäistä tapausta (1) kutsutaan pehmeäksi- ja jälkimmäistä (2) kovaksi reunaehdoksi.

Jäykkä kiinnitys estää kaiken liikkeen reunalla. Vapaalla reunalla solmuvapausasteet ovat määräämättömiä ja pysyvät osana tuntemattomia solmupistevapausasteita. Reunaehdot vapaasti tuetulla laatanosalla ovat osoittautuneet mutkikkaammiksi ja niitä selostetaan seuraavassa.

Klassisessa Kirchhoffin laattateoriassa ehto $w = 0$ pitkin reunaa implikoi välttämättä ehdon $\beta_s = 0$, sillä $\gamma_{zs} \equiv 0$. Täten ohuelle vapaasti tuetulle laatalle voitaisiin olettaa saatavan hyviä tuloksia käytettäessä klassisen laattamallin reunaehtoja (2) riippumatta siitä onko elementin tyyppi Kirchhoff, diskreetti Kirchhoff tai Reissner-Mindlin. Näin onkin asianlaita, mikäli laatan reumat ovat suorissa ja eri reunanosat kohtaavat toisensa suorassa kulmassa, kuten esimerkiksi suorakaidelaatassa.

Erityisesti, mikäli käyräviivaisia vapaasti tuettuja reunoja approksimoidaan suorasisuisilla elementeillä, johtaa klassisen teorian vapaasti tuettu reunaehtotototapaus 2 vaikeuksiin. Tällöin reunaehdon $\beta_s = w_{,s} = 0$ asettaminen elementtien reunasolmuissa johtaa välttämättä myös ehtoon $w_{,n} = 0$. Täten elementtiverkkoa tihennet-



Kuva 10.13 Vino laatta.

Taulukko 10.3 Laatan reunaehdot elementtimenetelmässä.

| jäykkä kiinnitys | vapaa reuna | vapaasti tuettu (pehmeä) |
|---------------------|----------------|-----------------------------|
| $w = 0$ | $M_n = 0$ | $w = 0$ |
| $\beta_n = 0$ | $M_{ns} = 0$ | $M_n = 0$ |
| $\beta_s = 0$ | $Q_n = 0$ | $M_{ns} = 0$ |

täessä saadaan aikaan jäykästi tuettu reunaehtotapaus. Toisin sanoen, ratkaisuna saadaan oikea tulos mutta väärälle ongelmalle.

Toisena esimerkkinä mainittakoon kuvan 10.13 vinon laatan tapaus. Mallinnettaessa laatta tasaisella 14×14 elementtiverkolla saadaan keskipisteen taipumaksi noin 20 % liian pieni arvo, kun reunaehtona käytetään klassista vapaan reunan ehtoa (2). Mikäli reunaehdot muutetaan vastaamaan vapaasti tuetun reunan ehtoja (1), saadaan keskipisteen taipuma noin 3 % tarkkuudella.

Esimerkeistä voidaan siis päätellä, että klassisen laattamallin vapaasti tuetun reunan reunaehdot jäykistävät liikaa elementtimallia, kun mallin reunan sisäiset kulmat ylittävät arvon $\pi/2$. Onkin suositeltavaa, että elementtimenetelmän yhteydessä käytettäisiin taulukossa 10.3 esitetyjä reunaehtoja laattaelementin tyypistä riippumatta.

10.7 Esimerkkejä

Esimerkki 10.1 *Reissnerin-Mindlinin laattamallin virtuaalisen työn yhtälö on (jäykästi tuettu laatta)*

$$\int_A (M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + M_{xy} \delta \kappa_{xy} + Q_x \delta \gamma_{zx} + Q_y \delta \gamma_{zy}) dA = \int_A f \delta w dA, \quad (10.112)$$

missä

$$\begin{aligned}
 \kappa_x &= -\beta_{x,x}, & M_x &= D(\kappa_x + \nu\kappa_y), \\
 \kappa_y &= -\beta_{y,y}, & M_y &= D(\kappa_y + \nu\kappa_x), \\
 \kappa_{xy} &= -\beta_{x,y} - \beta_{y,x}, & M_{xy} &= \frac{1}{2}(1 - \nu)D\kappa_{xy}, \\
 \gamma_{zx} &= w_{,x} - \beta_x, & Q_x &= Gt\gamma_{zx}, \\
 \gamma_{zy} &= w_{,y} - \beta_y, & Q_y &= Gt\gamma_{zy},
 \end{aligned} \tag{10.113}$$

ja missä D on laatan taivutusjäykkyys ja t laatan paksuus. Johda mallin Eulerin yhtälöt.

Kirjoitetaan momenttien lausekkeet siirtymäsuureiden ja materiaalivakioiden avulla auki

$$\begin{aligned}
 &\int_A \left\{ D \left[(\beta_{x,x} + \nu\beta_{y,y}) \delta\beta_{x,x} + (\beta_{y,y} + \nu\beta_{x,x}) \delta\beta_{y,y} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}(1 - \nu)(\beta_{x,y} + \beta_{y,x})(\delta\beta_{x,y} + \delta\beta_{y,x}) \right] \right. \\
 &\quad \left. + Gt \left[(w_{,x} - \beta_x)(\delta w_{,x} - \delta\beta_x) + (w_{,y} - \beta_y)(\delta w_{,y} - \delta\beta_y) \right] \right\} dA = \int_A f \delta w dA
 \end{aligned}$$

Koska virtuaaliset muutokset δw , $\delta\beta_x$ ja $\delta\beta_y$ ovat mielivaltaisia, saadaan kolme yhtälöä

$$\int_A Gt [(w_{,x} - \beta_x) \delta w_{,x} + (w_{,y} - \beta_y) \delta w_{,y}] dA = \int_A f \delta w dA, \tag{10.115a}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_A \left\{ D [(\beta_{x,x} + \nu\beta_{y,y}) \delta\beta_{x,x} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}(1 - \nu)(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \delta\beta_{x,y}] \right. \\
 &\quad \left. - Gt (w_{,x} - \beta_x) \delta\beta_x \right\} dA = 0, \tag{10.115b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_A \left\{ D [(\beta_{y,y} + \nu\beta_{x,x}) \delta\beta_{y,y} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}(1 - \nu)(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \delta\beta_{y,x}] \right. \\
 &\quad \left. - Gt (w_{,y} - \beta_y) \delta\beta_y \right\} dA = 0. \tag{10.115c}
 \end{aligned}$$

Sovelletaan vasemman puolen integraaleihin osittaisintegrointia ja Gaussin lausetta

$$\begin{aligned}
 &\int_A Gt [(w_{,x} - \beta_x) \delta w_{,x} + (w_{,y} - \beta_y) \delta w_{,y}] dA \\
 &= \int_A Gt \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(w_{,x} - \beta_x) \delta w] + \frac{\partial}{\partial y} [(w_{,y} - \beta_y) \delta w] \right\} dA \\
 &\quad - \int_A Gt [(w_{,xx} - \beta_{x,x}) \delta w + (w_{,yy} - \beta_{y,y}) \delta w] dA \\
 &= \oint_S Gt [(w_{,x} - \beta_x) n_x + (w_{,y} - \beta_y) n_y] \delta w ds \\
 &\quad - \int_A Gt (w_{,xx} + w_{,yy} - \beta_{x,x} - \beta_{y,y}) \delta w dA. \tag{10.116}
 \end{aligned}$$

Koska taipuma on annettu koko reunalla on taipuman variaation oltava nolla reunakäyrällä, jolloin yhtälöstä (10.115aa) saadaan

$$\int_A [Gt(\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} - \Delta w) - f] \delta w dA = 0, \quad (10.117)$$

missä on merkitty

$$\boldsymbol{\beta} = \left\{ \begin{array}{c} \beta_x \\ \beta_y \end{array} \right\}, \quad (10.118)$$

ja $\nabla \cdot$ on divergenssi- ja Δ Laplacen operaattori. Koska virtuaalinen siirtymäkenttä on mielivaltainen, on oltava

$$Gt(\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} - \Delta w) = f. \quad (10.119)$$

Vastaavalla tavalla käsitellään myös toinen ja kolmas yhtälö. Näytetään malliksi vain variaatiosta $\delta\beta_x$ seuraavan yhtälön johto:

$$\begin{aligned} & \int_A \left\{ D [(\beta_{x,x} + \nu\beta_{y,y})\delta\beta_{x,x} + \frac{1}{2}(1-\nu)(\beta_{x,y} + \beta_{y,x})\delta\beta_{x,y}] \right. \\ & \quad \left. - Gt(w_{,x} - \beta_x)\delta\beta_x \right\} dA \\ = & \int_A D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(\beta_{x,x} + \nu\beta_{y,y})\delta\beta_x] + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial}{\partial y} [(\beta_{x,y} + \nu\beta_{y,x})\delta\beta_x] \right\} dA \\ & - \int_A D [\beta_{x,xx} + \nu\beta_{y,xy} + \frac{1}{2}(1-\nu)(\beta_{x,yy} + \beta_{y,xy})] \delta\beta_x dA \\ & - \int_A Gt(w_{,x} - \beta_x)\delta\beta_x dA = 0 \\ \Rightarrow & - \int_A \left\{ D [\Delta\beta_x + \frac{1}{2}(1+\nu)(\beta_{y,xy} - \beta_{x,yy})] - Gt(w_{,x} - \beta_x) \right\} \delta\beta_x dA = 0 \end{aligned}$$

Kysytyn Reissnerin-Mindlinin laattaprobleeman Eulerin yhtälöt ovat siten

$$Gt(\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} - \Delta w) = f, \quad (10.121a)$$

$$D [\Delta\beta_x + \frac{1}{2}(1+\nu)(\beta_{y,xy} - \beta_{x,yy})] + Gt(w_{,x} - \beta_x) = 0, \quad (10.121b)$$

$$D [\Delta\beta_y + \frac{1}{2}(1+\nu)(\beta_{x,xy} - \beta_{y,xx})] + Gt(w_{,y} - \beta_y) = 0, \quad (10.121c)$$

reunaehdoilla $w = \beta_x = \beta_y = 0$.

Huomaa, että pyörittelyissä on otaksuttu laatan taivutusjäykkyyden vakioisuus.

Esimerkki 10.2 Edellisen esimerkkitehtävän Eulerin yhtälöt muodostavat kolmen yhtälön systeemin kolmen tuntemattoman funktion w, β_x ja β_y ratkaisemiseksi. Eliminoi yhtälöistä rotaatioiden β_x ja β_y osuus, jolloin saadaan separoitua yhtälö jossa esiintyy ainoastaan taipuma w .

Elementtimenetelmä pohjana oleva virtuaalisen työn yhtälö on

$$\int_A (M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + M_{xy} \delta \kappa_{xy} + Q_x \delta \gamma_{zx} + Q_y \delta \gamma_{zy}) dA = \int_A f \delta w dA. \quad (10.127)$$

Nyt on tukemistavasta, symmetriasta ja käytetystä elementtijaosta aiheutuen keskipinnan normaalin kiertymät nolliä kaikkialla, eli

$$\beta_x \equiv \beta_y \equiv 0. \quad (10.128)$$

Täten virtuaalisen työn lauseke supistuu muotoon

$$Gt \int_A (w_{,x} \delta w_{,x} + w_{,y} \delta w_{,y}) dA = \int_A f \delta w dA. \quad (10.129)$$

Symmetrian nojalla riittää tarkastella vain yhtä elementtiä. Ottaen reunaehdot huomioon on taipuman interpolaation pelkästään

$$w = N_3 w_3, \quad (10.130)$$

missä

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta). \quad (10.131)$$

Derivaattojen muunoskaavat ovat

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad \text{ja} \quad dA = \frac{1}{4} L^2 d\xi d\eta, \quad (10.132)$$

jolloin ratkaistavaksi yhtälöksi saadaan

$$Gt \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N_{3,\xi}^2 + N_{3,\eta}^2) d\xi d\eta w_3 = \frac{1}{4} f L^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_3 d\xi d\eta, \quad (10.133)$$

eli

$$Gt \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{16} [(1 + \eta)^2 + (1 + \xi)^2] d\xi d\eta w_3 = \frac{1}{16} f L^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 + \xi)(1 + \eta) d\xi d\eta. \quad (10.134)$$

Suorittamalla ‘ali-integrointi’ eli käyttämällä Gaussin yhden pisteen kaavaa (paino $w = 2 \cdot 2 = 4$, $\xi = \eta = 0$), saadaan

$$\frac{1}{4} Gt w_3 = \frac{1}{4} f L^2 \quad (10.135)$$

Josta ratkaisu on

$$w_3 = \frac{f L^2}{Gt}. \quad (10.136)$$

Havaitaan, että kyseinen elementtiverkko on aivan liian harva kuvaamaan kyseisellä elementillä ja laattamallilla taivutustilaa. Momentit ovat tietenkin nolliä koko alueessa koska rotaatiot häviävät, leikkausvoimat saadaan nyt lausekkeista

$$Q_x = Gt w_{,x} = Gt \frac{2}{L} N_{3,\xi} = \frac{Gt}{2L} (1 + \eta) w_3 = \frac{1}{2} f L (1 + \eta), \quad (10.137)$$

ja vastaavasti

$$Q_y = Gtw_{,y} = Gt \frac{2}{L} N_{3,\eta} = \frac{Gt}{2L} (1 + \xi) w_3 = \frac{1}{2} fL(1 + \xi). \quad (10.138)$$

Elementtien keskipisteissä saadaan siten arvot

$$Q_x = Q_y = \frac{1}{2} fL. \quad (10.139)$$

10.8 Stabiileja Reissnerin-Mindlinin-laattamallin elementtejä

10.8.1 Johdanto

Luvussa 10.3 esitetyt elementit ovat enemmän tai vähemmän epäluotettavia. Valikoivasti ali-integroitu Lagrangen tyyppinen elementti on epäluotettava siinä esiintyvän nollaenergiamuodon takia, Serendip- ja Heterosis- tyyppiset elementit läpäisevät tämän minimiväntimuksen, mutta eivät ole stabiileja. Tämä stabiiliuden puute näkyy erityisen selvästi leikkausvoiman heilahteluina epäsäännöllisten elementtiverkkojen yhteydessä. Näille elementeille ei voida osoittaa leikkausvoiman virheen suppenemista.

Tarkastellaan seuraavassa 1980-luvun puolivälin jälkeen laattaelementtien formulaatiossa tapahtunutta kehitystä. Tällä hetkellä on käytettävissä joukko Reissnerin-Mindlinin malliin perustuvia elementtejä, jotka eivät lukkiudu ohuen laatan rajatapauksessa, ja joille voidaan osoittaa optimaalinen konvergenssi kaikille siirtymä- ja jännitysresultanttisuureille.

10.8.2 Arnoldin ja Falkin epäkonformi elementti

D.N. Arnold ja R.S. Falk [37] ovat esittäneet yksinkertaisen epäkonformin kolmiolaattaelementin, jolle he myös osoittivat optimaaliset konvergenssiominaisuudet. Tässä elementissä taipumaa kuvataan epäkonformilla lineaarisella interpolaatiolla joka on jatkuva elementin sivujen keskipisteissä, eli

$$w = (L_1 + L_2 - L_3)w_4 + (L_2 + L_3 - L_1)w_5 + (L_3 + L_1 - L_2)w_6, \quad (10.140)$$

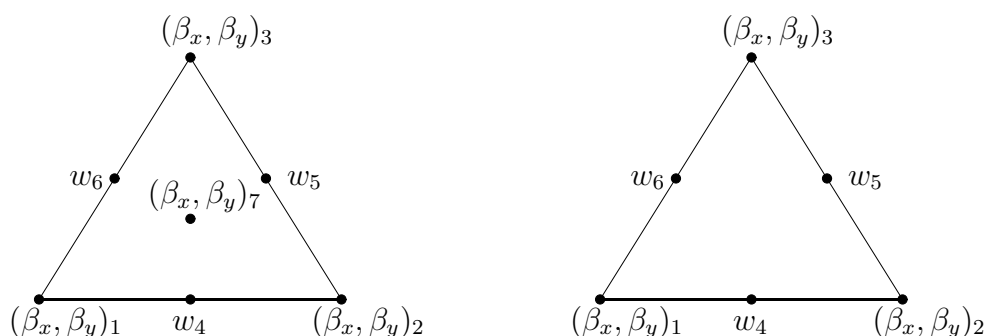
missä L_i :t ovat alakoordinaatit. Kiertymiä β_x, β_y interpoloidaan lineaarisilla interpolaatiofunktioilla joita on täydennetty kuubisella kuplamuodolla, joka tässä on otettu hierarkiseksi

$$\beta_i = L_1\beta_{i1} + L_2\beta_{i2} + L_3\beta_{i3} + 27L_1L_2L_3\Delta\beta_{i7}, \quad (10.141)$$

missä $i = x$ tai y . Kiertymien interpolaatio on siten konformi. Elementin solmukonfiguraatio ja vapausasteet on esitetty kuvassa 10.14.

Leikkausmuodonmuutos lasketaan elementin keskimääräisten kiertymien avulla

$$\gamma_{iz} = w_{,i} - \bar{\beta}_i, \quad (10.142)$$



Kuva 10.14 Stabiili RM-mallin epäkonformi laattaelementti ja sen modifikaatio.

missä

$$\bar{\beta}_i = \frac{1}{A^{(e)}} \int_{A^{(e)}} \beta_i dA. \quad (10.143)$$

L. Franca ja R. Stenberg [43] ovat esittäneet elementistä muunnoksen, jossa kiertymien interpolaatiossa ei tarvita kuubista kuplamuotoa. Sen sijaan leikkausvoima on laskettava stabilointitekijällä

$$\frac{1}{1 + \alpha (h/t)^2} \quad (10.144)$$

kerrottuna, missä α on positiivinen vakio, h elementin karakteristinen mitta ja t laatan paksuus, siis

$$Q_i = \frac{kGt}{1 + \alpha (h/t)^2} (w_{,i} - \bar{\beta}_i). \quad (10.145)$$

Täten jäykkyysmatriisi voidaan integroida yhden pisteen kvadratuurilla, ja näin saavutetaan huomattava säästö jäykkyysmatriisin kokoamistyössä. Tässä näkyy myös kiertymän kuplamuodon ja stabilointitekniikan tietynlainen ekvivalenttisuus, katso kappaletta 9.2.5.

Elementillä tehtyjä numeerisia laskelmia on esitetty lähteissä [42] (alkuperäinen formulaatio) ja [?] (modifioitu versio).

10.8.3 Stabiloidut MITC-elementit

Konformien taipuman ja kiertymien suhteen tasa-asteisesti interpoloitujen Reissnerin-Mindlinin laattaelementtien kehittäminen on osoittautunut hankalaksi. K.-J. Bathe on 1980-luvun puolivälissä esittänyt idean leikkausmuodonmuutosten laskemiseksi [39], [40]. Tämä kokonainen elementtiperhe tunnetaan lyhenteellä MITC, joka tulee sanoista: Mixed Interpolated Tensorial Components.⁵ Alkuperäinen elementti toimii hyvin suorakaidegeometrioissa, mutta sen epästabiilius tulee esiin epäsäännöllisessä verkossa. Epästabiilius voidaan kuitenkin poistaa stabilointitekniikalla, jolloin saadaan optimaalisesti suppenevat elementit.

⁵Nimen muodostumiseen lienee vaikuttanut professori Bathen toimipaikka: Massachusetts Institute of Technology.

Tarkastellaan seuraavassa vain elementtiperheen kahta alhaisasteisinta elementtiä, eli lineaarista kolmio- ja bilineaarista nelikulmioelementtiä. Mikäli seurattaisiin elementtien alkuperäistä formulointia, tarvittaisiin tensorianalyysin tietoja; tämä ei ole kuitenkaan välttämätöntä, vaan seuraavassa esitetään tälle ekvivalentti tapa konstruoida alhaisasteisten elementtien modifioidut interpolaatiofunktiot.

MITC elementtiformulaation idea on laskea leikkausmuodonmuutos modifioidusta kiertymien interpolaatiofunktioista siten, että leikkausmuodonmuutos γ_s elementin reunaviivalla on samanasteinen polynomi kuin taipuman gradientti tässä suunnassa. Lineaarille ja bilineaariselle elementille tämä merkitsee leikkausmuodonmuutoksen vakioisuutta. Tämä vakiokomponentti asetetaan yhtäsuureksi elementin reunan keskipisteessä alkuperäisistä interpolaatioista lasketun leikkausmuodonmuutoksen arvon kanssa.

MITC elementti konstruoidaan seuraavasti. Taipumalle ja kiertymille käytetään tavanomaista interpolaatiota

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i, \quad \beta_x = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{xi}, \quad \beta_y = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{yi}. \quad (10.146)$$

Lisäksi leikkausmuodonmuutoksen määrittämiseen tarvittaville kiertymille otaksutaan oma interpolaatio ja merkitään sitä yläindeksillä S (Huomaa: tätä interpolaatiota käytetään *vain leikkausmuodonmuutosta laskettaessa*) :

$$\beta_x^S = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{xi}^S, \quad \beta_y^S = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{yi}^S. \quad (10.147)$$

Yhtälöissä (10.146) ja (10.147) N_i :t ovat lineaariset alakoordinaateissa lausutut tai bilineaariset interpolaatiofunktiot ja n on elementin solmujen lukumäärä (3 tai 4). Uusi kiertymäsuureiden interpolaatio (10.147) lisää elementin vapausasteita kuudella (kolmio) tai kahdeksalla (nelikulmio) eli kahdella vapausasteella sivua kohden. Nämä voidaan eliminoida kahdesta ehdosta:

- leikkausmuodonmuutos on vakio elementin reunalla i , eli

$$\gamma_{si} = w_{,s} - \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\beta}^S = \text{vakio}, \quad (10.148)$$

- ja yhtäsuuri alkuperäisistä interpolaatioista lasketun leikkausmuodonmuutoksen kanssa elementin reunan keskipisteessä, eli

$$w_{,s} - \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\beta}^S = w_{,s} - \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\beta}(\zeta = 0). \quad (10.149)$$

Tämä ehto voidaan lausua myös integraalin avulla, eli

$$\begin{aligned} \int_{\text{sivu } i} (w_{,s} - \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\beta}^S) ds &= \int_{\text{sivu } i} (w_{,s} - \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\beta}) ds \\ \Rightarrow \int_{\text{sivu } i} \mathbf{s}_i^T (\boldsymbol{\beta}^S - \boldsymbol{\beta}) ds &= 0. \end{aligned} \quad (10.150)$$

Sivun i tangentin suuntaista yksikkövektoria merkitään \mathbf{s}_i :llä, $\mathbf{s}_i^T = [-S_i \ C_i]$, katso lukua 10.5.

Ehto (10.150) voidaan kirjoittaa yleisemmässä muodossa

$$\int_{\text{sivu } i} \mathbf{s}_i^T (\boldsymbol{\beta}^S - \boldsymbol{\beta}) w ds, \quad (10.151)$$

missä w on elementin reunalla määritelty painofunktio, joka on astetta alhaisempi kuin taipuman ja rotaatioiden interpolaatiopolynomit. Tätä ehtoa käytetään konstruoitaessa korkeampiasteisia MITC elementtejä. Koska tarkasteltavana on ollut vain lineaarinen/bilineaarinen elementti, painofunktio on vakio, eli $w = 1$.

Leikkausmuodonmuutoksen lauseke reunalla i on ennen rajoitteen (10.148) huomioonottoa lineaarinen lauseke sivun suuntaisen dimensiottoman koordinaatin ζ suhteen:

$$\begin{aligned} \gamma_{si} = & w_{,s} - \frac{1}{2} \left\{ C_i(\beta_{yi}^S + \beta_{yi+}^S) - S_i(\beta_{xi}^S + \beta_{xi+}^S) \right. \\ & \left. + [C_i(\beta_{yi}^S - \beta_{yi+}^S) - S_i(\beta_{xi}^S - \beta_{xi+}^S)] \zeta \right\} \end{aligned} \quad (10.152)$$

Leikkausmuodonmuutosta koskevat ehdot (10.148) ja (10.149) elementin sivulla i ovat siten seuraavat:

$$-S_i(\beta_{xi+}^S - \beta_{xi}^S) + C_i(\beta_{yi+}^S - \beta_{yi}^S) = 0, \quad (10.153a)$$

$$-S_i(\beta_{xi+}^S + \beta_{xi}^S) + C_i(\beta_{yi+}^S + \beta_{yi}^S) = -S_i(\beta_{xi+} + \beta_{xi}) + C_i(\beta_{yi+} + \beta_{yi}). \quad (10.153b)$$

Yhtälöt (10.153a) muodostavat systeemin $2n$ tuntemattoman β_{xi}^S ja β_{yi}^S ratkaisemiseksi. Vähennetään yhtälö (10.153aa) yhtälöstä (10.153ab), jolloin saadaan:

$$-S_i\beta_{xi}^S + C_i\beta_{yi}^S = \frac{1}{2} [C_i(\beta_{yi+} + \beta_{yi}) - S_i(\beta_{xi+} + \beta_{xi})]. \quad (10.154)$$

Yhtälön oikealla puolella on sivun i keskipisteen kiertymän β_{si} lauseke, joten voidaan kirjoittaa

$$-S_i\beta_{xi}^S + C_i\beta_{yi}^S = \beta_{si}(0), \quad (10.155)$$

missä

$$\beta_{si}(0) = \frac{1}{2} [C_i(\beta_{yi+} + \beta_{yi}) - S_i(\beta_{xi+} + \beta_{xi})]. \quad (10.156)$$

Vastaavasti laskemalla yhtälöt (10.153aa) ja (10.153ab) puolittain yhteen saadaan:

$$-S_i\beta_{xi+}^S + C_i\beta_{yi+}^S = \beta_{si}(0). \quad (10.157)$$

Yhtälöt (10.155) ja (10.157) ovat voimassa kaikilla sivuilla i , joten ne voidaan kirjoittaa myös muodossa (sivujen i ja $i-$ osalta)

$$\begin{aligned} -S_i\beta_{xi}^S + C_i\beta_{yi}^S &= \beta_{si}(0), \\ -S_{i-}\beta_{xi}^S + C_{i-}\beta_{yi}^S &= \beta_{si-}(0). \end{aligned}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{aligned}\beta_{xi}^S &= \frac{1}{D_i} [C_{i-}\beta_{si}(0) - C_i\beta_{si-}(0)] \\ &= \frac{1}{2D_i} [C_{i-}C_i(\beta_{yi+} - \beta_{yi-}) + C_iS_{i-}\beta_{xi-} + D_i\beta_{xi} - C_{i-}S_i\beta_{xi+}](10.158a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{yi}^S &= \frac{1}{D_i} [S_{i-}\beta_{si}(0) - S_i\beta_{si-}(0)] \\ &= \frac{1}{2D_i} [S_{i-}S_i(\beta_{xi-} - \beta_{xi+}) + S_{i-}C_i\beta_{yi+} + D_i\beta_{yi} - S_iC_{i-}\beta_{yi-}](10.158b)\end{aligned}$$

missä

$$D_i = C_iS_{i-} - S_iC_{i-}. \quad (10.159)$$

Leikkausmuodonmuutoksen laskemiseen tarvittavien kiertymien interpolaatiot ovat viimein

$$\begin{aligned}\beta_x^S &= \sum_{i=1}^n N_i\beta_{xi}^S \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\left(N_i + \frac{C_{i+}S_i}{D_{i+}} N_{i+} - \frac{C_{i-}S_{i-}}{D_{i-}} N_{i-} \right) \beta_{xi} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{C_{i-}C_{i-}}{D_{i-}} N_{i-} - \frac{C_iC_{i+}}{D_{i+}} N_{i+} \right) \beta_{yi} \right], \quad (10.160a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_y^S &= \sum_{i=1}^n N_i\beta_{yi}^S \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\left(N_i + \frac{S_{i-}C_{i-}}{D_{i-}} N_{i-} - \frac{C_iS_{i+}}{D_{i+}} N_{i+} \right) \beta_{yi} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{S_{i+}S_i}{D_{i+}} N_{i+} - \frac{S_{i-}S_{i-}}{D_{i-}} N_{i-} \right) \beta_{xi} \right]. \quad (10.160b)\end{aligned}$$

Merkintä $i - -$ tarkoittaa sivua $i -$ edeltävää sivua.

Kolmi- tai nelisolmuisen stabiloidun MITC elementin virtuaalisen työn lauseke on siten

$$\begin{aligned}&\int_A \left[-M_x\delta\beta_{x,x} - M_y\delta\beta_{y,y} - M_{xy}(\delta\beta_{x,y} + \delta\beta_{y,x}) \right. \\ &\quad \left. + Q_x(\delta w_{,x} - \delta\beta_x^S) + Q_y(\delta w_{,y} - \delta\beta_y^S) \right] dA \\ &= \int_A \bar{f}\delta w dA + \int_{S_\sigma} (\bar{Q}_n\delta w - \bar{M}_n\delta\beta_n - \bar{M}_{ns}\delta\beta_s) ds, \quad (10.161)\end{aligned}$$

ja missä leikkausvoimat määritetään lausekkeista

$$Q_x = \frac{kGt}{1 + \alpha(h/t)^2}(w_{,x} - \beta_x^S), \quad Q_y = \frac{kGt}{1 + \alpha(h/t)^2}(w_{,y} - \beta_y^S), \quad (10.162)$$

missä α on positiivinen stabilointivakio ja h on elementin karakteristinen mitta, esim. suurimman sivun pituus. Momentit määritetään tavanomaiseen tapaan. Elementin jäykkyyismatriisi voidaan integroida tarkasti, eli nelisolmuisen elementin tapauksessa 2×2 pisteen Gaussin kaavalla ja kolmioelementin tapauksessa kolmen pisteen kaavalla. Kolmioelementti toimii myös ali-integroituna, eli yhden pisteen kvadratuurilla laskettuna.

Elementille on johdettu optimaaliset suppenemisnopeusestimaatit lähteessä [41]. Numeerisia tuloksia elementin käyttäytymisestä löytyy mm. lähteistä [48], [49]. Kuvassa 10.15 on piirretty leikkausvoimajakauma vapaasti tuetun (kova) neliölaatan tapauksessa laskettuna valikoivasti ali-integroidulla nelisolmuisella elementillä (SRI) ja nelisolmuisella stabiloidulla MITC elementillä. Laatta on kuormitettu tasan jakautuneella paineella, joka vaikuttaa laatan keskellä $L/8 \times L/8$ kokoisella neliöalueella. Kuvasta nähdään selvästi SRI elementin epästabiilius, joka tulee esiin käytettäessä epäsäännöllistä elementtiverkkoa. Koska kyseessä on kova vapaa tuentatapa ei Reissnerin-Mindlinin laattamallissa esiinny reunahäiriötä (katso liitettä ??), voidaan tarkkana ratkaisuna pitää Kirchhoffin laattamallin ratkaisua. Kuva on julkaistu lähteessä [49].

10.8.3.1 Stabilointiparametrien fysikaalinen tulkinta

Timoshenkon palkkimallin stabilointivakiolle saatiin fysikaalisesti mielekäs tulkinta luvussa 9.2.5.2. Samaa menettelytapaa voidaan soveltaa myös laattoihin.

Merkitään käyritymien ja kiertymien yhteyttä kuvaavaa kinemaattista operaattorimatriisia symbolilla \mathbf{L} . Sen adjungantti on tasapaino-operaattori \mathbf{L}^* . Operaattoreiden \mathbf{L} ja \mathbf{L}^* esitys karteesisessa koordinaatistossa on

$$\mathbf{L} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (10.163)$$

Leikkausvoimat $\mathbf{q} = [Q_x, Q_y]^T$ voidaan lausua momenttitasapainoyhtälön avulla muodossa

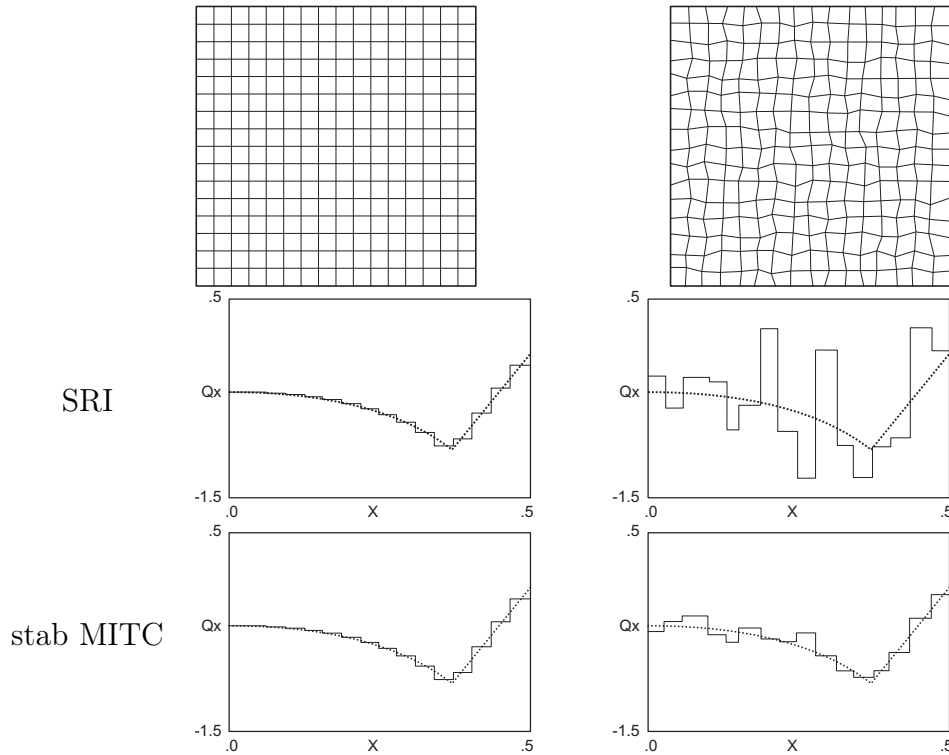
$$\mathbf{q} = \mathbf{L}^* \mathbf{m} = \mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta} \equiv \mathcal{L} \boldsymbol{\beta}. \quad (10.164)$$

Merkitään kiertymävektorin lineaarista osaa ja kuplamuotoa seuraavasti

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 + \Delta \boldsymbol{\beta}. \quad (10.165)$$

Tasapainoyhtälöiden keskimääräinen toteutumisehto on

$$\int_{A^{(e)}} (\mathbf{q} - \mathbf{L}^* \mathbf{m}) dA = \int_{A^{(e)}} [\mathbf{D}_s(\nabla w - \boldsymbol{\beta}^S - \Delta \boldsymbol{\beta}) - \mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L}(\boldsymbol{\beta}_1 + \Delta \boldsymbol{\beta})] dA = \mathbf{0}, \quad (10.166)$$



Kuva 10.15 Leikkausvoimajakauma (Q_x) vaakasuoralla symmetrialinjalla laskettuna SRI (ylhäällä) ja stabiloidulla MITC elementillä (alhaalla) Säännöllinen (vasemmalla) ja epäsäännöllinen (oikealla) 16×16 elementtiverkko ja laatan suhteellinen paksuus on $t/L = 0.01$. Pisteviiva on tarkka ratkaisu. Kuva lähteestä [49].

eli

$$\int_{A^{(e)}} (\mathbf{D}_s + \mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L}) \Delta \boldsymbol{\beta} dA = \int_{A^{(e)}} \mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta}^S) dA. \quad (10.167)$$

Merkitään elementin nurkkasolmuihin liittyvien vapausasteiden pystyvektoria $\mathbf{u}^{(e)}$:lla ja kiertymien kuplamuodon vapausastevektoria $\Delta \mathbf{u}^{(e)}$:lla ja $\Delta \boldsymbol{\beta} = \overset{\circ}{\mathbf{N}} \Delta \mathbf{u}^{(e)}$. Yhtälön (10.167) ratkaisu voidaan kirjoittaa matriisimuodossa seuraavasti

$$\Delta \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (10.168)$$

missä matriisi \mathbf{C} on

$$\mathbf{C} = \int_{A^{(e)}} (\mathbf{D}_s + \mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L}) \overset{\circ}{\mathbf{N}} dA \quad (10.169)$$

Leikkausvoimat määritetään keskiarvoistamalla yhtälöstä

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}_s \Pi_0 (\nabla w - \boldsymbol{\beta}^S - \Delta \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{D}_s (\mathbf{B}_s(0) - p \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S}) \mathbf{u}^{(e)}, \quad (10.170)$$

missä Π_0 on projektio vakiofunktioiksi ja jonka arvo on p operoituna kiertymän kuplamuotoon. Leikkausmuodonmuutokseen liittyvän \mathbf{B}_s matriisin keskiarvoa on merkitty

symbolilla $\mathbf{B}_s(0)$. Tällöin $\mathbf{S} = A^{(e)}\mathbf{D}_s\mathbf{B}_s(0)$ ja leikkausvoimalle saadaan

$$\mathbf{q} = (\mathbf{I} - pA^{(e)}\mathbf{D}_s\mathbf{C}^{-1})\mathbf{D}_s\mathbf{B}_s(0)\mathbf{u}^{(e)}, \quad (10.171)$$

missä $A^{(e)}$ on elementin pinta-ala ja \mathbf{I} 2×2 yksikkömatriisi. Leikkausjäykkyyden redusoitu muoto on siten

$$\mathbf{D}_s^* = (\mathbf{I} - pA^{(e)}\mathbf{D}_s\mathbf{C}^{-1})\mathbf{D}_s. \quad (10.172)$$

Esimerkki 10.4 *Johdetaan nelisolmuisen elementin stabilointiparametrien arvot suorakaidegeometriassa. Parametreina ovat laatan sivusuhte ja ortotrooppisen materiaalin kimmovakioiden suhde.*

Nelisolmuisen elementin matriisi \mathbf{C} on diagonaalinen suorakaidegeometriassa. Otaksutaan lineaarisesti kimmoinen ortotrooppinen materiaalilaki ja tilanne, jossa materiaalin symmetriasuunnat yhtyvät koordinaattiakselien suuntiin. Otetaan käyttöön seuraavat lyhennysmerkinnät:

$$\begin{aligned} \chi_{12} &= (1 - \nu_{12}\nu_{21})\frac{G_{12}}{E_1}, & \chi_{13} &= (1 - \nu_{12}\nu_{21})\frac{G_{13}}{E_1}, \\ \chi_{23} &= (1 - \nu_{12}\nu_{21})\frac{G_{23}}{E_1}, & \psi &= \frac{E_2}{E_1}. \end{aligned} \quad (10.173a)$$

Elementin pitkän x -akselin suuntaisen sivun mitta on h ja y -suunnassa εh . Redusoitu leikkausjäykkyydematriisi saadaan ilman likimääräistyksiä muotoon

$$\mathbf{D}_s^* = \begin{bmatrix} (1 + \alpha_{xz}(h/t)^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (1 + \alpha_{yz}(h/t)^2)^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{D}_s, \quad (10.174)$$

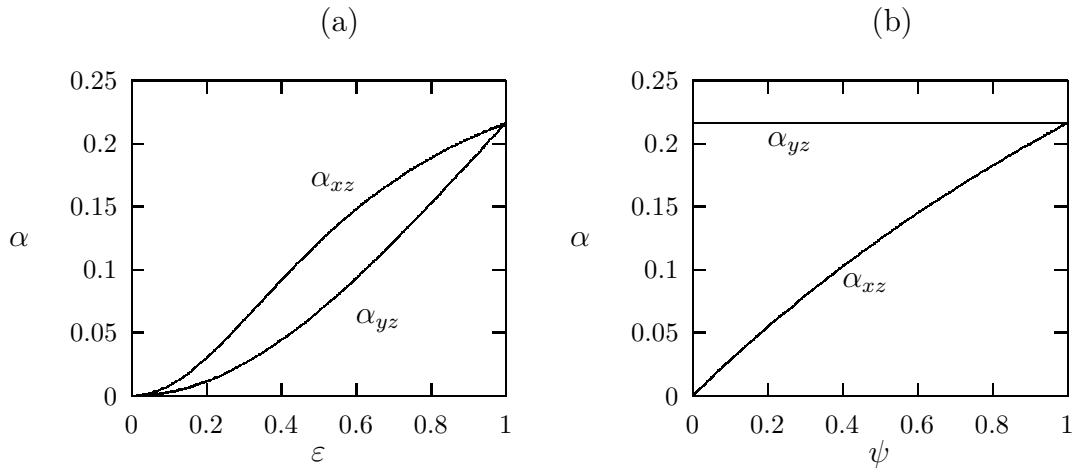
missä

$$\alpha_{xz} = \frac{k\chi_{13}}{1 + \chi_{12}\varepsilon^{-2}}, \quad \alpha_{yz} = \frac{k\chi_{23}}{\chi_{12} + \psi\varepsilon^{-2}}. \quad (10.175)$$

Isotrooppiselle materiaalille ja neliön muotoiselle elementille α -parametrit ovat yhtäsuuria ja niillä on arvo $\alpha = k(1 - \nu)/(3 - \nu)$, joka siten vaihtelee rajoissa $0.1667 \leq \alpha \leq 0.3125$ suppeumaluvun muuttuessa välillä $\frac{1}{2} \geq \nu \geq 0$. Mikäli suppeumaluvulle valitaan arvo 0.3 on stabilointiparametri 0.216, mikä vastaa melko hyvin lähteissä [58] ja [49] esitettyä taipuman neliövirheen suhteen optimaalista stabilointiparametrin arvoa (katso kuvaa 13 lähteessä [58] ja kuvaa 7 lähteessä [49]).

Stabilointiparametrin riippuvuus elementin sivusuhteesta ε on esitetty kuvassa 10.16a isotrooppiselle materiaalimallille sekä kimmokerrointen suhteesta ψ ortotrooppiselle materiaalille neliögeometriassa kuvassa 10.16b.

Edellä esitetty menettely stabilointiparametrin arvon eksplisiittiseksi määrittämiseksi on hyvin riippuvainen kiertymän kuplamuodon valinnasta. Puuttumatta kysymykseen stabilointiparametrin optimaalisesta arvosta, antanee menettely kuitenkin hyväksyttävän fysikaalisen tulkinnan sen luonteesta.



Kuva 10.16 Stabilointiparametrien α_{xz} , α_{yz} riippuvuus (a) elementin sivusuhteesta ε , isotrooppinen materiaali $\nu = 0.3$, (b) ortotrooppisen materiaalin tapauksessa kimmokertoimien suhteesta $\psi = E_2/E_1$, oletettuna $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.3$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = E_2/2.6$, neliöelementti.

10.8.4 Yleinen stabilointiteknikka Reissnerin-Mindlinin laattamallin elementeille

Edellisessä luvussa tarkasteltiin yksityiskohtaisesti lineaarista- ja bilineaarista elementtiä. Johdetaan seuraavaksi yleinen formulaatio stabiileille Reissnerin-Mindlinin laattamallin elementeille lähtemällä laattamallin tasapainoyhtälöistä, jotka ovat

$$\mathbf{L}^* \mathbf{m} - \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (10.176a)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = \bar{f}, \quad (10.176b)$$

jotka voidaan konstitutiivisen lain ja kinemaattisten relaatioiden avulla kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}, \quad (10.177a)$$

$$-\nabla \cdot [\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta})] = 0. \quad (10.177b)$$

Systeemissä on kolme yhtälöä ja kolme tuntematonta funktiota w , β_x ja β_y . Probleema voidaan formuloida myös viiden tuntemattoman avulla lisäämällä leikkausvoimat \mathbf{q} tuntemattomien joukkoon, jolloin päädytään systeemiin:

$$\mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (10.178a)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = \bar{f}, \quad (10.178b)$$

$$\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta}) - \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (10.178c)$$

Muodostetaan systeemin (10.178a) heikko muoto kertomalla yhtälöt painofunktioilla $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, \hat{w} ja $\hat{\mathbf{q}}$:lla

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta})^T \hat{\boldsymbol{\beta}} dA - \int_{\Omega} \mathbf{q}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} dA = 0, \quad (10.179a)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{q} \hat{w} dA = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA, \quad (10.179b)$$

$$\int_{\Omega} [\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta})^T - \mathbf{q}]^T \hat{\mathbf{q}} dA = 0. \quad (10.179c)$$

Osittaisintegroimalla ja käyttämällä Gaussin lausetta sekä olettaen jäykästi kiinnitetyn laatan reunaehdot systeemi muuntuu muotoon

$$\int_{\Omega} (\mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\beta}} dA - \int_{\Omega} \mathbf{q}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} dA = 0, \quad (10.180a)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{q}^T \nabla \hat{w} dA = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA, \quad (10.180b)$$

$$\int_{\Omega} [\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta})^T - \mathbf{q}]^T \hat{\mathbf{q}} dA = 0. \quad (10.180c)$$

Lasketaan kaksi yllä olevaa yhtälöä puolittain yhteen, jolloin saadaan

$$\int_{\Omega} (\mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\beta}} dA + \int_{\Omega} \mathbf{q}^T (\nabla \hat{w} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) dA = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA, \quad (10.181a)$$

$$\int_{\Omega} [\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta}) - \mathbf{q}]^T \hat{\mathbf{q}} dA = 0. \quad (10.181b)$$

Huomataan, että yllä oleva muoto on symmetrinen, mikäli alempi yhtälöistä kerrotaan puolittain leikkausjäykkysmatriisiin käänteismatriisilla \mathbf{D}_s^{-1} .

Reissnerin-Mindlinin laattamallin ongelmat juontavat leikkausvoiman laskemiseen suoraan kinemaattisia- ja konstitutiivisia yhteyksiä käyttäen, eli kun leikkausvoimat määritetään yhtälöistä

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta}). \quad (10.182)$$

Käytettäessä tasapainoyhtälöä leikkausvoimien laskemiseen tarvitaan vain kiertymiä

$$\mathbf{q}_{\text{tp}} = \mathcal{L} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta}, \quad (10.183)$$

ja leikkausvoimajakauma saadaan stabiiliksi. Lisätään täten yhtälöiden (10.181a) oikealle puolelle stabilointitermit

$$S_1 = \sum_{e=1}^N \alpha \left(\frac{h}{t} \right)^2 \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{q}_{\text{tp}} - \mathbf{q}) \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{tp}} dA, \quad (10.184a)$$

$$S_2 = - \sum_{e=1}^N \alpha \left(\frac{h}{t} \right)^2 \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{q}_{\text{tp}} - \mathbf{q}) \hat{\mathbf{q}} dA, \quad (10.184b)$$

missä $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{tp}} = \mathbf{D}_s^{-1} \mathbf{q}_{\text{tp}}$. Stabilointitermit voidaan lisätä, sillä jatkuvassa probleemassa ne häviävät identtisesti ja diskreetissä ongelmassa ne häviävät rajalla, kun $h \rightarrow 0$. Systemin (10.181a) stabiloitu muoto on siten

$$\int_{\Omega} (\mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\beta}} dA + \int_{\Omega} \mathbf{q}^T (\nabla \hat{w} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) dA = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA + S_1, \quad (10.185a)$$

$$\int_{\Omega} [\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta}) - \mathbf{q}]^T \hat{\mathbf{q}} dA = S_2. \quad (10.185b)$$

Järjestelemällä alemmassa yhtälössä termejä saadaan

$$\sum_{e=1}^N \int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta} + \alpha(h/t)^2 \mathbf{D}_s^{-1} \mathcal{L} \boldsymbol{\beta}) - (1 + \alpha(h/t)^2) \mathbf{q}]^T \hat{\mathbf{q}} dA = 0. \quad (10.186)$$

Leikkausvoimat voidaan ratkaista elementtikohtaisesti

$$\mathbf{q}^{(e)} = \frac{\mathbf{D}_s}{1 + \alpha(h/t)^2} (\nabla w - \boldsymbol{\beta} + \alpha(h/t)^2 \mathbf{D}_s^{-1} \mathcal{L} \boldsymbol{\beta}), \quad (10.187)$$

jotka sijoitettuna takaisin yhtälöön (10.185a) antavat siirtymämenetelmäpohjaisen stabiloidun variaatioformulaation

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\beta}} dA - \sum_{e=1}^N \alpha \left(\frac{h}{t} \right)^2 \int_{\Omega^{(e)}} \mathcal{L} \boldsymbol{\beta} \mathbf{D}_s^{-1} \mathcal{L} \hat{\boldsymbol{\beta}} dA \\ & + \sum_{e=1}^N \frac{\mathbf{D}_s}{1 + \alpha(h/t)^2} \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla w - \boldsymbol{\beta} + \alpha(h/t)^2 \mathbf{D}_s^{-1} \mathcal{L} \boldsymbol{\beta}) (\nabla \hat{w} - \hat{\boldsymbol{\beta}} + \alpha(h/t)^2 \mathbf{D}_s^{-1} \mathcal{L} \hat{\boldsymbol{\beta}}) dA \\ & = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA. \end{aligned} \quad (10.188)$$

Summalauseke elementtien yli korostaa, että kyseiset termit lasketaan elementtikohtaisesti ja suureiden epäjatkuvuuksista elementtien reunojen yli ei välitetä. Yllä oleva hieman mutkikkaan näköinen lauseke voidaan kirjoittaa klassisen tyylin virtuaalisen työn yhtälön tapaisena hieman yksinkertaisemmassa muodossa seuraavasti:

$$\int_{\Omega} \mathbf{m}^T \hat{\boldsymbol{\kappa}} dA - \sum_{e=1}^N \alpha \left(\frac{h}{t} \right)^2 \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{q}_{\text{tp}}^T \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{tp}} dA + \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{q}^{\text{stab}} \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{\text{stab}} = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA, \quad (10.189)$$

missä on käytetty lyhenteitä

$$\mathbf{q}^{\text{stab}} = \frac{\mathbf{D}_s}{1 + \alpha(h/t)^2} \boldsymbol{\gamma}^{\text{stab}}, \quad (10.190a)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{\text{stab}} = \boldsymbol{\gamma} + \alpha(h/t)^2 \boldsymbol{\gamma}_{\text{tp}}, \quad (10.190b)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{\text{tp}} = \mathbf{D}_s^{-1} \mathbf{q}_{\text{tp}} = \mathbf{D}_s^{-1} \mathcal{L} \boldsymbol{\beta}. \quad (10.190c)$$

Huomaa, että ensimmäinen stabilointitermi vähentää taivutusenergian osuutta. Jotta globaali yhtälösystemi olisi positiivisesti definiitti on stabilointiparametrin α toteutettava

$$0 < \alpha < C_I. \quad (10.191)$$

Parametri C_I voidaan helposti estimoida elementtitasolla, katso vastaavaa harjoitustehtävää 6 luvussa 9.4. Formulaatio (10.189) toimii sellaisenaan kaikentyypisillä interpolaatiopolynomeilla (kolmio, suorakaide), jos taipumaa interpoloidaan astetta korkeammilla polynomeilla kuin kiertymiä. Mikäli halutaan käyttää samanasteisia polynomeja sekä taipumalle että kiertymille, on leikkausenergiatermiä vielä rukoitava, jotta saataisiin optimaalisesti konvergentti elementti

$$\int_{\Omega} \mathbf{m}^T \hat{\boldsymbol{\kappa}} dA - \sum_{e=1}^N \alpha \left(\frac{h}{t} \right)^2 \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{q}_{\text{tp}}^T \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{tp}} dA + \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^{(e)}} \frac{\mathbf{D}_s}{1 + \alpha(h/t)^2} \mathbf{R}^{(e)} \boldsymbol{\gamma}^{\text{stab}} \mathbf{R}^{(e)} \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{\text{stab}} = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA, \quad (10.192)$$

missä $\mathbf{R}^{(e)}$ on elementtikohtainen reduktio-operaattori, jonka konstruoiminen on kuitenkin melko monimutkaista. Periaatteessa se voidaan tehdä kuten alhaisasteisissa MITC elementeissä, eli konstruoidaan $\boldsymbol{\beta}^S$ siten, että seuraavat ehdot toteutuvat:

- mikäli taipuman ja kiertymän interpolaatio on astetta p niin leikkausmuodonmuutos $\boldsymbol{\gamma}_s$ on astetta $p - 1$ elementin reunoilla ja
- kaikille astetta $p - 2$ oleville polynomeille \mathbf{p} on voimassa ehto

$$\int_{\Omega^{(e)}} (\boldsymbol{\beta}^S - \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{p} dA = 0. \quad (10.193)$$

Redusoitu leikkausmuodonmuutos $\mathbf{R}^{(e)} \boldsymbol{\gamma}^{\text{stab}}$ lasketaan siten

$$\mathbf{R}^{(e)} \boldsymbol{\gamma}^{\text{stab}} = \nabla w - \boldsymbol{\beta}^S + \alpha(h/t)^2 \boldsymbol{\gamma}_{\text{tp}} = \nabla w - \boldsymbol{\beta}^S + \alpha(h/t)^2 \mathbf{D}_s^{-1} \mathcal{L} \boldsymbol{\beta}. \quad (10.194)$$

Mikäli lukijalla on intoa tutustua asiaan tarkemmin, suositellaan lähteitä [50], [59].

10.9 Harjoitustehtäviä

1. Kirjoita bikuubisen Bogner-Fox-Schmidt elementin solmuihin 3 ja 4 liittyvät interpolaatiofunktiot.
2. Ratkaise jäykästi kiinnitetty tasaisesti kuormitettu ($\bar{f} = f_0 = \text{vakio}$) neliölaatta käyttäen yhtä Bogner-Fox-Schmidt-elementtiä laatan neljännekselle. Vastaukseksi riittää laatan taipuman arvo keskipisteessä. Laatan paksuus on t ja materiaalin kimmovaikut E ja ν .

3. Johda Morleyn kuusivapausasteisen elementin interpolaatiofunktiot lähtien diskreetti-Kirchhoff ajatuksesta. Taipumalle w voidaan otaksua lineaarinen interpolaatio ja kiertymille β_x ja β_y lineaarinen epäkonformi interpolaatio

$$\begin{aligned}\beta_i &= N_4^{ek} \beta_{i4} + N_5^{ek} \beta_{i5} + N_6^{ek} \beta_{i6} \\ &= (L_1 + L_2 - L_3) \beta_{i4} + (L_2 + L_3 - L_1) \beta_{i5} + (L_3 + L_1 - L_2) \beta_{i6}.\end{aligned}\quad (10.195)$$

Kolme vapausastetta voidaan eliminoida rajoittamalla poikittainen leikkausmuodonmuutos sivun suunnassa häviämään

$$\int_{\text{Sivui}} \gamma_s ds = 0. \quad (10.196)$$

4. Johda Reissnerin-Mindlinin mallin tasapainoyhtälöt lähtien virtuaalisen työn lausekkeesta (10.59).
5. Arnoldin ja Falkin kehittämässä Reissnerin Mindlinin mallin kolmiolaattaelementissä (katso lukua 10.8.2) taipumaa kuvataan epäkonformilla lineaarisella interpolaatiolla, joka on jatkuva elementin sivujen keskipisteissä, eli

$$\begin{aligned}w &= N_4^{ek} w_4 + N_5^{ek} w_5 + N_6^{ek} w_6 \\ &= (L_1 + L_2 - L_3) w_4 + (L_2 + L_3 - L_1) w_5 + (L_3 + L_1 - L_2) w_6,\end{aligned}\quad (10.197)$$

missä L_i :t ovat alakoordinaatit. Kiertymiä β_x, β_y interpoloidaan lineaarisilla interpolaatiofunktioilla, joita on täydennetty kuubisella kuplamuodolla, joka tässä on otettu hierarkiseksi

$$\beta_i = L_1 \beta_{i1} + L_2 \beta_{i2} + L_3 \beta_{i3} + 27 L_1 L_2 L_3 \Delta \beta_{i7}, \quad (10.198)$$

missä $i = x$ tai y . Kiertymien interpolaatio on siten konformi. Elementin solmukonfiguraatio ja vapausasteet on esitetty oheisessa kuvassa. Leikkausmuodonmuutos lasketaan elementin keskimääräisten kiertymien avulla

$$\gamma_{iz} = w_{,i} - \bar{\beta}_i, \quad (10.199)$$

missä

$$\bar{\beta}_i = \frac{1}{A^{(e)}} \int_{A^{(e)}} \beta_i dA. \quad (10.200)$$

Piirrä kuva epäkonformeista interpolaatofunktioista N_i^{ek} , sekä määritä leikkausmuodonmuutosta γ_{xz} vastaava osa muodonmuutoksia ja solmupistesiiirtymiä yhdistävästä \mathbf{B}_s matriisista.

6. Johda Arnoldin ja Falkin elementille (luku 10.8.2) Francon ja Stenbergin stabiloidun muodon leikkausjäykkyyden redusointitekijät eksplisitiivisesti.

Luku 11

Kaarevien sauvojen analysointi

Palkkielementtejä käsittelevä luku toimi johdatuksena laattaelementtien maailmaan. Aivan vastaavasti kaarevien rakenteiden analyysissä tämä sauvoja käsittelevä luku muodostaa yhdessä yleisen kolmidimensioisten rakenteiden elementtimenetelmää koskevan luvun kanssa johdatuksen kuorielementtien vaikeaan ja kiehtovaan maailmaan.

Kaarevien rakenteiden elementtimenetelmäformulaatioissa kohdataan kaksi uutta vaikeutta nimitäin jäykän kappaleen liikkeen kuvaamisen ongelma ja ns. kalvo- eli membraanilukkiutuminen.

11.1 Kehäsauvaelementti

Yksinkertaisin tapa mallintaa kaari elementtimenetelmällä on kuvata se lineaarisesti interpoloidulla elementillä. Tällöin kinemaattiset yhteydet voidaan johtaa tarkastelemalla suoran palkin kinematiikkaa elementin solmujen määrittelyssä koordinaatistossa x_ℓ, y_ℓ , katso kuvaa 11.1. Elementin jäykkyyismatriisi ja voimavektori voidaan muodostaa ensin paikallisessa x_ℓ, y_ℓ -koordinaatistossa ja muuntaa ne lopuksi rakenekoordinaatistoon. Tämä muunnos voidaan suorittaa jo elementin integroimisvaiheessa.

Suoran sauvan kinemaattiset yhtälöt (9.2a) ovat kirjoitettuna nyt (x_ℓ, y_ℓ) -koordinaatistossa:

$$u_\ell(x_\ell, y_\ell) = u_c(x_\ell) - y_\ell \theta(x_\ell), \quad (11.1a)$$

$$v_\ell(x_\ell, y_\ell) = v_c(x_\ell). \quad (11.1b)$$

Muodonmuutosten lausekkeet paikallisessa koordinaatistossa ovat

$$\epsilon_\ell = \frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell} = \frac{du_\ell}{dx_\ell} - y_\ell \frac{d\theta}{dx_\ell}, \quad (11.2a)$$

$$\gamma_\ell = \frac{\partial u_\ell}{\partial y_\ell} + \frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell} = \frac{dv_\ell}{dx_\ell} - \theta. \quad (11.2b)$$

Jätetään jatkossa alaindeksi ℓ pois, mikäli yhtälöiden tulkinnessa ei ole sekaannuksen vaaraa. Kirjoitetaan aksiaalinen muodonmuutos paikallisessa koordinaatistossa

seuraavasti:

$$\epsilon = \epsilon_c + y\kappa, \quad (11.3)$$

jolloin virtuaalisen työn yhtälön termi

$$\int_{V^{(e)}} (\sigma\delta\epsilon + \tau\delta\gamma) dV \quad (11.4)$$

voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_{I^{(e)}} (N\delta\epsilon_c + M\delta\kappa + Q\delta\gamma) dx, \quad (11.5)$$

missä N on palkin normaalivoima $N = EA\epsilon_c = EAu'_c$ ja pilkku suureen oikeassa yläkulmassa merkitsee derivointia paikallisen x -koodinaatin suhteen. Havaitaan, että aksiaalilla muodonmuutoksella ei ole kytkentää käyrityksen tai leikkausmuodonmuutoksen (taivutustilan) kanssa, ja elementin jäykkyysmatriisi voidaan kirjoittaa lohkomuodossa

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m^{(e)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_b^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (11.6)$$

missä elementin vapausasteet on järjestetty seuraavasti:

$$\mathbf{u}^{(e)} = \left[u_1^{(e)} \quad u_2^{(e)} \quad v_1^{(e)} \quad \theta_1^{(e)} \quad v_2^{(e)} \quad \theta_2^{(e)} \right]^T. \quad (11.7)$$

Lohkomatriisien alaindeksi m viittaa aksiaalisen muodonmuutoksen ja b taivutustilan ja leikkaussuureisiin. Matriisi $\mathbf{K}_b^{(e)}$ on luvussa 9.2 esitetty Timoshenkon palkkielementti. Aksiaali- ja taivutustilan välillä on analoginen yksidimensioiden diffuusioyhtälön kanssa, joten aksiaalivapausasteiden suhteen lineaarisesti interpoloidun elementin jäykkyysmatriisi on

$$\mathbf{K}_m^{(e)} = \frac{EA}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11.8)$$

Aksiaali- ja taivutustilan suureiden välinen kytkentä syntyy koordinaatistonmuunnoksessa. Tarkastellaan solmuun i liittyvien vapausasteiden välistä muunnosta. Kuvan 11.2 perusteella voidaan kirjoittaa

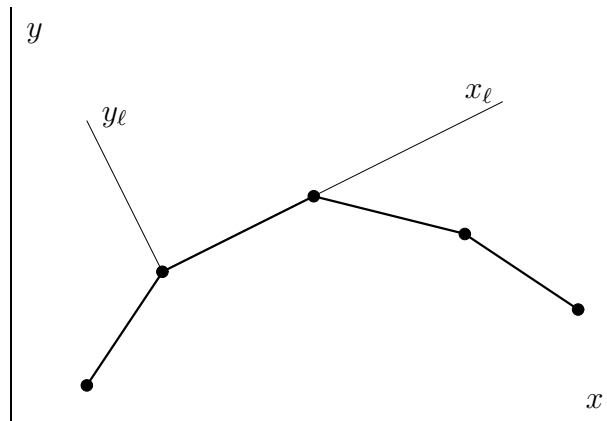
$$u_{\ell i} = (\cos \phi)u_i + (\sin \phi)v_i \quad \text{ja} \quad v_{\ell i} = -(\sin \phi)u_i + (\cos \phi)v_i. \quad (11.9)$$

Kiertymän θ_i arvo on sama kummassakin koordinaattijärjestelmässä, joten vapausastevektorin $\mathbf{u}_i = [u_i, v_i, \theta_i]^T$ muunnos paikalliseen koordinaatistoon saa muodon

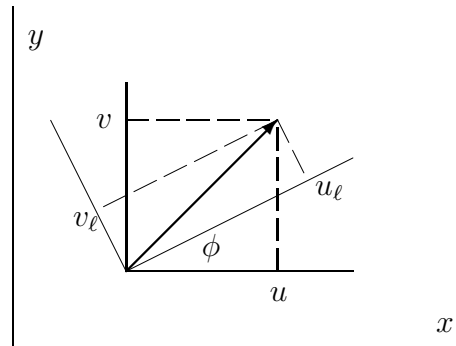
$$\mathbf{u}_{\ell i} = \mathbf{T}_i \mathbf{u}_i, \quad (11.10)$$

missä

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11.11)$$



Kuva 11.1 Kaaren mallintaminen paloittain lineaarisilla elementeillä.



Kuva 11.2 Koordinaatistonmuunnos.

Muunnosmatriisi \mathbf{T}_i on ortogonaalinen, eli $\mathbf{T}_i^{-1} = \mathbf{T}_i^T$, joten

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{T}_i^T \mathbf{u}_{\ell i} \quad (11.12)$$

Yhden elementin osuus virtuaalisen työn lausekkeesta on

$$(\delta \mathbf{u}_{\ell}^{(e)})^T \mathbf{K}_{\ell}^{(e)} \mathbf{u}_{\ell}^{(e)} = (\delta \mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{K}_{\ell}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = (\delta \mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (11.13)$$

joten elementin jäykkymatriisin muunnos paikallisesta koordinaatistosta globaaliin rakennekoordinaatistoon on

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{K}_{\ell}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)}. \quad (11.14)$$

Koko elementin muunnosmatriisi on muotoa

$$\mathbf{T}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix}, \quad (11.15)$$

jolloin elementin vapausasteet on järjestetty seuraavasti:

$$\mathbf{u}^{(e)} = \left[u_1^{(e)} \quad v_1^{(e)} \quad \theta_1^{(e)} \quad u_2^{(e)} \quad v_2^{(e)} \quad \theta_2^{(e)} \right]^T. \quad (11.16)$$

Muunnos (11.14) voidaan suorittaa jo elementin integrointivaiheessa. Elementin jäykkyysmatriisi integroidaan matriisitulona

$$\mathbf{K}_\ell^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx. \quad (11.17)$$

Mikäli vapausasteet on järjestetty kaavan (11.16) mukaisesti, ovat matriisit \mathbf{D} ja \mathbf{B} :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & GA_s^* \end{bmatrix} \quad (11.18)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_{1,x} & 0 & 0 & -N_{2,x} \\ 0 & N_{1,x} & -\Pi_0 N_1 & 0 & N_{2,x} & -\Pi_0 N_2 \end{bmatrix}, \quad (11.19)$$

missä Π_0 on projektio vakiofunktiolle. Venymät $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_c, \kappa, \gamma]^T$ paikallisessa koordinaatistossa saadaan lausekkeesta

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (11.20)$$

joten jäykkyysmatriisi voidaan muodostaa suoraan integroimalla paikallisessa koordinaatistossa integraali

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{T}^{(e)} dx. \quad (11.21)$$

Taivutustilan kuvaamiseen voidaan käyttää myös Eulerin-Bernoullin palkkielementtiä, jolloin saadaan klassinen kehäsauvaelementti.

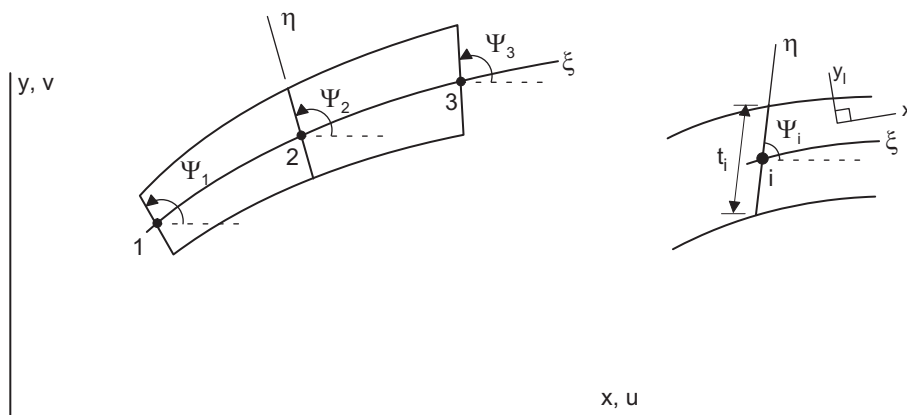
11.2 Isoparametrinen kaarielementti

Isoparametrisen kaarevan tasoelementin geometria määritellään kaavoilla

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi) x_i + \frac{1}{2} \eta t_i N_i(\xi) \cos \psi_i], \quad (11.22a)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi) y_i + \frac{1}{2} \eta t_i N_i(\xi) \sin \psi_i], \quad (11.22b)$$

missä x_i, y_i ovat solmujen $i = 1, \dots, n$ koordinaatit, ψ_i on x -akselista mitattu kulma suoralle viivalle $\xi = \text{vakio}$ (η -viivalle) ja t_i on solmun i kohdalla η -viivaa pitkin mitattu elementin "paksuus", katso kuvaa 11.3. Mitta t_i ei ole todellinen paksuus, koska η -viiva ei ole välttämättä kohtisuorassa tangenttivektoria $\mathbf{s} = [x_{,\xi}(\xi, 0), y_{,\xi}(\xi, 0)]^T$



Kuva 11.3 Isoparametrinen kaarielementti.

vastaan. Isoparametrisen elementin tapaan siirtymiä u ja v interpoloidaan samalla tavalla kuin koordinaatteja x ja y , eli

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi)u_i - \frac{1}{2}\eta t_i N_i(\xi) \sin \psi_i \theta_i] \equiv \sum_{i=1}^n (N_i u_i - \eta S_i \theta_i), \quad (11.23)$$

$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi)v_i + \frac{1}{2}\eta t_i N_i(\xi) \cos \psi_i \theta_i] \equiv \sum_{i=1}^n (N_i v_i + \eta C_i \theta_i), \quad (11.24)$$

missä on merkitty

$$S_i = \frac{1}{2}t_i N_i \sin \psi_i \quad \text{ja} \quad C_i = \frac{1}{2}t_i N_i \cos \psi_i. \quad (11.25)$$

Globaalissa rakennekoordinaatistossa (x, y) lausutut muodonmuutokset ovat

$$\epsilon_x = u_{,x} \quad \epsilon_y = v_{,y} \quad \text{ja} \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}. \quad (11.26)$$

Globaalissa rakennekoordinaatistossa (x, y) lausutut derivaattojen lausekkeet muunnetaan parametrin kuvauksen Jacobin matriisin avulla (ks. luku 4.6.2) lausutuiksi perusneliön koordinaattien (ξ, η) avulla:

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{Bmatrix} v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix}, \quad (11.27)$$

missä

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}. \quad (11.28)$$

Sama yhteys voidaan lausua myös hieman toisin; ketjuderivoimalla saadaan lausekkeet

$$u_{,x} = u_{,\xi} \xi_{,x} + u_{,\eta} \eta_{,x} \quad (11.29a)$$

$$u_{,y} = u_{,\xi} \xi_{,y} + u_{,\eta} \eta_{,y}. \quad (11.29b)$$

Merkitään Jacobin matriisin transpoosin käänteismatriisia symbolilla $\mathbf{H} = \mathbf{J}^{-T}$, täten

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{x_{,\xi}y_{,\eta} - x_{,\eta}y_{,\xi}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \eta_{,x} \\ \xi_{,y} & \eta_{,y} \end{bmatrix}. \quad (11.30)$$

Kaaren siirtymien (11.23) derivaatat ovat

$$u_{,x} = \sum_{i=1}^n [N_{i,x}u_i - (\eta_{,x}S_i + \eta S_{i,x})\theta_i], \quad (11.31a)$$

$$u_{,y} = \sum_{i=1}^n [N_{i,y}u_i - (\eta_{,y}S_i + \eta S_{i,y})\theta_i], \quad (11.31b)$$

$$v_{,x} = \sum_{i=1}^n [N_{i,x}v_i + (\eta_{,x}C_i + \eta C_{i,x})\theta_i], \quad (11.31c)$$

$$v_{,y} = \sum_{i=1}^n [N_{i,y}v_i + (\eta_{,y}C_i + \eta C_{i,y})\theta_i], \quad (11.31d)$$

missä

$$S_{i,x} = \frac{1}{2}t_i N_{i,x} \sin \psi_i \quad S_{i,y} = \frac{1}{2}t_i N_{i,y} \sin \psi_i \quad (11.32a)$$

$$C_{i,x} = \frac{1}{2}t_i N_{i,x} \cos \psi_i \quad C_{i,y} = \frac{1}{2}t_i N_{i,y} \cos \psi_i. \quad (11.32b)$$

Koska interpolaatiofunktiot N_i ovat vain koordinaatin ξ funktioita, täten

$$N_{i,x} = H_{11}N_{i,\xi}. \quad (11.33)$$

Derivaattojen (11.31a) lausekkeet voidaan siten lausua muodossa

$$u_{,x} = \sum_{i=1}^n [H_{11}N_{i,\xi}u_i - (H_{12}S_i + \eta H_{11}S_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.34a)$$

$$u_{,y} = \sum_{i=1}^n [H_{21}N_{i,\xi}u_i - (H_{22}S_i + \eta H_{21}S_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.34b)$$

$$v_{,x} = \sum_{i=1}^n [H_{11}N_{i,\xi}v_i + (H_{12}C_i + \eta H_{11}C_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.34c)$$

$$v_{,y} = \sum_{i=1}^n [H_{21}N_{i,\xi}v_i + (H_{22}C_i + \eta H_{21}C_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.34d)$$

missä

$$S_{i,\xi} = \frac{1}{2}t_i N_{i,\xi} \sin \psi_i, \quad C_{i,\xi} = \frac{1}{2}t_i N_{i,\xi} \cos \psi_i. \quad (11.35)$$

Termit S_i ja C_i sisältävät interpolaatiofunktion N_i lausekkeen. Ne ovat täten ξ -koordinaatin suhteen astetta korkeampiasteisia polynomeja kuin lausekkeiden (11.34a)

muut termit. Tämä aiheuttaa elementin lukkiutumisen aivan kuin suoran Timoshenkon palkin tapauksessakin. Nyt lukkiutumismuotoja on vain kaksi, membraani- ja leikkauslukkiutuminen. Yksidimensioisten rakennemallien tapauksissa yksinkertaisin keino päästä eroon näistä lukkiutumisilmiöistä on pituussuuntainen ali-integrointi. Toinen suositeltavampi tapa on projisoida interpolaatiofunktioiden lausekkeet N_i , jotka ovat astetta $p = n - 1$, astetta $p - 1$ oleville polynomeille. Täten lausekkeet (11.34a) muuntuvat muotoon

$$u_{,x} = \sum_{i=1}^n [H_{11}N_{i,\xi}u_i - (H_{12}\Pi_{p-1}S_i + \eta H_{11}S_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.36a)$$

$$u_{,y} = \sum_{i=1}^n [H_{21}N_{i,\xi}u_i - (H_{22}\Pi_{p-1}S_i + \eta H_{21}S_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.36b)$$

$$v_{,x} = \sum_{i=1}^n [H_{11}N_{i,\xi}v_i + (H_{12}\Pi_{p-1}C_i + \eta H_{11}C_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.36c)$$

$$v_{,y} = \sum_{i=1}^n [H_{21}N_{i,\xi}v_i + (H_{22}\Pi_{p-1}C_i + \eta H_{21}C_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.36d)$$

missä

$$\Pi_{p-1}S_i = \frac{1}{2}t_i\Pi_{p-1}N_i \sin \psi_i \quad \text{ja} \quad \Pi_{p-1}C_i = \frac{1}{2}t_i\Pi_{p-1}N_i \cos \psi_i. \quad (11.37)$$

Projisoidut interpolaatiofunktiot määritetään yhtälöillä

$$\int_{-1}^1 \xi^k (\Pi_{p-1}N_i - N_i) d\xi = 0, \quad k = 0, \dots, p-1. \quad (11.38)$$

Virtuaaliset muodonmuutokset ovat

$$\delta\epsilon_x = \delta u_{,x} \quad \delta\epsilon_y = \delta v_{,y} \quad \text{ja} \quad \delta\gamma_{xy} = \delta u_{,y} + \delta v_{,x}, \quad (11.39)$$

missä

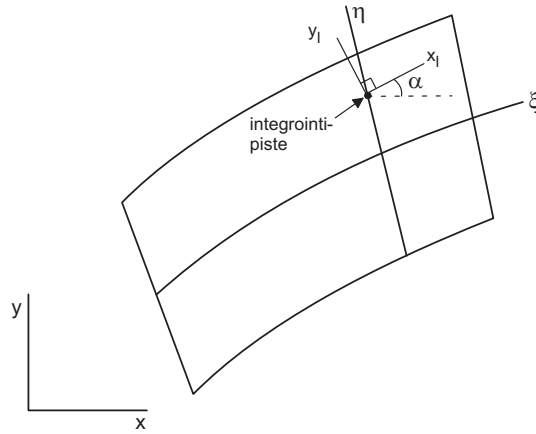
$$\delta u_{,x} = \sum_{i=1}^n [N_{i,x}\delta u_i - (\eta_{,x}S_i + \eta S_{i,x})\delta\theta_i], \quad (11.40a)$$

$$\delta u_{,y} = \sum_{i=1}^n [N_{i,y}\delta u_i - (\eta_{,y}S_i + \eta S_{i,y})\delta\theta_i], \quad (11.40b)$$

$$\delta v_{,x} = \sum_{i=1}^n [N_{i,x}\delta v_i + (\eta_{,x}C_i + \eta C_{i,x})\delta\theta_i], \quad (11.40c)$$

$$\delta v_{,y} = \sum_{i=1}^n [N_{i,y}\delta v_i + (\eta_{,y}C_i + \eta C_{i,y})\delta\theta_i]. \quad (11.40d)$$

Virtuaalisten siirtymien lausekkeiksi saadaan tietenkin yhtälöitä (11.36a) vastaavat lausekkeet.



Kuva 11.4 Integrointipisteen paikallinen koordinaatisto.

Virtuaalisten muodonmuutosten $\delta\epsilon$ ja virtuaalisten solmupistesiiirtymien $\delta\mathbf{u}_i = [\delta u_i, \delta v_i, \delta\theta_i]^T$ välisen yhteyden

$$\delta\epsilon = \mathbf{B}_i \delta\mathbf{u}_i \quad (11.41)$$

avulla muodostetaan solmuihin i ja j liittyvä osa elementin jäykkyyismatriisista

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dV, \quad (11.42)$$

missä

$$dV = b \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (11.43)$$

ja b on sauvan poikkileikkauksen leveys. Tilavuusintegraali lasketaan numeerisesti Gaussin menetelmällä. Kimmoisan aineen tapauksessa riittää paksuussuunnassa (η :n suunnassa) kaksi integrointipistettä. Lukkiintumisen välttämiseksi on sauvan pituussuunnassa integrointi suoritettava $n - 1$:n pisteen Gaussin kaavoilla (n on solmujen lukumäärä), mikäli termejä S_i ja C_i ei projisoida alempiasteisille polynomeille. Mikäli projisointi suoritetaan voidaan pituussuuntainen integrointi suorittaa millä tahansa vähintään $n - 1$:n pisteen Gaussin kaavoilla.

Elementin jäykkyyismatriisin kaavassa (11.42) matriisi \mathbf{D} on materiaalin jäykkyyismatriisi globaalissa koordinaatistossa. Ohuen sauvan tapauksessa kuvan 11.4 integrointipisteen paikallisessa (x_ℓ, y_ℓ) -koordinaatistossa \mathbf{D}_ℓ matriisi on lineaarisesti kimmoisalle aineelle

$$\mathbf{D}_\ell = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & kG \end{bmatrix}, \quad (11.44)$$

joka ottaa huomioon palkkiteorian otaksunan, että akselin y_ℓ suunnassa jännitys ja venymä ovat nollia, ja k on leikkauskorjauskerroin, jonka arvo on $k = 1, 2$ suorakaidepoikkileikkaukselle. Paikallisen koordinaatiston (x_ℓ, y_ℓ) ja globaalien (x, y) -

koordinaatiston väliset muodonmuutosten ja jännitysten muunnoskaavat ovat

$$\boldsymbol{\epsilon}_\ell = \mathbf{T}\boldsymbol{\epsilon} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\sigma}_\ell = \mathbf{T}^{-T}\boldsymbol{\sigma}, \quad (11.45)$$

missä

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -2 \sin \alpha \cos \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix}, \quad (11.46)$$

ja α on x_ℓ -akselin ja x -akselin välinen kulma. Mielivaltaisen pisteen (ξ, η) ξ -viivan yksikkötangenttivektori on

$$\vec{i}_\ell = \frac{1}{\sqrt{x_{,\xi}^2 + y_{,\xi}^2}} \begin{Bmatrix} x_{,\xi} \\ y_{,\xi} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}. \quad (11.47)$$

Koska $\boldsymbol{\sigma}_\ell^T \boldsymbol{\epsilon}_\ell = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon}$ on invariantti, saadaan

$$\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_\ell^T \mathbf{D}_\ell \boldsymbol{\epsilon}_\ell = \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{T}^T \mathbf{D}_\ell \mathbf{T} \boldsymbol{\epsilon} \quad (11.48)$$

joten

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^T \mathbf{D}_\ell \mathbf{T}, \quad (11.49)$$

joka sijoitetaan jäykkyyismatriisiin kaavaan (11.42).

Luku 12

3D elementtimenetelmä

12.1 Johdanto

Elementtimenetelmän yleistäminen tasoalueesta kolmidimensioisiin alueisiin on yksinkertaista. Lämmönjohtumisyhtälön heikko muoto (4.9)

$$\int_{\Omega} (\nabla \hat{u})^T \mathbf{D} \nabla u d\Omega = \int_{\Omega} \hat{u} \bar{f} d\Omega - \int_{S_q} \hat{u} \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (12.1)$$

on kirjoitettu koordinaatistosta riippumattomaan muotoon ja kelpaa siten sellaiseenaan elementtimenetelmädiskretoinnin pohjaksi myös kolmidimensioisesissa alueissa. Heikko muoto voidaan kirjoittaa myös helposti muistettavassa “virtuaalisen työn muodossa”

$$- \int_{\Omega} (\nabla \hat{u})^T \mathbf{q} d\Omega = \int_{\Omega} \hat{u} \bar{f} d\Omega - \int_{S_q} \hat{u} \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (12.2)$$

missä lämpövuoto saadaan konstitutiivisen mallin avulla, joka Fourierin lämmönjohtumismallin tapauksessa on muotoa $\mathbf{q} = -\mathbf{D} \nabla u$, joka elementtimenetelmäapproksimaatiossa saa muodon $\mathbf{q} = -\mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}$.

Elementtimatriisiin

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (12.3)$$

diskreetti gradienttioperaattorimatriisi \mathbf{B} voidaan osittaa elementin paikallisten solmujen mukaan seuraavasti

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_m], \quad (12.4)$$

missä solmun i osuus on

$$\mathbf{B}_i = \nabla N_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{bmatrix}. \quad (12.5)$$

Kolmiulotteisten kappaleiden jännitysanalyysissä muodonmuutosenergian variaatio voidaan kirjoittaa muodossa, katso luku 5.2

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega, \quad (12.6)$$

missä jännitysten ja muodonmuutosten vektorit ovat komponenteittain

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T\end{aligned}$$

Elementin paikalliseen solmuun i liittyvä osuus siirtymä-muodonmuutosmatriisista \mathbf{B} on

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,z} \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,z} & N_{i,y} \\ N_{i,z} & 0 & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (12.7)$$

12.2 Kolmiulotteinen interpolaatio

12.2.1 Lineaarinen interpolaatio

Luvun 4.2 lineaarisen tasoelementin kolmiulotteinen vastine on nelisolmuinen tetraedrielementti, jonka interpolaatio voidaan kirjoittaa muodossa

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z. \quad (12.8)$$

Lausumalla u solmuissa saadaan neljä yhtälöä

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i, \quad (12.9)$$

joista voidaan ratkaista vakiot $\alpha_1, \dots, \alpha_4$. Funktion u lineaarisen interpolaation lauseke on ilmaistuna solmupistearvojen u_i, u_j, u_m ja u_p avulla

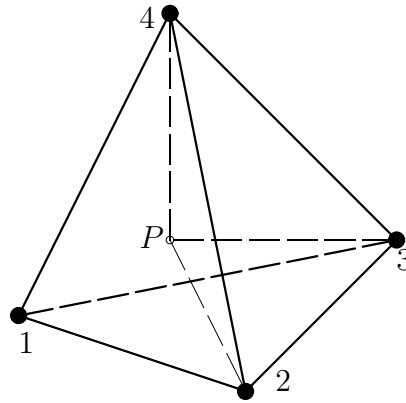
$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{6V} [(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)u_i - (a_j + b_j x + c_j y + d_j z)u_j \\ &\quad + (a_m + b_m x + c_m y + d_m z)u_m - (a_p + b_p x + c_p y + d_p z)u_p].\end{aligned} \quad (12.10)$$

missä

$$6V = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{bmatrix} \quad (12.11)$$

ja V on tetraedrin tilavuus. Vakiot a_i, b_i, c_i ja d_i ovat

$$\begin{aligned}a_i &= \det \begin{bmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{bmatrix}, & b_i &= -\det \begin{bmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{bmatrix}, \\ c_i &= \det \begin{bmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{bmatrix}, & d_i &= -\det \begin{bmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned} \quad (12.12)$$



Kuva 12.1 Tetraedrielementin tilavuuskoordinaatit.

Muut vakiot a_j, b_j, \dots, d_m saadaan vaihtamalla indeksejä: $p \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow m \rightarrow p$ jne. Solmut numeroidaan siten, että esim. solmusta p katsoen i, j ja m kiertävät vastapäivän tai ne ovat järjestyksessä $mipj$ jne.

Interpolaatio (12.10) voidaan kirjoittaa muodossa

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m + N_p u_p \quad (12.13)$$

kun määritellään

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) / 6V \quad \text{jne.} \quad (12.14)$$

12.2.2 Tilavuuskoordinaatit

Tetraedrielementin, katso kuva 12.1, tilavuuskoordinaatit määritellään tilavuuksien suhteena

$$L_1 = \frac{V_1}{V}, \quad L_2 = \frac{V_2}{V}, \quad L_3 = \frac{V_3}{V}, \quad L_4 = \frac{V_4}{V}, \quad (12.15)$$

missä V_1 on tetraedrin $P245$ tilavuus ja V on elementin 1234 tilavuus. Koordinaatti L_1 muuttuu nolasta yhteen karteesisen koordinaattien mukana, solmusta 1 tahkalle 243 mentäessä.

Karteesisen koordinaattien ja tilavuuskoordinaattien välillä ovat yhteydet

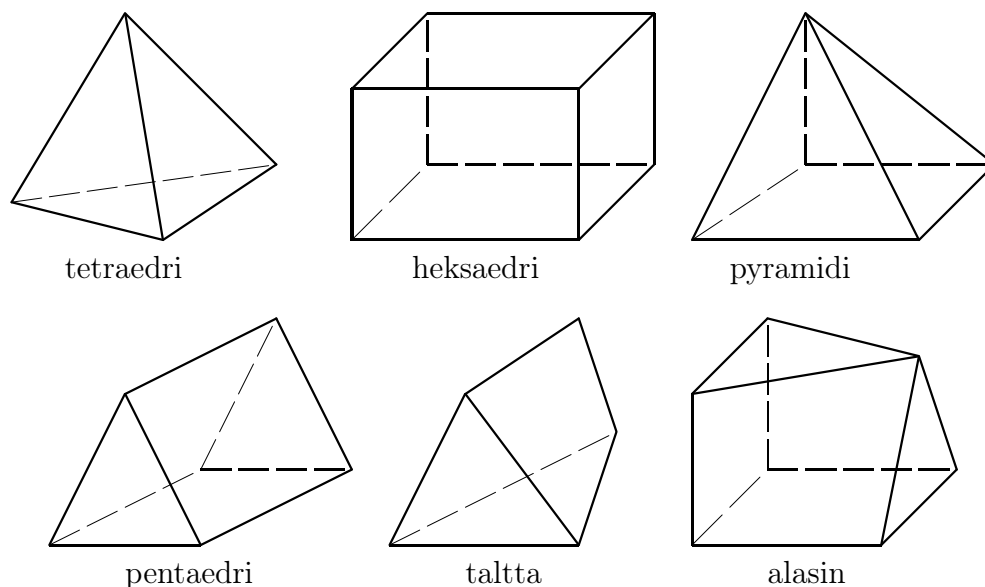
$$\begin{aligned} x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 + L_4 x_4, \\ y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 + L_4 y_4, \\ z &= L_1 z_1 + L_2 z_2 + L_3 z_3 + L_4 z_4, \end{aligned} \quad (12.16)$$

missä (x_i, y_i, z_i) ovat solmun i koordinaatit. Luonnollisesti kaikki neljä tilavuuskoordinaattia eivät voi olla riippumattomia, vaan niitä sitoo ehto

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1. \quad (12.17)$$

Koska koordinaatit L_i muuttuvat lineaarisesti nolasta yhteen ja saavat arvon 1 solmussa i , lineaariset interpolaatiofunktiot ovat

$$N_i = L_i, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (12.18)$$



Kuva 12.2 Erilaisia 3-D elementtigeometrioita.

Kartesisten koordinaattien suhteen muodostettujen derivaattojen laskemisessa tarvitaan ketjukaavaa

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{1}{6V} \sum_{i=1}^4 b_i \frac{\partial f}{\partial L_i}. \quad (12.19)$$

Tilavuusintegraaleille voidaan johtaa integrointikaava

$$\int_{V^{(e)}} L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dV = 6V^{(e)} \frac{a!b!c!d!}{(3+a+b+c+d)!}. \quad (12.20)$$

12.2.3 Muita 3D-elementtigeometrioita

Kolmidimensioisessa avaruudessa mahdollisia elementtigeometrioita on useita. Kuvasssa 12.2 on esitetty joukko 3-D elementtien perusmuotoja kuten *tetraedri*, *heksaedri*, *pentaedri*, *pyramidi*, *taltta* ja *alasin*.

12.2.4 Isoparametrinen kuvaus

Tarkastellaan aluksi isoparametristä hexahedrielementtiä. Isoparametrisen kolmiulotteisen, (3D), elementin pisteen P paikka suorakulmaisessa (x, y, z) -koordinaatis-

tossa on

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i, \quad (12.21a)$$

$$y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i, \quad (12.21b)$$

$$z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i, \quad (12.21c)$$

missä $\xi, \eta, \zeta \in [-1, 1]$ ovat peruskuution dimensiottomat koordinaatit, $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ ovat interpolaatiofunktioita ja n on elementin solmujen lukumäärä. Kuvassa 12.3 on esitetty 8-solmuinen, trilineaarinen, ja 20-solmuinen supistettu trikvadraattinen elementti.

Isoparametrisen 3D-elementin ratkaistavia suureita interpoloidaan samoilla interpolaatiofunktioilla kuin koordinaattejakin. Diffuusioelementin tapauksessa esimerkiksi lämpötilalle voidaan kirjoittaa elementin alueella

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i, \quad (12.22)$$

missä u_i ovat solmupisteiden lämpötila-arvot.

Elementin jäykkyyssmatriisin muodostamisessa tarvitaan \mathbf{B} -matriisissa, esim. (12.5), globaalin koordinaatiston suhteen lausuttuja derivaattoja. Tämä voidaan johtaa tasotapauksen kaltaisesta tarkastelemalla isoparametrisen kuvauksen muunnosmatriisia. Tarkastellaan funktion

$$u(x, y, z) = u(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \quad (12.23)$$

derivaattojen lausekkeita peruskuution koordinaattien ξ, η, ζ suhteen

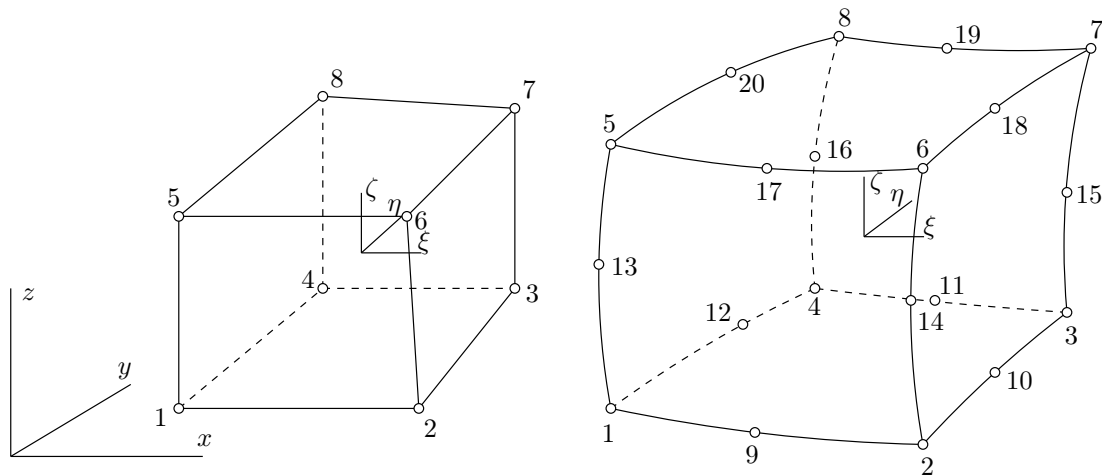
$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (12.24a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (12.24b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad (12.24c)$$

joka voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix}, \quad \text{eli} \quad \mathbf{u}_{,\xi} = \mathbf{J}^T \mathbf{u}_{,x}, \quad (12.25)$$



Kuva 12.3 Isoparametrinen 3D-hexahedrielementti.

missä \mathbf{J} on geometriakuvauksen Jacobin matriisi. Kuten tasotapauksessakin on Jacobin matriisin determinantin oltava positiivinen jotta kuvaus olisi yksikäsitteinen ja suuntaisuuden säilyttävä.

Globaalit derivaatat voidaan nyt ratkaista peruskuution koordinaattien suhteen otettujen derivaattojen avulla

$$\mathbf{u},_{\mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{u},_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (12.26)$$

Käänteismatriisin \mathbf{J}^{-T} lausekkeeksi saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{-T} &= \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta} & -y_{,\xi} z_{,\zeta} - z_{,\xi} y_{,\zeta} & y_{,\xi} z_{,\eta} - z_{,\xi} y_{,\eta} \\ -x_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} x_{,\zeta} & x_{,\xi} z_{,\zeta} - z_{,\xi} x_{,\zeta} & -y_{,\xi} z_{,\eta} - z_{,\xi} y_{,\eta} \\ x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta} & -x_{,\xi} y_{,\zeta} - y_{,\xi} x_{,\zeta} & x_{,\xi} y_{,\eta} - y_{,\xi} x_{,\eta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (12.27)$$

missä

$$\det \mathbf{J} = \det \mathbf{J}^T = x_{,\xi}(y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta}) - y_{,\xi}(x_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} x_{,\zeta}) + z_{,\xi}(x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta}), \quad (12.28)$$

ja

$$x_{,\xi} = \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} x_i, \quad x_{,\eta} = \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} x_i, \quad x_{,\zeta} = \sum_{i=1}^n N_{i,\zeta} x_i \quad \text{jne.} \quad (12.29)$$

Tilavuusintegraalit $\int_V f dV$ lasketaan numeerisesti Gaussin menetelmällä

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta \\ \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f(x(\xi_i, \eta_j, \zeta_k), y(\xi_i, \eta_j, \zeta_k), z(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)) \det(\mathbf{J}) w_i w_j w_k, \quad (12.30)$$

missä (ξ_i, η_j, ζ_k) ovat Gaussin integrointipisteet ja w_i, w_j, w_k ovat integrointipisteisiin liittyvät painokertoimet. Tavallisesti $m = n = p$.

Ekvivalentin pintakuormavektorin muodostamisessa joudutaan laskeman integraaleja $\int_A f dA$ pinnan yli, esimerkiksi pinnalla $\zeta = a$, missä a on vakio. Lasketaan tämäkin integraali numeerisesti Gaussin menetelmällä

$$\int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 f(x(\xi, \eta, \zeta = a), y(\xi, \eta, \zeta = a), z(\xi, \eta, \zeta = a)) \det(\mathbf{J}_a) d\xi d\eta \\ \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x(\xi_i, \eta_j, \zeta = a), y(\xi_i, \eta_j, \zeta = a), z(\xi_i, \eta_j, \zeta = a)) \det(\mathbf{J}_a) w_i w_j, \quad (12.31)$$

missä $(\xi_i, \eta_j, \zeta = a)$ ovat Gaussin integrointipisteet pinnalla $\zeta = a$ ja w_i, w_j ovat painokertoimet, $\det(\mathbf{J}_a)$ on pinnan Jacobin determinatti kaarevalla pinnalla $\zeta = a$.

12.2.5 Solmuihin sidottu interpolaatio

12.2.5.1 Heksahedrielementti

Lagrange ja Serendip tyyppisten elementtipäheiden konstruoiminen kolmidimensioisessa tapauksessa on suoraviivainen yleistys tasotapauksesta. Trilineaarisen elementin interpolaatiofunktioita voidaan kirjoittaa muodossa

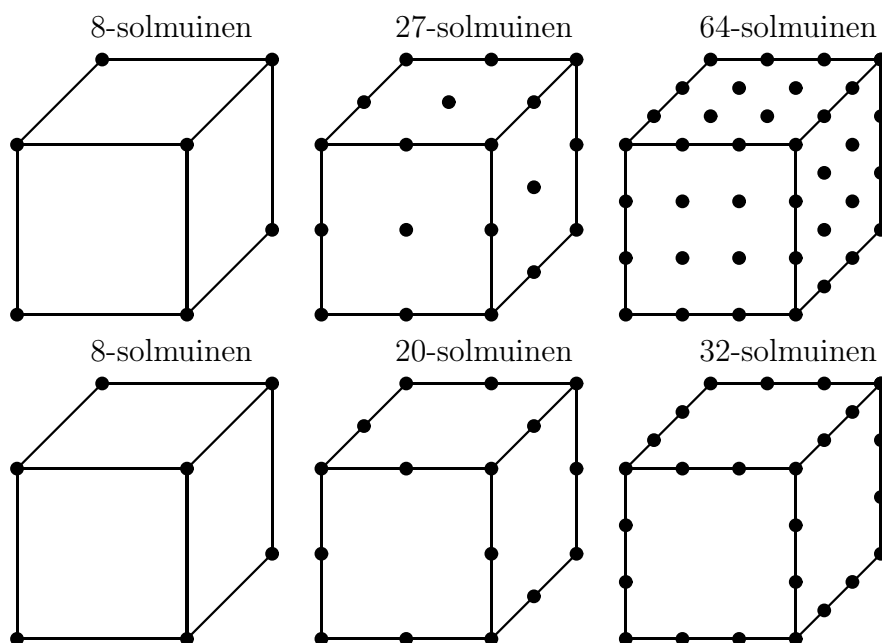
$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi_i \xi)(1 - \eta_i \eta)(1 - \zeta_i \zeta), \quad (12.32)$$

missä ξ_i, η_i ja ζ_i ovat solmun i koordinaatit peruskuutiolla, ja saavat siten arvot ± 1 .

Lagrange tyyppinen trikavdraattinen elementti saadaan yksinkertaisesti

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = l_r^2(\xi) l_s^2(\eta) l_t^2(\zeta), \quad 0 \leq r, s, t, \leq 2, \quad (12.33)$$

ja missä toisen asteen Lagrange interpolaatiopolynomia on merkitty $l_p^2(\cdot)$, katso luku 3.2.2. Trikavdaattisessa elementissä on 27 solmua, 8 nurkissa, 12 särmien keskellä, 6 sivutahkojen keskellä ja yksi alueen sisällä. Serendip tyyppinen supistetussa trikavdaattisessa elementissä ei ole sisäsolmua eikä sivutahkojen keskellä olevia solmuja, joten solmulukumääräksi tulee 20. Se on hyvin yleinen elementti useissa elementtimenetelmäohjelmistoissa. Mikäli elementin muoto ei ole säännöllinen prismamainen,



Kuva 12.4 Lagrangen trilineaarinen, trikvadraattinen ja trikuubinen elementti (yllä) sekä vastaavat redusoidut, Serendip tyyppiset elementit (alla).

sen tarkkuus on kuitenkin huonompi kuin vastaavan trikvadraattisen Lagrangen elementin. Supistetun trikvadraattisen elementin interpolaatiofunktioiksi saadaan:

- kärki­solmut, $\xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta)(-2 + \xi_i\xi + \eta_i\eta + \zeta_i\zeta) \quad (12.34)$$

- särmä­solmut joissa $\xi_i = 0, \eta_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta) \quad (12.35)$$

- särmä­solmut joissa $\eta_i = 0, \xi_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 - \eta^2)(1 + \zeta_i\zeta) \quad (12.36)$$

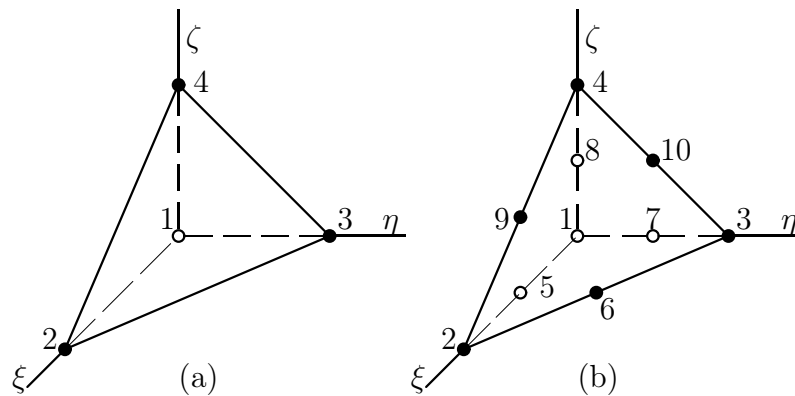
- särmä­solmut joissa $\zeta_i = 0, \xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 - \zeta^2). \quad (12.37)$$

Yleinen muoto hexahedrielementin Lagrangen interpolaatiolle on

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = l_r^{p_\xi}(\xi)l_s^{p_\eta}(\eta)l_t^{p_\zeta}(\zeta), \quad (12.38)$$

missä interpolaation aste paikallisissa ξ, η, ζ suunnissa on p_ξ, p_η, p_ζ ja missä $0 \leq r \leq p_\xi, 0 \leq s \leq p_\eta, 0 \leq t \leq p_\zeta$.



Kuva 12.5 Lineaarinen ja kvadraattinen tetraedrielementti.

12.2.5.2 Tetraedrielementti

Isoparametrisen nelisolmuisen tetraedrielementin, kuva 12.5a, interpolaatiofunktiot voidaan kirjoittaa peruselementin koordinaattien avulla seuraavasti

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \xi - \eta - \zeta, & N_3 &= \eta, \\ N_2 &= \xi, & N_4 &= \zeta. \end{aligned} \quad (12.39)$$

Kvadraattisessa tetraedrielementissä on kymmenen solmua joten se sisältää täydellisen kvadraattisen polynomin

$$1, \xi, \eta, \zeta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2, \eta\zeta, \zeta^2, \xi\zeta.$$

Interpolaatiofunktiot voidaan konstruoida samalla tavalla kuin kolmioelementillekin ja ne ovat kuvan 12.5b solmunumeroinnilla

$$\begin{aligned} N_1 &= -L_1(1 - 2L_1), & N_6 &= 4\xi\eta, \\ N_2 &= -\xi(1 - 2\xi), & N_7 &= 4\eta L_1, \\ N_3 &= -\eta(1 - 2\eta), & N_8 &= 4\xi\zeta, \\ N_4 &= -\zeta(1 - 2\zeta), & N_9 &= 4\eta\zeta, \\ N_5 &= 4\xi L_1, & N_{10} &= 4\zeta L_1, \end{aligned} \quad (12.40)$$

missä $L_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta$.

12.2.6 Hierarkinen interpolaatio

Käsitellään seuraavassa vain heksahedrielementin hierarkisia C_0 -interpolaatiofunktioita. Hierarkisen kannan määrittely voidaan tehdä myös muille kuvassa 12.2 esiintyvillä elementtigeometrioille. Yleistämällä tasotapauksen hierarkisen järjestelmän, kolmi-dimensionoiset hierarkiset interpolaatiofunktiot voidaan jakaa neljään ryhmään.

1. *Solmufunktiot* ovat tavanomaiset trilineaariset interpolaatiopolynomit

$$N_{1,1,1}^{N_i} = \frac{1}{8}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta). \quad (12.41)$$

2. *Särmäfunctiot* määritellään erikseen kullakin kahdellatoista särmällä $E_k, k = 1, \dots, 12$. Esimerkiksi särmällä E_1 (katso kuvaa 12.6), jolla $\eta = \zeta = -1$, särmäinterpolaatiofunktio ovat

$$N_{i,1,1}^{E_1} = \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 - \zeta)\psi_i(\xi), \quad (12.42)$$

missä ψ_i funktio on määritelty luvussa 3.2.2.

3. *Tahkofunktiot* määritellään kullakin kuudella sivutahkolla F_k . Esimerkiksi sivutahkolla F_1 , jolla $\zeta = -1$, interpolaatiofunktio ovat

$$N_{i,j,1}^{F_1} = \frac{1}{2}(1 - \zeta)\psi_i(\xi)\psi_j(\eta). \quad (12.43)$$

4. *Sisäiset muodot* ovat puhtaasti elementin paikallisia interpolaatiofunktioita, joilla ei ole kytkentää ympäröivien elementtien vapausasteiden kanssa.

$$N_{i,j,k}^{\text{int}} = \psi_i(\xi)\psi_j(\eta)\psi_k(\zeta). \quad (12.44)$$

Alaindeksit i, j, k interpolaatiofunktioiden kaavoissa merkitsevät polynomin astetta paikallisessa suunnassa ξ, η, ζ .

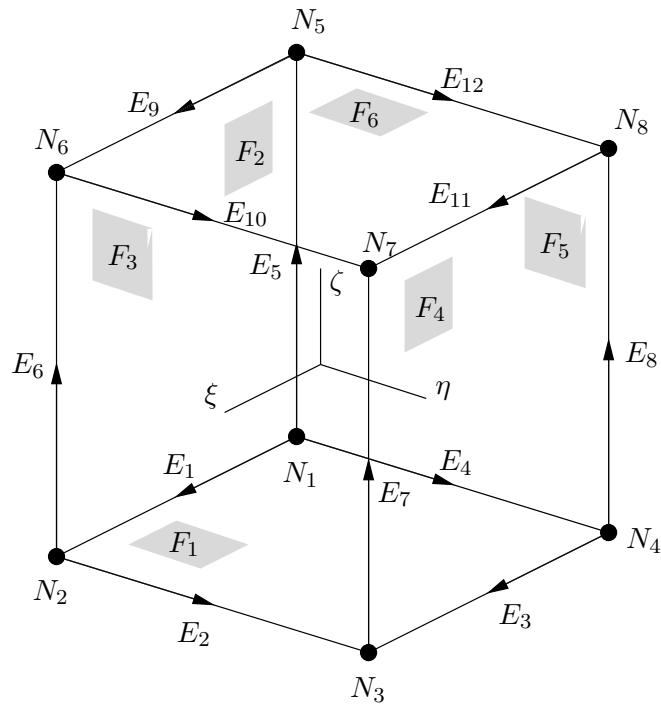
Hierarkisessa järjestelmässä voidaan myös määritellä Lagrangen tyyppinen tensoritulointerpolaatio tai Serendip tyyppinen redusoitu interpolaatio. Särmäinterpolaatiot ovat kummassakin järjestelmässä samat. Sivutahkoihin liittyvät interpolaatiot voidaan määritellä esimerkiksi tahkolle F_1 kaavan (12.43) mukaisesti missä i ja j ovat

| | | |
|--|-------------------------|---------|
| Serendip | Lagrange | |
| $i = 2, \dots, p_\xi - 2$ | $i = 2, \dots, p_\xi,$ | |
| $j = 2, \dots, p_\eta - 2$ | $i = 2, \dots, p_\eta,$ | |
| $i + j = 4, \dots, \max(p_\xi, p_\eta).$ | | (12.45) |

Sisäisille muodoille (12.44) vastaavasti

| | | |
|--|--------------------------|---------|
| Serendip | Lagrange | |
| $i = 2, \dots, p_\xi - 4$ | $i = 2, \dots, p_\xi,$ | |
| $j = 2, \dots, p_\eta - 4$ | $i = 2, \dots, p_\eta,$ | |
| $k = 2, \dots, p_\zeta - 4$ | $i = 2, \dots, p_\zeta,$ | |
| $i + j + k = 6, \dots, \max(p_\xi, p_\eta, p_\zeta)$ | | (12.46) |

Edellä on oletettu anisotrooppinen interpolaatio, missä paikallisten suuntien interpolaation aste voi vaihdella.



$$\Omega_{st}^h = [(-1, 1) \times (-1, 1) \times (-1, 1)]$$

Kuva 12.6 Heksahedrielementti; solmujen, särmien ja tahkojen numerointi.

Harjoitustehtäviä

1. Mitkä ξ, η, ζ polynomien termit sisältää supistettu trikvadraattinen (Serendip) interpolaatio.
2. Mikä on pienin luku tetraedrielementtejä, joista voidaan muodostaa heksaedrielementti?
3. Konstruoi kuubisen tetraedrielementin interpolaatiofunktiot.

Luku 13

Kuorielementtejä

13.1 Tasokuorielementti

Edellä on käsitelty erikseen levyjen ja laattojen analysointia elementtimenetelmällä. Tason suunnassa kuormitettuun levyyn tulee kalvojännityksiä ja tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa kuormitettuun levyyn (laattaan) syntyy taivutusjäännityksiä. Kaarevaan kuorirakenteeseen (tai taitekuoreen) syntyy sekä kalvo- että taivutusjäännityksiä. Kuorirakenne voi olla kaareva yhteen suuntaan, kuten sylinterikuori, tai kahteen suuntaan (kaksoiskaareva), kuten esim. pallokuori. Sylinteripinnan voi taivuttaa takaisin tasoksi, mutta kaksoiskaarevaa pallopintaa ei voi, kuten kartan tekijät hyvin tietävät. Pallokuoren pääkaarevuudet ovat samanmerkkiset, mutta esim. hyperbelikuoren pääkaarevuudet ovat erimerkkiset. Kuorten rakenneteoriassa on kehitetty oma teoria laakeille kuorille. Hyvin laakealle kuorelle voidaan käyttää suoraan laattateoriaa, jossa laakean kuoren kaarevuus otetaan huomioon kinemaattisissa yhtälöissä alkukaarevuutena. Korkean kuoren (engl. deep shell) tapauksessa on käytettävä kuorelle johdettuja kinemaattisia yhtälöitä.

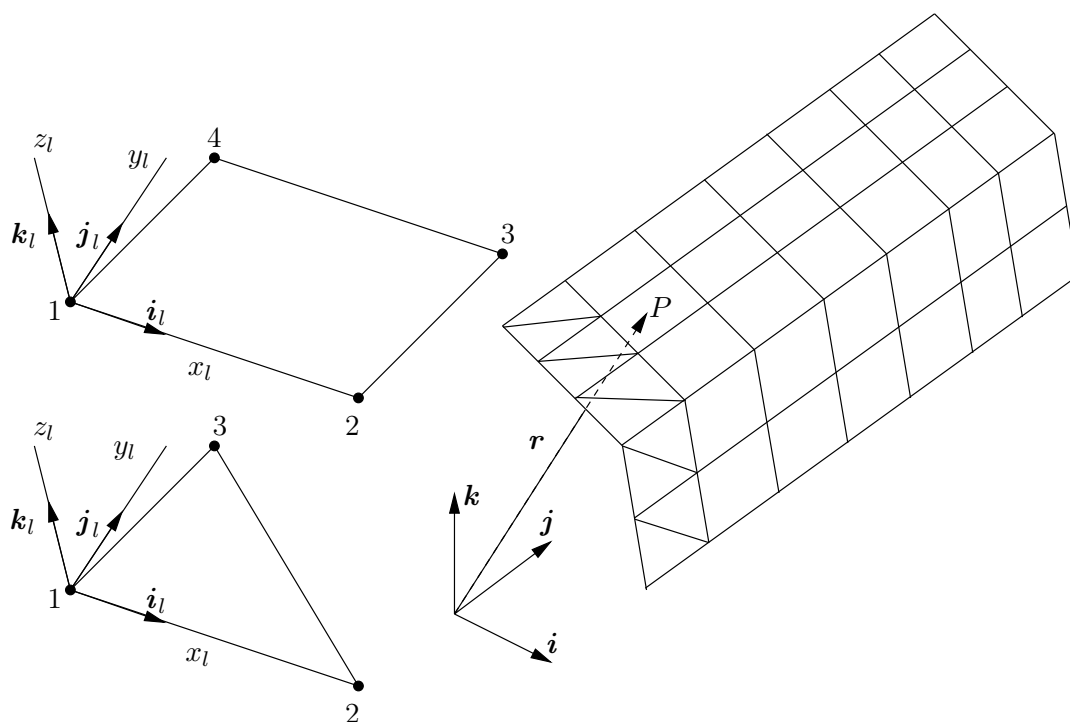
Jakamalla kuoren pinta tasomaisiin osiin, esim. kolmioihin tai nelikulmioihin, voidaan jakoa tihentämällä kuvata kaarevaa pintaa tarkemmin ja tarkemmin. Yksinkertainen kuorielementti saadaankin aikaiseksi yhdistämällä aiemmin esiteltyt levy- ja laattaelementit tasokuorielementin omassa koordinaatistossa ja muuntamalla sitten näin syntynyt kuorielementti yhteiseen rakennekoordinaatistoon muunnosmatriiseilla, samaan tapaan kuin edellä tehtiin kehäsauvaelementille kaarien analysoinnissa.

Jaetaan tasokuori esim. kolmi- ja/tai nelisolmuisiin elementteihin. Kuoren keskipinnan mielivaltaisen pisteen P paikkavektori on

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (13.1)$$

missä $\mathbf{i} \equiv \mathbf{i}_g$, $\mathbf{j} \equiv \mathbf{j}_g$ ja $\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}_g$ ovat globaalisen (rakennekohtaisen) koordinaatiston yksikkökantavektorit (indeksi g voidaan usein jättää pois). Määritellään paikallinen kantavektori \mathbf{i}_l sekä kolmi- että nelisolmuiselle elementille kaavalla

$$\mathbf{i}_l = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}, \quad (13.2)$$



Kuva 13.1 Tasokuori, neli- ja kolmisolmuiset elementit

missä

$$\| \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \| = \sqrt{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)} \quad (13.3)$$

ja \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 ovat elementin solmujen 1 ja 2 paikkavektorit. Merkitsemällä kolmisolmuisen elementin tapauksessa

$$\mathbf{r}_{13} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 \quad (13.4)$$

määritellään paikallinen, tasoa vastaan kohtisuora yksikkövektori

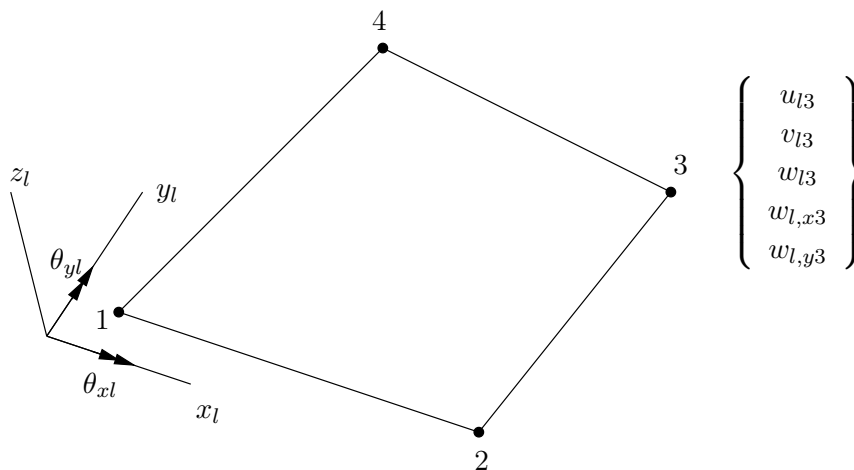
$$\mathbf{k}_l = \frac{\mathbf{i}_l \times \mathbf{r}_{13}}{\| \mathbf{i}_l \times \mathbf{r}_{13} \|}, \quad (13.5)$$

ja lopuksi määritetään paikallisen akselin y_l suuntainen yksikkövektori

$$\mathbf{j}_l = \mathbf{k}_l \times \mathbf{i}_l. \quad (13.6)$$

Paikallisessa koordinaatistossa (x_l, y_l, z_l) tasokuoren siirtymät ovat

$$\begin{aligned} u_l(x_l, y_l, z_l) &= u_c(x_l, y_l) + z_l \theta_{y_l}(x_l, y_l), \\ v_l(x_l, y_l, z_l) &= v_c(x_l, y_l) - z_l \theta_{x_l}(x_l, y_l), \\ w_l(x_l, y_l, z_l) &= w_c(x_l, y_l), \end{aligned} \quad (13.7)$$



Kuva 13.2 Nelisolmuinen tasokuorielementti, pisteet 1, 2, 3 ja 4 samassa tasossa.

missä u_c ja v_c ovat kuoren keskipinnan siirtymät paikallisessa koordinaatistossa, θ_{x_l} ja θ_{y_l} ovat kiertymät paikallisten x_l - ja y_l -akseleiden ympäri. Ottamalla huomioon, että Kirchhoffin laattateoriassa poikittaiset leikkausmuodonmuutokset häviävät, eli

$$\gamma_{x_l z_l} = \gamma_{y_l z_l} = 0, \quad (13.8)$$

saadaan kiertymät paikallisten akselien ympäri eliminoitua kaavoilla

$$\theta_{y_l} = -w_{l,x_l}, \quad \theta_{x_l} = w_{l,y_l} \quad (13.9)$$

ja siirtymien kaavat muotoon

$$u_l = u_c - z_l w_{l,x_l}, \quad (13.10)$$

$$v_l = v_c - z_l w_{l,y_l}.$$

Muodonmuutokset ovat paikallisessa koordinaatistossa

$$\varepsilon_{x_l} = u_{l,x_l} - z_l w_{l,x_l x_l},$$

$$\varepsilon_{y_l} = v_{l,x_l} - z_l w_{l,y_l y_l}, \quad (13.11)$$

$$\gamma_{x_l y_l} = u_{l,y_l} + v_{l,x_l} - 2z_l w_{l,x_l y_l}.$$

Tasokuorielementin solmun i vapausasteet ovat

$$\mathbf{u}_i^{(e)} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{w}_i \end{array} \right\} \quad (13.12)$$

missä

$$\mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} u_l \\ v_l \end{Bmatrix}_i, \quad \mathbf{w}_i = \begin{Bmatrix} w_l \\ w_{l,x_l} \\ w_{l,y_l} \end{Bmatrix}_i \quad (13.13)$$

ovat levy- laattavapausasteet solmussa i . Jokaisessa solmussa on siten viisi vapausastetta. Järjestetään vapausasteet ensin (nelisolmuisen elementin tapauksessa) järjestykseen

$$\mathbf{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} u_{l1}^{(e)} & v_{l1}^{(e)} & \cdots & u_{l4}^{(e)} & v_{l4}^{(e)} & w_{l1}^{(e)} & w_{l,x_{l1}}^{(e)} & w_{l,y_{l1}}^{(e)} & \cdots & w_{l4}^{(e)} & w_{l,x_{l4}}^{(e)} & w_{l,y_{l4}}^{(e)} \end{bmatrix}^T. \quad (13.14)$$

Tasonsuuntaisilla kalvomuodonmuutoksilla ei ole kytkentää laatan käyrityksiin, ja elementin jäykkymatriisi voidaan kirjoittaa lohkomuodossa, kuten kehäsauvaelementin tapauksessa,

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m^{(e)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_b^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (13.15)$$

missä indeksit m ja b viittaavat kalvo- ja taivutustilan suureisiin, (kuten aiemmin kehäsauvaelementille), ja e on kyseisen elementin numero.

Otetaan uudelleen käyttöön kiertymävapausasteet θ_{x_l} ja θ_{y_l}

$$\begin{Bmatrix} w_{l,x_l} \\ w_{l,y_l} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x_l} \\ \theta_{y_l} \end{Bmatrix}, \quad (13.16)$$

ja solmun kuudenneksi vapausasteeksi otetaan kiertymä akselin z_l ympäri, θ_{z_l} . Huomataan, että solmuihin i ja j liittyvä tasokuorielementin lohko on edullista järjestää muotoon

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_b^{(e)})_{ij} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & (\mathbf{K}_m^{(e)})_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (13.17)$$

missä lohkon $(\mathbf{K}_b^{(e)})_{ij}$ muunnos (13.16) on ajateltu tehdyksi.

Jos paikallisen koordinaatiston kantavektorit ovat $\mathbf{i}_l, \mathbf{j}_l, \mathbf{k}_l$ ja globaalisen koordinaatiston kantavektorit puolestaan ovat $\mathbf{i}_g, \mathbf{j}_g, \mathbf{k}_g$, niin paikallisten kantavektoreiden komponentit globaalisten kantavektoreiden suunnille (suuntakosinit) ovat

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i}_l \cdot \mathbf{i}_g \\ \mathbf{i}_l \cdot \mathbf{j}_g \\ \mathbf{i}_l \cdot \mathbf{k}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{j}_l \cdot \mathbf{i}_g \\ \mathbf{j}_l \cdot \mathbf{j}_g \\ \mathbf{j}_l \cdot \mathbf{k}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{i}_g \\ \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{j}_g \\ \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{k}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix}. \quad (13.18)$$

Siirtymävektori \mathbf{u} paikallisessa ja globaalissa koordinaatistossa esitettynä on

$$\mathbf{u} = u_l \mathbf{i}_l + v_l \mathbf{j}_l + w_l \mathbf{k}_l \quad (13.19)$$

ja

$$\mathbf{u} = u_g \mathbf{i}_g + v_g \mathbf{j}_g + w_g \mathbf{k}_g. \quad (13.20)$$

Esimerkiksi komponentti u_l on

$$\begin{aligned} u_l &= (u_g \mathbf{i}_g + v_g \mathbf{j}_g + w_g \mathbf{k}_g) \cdot \mathbf{i}_l = \\ &= u_g(\mathbf{i}_l \cdot \mathbf{i}_g) + v_g(\mathbf{i}_l \cdot \mathbf{j}_g) + w_g(\mathbf{i}_l \cdot \mathbf{k}_g) \\ &= u_g l_1 + v_g m_1 + w_g n_1. \end{aligned} \quad (13.21)$$

Samalla tavalla johdetaan muut tarvittavat muunnoskaavat.

Paikallisen koordinaatiston ja globaalin koordinaatiston vapausasteiden välillä ovat yhteydet

$$\begin{Bmatrix} u_l \\ v_l \\ w_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_g \\ v_g \\ w_g \end{Bmatrix} \quad (13.22)$$

ja

$$\begin{Bmatrix} \theta_{x_l} \\ \theta_{y_l} \\ \theta_{z_l} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x_g} \\ \theta_{y_g} \\ \theta_{z_g} \end{Bmatrix}. \quad (13.23)$$

Merkitään, että

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}. \quad (13.24)$$

Solmun i vapausasteiden muunnosmatriisi on

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_i \end{bmatrix}. \quad (13.25)$$

Yhden elementin osuus sisäisen virtuaalisen työn yhtälössä on

$$(\delta \mathbf{u}_l^{(e)})^T \mathbf{K}_l^{(e)} \mathbf{u}_l^{(e)} = (\delta \mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{K}_l^{(e)} \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = (\delta \mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (13.26)$$

ja elementin jäykkymatriisi lausuttuna globaalin koordinaatiston suhteen on siten

$$\mathbf{K}^{(e)} \equiv \mathbf{K}_g^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{K}_l^{(e)} \mathbf{T}^{(e)}. \quad (13.27)$$

Elementin muunnosmatriisi koostuu solmujen muunnosmatriiseista. Esimerkiksi nelisolmuisen elementin tapauksessa koko elementin muunnosmatriisi on

$$\mathbf{T}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 \end{bmatrix}. \quad (13.28)$$

Solmuvapausasteita

$$\mathbf{u}_{l_i}^{(e)} = [u_l \quad v_l \quad w_l \quad \theta_{x_l} \quad \theta_{y_l} \quad \theta_{z_l}]_i^T \quad (13.29)$$

vastaava paikallisen koordinaatiston solmun i kuormavektori on

$$\bar{\mathbf{f}}_{li}^{(e)} = \left[\bar{f}_{u_l} \quad \bar{f}_{v_l} \quad \bar{f}_{w_l} \quad \bar{f}_{\theta_{x_l}} \quad \bar{f}_{\theta_{y_l}} \quad \bar{f}_{\theta_{z_l}} \right]_i^T. \quad (13.30)$$

Paikallisen koordinaatiston suhteen lausuttu ulkoisen virtuaalisen työn termi on

$$(\delta \mathbf{u}_{li}^{(e)})^T \bar{\mathbf{f}}_{li}^{(e)} = (\delta \mathbf{u}_{gi}^{(e)})^T \mathbf{T}_i^{(e)T} \bar{\mathbf{f}}_{li}^{(e)} = (\delta \mathbf{u}_{gi}^{(e)})^T \bar{\mathbf{f}}_{gi}^{(e)}, \quad (13.31)$$

joten

$$\bar{\mathbf{f}}_i^{(e)} \equiv \bar{\mathbf{f}}_{gi}^{(e)} = \mathbf{T}_i^{(e)T} \bar{\mathbf{f}}_{li}^{(e)} \quad (13.32)$$

ja elementin koko kuormavektorin muunnos on

$$\bar{\mathbf{f}}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)T} \bar{\mathbf{f}}_l^{(e)}. \quad (13.33)$$

Jos usempi tasokuorielementti on samassa tasossa, niin rakenteen jäykkyyismatriisista tulee singulaarinen. Tämä voidaan estää lisäämällä vapausastetta θ_{z_l} vastaavaan kohtaan jäykkyyismatriisin diagonaalille pieni luku, joka on riittävän suuri estämään singulaarisuuden, mutta ei vaikuta haitallisesti tuloksiin. Pienen luvun lisääminen diagonaalille tarkoittaa ko. kiertymävapausasteen kiinnittämistä jousella ympäröivään maailmaan. Rationaalisempi tapa on käyttää kuorielementin osana levyelementtiä, jossa on valmiina paikallisen akseliston normaalikiertymä θ_{z_l} , (engl. drilling degree of freedom).

13.2 Kaareva, isoparametrinen kuorielementti

13.2.1 Kuorielementin geometriset suureet

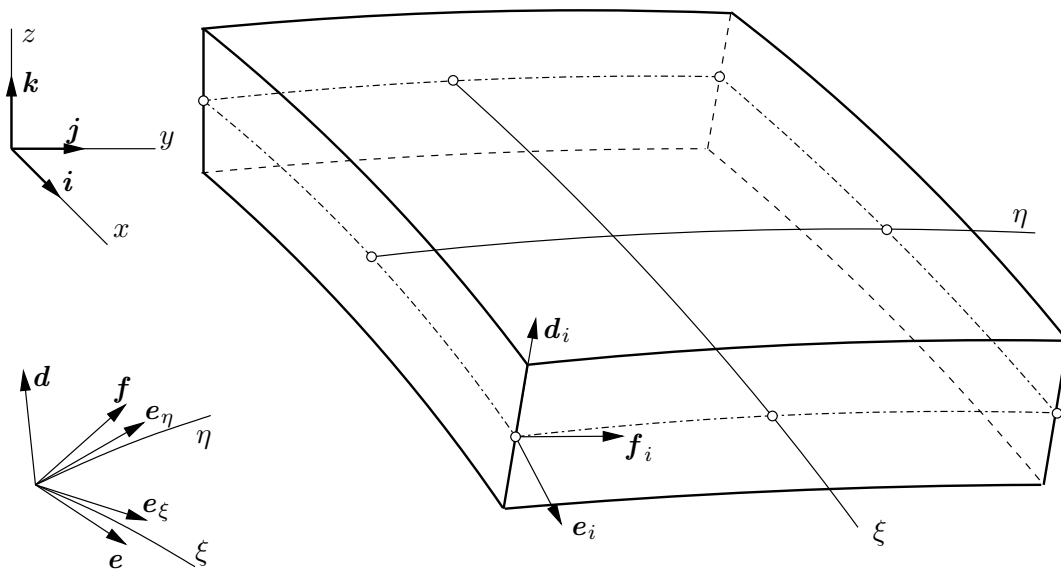
Tarkastellaan yleistä, mielivaltaisen muotoista ohutta kuorta kolmiulotteisessa avaruudessa \mathbb{R}^3 . Kuoren mielivaltaisen pisteen P paikkavektori suorakulmaisessa koordinaatistossa (x, y, z) on

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{x}_m(\xi, \eta) + \zeta \mathbf{d}(\xi, \eta), \quad (13.34)$$

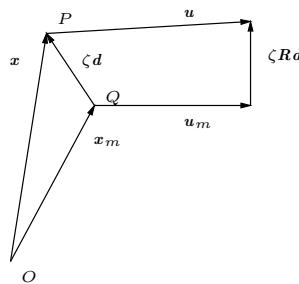
missä $\xi, \eta \in [-1, 1]$ ovat käyräviivaiset koordinaatit, joiden avulla parametrisoidaan kuoren keskipinta, $(\xi, \eta) \in \mathcal{M}$, kuoren paksuuden suunnassa koordinaatti $z_l = \zeta t \in \mathcal{H} = [-\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t]$, $t = t(\xi, \eta)$ on kuoren paksuus, $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}(\xi, \eta, 0)$ on kuoren keskipinnalla olevan pisteen Q paikkavektori, jonka päätepiste on samalla ζ -viivalla kuin käsiteltävän, mielivaltaisen pisteen P paikkavektorin päätepiste, \mathbf{d} on suunta-vektori, jonka pituus on yksi eli $\|\mathbf{d}\| = 1$.

Suorakulmaisen peruskoordinaatiston yksikkökantavektorit ovat \mathbf{i} , \mathbf{j} ja \mathbf{k} , ja paikkavektori \mathbf{x} voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (13.35)$$



Kuva 13.3 Isoparametrinen kuorielementti.



Kuva 13.4 Siirtymävektori.

matriisimerkinnöin

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (13.36)$$

Määritellään kuoren keskipinnan tangenttitasossa keskenään ortogonaaliset vektorit \mathbf{e} ja \mathbf{f} , jotka ovat kohtisuorassa vektoria \mathbf{d} vastaan. Vektorikolmikon $[\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{d}]$ konstruointia käsitellään myöhemmin.

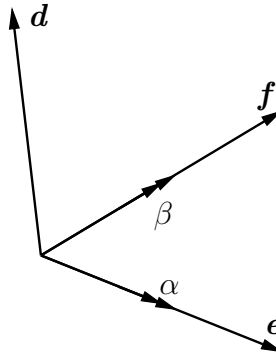
Kuoren mielivaltaisen pisteen P siirtymävektori \mathbf{u} voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{u}_m(\xi, \eta) + \zeta \mathbf{R}(\xi, \eta) \mathbf{d}(\xi, \eta), \quad (13.37)$$

missä \mathbf{u}_m on kuoren keskipinnan vastaavan pisteen Q siirtymä ja \mathbf{R} on vektorin \mathbf{d} rotaatiota esittävä matriisi, kuva 13.4.

Pienten rotaatioiden tapauksessa lineaarisessa kuoriteoriassa kaava (13.37) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_m + \zeta(-\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{e}), \quad (13.38)$$



Kuva 13.5 Rotaatiot α ja β paikallisten akseleiden ympäri.

missä α ja β ovat kiertymät paikallisten kantavektoreiden e ja f ympäri, kuva 13.5, ja otaksutaan, että rotaatio vektorin d ympäri on nolla.

Koordinaattiviivojen ξ , η ja ζ tangenttivektorit ovat

$$\mathbf{g}_\xi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}, \quad \mathbf{g}_\eta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta}, \quad \mathbf{g}_\zeta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta}, \quad (13.39)$$

Käyräviivaisen koordinaatiston kantavektorit etäisyydellä ζ kuoren keskipinnalta ovat

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\xi &= \mathbf{x}_{,\xi} = \mathbf{x}_{m,\xi} + \zeta \mathbf{d}_{,\xi}, \\ \mathbf{g}_\eta &= \mathbf{x}_{,\eta} = \mathbf{x}_{m,\eta} + \zeta \mathbf{d}_{,\eta}, \\ \mathbf{g}_\zeta &= \mathbf{x}_{,\zeta} = \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (13.40)$$

Kuoren keskipinnalla \mathcal{M} , ($\zeta = 0$), kantavektorit ovat

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\xi(\xi, \eta) &= \mathbf{g}_\xi(\xi, \eta, 0), \\ \mathbf{a}_\eta(\xi, \eta) &= \mathbf{g}_\eta(\xi, \eta, 0). \end{aligned} \quad (13.41)$$

Paikallinen suorakulmainen koordinaatisto pinnalla $\zeta = \text{vakio}$ voidaan muodostaa vektoreiden \mathbf{g}_ξ , \mathbf{g}_η ja \mathbf{g}_ζ avulla. Ohuen kuoren tapauksessa voidaan jännitysten laskentaan käyttää kuoren keskipinnalla paikallista koordinaatistoa, joka voidaan tehdä esim. seuraavalla tavalla. Muodostetaan ensin yksikkövektorit (integrointipisteessä)

$$\mathbf{e}_\xi = \frac{\mathbf{a}_\xi}{\|\mathbf{a}_\xi\|}, \quad \mathbf{e}_\eta = \frac{\mathbf{a}_\eta}{\|\mathbf{a}_\eta\|}. \quad (13.42)$$

Keskipintaa vastaan kohtisuora yksikkövektori \mathbf{d} voidaan määritellä kaavalla

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta}{\|\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta\|}. \quad (13.43)$$

Määritellään edelleen apuvektorit

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\eta}{\|\mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\eta\|}, \quad \mathbf{q} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{d}}{\|\mathbf{p} \times \mathbf{d}\|}, \quad (13.44)$$

ja niiden avulla muodostetaan paikallisen koordinaatiston referenssitason suuntaiset, vektoria \mathbf{d} vastaan kohtisuorat yksikkökantavektorit

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{q}}{\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|}, \quad \mathbf{f} = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{q}}{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|}. \quad (13.45)$$

Näin saadaan koordinaatisto, jonka kantavektorit keskipinnalla $\zeta = 0$ ovat lähinnä vektoreita \mathbf{e}_ξ ja \mathbf{e}_η .

Elementin solmupisteessä i lähtötietona tunnetaan (tai voidaan laskea elementin ala- ja yläpinnan kahden solmupisteen avulla) vektori \mathbf{d}_i . Vektoria \mathbf{d}_i vastaan kohtisuora vektori, (x, z) -tason suunnassa, on

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{d}_i}{\|\mathbf{j} \times \mathbf{d}_i\|}, \quad (13.46)$$

tai jos \mathbf{d}_i on sattumalta vektorin \mathbf{j} suuntainen, niin

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{d}_i \times \mathbf{i}}{\|\mathbf{d}_i \times \mathbf{i}\|}, \quad (13.47)$$

\mathbf{i} ja \mathbf{j} ovat globaalisen koordinaatiston kaksi kantavektoria. Lopuksi kolmas kantavektori solmussa i lasketaan kaavalla

$$\mathbf{f}_i = \frac{\mathbf{d}_i \times \mathbf{e}_i}{\|\mathbf{d}_i \times \mathbf{e}_i\|}. \quad (13.48)$$

13.2.2 Siirtymien interpolointi

Isoparametrisen kaarevan kuorielementin geometria voidaan määrittellä kaavalla

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi, \eta) \mathbf{x}_{m_i} + \frac{1}{2} \zeta t_i N_i(\xi, \eta) \mathbf{d}_i] \quad (13.49)$$

missä $N_i(\xi, \eta)$ ovat muotofunktiot, vektorin $\mathbf{x}_i \equiv \mathbf{x}_{m_i}$ komponentit (x_i, y_i, z_i) ovat solmujen $i = 1, \dots, n$ koordinaatit, t_i on elementin paksuus solmun i kohdalla. Mitta t_i ei kuitenkaan välttämättä ole todellinen paksuus. Vektorin \mathbf{d} komponentit globaalisen kannan suhteen ovat

$$\mathbf{d} = \left\{ \begin{array}{c} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{array} \right\}. \quad (13.50)$$

Siirtymiä u, v, w interpoloidaan samalla tavalla kuin geometriaa kaavalla

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi, \eta) \mathbf{u}_{m_i} + \frac{1}{2} \zeta t_i N_i(\xi, \eta) (-\alpha \mathbf{f}_i + \beta \mathbf{e}_i)], \quad (13.51)$$

missä solmupisteen i siirtymävektorin $\mathbf{u}_i \equiv \mathbf{u}_{mi}$ komponentit ovat (u_i, v_i, w_i) ja vektoreiden \mathbf{e} ja \mathbf{f} komponentit ovat

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix}. \quad (13.52)$$

13.2.3 Kuoren muodonmuutokset

Globaalissa koordinaatistossa (x, y, z) lausutut muodonmuutokset ovat venymät

$$\varepsilon_x = u_{,x}, \quad \varepsilon_y = v_{,y}, \quad \varepsilon_z = w_{,z} \quad (13.53)$$

ja leikkausmuodonmuutokset

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}, \quad \gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y}, \quad \gamma_{xz} = u_{,z} + w_{,x}. \quad (13.54)$$

Derivaatat koordinaattien x, y ja z suhteen voidaan määrittää derivoinnin ketjusäännön avulla. Siirtymäkomponentin $u(\xi, \eta, \zeta)$ derivaatat käyräviivaisten koordinaattien ξ, η ja ζ suhteen ovat

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (13.55)$$

missä

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (13.56)$$

ja \mathbf{J} on kuvauksen $(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow (x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta))$ Jacobin matriisi.

Matriisin \mathbf{J}^T käänteismatriisi on, kuten 3D-isoparametrisen elementin tapauksessa,

$$\mathbf{J}^{-T} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta} & -y_{,\xi} z_{,\zeta} - z_{,\xi} y_{,\zeta} & y_{,\xi} z_{,\eta} - z_{,\xi} y_{,\eta} \\ -x_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} x_{,\zeta} & x_{,\xi} z_{,\zeta} - z_{,\xi} x_{,\zeta} & -y_{,\xi} z_{,\eta} - z_{,\xi} y_{,\eta} \\ x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta} & -x_{,\xi} y_{,\zeta} - y_{,\xi} x_{,\zeta} & x_{,\xi} y_{,\eta} - y_{,\xi} x_{,\eta} \end{bmatrix}, \quad (13.57)$$

missä

$$\det \mathbf{J} = \det \mathbf{J}^T = x_{,\xi}(y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta}) - y_{,\xi}(x_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} x_{,\zeta}) + z_{,\xi}(x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta}) \quad (13.58)$$

on Jakobin matriisin determinantti ja globaalisten, karteestisten koordinaattien derivaatat luonnollisten koordinaattien suhteen ovat

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} [x_i + \frac{1}{2}t_i\zeta l_3], & x_{,\eta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} [x_i + \frac{1}{2}t_i\zeta l_3], & x_{,\zeta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\zeta} [x_i + \frac{1}{2}t_i\zeta l_3], \\ y_{,\xi} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} [y_i + \frac{1}{2}t_i\zeta m_3], & y_{,\eta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} [y_i + \frac{1}{2}t_i\zeta m_3], & y_{,\zeta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\zeta} [y_i + \frac{1}{2}t_i\zeta m_3], \\ z_{,\xi} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} [z_i + \frac{1}{2}t_i\zeta n_3], & z_{,\eta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} [z_i + \frac{1}{2}t_i\zeta n_3], & z_{,\zeta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\zeta} [z_i + \frac{1}{2}t_i\zeta n_3]. \end{aligned} \quad (13.59)$$

Merkitään

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}^{-T}, \quad (13.60)$$

jolloin

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (13.61)$$

Matriisin \mathbf{H} komponenttien avulla lausutaan muotofunktioiden derivaatat

$$\begin{aligned} N_{i,x} &= H_{11}N_{i,\xi} + H_{12}N_{i,\eta}, \\ N_{i,y} &= H_{21}N_{i,\xi} + H_{22}N_{i,\eta}, \\ N_{i,z} &= H_{31}N_{i,\xi} + H_{32}N_{i,\eta} \end{aligned} \quad (13.62)$$

ja derivaatat

$$\zeta_{,x} = H_{13}, \quad \zeta_{,y} = H_{23}, \quad \zeta_{,z} = H_{33}. \quad (13.63)$$

Globaalissa koordinaatistossa (x, y, z) lausutut virtuaaliset muodonmuutokset ovat

$$\delta \varepsilon_x = \delta u_{,x}, \quad \delta \varepsilon_y = \delta v_{,y}, \quad \delta \varepsilon_z = \delta w_{,z}, \quad (13.64)$$

$$\delta \gamma_{xy} = \delta u_{,y} + \delta v_{,x}, \quad \delta \gamma_{yz} = \delta v_{,z} + \delta w_{,y}, \quad \delta \gamma_{xz} = \delta u_{,z} + \delta w_{,x}. \quad (13.65)$$

Elementin kinemaattiset yhtälöt ovat

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B} \delta \mathbf{u}^{(e)} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \delta \mathbf{u}_i^{(e)}, \end{aligned} \quad (13.66)$$

missä solmuun i liittyvä \mathbf{B} -matriisin lohko on

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_{1i} + \zeta \mathbf{B}_{2i}, \quad (13.67)$$

$$\mathbf{B}_{1i} = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i N_i H_{13} l_2 & \frac{1}{2}t_i N_i H_{13} l_1 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & -\frac{1}{2}t_i N_i H_{23} m_2 & \frac{1}{2}t_i N_i H_{23} m_1 \\ 0 & 0 & N_{i,z} & -\frac{1}{2}t_i N_i H_{33} n_2 & \frac{1}{2}t_i N_i H_{33} n_1 \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & -\frac{1}{2}t_i N_i (H_{23} l_2 + H_{13} m_2) & \frac{1}{2}t_i N_i (H_{23} l_1 + H_{13} m_1) \\ 0 & N_{i,z} & N_{i,y} & -\frac{1}{2}t_i N_i (H_{33} m_2 + H_{23} n_2) & \frac{1}{2}t_i N_i (H_{33} m_1 + H_{23} n_1) \\ N_{i,z} & 0 & N_{i,x} & -\frac{1}{2}t_i N_i (H_{33} l_2 + H_{13} n_2) & \frac{1}{2}t_i N_i (H_{33} l_1 + H_{13} n_1) \end{bmatrix} \quad (13.68)$$

ja

$$\mathbf{B}_{2i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i N_{i,x} l_2 & \frac{1}{2}t_i N_{i,x} l_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i N_{i,y} m_2 & \frac{1}{2}t_i N_{i,y} m_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i N_{i,z} n_2 & \frac{1}{2}t_i N_{i,z} n_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i (N_{i,y} l_2 + N_{i,x} m_2) & \frac{1}{2}t_i (N_{i,y} l_1 + N_{i,x} m_1) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i (N_{i,z} m_2 + N_{i,y} n_2) & \frac{1}{2}t_i (N_{i,z} m_1 + N_{i,y} n_1) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i (N_{i,z} l_2 + N_{i,x} n_2) & \frac{1}{2}t_i (N_{i,z} l_1 + N_{i,x} n_1) \end{bmatrix}. \quad (13.69)$$

Elementin jäykkyyismatriisi on

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta. \quad (13.70)$$

Integraali koordinaatin ζ suhteen voidaan nyt laskea eksplisiittisesti ohuen kuoren tapauksessa sijoittamalla

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_{1i} + \zeta \mathbf{B}_{2i} \quad (13.71)$$

ja

$$\det \mathbf{J} \approx t |\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}| d\xi d\eta. \quad (13.72)$$

Elementin jäykkyyismatriisin kaavassa \mathbf{D} on materiaalin jäykkyyismatriisi globaalissa koordinaatistossa. Jännitysten ja muodonmuutosten välinen yhteys määritetään kuitenkin integrointipisteen paikallisessa koordinaatistossa (x_l, y_l, z_l) . Kimmoisen aineen tapauksessa materiaalin jäykkyyismatriisi on paikallisessa koordinaatistossa

$$\mathbf{D}_l = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \frac{1 - \nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (13.73)$$

jossa on otettu huomioon, että kuoren jännitys ja muodonmuutos akselin z_l suunnassa ovat nollia ja k on leikkauskorjauskerroin, jonka arvoksi homogeeniselle poik-

kileikkaukselle voidaan ottaa $k = \frac{6}{5}$. Paikallisen koordinaatiston ja globaalisen koordinaatiston väliset muodonmuutosten ja jännitysten muunnoskaavat ovat

$$\boldsymbol{\varepsilon}_l = \mathbf{T}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\sigma}_l = \mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_\varepsilon^{-T} \boldsymbol{\sigma}, \quad (13.74)$$

missä muunnosmatriisi

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & l_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & l_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & l_3 n_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + m_1 l_2 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + m_2 l_3 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + m_3 l_1 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \quad (13.75)$$

ja l_i , m_i ja n_i ovat vektoreiden \mathbf{i} , \mathbf{j} ja \mathbf{k} suuntakosinit, (sisätulot) paikallisten kantavektoreiden \mathbf{e} , \mathbf{f} ja \mathbf{d} suhteen (integrointipisteessä).

Koska $\boldsymbol{\sigma}_l^T \boldsymbol{\varepsilon}_l = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ on invariantti, saadaan yhteys

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_l^T \mathbf{D}_l \boldsymbol{\varepsilon}_l = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{T}_\varepsilon^T \mathbf{D}_l \mathbf{T}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (13.76)$$

joten

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}_\varepsilon^T \mathbf{D}_l \mathbf{T}_\varepsilon \quad (13.77)$$

on materiaalin jäykkyysmatriisi globaalisen koordinaatiston suhteen sijoitettavaksi elementin jäykkyysmatriisiin.

Samalla tavalla kuin tasokuorielementin tapauksessa edellä voidaan isoparametrisen kuorielementin vapausasteeksi ottaa kiertymä, γ , solmupisteen i paikallisen kantavektorin \mathbf{d}_i ympäri. Paikallisen ja globaalisen koordinaatiston kiertymien väliset yhteydet ovat

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}, \quad (13.78)$$

missä muunnosmatriisi (solmun i) kiertymille on

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{f}_i & \mathbf{d}_i \end{bmatrix}^T. \quad (13.79)$$

Solmun i vapausasteiden muunnosmatriisi on

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_i \end{bmatrix}. \quad (13.80)$$

Paikallisessa koordinaatistossa on jälleen lisättävä lavennetun jäykkyysmatriisin diagonaalille pieni luku vapausasteen γ kohdalle estämään jäykkyysmatriisin singulariteetti.

Luku 14

Derivaattasuureiden laskennasta

Elementtimenetelmässä, jossa primäärisuuretta interpoloidaan paloittain jatkuvilla funktioilla, on tästä laskettu derivaatta epäjatkuva. Esimerkiksi virtuaalisen työn periaatteesta johdettujen elementtimenetelmäformulaatioiden jännitysten lausekkeet ovat epäjatkuvia siirryttäessä elementtien rajapintojen yli. Jännitysten arvot ovat myös epätarkempia kuin siirtymäsuureet, sillä ne saadaan materiaalilain avulla muodonmuutoksista, jotka on saatu derivoimalla siirtymiä.

Tarkimmillaan derivaattasuureiden arvot ovat usein integroimispisteissä, ja hah-
luttaessa laskea niiden arvoja solmupisteissä voidaan menetellä seuraavin tavoin:

1. Lasketaan primäärisuureen interpolaatiosta derivaattasuureiden arvot solmuissa ja niistä tarvittavat suureet kuten jännitykset, jotka keskiarvoistetaan solmuun liittyvien elementtien pinta-alojen suhteessa.
2. Ekstrapoloidaan jännitysten arvot integrointipisteistä käyttäen hyväksi sopivaa interpolaatiofunktioita ja suoritetaan keskiarvoistus.
3. Otaksutaan jännityskomponenteille *jatkuva* interpolaatio käyttäen samoja interpolaatiofunktioita kuin siirtymille ja määritetään jännitysten solmupistearvot pienimmän neliön keinolla.

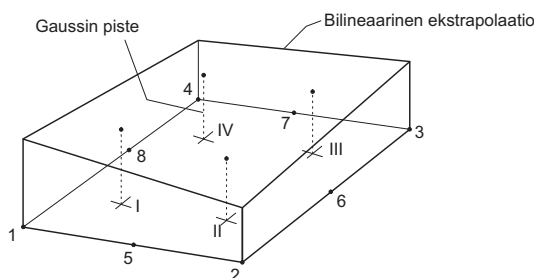
Ensimmäisen kohdan strategia ei kaivanne lisäselvityksiä.

Esitetään seuraavaksi siirtymämenetelmään perustuvan elementtimenetelmän jännityssuureiden laskentamahdollisuuksia, erityisesti jälkikäsitteilyä silmälläpitäen.

14.1 Ekstrapolaatio

Oletetaan, että jännityssuure Q on määritetty bilineaarisen elementin Gaussin-Legendren 2×2 integrointipisteissä, I, II, III ja IV. Merkitään haluttuja solmupistearvoja Q_1, \dots, Q_4 . Gaussin-Legendren 2×2 -menetelmän pisteiden koordinaatit ovat

$$\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \eta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (14.1)$$



Kuva 14.1 Ekstrapolaatio solmuihin.

jotka on esitetty kuvassa 14.1. Otaksumalla nyt jännitykselle bilineaarinen interpolaatio elementin alueella, saadaan solmupistearvot yhtälöstä

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} & (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} & (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) \\ (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} & (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} & (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_I \\ Q_{II} \\ Q_{III} \\ Q_{IV} \end{Bmatrix}. \quad (14.2)$$

14.2 Pienimmän neliön keino

Olkoon elementtimenetelmän antama ratkaisu siirtymäsuureille \mathbf{u}_h ja niistä lasketut jännitykset $\boldsymbol{\sigma}_h$. Parannelulle jatkuvalle jännitys jakaumalle käytetään merkintää

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \mathbf{N}\mathbf{s}, \quad (14.3)$$

missä matriisi \mathbf{N} sisältää interpolaatiofunktiot ja \mathbf{s} jännitysten solmupistearvot. Uusi jännitys jakauma sovitetaan elementtimenetelmän antamaan “raakajännitykseen” pienimmän neliön keinolla

$$\min_{\mathbf{s}} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_c - \boldsymbol{\sigma}_h)^2 d\Omega, \quad (14.4)$$

josta solmupistejännitysten suhteen derivoimalla saadaan ratkaisuyhtälöksi

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\mathbf{N}\mathbf{s} - \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega = 0. \quad (14.5)$$

Tämä yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{M}\mathbf{s} = \mathbf{b} \quad (14.6)$$

missä kerroinmatriisi \mathbf{M} ja vektori \mathbf{b} kootaan elementtiosuuksista

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad \mathbf{b}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma}_h d\Omega. \quad (14.7)$$

Tällä tavoin voidaan jännitysten tarkkuutta hieman parantaa, mutta jännitysten suppenemisnopeuteen sillä ei ole vaikutusta, (katso lukua 8), ainoastaan virhekerroin C pienenee. Jännitysten tasoitusta ei saa suorittaa rajapinnoilla joissa materiaaliominaisuudet hyppäyksenomaisesti muuttuvat. Tällöin tasoitus on suoritettava osa-alueittain.

Esimerkki 14.1 *Olkoon ratkaistavana lämmönjohtumisyhtälö*

$$-ku'' = \bar{f}, \quad u(0) = u(L) = 0, \quad \bar{f}(x) = 4f_0 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right). \quad (14.8)$$

Käyttäen symmetriaa hyväksi ratkaise tehtävä elementtimenetelmällä käyttäen kahta lineaarisesti interpoloitua elementtiä ratkaisualan puolikkaalle. Laske saadusta ratkaisusta lämpövuoto

$$q_h = -ku'_h. \quad (14.9)$$

Jälkikäsittele tätä lämpövuon lauseketta otaksumalla parannetulle lämpövuon lausekkeelle C_0 -jatkuva lauseke, eli otaksumalla, että lämpövuoto on esitettävissä kunkin elementin alueella samoilla interpolaatiofunktioilla kuin itse lämpötilaakin

$$q_c^{(e)} = N_1(\xi)q_{c1} + N_2(\xi)q_{c2}. \quad (14.10)$$

Diskretoitaessa elementtimenetelmällä puolet alueesta reunaehdot ovat

$$u(0) = 0 \quad \text{ja} \quad q(L/2) = 0. \quad (14.11)$$

Elementtimatriisi on

$$K_{ij}^{(e)} = k \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx = \frac{2k}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} d\xi. \quad (14.12)$$

Käytettäessä lineaarisia elementtejä, yhtälöryhmäksi saadaan

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_2^{(1)} + \bar{f}_1^{(2)} \\ \bar{f}_2^{(2)} \end{Bmatrix}. \quad (14.13)$$

Lasketaan kuormitustermit

$$\bar{f}_i^{(e)} = \frac{1}{2}h^{(e)} \int_{-1}^1 \bar{f}(\xi) N_i(\xi) d\xi, \quad (14.14)$$

jotka ovat:

$$\begin{aligned} \bar{f}_2^{(1)} &= \frac{1}{2}h^{(e)} \int_{-1}^1 4f_0 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{1}{2}(1 + \xi) d\xi \quad \left(\frac{x}{L} = \frac{x_c^{(e)}}{L} + \frac{h^{(e)}}{2L}\xi\right) \\ &= \frac{1}{256}f_0L \int_{-1}^1 (1 + \xi)^2(7 - \xi) d\xi = \frac{13}{192}f_0L, \end{aligned} \quad (14.15)$$

$$\bar{f}_1^{(2)} = \frac{1}{256}f_0L \int_{-1}^1 (3 + \xi)(5 - \xi)(1 - \xi) d\xi = \frac{21}{192}f_0L, \quad (14.16)$$

$$\bar{f}_2^{(2)} = \frac{23}{192}f_0L. \quad (14.17)$$

Yhtälöryhmäksi saadaan siten

$$\frac{4k}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{192} \begin{Bmatrix} 34 \\ 23 \end{Bmatrix}, \quad (14.18)$$

jonka ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 57 \\ 80 \end{Bmatrix} \frac{f_0 L^2}{768k}. \quad (14.19)$$

Käytettäessä lineaarisia elementtejä lämpövuon on vakio elementin alueella, ja sille saadaan lauseke

$$q^{(e)} = -ku' = -k \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{h^{(e)}} = \frac{4k}{L} (u_1^{(e)} - u_2^{(e)}). \quad (14.20)$$

Saadaan arvot

$$q^{(1)} = -\frac{57}{192} f_0 L, \quad q^{(2)} = -\frac{23}{192} f_0 L. \quad (14.21)$$

Lämpövuon jälkikäsitteilyä varten muodostetaan matriisi \mathbf{M} , joka koostuu elementtimatriiseista

$$M_{ij}^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} N_i N_j dx = \frac{1}{2} h^{(e)} \int_{-1}^1 N_i N_j d\xi. \quad (14.22)$$

Lineaarisen elementin tapauksessa se on muotoa

$$\mathbf{M}^{(e)} = \frac{h^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (14.23)$$

Nyt voidaan lämpövuolle antaa reunaehto alueen keskellä, joten ratkaistavaksi jää kaksi suuretta eli lämpövuon arvot solmuissa 1 ja 2. Oikean puolen vakiovektorin \mathbf{b} , joka koostuu elementtiosuuksista

$$b_i^{(e)} = \frac{1}{2} h^{(e)} \int_{-1}^1 N_i(\xi) q^{(e)} d\xi, \quad (14.24)$$

termit ovat

$$b_1 = b_1^{(1)}, \quad (14.25)$$

$$b_2 = b_2^{(1)} + b_1^{(2)}, \quad (14.26)$$

missä

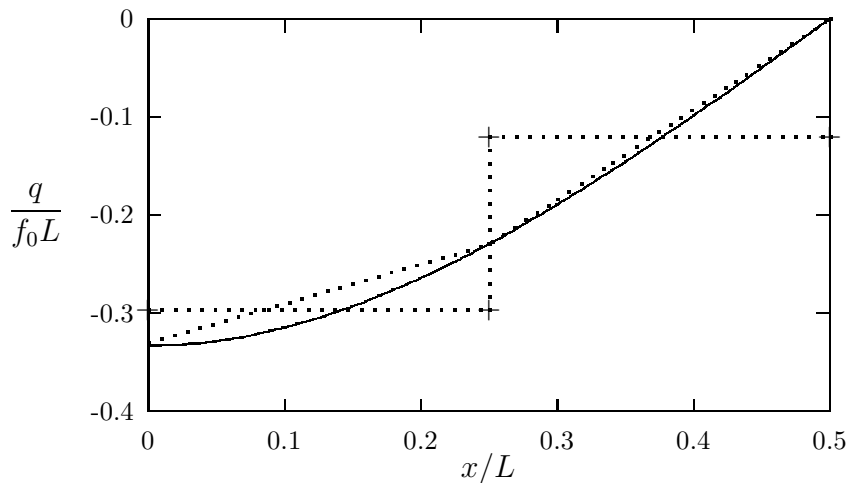
$$b_1^{(1)} = \frac{L}{8} \int_{-1}^1 \left(-\frac{57}{192} f_0 L\right) \frac{1}{2} (1 - \xi) d\xi = -\frac{57}{1536} f_0 L^2, \quad (14.27)$$

$$b_2^{(1)} = b_1^{(1)}, \quad (14.28)$$

$$b_1^{(2)} = -\frac{23}{1536} f_0 L^2. \quad (14.29)$$

Ratkaistava yhtälöryhmä on

$$\frac{L}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{c1} \\ q_{c2} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 57 \\ 80 \end{Bmatrix} \frac{f_0 L^2}{1536}, \quad (14.30)$$



Kuva 14.2 Lämpövuon ehyt viiva analyttinen ratkaisu ja katkoviivat elementtimenetelmätulokset.

ja sen ratkaisuksi saadaan

$$\begin{Bmatrix} q_{c1} \\ q_{c2} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 148 \\ 103 \end{Bmatrix} \frac{f_0L}{796}. \quad (14.31)$$

Kuvaan 14.2 on piirretty lämpövuon analyttinen lauseke sekä suoraan elementti-interpolaatiosta laskettu että jälkikäsitelty jatkuva lämpövuon arvo.

Analyttinen ratkaisu lämpötilalle on

$$u(x) = \frac{f_0L^2}{3k} \frac{x}{L} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1 \right], \quad (14.32)$$

josta saadaan lämpövuon kaavalla $q = -ku'$.

14.2.1 Harjoitustehtäviä

1. Johda yhtälö (14.2).
2. Mieti miten suoritetaan bikvadraattisen tai supistetun bikvadraattiseen (Serendip) elementin ekstrapolaatio solmuihin.
3. Ratkaise esimerkin 14.1 jälkikäsitelty lämpövuon jakauma otaksumatta ehtoa $q(L/2) = 0$. Määritä lämpövuon neliövirhe kummassakin tapauksessa. Kumpi menettely antaa ko. normin mielessä paremman tuloksen?

Luku 15

Sekaelementtimenetelmät

15.1 Johdanto

Sekaelementtimenetelmät muodostavat laajan ryhmän erilaisia epätavallisia elementtimenetelmäformulaatioita. Niiden käytöllä on joukko syitä, jotka voidaan karkeasti jakaa kolmeen ryhmään. Ehkä kaikkein tärkein syy on se, että sekaelementtimenetelmät mahdollistavat rajoiteyhtälöiden luontevan käsittelyn. Esimerkiksi kokoonpuristumattoman aineen, kiinteän tai nesteen, mallinnus ei onnistu tavanomaisella siirtymä-/nopeusformulaatiolla.

Toinen syy on tiettyjen standardiformulaatioissa primäärisuureista derivoimalla laskettujen suureiden fysikaalisessa merkittävydessä. Elastisuusprobleemissa jännitykset ovat usein tärkeämpiä suureita kuin siirtymät, jotka tavanomaisessa siirtymämenetelmässä ovat kuitenkin astetta tarkempia kuin jännitykset. Lämmönjohtumistehtävässä usein lämpövuoto on tärkeämpi suure kuin itse lämpötila. Täten menetelmä, jossa nämä jännityssuureet olisivat "suoraan" saatavilla saattaisi olla mielekkäämpi.

Kolmas syy liittyy vaikeuteen muodostaa interpolaatiofunktioita joilta vaaditaan derivaattojen jatkuvuutta. Esimerkiksi Kirchhoffin laattamallissa C_1 -jatkuvien funktioiden konstruointi kolmio tai yleiselle nelikulmioelementille on hankalaa ja johtaa epätoivottuihin vapausasteisiin. Sekaelementtimenetelmässä jatkuvuusvaatimuksia voidaan lieventää muuntamalla korkea-asteisia derivaattoja sisältävät yhtälöt matalampiasteiseksi systeemiksi.

15.2 Yksinkertainen esimerkkiongelmia

15.2.1 Symmetrisen heikon muodon johto

Tarkastellaan seuraavassa aksiaalisesti kuormitetun sauvan ongelmaa (analogisesti lämmönjohtumisongelmaa). Sauvan tasapainoyhtälö on aksiaalisen siirtymän u avulla lausuttuna toisen kertaluvun skalaarinen differentiaaliyhtälö:

$$-(EAu)' = \bar{f}. \quad (15.1)$$

Otaksutaan reunaehtotapaus

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, \\ N(L) &= EAu'(L) = \bar{N}_L. \end{aligned} \quad (15.2)$$

Sekaelementtimenetelmäformulaatiota varten muodostetaan toisen kertaluvun yhtälöstä normaalivoiman N ja siirtymän u systeemi

$$\begin{aligned} \frac{N}{EA} - u' &= 0 \\ -N' &= \bar{f}. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Kerrotaan ylempi yhtälöistä testifunktiolla \hat{N} ja alempi \hat{u} , ja integroidaan alueen $I = \{x|x \in (0, L)\}$ yli, saadaan systeemin heikko muoto

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\hat{N}N}{EA} dx - \int_0^L \hat{N}u' dx &= 0 \\ - \int_0^L \hat{u}N' dx &= \int_0^L \hat{u}\bar{f} dx. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Osittaisintegroidaan alemman yhtälön ensimmäinen termi ja kerrotaan ylempi yhtälöistä -1 :llä, saadaan elementtimenetelmän kannalta sovelias heikko muoto

$$\begin{aligned} - \int_0^L \frac{\hat{N}N}{EA} dx + \int_0^L \hat{N}u' dx &= 0 \\ \int_0^L \hat{u}'N dx &= \int_0^L \hat{u}\bar{f} dx + \hat{u}(L)\bar{N}_L. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Sekaelementtimenetelmä saadaan kun alue I jaetaan osa-alueisiin $I^{(e)}$ ja valitaan osa-alueittain interpolaatiot

$$\begin{aligned} N^{(e)} &= \sum_{i=1}^p N_{Ni}P_i^{(e)} = \mathbf{N}_N \mathbf{p}^{(e)}, \\ u^{(e)} &= \sum_{i=1}^q N_{ui}u_i^{(e)} = \mathbf{N}_u \mathbf{u}^{(e)}. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Vastaavasti testifunktiolle valitaan Galerkinin keinon mukaisesti samat interpolaatiofunktiot

$$\begin{aligned} \hat{N}^{(e)} &= \sum_{i=1}^p N_{Ni}\hat{P}_i^{(e)} = \mathbf{N}_N \hat{\mathbf{p}}^{(e)}, \\ \hat{u}^{(e)} &= \sum_{i=1}^q N_{ui}\hat{u}_i^{(e)} = \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}}^{(e)}. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Sijoittamalla nämä heikkoon muotoon (15.5) ja kokoamalla kaikkien elementtien osuudet saadaan yhtälösystemi

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{Bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{Bmatrix} \right) = 0, \quad (15.8)$$

ja merkitään tätä lyhyesti

$$\hat{\mathbf{x}}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0. \quad (15.9)$$

Matriisit \mathbf{M} ja \mathbf{C} koostuvat elementtiosuuksista

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \frac{\mathbf{N}_N^T \mathbf{N}_N}{EA} dx, \quad \mathbf{C}^{(e)} = \int_{I^{(e)}} (\mathbf{N}'_u)^T \mathbf{N}_N dx, \quad (15.10)$$

ja ulkoisten kuormien voimavektori saadaan vastaavasti elementtiosuuksista

$$\bar{\mathbf{f}}^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \mathbf{N}_u^T \bar{\mathbf{f}} dx, \quad (15.11)$$

lisättynä sauvan päässä vaikuttavan voiman osuudella \bar{N}_L .

Esimerkki 15.1 Ratkaistaan edellä kuvattu ongelma käyttäen kahta sekaelementtiä, jossa siirtymälle u ja normaalivoimalle N käytetään lineaarista C_0 -interpolaatiota. Otaksutaan EA vakioksi ja että kuormitus $\bar{\mathbf{f}}$ on lineaarisesti jakautunut palkin pituudelle $\bar{\mathbf{f}} = f_0(1 - x/L)$.

Interpolatiosuunnat elementin paikallisessa ξ -koordinaatistossa ovat täten $\mathbf{N}_u = \mathbf{N}_N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \xi) & \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{bmatrix}$, jolloin matriisit $\mathbf{M}^{(e)}$ ja $\mathbf{C}^{(e)}$ ovat

$$\mathbf{M}^{(e)} = \frac{h^{(e)}}{6EA} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{(e)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (15.12)$$

Käytetään tasajakoista elementtiverkkoa, tällöin $h^{(1)} = h^{(2)} = L/2$. Elementtien ulkoisiksi voimavektoreiksi saadaan

$$\bar{\mathbf{f}}^{(1)} = \frac{1}{24} f_0 L \begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{f}}^{(2)} = \frac{1}{24} f_0 L \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{N}_L \end{Bmatrix}. \quad (15.13)$$

Otetaan käyttöön dimensiottomat vapausasteet $P_i = EA\alpha_i$, ja $u_i = L\delta_i$ sekä pistekuormalle sauvan päässä esitys $\bar{N}_L = \beta f_0 L$. Järjestämällä vapausasteet seuraavasti $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T$, saadaan globaaliksi yhtälösystemiksi

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{12} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{24} + \beta \end{Bmatrix} \frac{f_0 L}{EA}. \quad (15.14)$$

Yhtälösystemin ratkaisu on

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} + \beta \\ \frac{1}{6} + \beta \\ -\frac{1}{12} + \beta \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\beta \\ \frac{1}{6} + \beta \end{pmatrix}. \quad (15.15)$$

15.2.2 Muutamia huomautuksia

Tarkkaavainen lukija on jo saattanut huomata, että heikko muoto (15.5) ei vaadi normaalivoiman C_0 -jatkuvuutta. Mikäli normaalivoimalle valitain elementteittäin paloittain jatkuva interpolaatio, on globaali \mathbf{M} matriisi on lohkodeagonaalinen, eli

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(1)} & & & \\ & \mathbf{M}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{M}^{(E)} \end{bmatrix}. \quad (15.16)$$

Tässä tapauksessa normaalivoimaan liittyvät vapausasteet voidaan kondensoida pois jo elementtitasolla systeemin (15.8) ylempään yhtälön avulla (yhteensopivuusehto), jolloin saadaan

$$\mathbf{p}^{(e)} = (\mathbf{M}^{(e)})^{-1}(\mathbf{C}^{(e)})^T \mathbf{u}^{(e)}, \quad e = 1, \dots, E. \quad (15.17)$$

Sijoittamalla nämä systeemin (15.8) alempaan yhtälöön, tasapainoehtoon, saadaan elementin jäykkymatriisiksi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{C}^{(e)}(\mathbf{M}^{(e)})^{-1}(\mathbf{C}^{(e)})^T. \quad (15.18)$$

Esimerkki 15.2 Ratkaistaan esimerkkiongelma käyttäen sekaelementtiä, jossa normaalivoimalle N käytetään lineaarista interpolaatiota, joka on epäjatkuva elementin päätepisteissä Otaksutaan EA ja f vakioiksi.

Matriisi $\mathbf{M}^{(e)}$ on nyt tietenkin sama kuin edellisessä esimerkissä. Sen käänteismatriisi on

$$(\mathbf{M}^{(e)})^{-1} = \frac{2EA}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (15.19)$$

Täten jäykkymatriisiksi saadaan

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EA}{2h^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (15.20)$$

Tuloksena saatiin siten sama jäykkyyismatriisi kuin tavanomaisen lineaarisesti interpoloituun siirtymämenetelmään perustuvassa elementtimenetelmässä. Globaali yhtälösystemi on siten

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{24} + \beta \end{Bmatrix} f_0 L, \quad (15.21)$$

jonka ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{4}{48} + \frac{1}{2}\beta \\ \frac{1}{6} + \beta \end{Bmatrix} \frac{f_0 L^2}{EA}. \quad (15.22)$$

Sekaelementtimenetelmässä jännitykset ratkaistaan elementtikohtaisesti kuten standardiformulaatiossakin, mutta käyttäen yhtälöä (15.17)

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(e)} &= (\mathbf{M}^{(e)})^{-1} \mathbf{C}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{S}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \\ \mathbf{S}^{(e)} &= \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15.23)$$

Havaitaan, että elementti tuottaa aina normaalivoimajakauman, joka on elementteittäin vakio. Esimerkiksi elementille 1 saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(e)} &= \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{7}{48} + \frac{1}{2}\beta \end{Bmatrix} \frac{f_0 L^2}{EA} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\frac{7}{24} + \beta\right) f_0 L \end{aligned} \quad (15.24)$$

ja yleisesti

$$\mathbf{p}^{(e)} = \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{Bmatrix} = EA \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{h^{(e)}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (15.25)$$

Tässä tapauksessa ei jännitysten lineaarisella interpolaatiolla saatu mitään hyötyä tavanomaiseen elementtimenetelmään verrattuna.

Edellisen esimerkin tulos on kuitenkin luonnollinen. Jännitysten ja siirtymien interpolaation tulee olla oikeassa suhteessa toisiinsa, jotta saataisiin hyvin käyttäytyvä elementti eikä laskentatyötä tuhlattaisi turhaan. Tähän aiheeseen palataan myöhemmin.

Huomaa, että globaali matriisi \mathbf{A} on indefiniittinen, eli sillä on sekä positiivisia että negatiivisia ominaisarvoja. Tällä seikalla on suuri merkitys lineaarisen systeemin ratkaisussa. Tähän seikkaan palataan luvussa ??.

Yhtälösystemi (15.8) saadaan myös Lagrangen funktionaalin

$$L(N, u) = \int_0^L \left(\frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} - Nu' + \bar{f}u \right) dx \quad (15.26)$$

stationäärisyysehdoista, missä sekä normaalivoima N että aksiaalisiirtymä u ovat variaoitavina suureina. Funktionaalia (15.26) kutsutaan mekaniikassa myös Hellingerin-Reissnerin funktionaaliksi.

15.3 Eulerin-Bernoullin palkkimallin sekaelementtimenetelmä-formulaatio

Eulerin-Bernoullin palkkimallin yhteensopiva siirtymäelementtimenetelmä vaatii taipuman interpolaatiofunktioilta C_1 -jatkuvuutta. Sekaelementtimenetelmässä tätä jatkuvuusvaatimusta voidaan lieventää. Palkkimallin differentiaaliyhtälö

$$(EIv'')' = \bar{f} \quad (15.27)$$

voidaan kirjoittaa kahden yhtälön ryhmänä

$$\begin{aligned} M &= -EIv'' \\ -M' &= \bar{f}. \end{aligned} \quad (15.28)$$

Kerrotaan ylempi yhteensopivuusehto testifunktioilla \hat{M} ja alempi tasapainoyhtälö \hat{v} :llä ja integroidaan alueen $I = \{x|x \in (0, L)\}$ yli, saadaan heikko muoto

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\hat{M}M}{EI} dx + \int_0^L \hat{M}v'' dx &= 0 \\ - \int_0^L \hat{v}M' dx &= \int_0^L \hat{v}\bar{f} dx. \end{aligned} \quad (15.29)$$

Suoritetaan osittaisintegrointi ja kerrotaan ylin yhtälö -1:llä, jolloin saadaan symmetrinen heikko muoto

$$\begin{aligned} - \int_0^L \frac{\hat{M}M}{EI} dx + \int_0^L \hat{M}'v' dx &= \left|_0^L \hat{M}v' \right. \\ \int_0^L \hat{v}'M' dx &= \int_0^L \hat{v}\bar{f} dx - \left|_0^L \hat{v}Q, \end{aligned} \quad (15.30)$$

missä Q on leikkausvoima $Q = M'$. Ylemmän yhtälön sijoitustermi häviää jos kiertymä sauvan päissä on estetty tai taivutusmomentilla on sauvan päissä määrätty arvo (myös nolla). Alemman yhtälön sijoitustermi vastaavasti häviää mikäli taipumalla on sauvan päissä määrätty arvo tai leikkausvoima häviää. Sekä taipumalle että taivutusmomentille voidaan valita C_0 -interpolaatio heikkoon muotoon (15.30) perustuvassa elementtimenetelmässä.

15.4 Kokoonpuristumattoman aineen ongelma

Täysin kokoonpuristumatonta ainetta ei pystytä analysoimaan siirtymämenetelmällä ja tavanomaiset elementit käyttäytyvät huonosti kun Poissonin luku lähestyy kokoonpuristumattomuusrajaa $\nu \rightarrow 0, 5$. Tarkastellaan seuraavassa kokoonpuristumattoman tai lähes kokoonpuristumattoman aineen ongelmaa lineaarisen isotrooppisen

elastisuuden esimerkkitapauksessa. Linearisesti kimmoisen ja isotrooppisen materiaalin konstitutiivinen yhtälö on

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}, \quad (15.31)$$

missä kimmomatriisi \mathbf{D} on kolmidimensioisessa tapauksessa muotoa

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}, \quad (15.32)$$

missä Lam'en vakiot λ ja μ ovat

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (15.33)$$

Kun $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$ niin $\lambda \rightarrow \infty$, joten tavanomaista siirtymämenetelmää ei voi soveltaa. Käsitellään seuraavassa muodonmuutosta ja jännitystä matriisisuureina, mikä helpottaa huomattavasti lausekkeiden johtoa. Kun siirrytään takaisin elementtimenetelmään, otetaan jälleen vektorimuotoinen esitys käyttöön. Jaetaan muodonmuutosmatriisi $\boldsymbol{\epsilon}$ deviatoriseen osaan $\boldsymbol{\epsilon}'$ ja tilavuudenmuutososaan $e\mathbf{I}/3$:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}' + \frac{1}{3}e\mathbf{I}. \quad (15.34)$$

Tilavuudenmuutos on muodonmuutosmatriisin jälki

$$e = \text{tr } \boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (15.35)$$

ja deviatorinen osa saadaan ratkaistua jaon (15.34) perusteella

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{3}e\mathbf{I}. \quad (15.36)$$

Muodonmuutosdeviaattori mittaa materiaaliolkion muodon vääristymistä ja volumetrinen osa¹ kuvaa tilavuuden muutosta

$$e = \text{tr } \boldsymbol{\epsilon} \approx \frac{V - V_0}{V_0}. \quad (15.37)$$

Keskimääräinen jännitys σ_m määritellään

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\text{tr } \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -p, \quad (15.38)$$

¹Käytetään myös nimityksiä hydrostaattinen-, pallo- tai dilataatio-osa.

missä keskimääräistä painetta on merkitty p :llä. Paine on yhteydessä tilavuudenmuutokseen kokoonpuristuvuusmoduulin K välityksellä seuraavasti

$$e = -\frac{p}{K}. \quad (15.39)$$

Kokoonpuristuvuusmoduuli voidaan lausua muiden elastisten vakioiden avulla esim. seuraavasti

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (15.40)$$

Kokoonpuristumattomalla materiaalilla $K = \infty$, jolloin tilavuudenmuutosta ei tapahdu.

Deviatorinen jännitys määritellään

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}. \quad (15.41)$$

Kirjoitetaan materiaalilaki (15.31) indeksimuodossa ja jaetaan se hydrostaattiseen ja deviatoriseen osaan:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda e \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \\ &= (K - \frac{2}{3}\mu) e \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \\ &= K e \delta_{ij} + 2\mu (\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} e \delta_{ij}) \\ &= K e \delta_{ij} + 2\mu \epsilon'_{ij} \\ &= -p \delta_{ij} + \sigma'_{ij}, \end{aligned} \quad (15.42)$$

joten

$$\sigma'_{ij} = 2\mu \epsilon'_{ij} \quad \text{ja} \quad p = -K e. \quad (15.43)$$

Elementtimenetelmässä on kätevää kirjoittaa jännitys ja muodonmuutos pystyvektoreina, jolloin

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -\frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{m}, \quad (15.44)$$

missä yleisessä kolmidimensioisessa tapauksessa $\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]$ ja \mathbf{m} on

$$\mathbf{m}^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \quad (15.45)$$

Täten volymetrinen muodonmuutos voidaan kirjoittaa

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \mathbf{m}^T \boldsymbol{\epsilon}. \quad (15.46)$$

Deviatorinen muodonmuutos $\boldsymbol{\epsilon}'$ voidaan siten lausua muodossa

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{3}\mathbf{m}e = (\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{m}\mathbf{m}^T)\boldsymbol{\epsilon}, \quad (15.47)$$

ja deviatoriselle jännitykselle saadaan yhtälö

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\epsilon}' = \mathbf{D}_0 (\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{m}\mathbf{m}^T) \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}' \boldsymbol{\epsilon}, \quad (15.48)$$

perustuvassa elementtimenetelmässä. Ainoa ero on, että matriaalin jäykkymatriisin \mathbf{D} tilalla on materiaali-jäykkyyks \mathbf{D}' .

Käyttökelpoisten (\mathbf{u}, p) -interpolaatioparien löytäminen ei ole aivan yksinkertainen asia. Diskreetin formulaation tulee toteuttaa ns. Babuška-Brezzi stabiiliusehto (lyhyesti BB-ehto), jotta menetelmä olisi täysin luotettava. Huomaa myös, että paineen interpolaatio voi olla epäjatkuva elementin rajapintojen yli. Yksinkertaisin mahdollinen interpolaatiokombinaatio olisi tietenkin valita siirtymille lineaarinen/trilineaarinen C_0 -interpolaatio ja paineelle vakio. Tämä ei kuitenkaan toteuta BB-ehtoa ja tuloksena voi olla hyvinkin villisti oskilloiva painejakauma.

15.5 Stabiloidut sekaelementtimenetelmäformulaatiot

Sekamenetelmiin johtavaa systeemia, esim. (15.5) tai (15.51) voidaan yleisesti kuvata seuraavasti

$$\begin{aligned} Au + B^*p &= \bar{f} \\ Bu &= \bar{g}, \end{aligned} \quad (15.55)$$

missä A ja B ovat differentiaali tai algebrallisia operaattoreita ja B^* on B :n adjungantti. Systeemin (15.55) primäärisuuretta merkitään u :lla ja p on Lagrangen kertoja. Numeerisen ratkaisun pohjaksi kelpaava heikkoa muotoa merkittäkään

$$\begin{aligned} a(\hat{u}, u) + b(\hat{u}, p) &= (\hat{u}, \bar{f}) \\ b(\hat{p}, u) &= (\hat{p}, \bar{g}). \end{aligned} \quad (15.56)$$

Kuten kokoonpuristumattoman aineen tapauksessa jo mainittiin, on toimivan elementtimenetelmän konstruointi hankalaa, t.s. sopivien interpolaatioiden löytäminen u :lle ja p :lle siten, että ne toteuttaisivat Babuška-Brezzi stabiiliusehdon. Stabiloiduiksi formulaatioksi kutsutaan menetelmiä, jotka kiertävät BB-stabiiliusehdon, jolloin saadaan toimivia elementtimenetelmiä kaikilla mielekkäillä interpolaatiopareilla. Kirjoitetaan systeemi (15.56) muodossa

$$a(\hat{u}, u) + b(\hat{u}, p) + b(\hat{p}, u) = (\hat{u}, \bar{f}) + (\hat{p}, \bar{g}). \quad (15.57)$$

Systeemi (15.57) stabiloidaan lisäämällä siihen elementtikohtaisesti määriteltyjä pienimmän neliön termejä

$$\begin{aligned} a(\hat{u}, u) + b(\hat{u}, p) + b(\hat{p}, u) + \delta_1 h^{2r_1} (A\hat{u} + B^*\hat{p}, Au + B^*p - \bar{f}) \\ - \delta_2 h^{2r_2} (B\hat{u}, Bu - \bar{g}) = (\hat{u}, \bar{f}) + (\hat{p}, \bar{g}), \end{aligned} \quad (15.58)$$

missä $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ ja eksponentit r_1, r_2 ovat positiivisia.