

Luku 5

Mekaniikan variaatioperiaatteita

Luvussa tarkastellaan virtuaalisen työn ja potentiaalienergian minimin periaatetta kiinteän aineen mekaniikassa. Näytetään, että virtuaalisen työn ja potentiaalienergian minimin periaate ovat ekvivalentteja, mikäli materiaalia voidaan kuvata tilafunktiolla, muodonmuutosenergialla, ja mikäli ulkoiset voimat voidaan johtaa potentiaalista. Virtuaalisen työn periaate on siten yleis-pätevämpi ja sitä voidaan käyttää elementtimenetelmän perustana olevana heikona muotona. Lisäksi näytetään, että virtuaalisen työn periaate on ekvivalentti tasapainoehtojen ja mekaanisten eli jännitysreunaehtojen kanssa.

5.1 Johdanto

Tarkastellaan seuraavassa eräitä mekaniikan keskeisiä variaatioperiaatteita, kuten virtuaalisen työn ja potentiaalienergian minimin periaatteita sekä niistä johdettuja modifioituja menetelmiä. Käsittely on tavoitehakuista, eli variaatioperiaatteet esitetään siten, että ne soveltuvat suoraan nykyisin käytössä olevien yleisten elementtimenetelmäformulaatioiden perustaksi, ja tämän vuoksi m.m. komplementaarisen virtuaalisen työn ja komplementaarienergian minimin periaatteet jätetään vaille huomiota. Johdatus esitettäviin variaatioperiaatteisiin suoritetaan yleisen kolmiulotteisen pienten siirtymien elastisuusteorian yhtälöiden avulla, jonka lisäksi rajoitutaan staattisiin tapauksiin. Mikäli lukija haluaa syventää tietojansa mekaniikan variaatioperiaatteista, on K. Washizun *Variational Methods in Elasticity and Plasticity* [34] ja C. Lanczosin *The Variational Principles of Mechanics* [20] teokset mitä suositeltavimpia.

Kerrataan aluksi kolmiulotteisen elastostatiikan perusyhtälöt. Tarkastellaan kappaletta \mathcal{B} , jonka rajoittamaa aluetta merkitään Ω :llä ja sen reunapintaa Γ :llä ($\Gamma = \partial\Omega$). Jaetaan reunapinta vielä kahteen toisistaan erilliseen osaan Γ_u ja Γ_t siten, että $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$. Lineaarisen elastisuusteorian perusyhtälösystemi muodostuu täten seuraavista relaatioista.

1. *Tasapainoyhtälöt*: Kappaleeseen \mathcal{B} vaikuttavat pinnalle jakautuneet traktiovoimat \mathbf{t} ja tilavuusvoimat \mathbf{f} . Jotta kappale olisi tasapainossa on rezultoivan

voiman hävittävä, eli

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} dV = \mathbf{0}. \quad (5.1)$$

Traktiovektori \mathbf{t} määritellään jännitysmatriisin $\boldsymbol{\sigma}$ ja pinnan yksikkönormaalien \mathbf{n} avulla seuraavasti

$$\mathbf{t} = \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}, \quad (5.2)$$

missä jännitysmatriisi komponenteittain kirjoitettuna on

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Huomaa, että määritelmä (5.2) kiinnittää jännitysmatriisin indeksien merkityksen: ensimmäinen indeksi kertoo pinnan normaalin- ja toinen jännityskomponentin suunnan.¹ Sijoitetaan tämä resultanttimuotoiseen tasapainoyhtälöön (5.1), saadaan

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} dV = \mathbf{0}. \quad (5.4)$$

Sovelletaan Gaussin lauseen, eli divergenssiteoreeman yleistystä, jolloin päädytään yhtälöön

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{f}) dV = \mathbf{0}, \quad (5.5)$$

mistä saadaan tasapainoyhtälön (5.1) paikallinen muoto

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T = \mathbf{f}. \quad (5.6)$$

Komponenttimuodossa kirjoitettuna tasapainoyhtälöt ovat

$$\begin{cases} -\sigma_{x,x} - \tau_{yx,y} - \tau_{zx,z} = f_x, \\ -\tau_{xy,x} - \sigma_{y,y} - \tau_{zy,z} = f_y, \\ -\tau_{xz,x} - \tau_{yz,y} - \sigma_{z,z} = f_z. \end{cases} \quad (5.7)$$

Matriisiin \mathbf{A} kohdistuva divergenssioperaattori määritellään siten

$$(\operatorname{div} \mathbf{A})_i = \sum_j \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}, \quad (5.8)$$

missä on määritelty $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$. Liikemäärän momentin taseen periaatteesta seuraa Cauchyn kontinuumimallin jännitysmatriisin symmetrisyys, täten siis $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ ja $\tau_{zx} = \tau_{xz}$.

¹Jännitysmatriisin komponenttien järjestys voitaisiin määrittellä myös toisinpäin: ensimmäinen indeksi kertoisi komponentin suunnan ja toinen pinnan normaalin suunnan. Tällöin traktiovektori voidaan kirjoittaa muodossa $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$. Itse asiassa tämä määrittely on yleisempi alan modernissa kirjallisuudessa.

2. Muodonmuutos-siirtymä yhteydet:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym grad } \mathbf{u}, \quad (5.9)$$

missä siirtymävektorin $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$ gradientti ja matriisin symmetrinen osa määritellään yhtälöillä

$$\text{grad } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{,x} & u_{,y} & u_{,z} \\ v_{,x} & v_{,y} & v_{,z} \\ w_{,x} & w_{,y} & w_{,z} \end{bmatrix}, \quad \text{sym } \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \quad (5.10)$$

josta seuraa

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} & \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) & \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,x}) \\ \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) & v_{,y} & \frac{1}{2}(v_{,z} + w_{,y}) \\ \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,x}) & \frac{1}{2}(v_{,z} + w_{,y}) & w_{,z} \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

3. Jännitys-muodonmuutos yhteydet:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{tai kääntäen} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.12)$$

Mikäli materiaalin otaksutaan noudattavan isotrooppista, lineaarikimmoista mallia, on voidaan materiaalioperaattorit lausua muodossa

$$\mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.13)$$

tai kääntäen

$$\mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} + \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{\sigma}, \quad (5.14)$$

missä λ ja μ ovat Lamén vakiot joiden suhde kimmokertoimeen E , leikkausmoduuliin G ja Poissonin vakioon ν on seuraava

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (5.15)$$

4. Mekaaniset reunaehtot:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_S \quad \text{reunalla} \quad \Gamma_t. \quad (5.16)$$

5. Kinemaattiset (geometriset) reunaehtot:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S \quad \text{reunalla} \quad \Gamma_u. \quad (5.17)$$

Edellä esitetty merkintatapa on varsin kompakti, erityisesti mikäli käytetään indeksinotaatiota ja Einsteinin summaussääntöä, jossa lausekkeessa kahdesti esiintyvien indeksien suhteen suoritetaan summaus. Tämän esityksen tarpeita silmälläpitäen se ei kuitenkaan ole tarpeen.

Mikäli jännitys- ja muodonmuutosmatriisiin alkioit kootaan vektoreiksi

$$\mathbf{s} = \left[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \right]^T \quad (5.18)$$

ja

$$\mathbf{e} = \left[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right]^T, \quad (5.19)$$

voidaan edellä esitetyt tasapainoyhtälöt, kinemaattiset relaatiot ja konstitutiivinen yhteys (materiaalimalli) esittää seuraavalla tavalla.

1. *Tasapainoyhtälöt:*

$$-\mathbf{G}^T \mathbf{s} = \mathbf{f}. \quad (5.20)$$

2. *Muodonmuutos-siirtymä yhteydet:*

$$\mathbf{e} = \mathbf{G}\mathbf{u}. \quad (5.21)$$

Tasapaino-operaattori on

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

ja jonka transpoosi välittää kuvauksen siirtymiltä muodonmuutoksille.

3. *Konstitutiivinen malli:*

$$\mathbf{s} = \mathbf{D}\mathbf{e} \quad (5.23)$$

Lineaarielastisen, isotrooppisen ainemallin jäykkyyismatriisi (kimmomatriisi) on muotoa

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

5.2 Virtuaalisen työn periaate

Aloitetaan sovellutusten kannalta ehkä tärkeimmästä ja samalla vanhimmasta ² mekaniikan variaatioperiaatteesta, eli virtuaalisen työn periaatteesta, jota kutsutaan myös nimellä virtuaalisten siirtymien periaate. Oletetaan kappaleen \mathcal{B} olevan tasapainossa ulkoisten tilavuusvoimien ja reunaehtojen suhteen. Tällöin jännityskomponentit $\sigma_x, \sigma_y, \dots$, ja τ_{zx} toteuttavat tasapainoehdot (5.6) kappaleen jokaisessa kohdassa, eli

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T = \mathbf{f}, \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad (5.25)$$

ja mekaaniset reunaehdot reunapinnan osalla Γ_t

$$\mathbf{t} - \mathbf{t}_S = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma_t. \quad (5.26)$$

Otaksutaan nyt, että kappale kokee mielivaltaisen kuvitteellisen eli *virtuaalisen* muutoksen $\delta \mathbf{u} = [\delta u, \delta v, \delta w]^T$ tasapainossa olevaan siirtymätilaan $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$ nähden.

Tällöin on tasapainoehtojen perusteella voimassa

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot (-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T - \mathbf{f}) dV + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{t}_S) dS = 0, \quad (5.27)$$

jossa dV ja dS ovat kappaleen \mathcal{B} differentiaalinen tilavuusalkio ja pinta-ala-alkio.

Valitaan nyt virtuaalinen siirtymäkenttä mielivaltaisesti mutta kuitenkin siten, että geometriset eli kinemaattiset reunaehdot toteutuvat reunan osalla Γ_u , eli

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (x, y, z) \in \Gamma_u. \quad (5.28)$$

Käyttämällä identiteettiä (\mathbf{v} on vektori ja \mathbf{A} matriisi)

$$\operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = \operatorname{grad}(\mathbf{v}) : \mathbf{A} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{A}, \quad (5.29)$$

missä kaksoispistetulo määritellään

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_i \sum_j A_{ij} B_{ij}, \quad (5.30)$$

saadaan lausekkeen (??) ensimmäistä termiä muokattua

$$\int_{\Omega} [\operatorname{grad} \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma}^T - \operatorname{div}(\delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T) - \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}] dV + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{t}_S) dS = 0. \quad (5.31)$$

Käyttämällä divergenssiteoreemaa saadaan

$$\int_{\Omega} (\operatorname{grad} \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma}^T - \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) dV - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{t}_S) dS = 0. \quad (5.32)$$

²Virtuaalisen työn periaatteen lienee ensimmäisenä formuloinut Jean Bernoulli (1667-1748) vuonna 1725. Menettelyä, jota voitaisiin kutsua virtuaalisten siirtymien periaatteeksi, käytti kuitenkin jo Leonardo da Vinci (1452-1519) analysoidessaan taljojen ja vipuvarsien muodostamaa systeemiä.

Ottamalla huomioon jännitysmatriisiin symmetrisyys ja virtuaalisen siirtymän häviäminen reunan Γ_u osalla, saadaan

$$\int_{\Omega} \text{sym grad } \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_S dS = 0. \quad (5.33)$$

Ottamalla huomioon muodonmuutoksen määritelmä (5.9) saadaan virtuaalisen työn yhtälö muotoon

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_S dS = 0, \quad (5.34)$$

missä symmetrinen virtuaalinen muodonmuutosmatriisi $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym grad } \delta \mathbf{u}$ sisältää komponentit

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_x &= \delta u_{,x}, & \delta \varepsilon_y &= \delta v_{,y}, & \delta \varepsilon_z &= \delta w_{,z}, \\ \delta \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(\delta u_{,y} + \delta v_{,x}), & \delta \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}(\delta w_{,y} + \delta v_{,z}), & \delta \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2}(\delta u_{,z} + \delta w_{,x}). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Komponenttimuodossa virtuaalisen työn yhtälö (5.34) on pitkäkö lauseke

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV \\ & - \int_{\Omega} (f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w) dV - \int_{\Gamma_t} (t_{Sx} \delta u + t_{Sy} \delta v + t_{Sz} \delta w) dS = 0, \end{aligned} \quad (5.36)$$

missä liukumukset γ_{ij} määritellään

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}. \quad (5.37)$$

Yhtälöt (5.28), (5.34) ja (5.35) ovat virtuaalisen työn periaatteen matemaattinen asu. Periaate pätee mielivaltaisille infinitesimaalisille virtuaalisille siirtymille, jotka toteuttavat kinemaattiset reunaehdot. Edellä esitetty päättelyketju voidaan myös kääntää. Siten virtuaalisen työn periaate on ekvivalentti *tasapainoyhtälöiden ja mekaanisten reunaehtoien muodostaman systeemin kanssa*. Lisäksi on syytä huomauttaa että periaate pätee *riippumatta* siitä millaisia ovat materiaalia kuvaavat lait eli jännitysten ja venymien väliset yhteydet.

Sanallisesti virtuaalisen työn yhtälö (VTY) voidaan esittää seuraavasti: *Otakootaan että mekaaninen systeemi on tasapainossa siihen vaikuttavien ulkoisten voimien ja geometrysten rajoitteiden alaisena. Siten systeemiin vaikuttavien ulkoisten ja sisäisten voimien virtuaalisten töiden summa kaikkien geometrisset rajoitteet toteuttavien infinitesimaalisten siirtymien suhteen häviää.*

5.3 Potentiaalienergian minimin periaate

Johdetaan potentiaalienergian minimin periaate juuri esitetystä virtuaalisen työn periaatteesta. Materiaalilaista (5.12) voidaan johtaa tilafunktio $U(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{zx})$ siten, että

$$\delta U = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \dots + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}, \quad (5.38)$$

jossa muodonmuutosenergiafunktio U ³ on lineaarisen isotrooppisesti kimmoisan aineen tapauksessa

$$U = \frac{1}{2}\lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \mu(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2}\mu(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2). \quad (5.39)$$

Voidaan todeta, että muodonmuutosenergiafunktio on aina positiivinen, mikäli venymät ovat nolosta eroavia, eli

$$U(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} > 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}, \quad (5.40)$$

joten materiaalin jäykkyyismatriisilta \mathbf{D} vaaditaan aidosti positiivista definiittisyyttä. Huomaa, että tämä asettaa rajoituksia materiaalivakioiden välille. Myöhempää tarvetta silmälläpitäen kirjoitetaan $U = U(u, v, w)$, sillä venymät $\boldsymbol{\varepsilon}$ voidaan lausua siirtymien u, v ja w funktioina kinemaattisten yhteyksien (5.9) avulla.

Kun muodonmuutosenergiafunktion olemassaolo on taattu, voidaan virtuaalisen työn yhtälön (5.34) ensimmäisen termin integrandi kirjoittaa muotoon

$$\sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \dots + \tau_{zx} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) = \delta U(u, v, w) \quad (5.41)$$

muistaen, että $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$ ovat todellisen ratkaisun jännityskomponentit ja $\delta u, \delta v$ ja δw ovat virtuaaliset muutokset todellisiin siirtymäkomponentteihin nähden. Täten virtuaalisen työn periaate (5.34) voidaan nyt muuntaa muotoon

$$\begin{aligned} \delta \int_{\Omega} U(u, v, w) dV - \int_V (f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w) dV \\ - \int_{\Gamma_t} (t_{Sx} \delta u + t_{Sy} \delta v + t_{Sz} \delta w) dS = 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Tämä lauseke on hyödyllinen niissä kimmoteorian tehtävissä, joissa ulkoiset kuorimitukset eivät ole johdettavissa potentiaalfunktiosta.

Seuraavaksi otaksutaan, että tilavuusvoimat \mathbf{f} ja pintavoimat \mathbf{t}_S ovat johdettavissa potentiaalfunktioista V_f ja V_t siten, että

$$-\delta V_f = -\frac{\partial V_f}{\partial u} \delta u - \frac{\partial V_f}{\partial v} \delta v - \frac{\partial V_f}{\partial w} \delta w = f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w, \quad (5.43a)$$

$$-\delta V_t = -\frac{\partial V_t}{\partial u} \delta u - \frac{\partial V_t}{\partial v} \delta v - \frac{\partial V_t}{\partial w} \delta w = t_{Sx} \delta u + t_{Sy} \delta v + t_{Sz} \delta w. \quad (5.43b)$$

Tällöin voidaan variaatioperiaate (5.42) muuntaa muotoon

$$\delta \Pi = 0, \quad (5.44)$$

³Tarkkaan ottaen pitäisi puhua muodonmuutosenergiatiheydestä, tai muodonmuutosenergiasta tilavuusyksikköä kohden.

jossa

$$\Pi = \int_{\Omega} [U(u, v, w) + V_f(u, v, w)] dV + \int_{\Gamma_t} V_t(u, v, w) dS \quad (5.45)$$

on kokonaispotentiaalienergia. Periaate (5.44) ilmoittaa, että *kaikkien kinemaattisesti luvallisten siirtymien u , v ja w joukossa todelliset siirtymät antavat kokonaispotentiaalienergialle stationäärisen arvon.*⁴

Otaksutaan, että tilavuusvoimat (f_x, f_y, f_z) , pintavoimat (t_{Sx}, t_{Sy}, t_{Sz}) ja annetut siirtymät (u_S, v_S, w_S) ovat määrättyjä ja säilyttävät suuntansa sekä suuruutensa variaation tapahtuessa. Siten potentiaalit (5.43a) voidaan kirjoittaa muodossa

$$-V_f = f_x u + f_y v + f_z w, \quad (5.46a)$$

$$-V_t = t_{Sx} u + t_{Sy} v + t_{Sz} w, \quad (5.46b)$$

jolloin päädytään systeemin (5.6), ... , (5.17) variaatioperiaatteeseen, jota kutsutaan potentiaalienergian minimin periaatteeksi: *Kaikkien mahdollisten kinemaattisesti luvallisten siirtymätilojen joukosta todelliset siirtymät antavat kokonaispotentiaalienergialle*

$$\Pi = \int_{\Omega} U(u, v, w) dV - \int_{\Omega} (f_x u + f_y v + f_z w) dV - \int_{\Gamma_t} (t_{Sx} u + t_{Sy} v + t_{Sz} w) dS \quad (5.47)$$

absoluuttisen minimin.

Näytetään nyt, että potentiaalienergia (5.47) todella saavuttaa minimin luvallisten siirtymäkenttien joukossa. Olkoon todellinen siirtymätila u, v, w ja siitä varioimalla saatu mielivaltainen kinemaattiset reunaehdot toteuttava siirtymätila u^*, v^*, w^* , eli $u^* = u + \delta u, v^* = v + \delta v, w^* = w + \delta w$. Tarkastellaan potentiaalienergian lauseketta

$$\Pi(u^*, v^*, w^*) = \Pi(u, v, w) + \delta\Pi + \delta^2\Pi, \quad (5.48)$$

jossa $\delta\Pi$ on potentiaalienergian siirtymien suhteen lineaarinen ensimmäinen variaatio ja $\delta^2\Pi$ on siirtymien suhteen kvadraattinen toinen variaatio. Koska todellinen siirtymätila antaa funktionaalille stationääriarvon yhtälön (5.44) mukaan, häviää potentiaalienergian ensimmäinen variaatio ja koska muodonmuutosenergiafunktio U on positiivinen, katso epäyhtälöä (5.40), toteuttaa toinen variaatio epäyhtälön

$$\delta^2\Pi = \int_V U(\delta u, \delta v, \delta w) dV \geq 0, \quad (5.49)$$

jossa yhtäsuuruus tulee kyseeseen ainoastaan, kun virtuaalisista siirtymistä derivoitdut muodonmuutoskomponentit ovat identtisesti nollia. Tämä taas on mahdollista vain, mikäli virtuaalinen siirtymätila kuvaa jäykän kappaleen liikettä, eli reunaehdot ovat riittämättömiä yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolon takaamiseen. Täten

⁴Sana "kokonais" jätetään usein jatkossa pois ja käytetään vain termiä potentiaalienergia kokonaispotentiaalienergian sijasta.

mikäli jäykän kappaleen liike on siirtymäreunaehdoin estetty, pätee potentiaalienergielle epäyhtälö

$$\Pi_{\text{luvallinen}} \geq \Pi_{\text{todellinen}}, \quad (5.50)$$

jossa alaindeksit viittaavat siirtymätiloihin. Koska virtuaalisen siirtymän suuruudelle ei ole asetettu mitään vaatimuksia, voidaan todeta, että potentiaalienergian absoluuttinen minimi saavutetaan todellisten siirtymien arvoilla.

5.4 Muunnoksia potentiaalienergian minimin periaatteesta

Potentiaalienergian minimin periaatteen (5.45) soveltaminen vaatii siirtymäfunktioilta tietynasteista säännöllisyyttä sekä kinemaattisten reunaehtojen toteuttamista. Numeerisia menetelmiä silmälläpitäen on joissakin tapauksissa edullista lieventää näitä vaatimuksia. Kertauksena voidaan kirjoittaa potentiaalienergian minimin periaate seuraavasti: etsitään minimi potentiaalienergielle

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} [U(\mathbf{u}) - \mathbf{f}^T \mathbf{u}] dV - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_S^T \mathbf{u} dS \quad (5.51)$$

side-ehdoilla

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S, \quad \text{reunalla } \Gamma_u. \quad (5.52)$$

Mikäli halutaan päästä eroon side-ehdoista, jotka siis rajaavat kinemaattisesti luvallisten siirtymäfunktioiden joukkoa, voidaan ne ottaa mukaan potentiaalienergian funktionaaliin (5.51) Lagrangen kertojien avulla, jolloin saadaan muunnettu funktionaali

$$\Pi^{m1}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = \int_{\Omega} [U(\mathbf{u}) - \mathbf{f}^T \mathbf{u}] dV - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_S^T \mathbf{u} dS - \int_{\Gamma_u} \mathbf{p}^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S) dS, \quad (5.53)$$

jossa \mathbf{p} on Lagrangen kertojista koostuva vektori. Nyt funktionaalin (5.53) varioitavina muuttujina ovat riippumattomat suureet \mathbf{u} ja \mathbf{p} ilman mitään side-ehdoja.

Funktionaalin (5.53) stationaarisuusehdosta seuraa, että Lagrangen kertojat ovatkin traktiokomponentit pinnalla Γ_u , eli

$$\mathbf{p} = \mathbf{t}(\mathbf{u}) \quad \text{reunalla } \Gamma_u. \quad (5.54)$$

Kaavan (5.54) perusteella Lagrangen kertojat voidaan eliminoida funktionaalista (5.53) ja uusi modifioitu funktionaali voidaan kirjoittaa muodossa

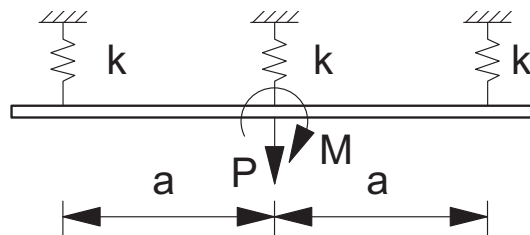
$$\Pi^{m2}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} [U(\mathbf{u}) - \mathbf{f}^T \mathbf{u}] dV - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_S^T \mathbf{u} dS - \int_{\Gamma_u} \mathbf{t}(\mathbf{u})^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S) dS, \quad (5.55)$$

jossa varioitavana suureena on vain siirtymävektori \mathbf{u} ilman mitään side-ehdoja.

Elementtimenetelmässä approksimoidaan tuntemattomia siirtymäfunktioita paikallisesti kunkin elementin alueella tietynasteisilla polynomeilla. Jotta funktionaalien, esimerkiksi (5.45), (5.47), (5.53) tai (5.55) integraalilausekkeet olisivat määriteltyjä, on jatkuvuusominaisuuksien oltava voimassa elementin rajapintojen yli. Tämä saattaa joissain tapauksissa johtaa monimutkaisiin ja hankaliin ehtoihin, joita pitäisi pystyä lieventämään. Eräs mahdollinen tapa on konstruoida modifioituja funktionaaleja, joissa jatkuvuusvaatimukset ovat lievemmat. Tähän asiaan palataan vielä lyhyesti laattaelementtien yhteydessä, mutta asiasta kiinnostuneet voivat tutustua muunnettuihin variaatioperiaatteisiin esimerkiksi Washizun teoksen luvuista 13.4-13.5 [34].

5.5 Harjoitustehtäviä

1. Kuvan massatonta, jäykkää sauvaa kuormittavat pistemomentti M ja pistekuorma P . Jousien jäykkyyksivakio on k . Ratkaise tasapainotilaa vastaavat jousivoimat soveltamalla
 - (a) virtuaalisen työn periaatetta ja
 - (b) potentiaalienergian minimin periaatetta.



2. Johda muodonmuutosenergian lausekkeet
 - (a) tasoristikkosauvalle,
 - (b) Eulerin-Bernoullin tasopalkille,
 - (c) tasojännitystilassa olevalle levyalkiolle ja
 - (d) Kirchhoffin laatta-alkiolle.

Materiaalin otaksutaan noudattavan lineaarisesti kimmoisan isotrooppisen aineen mallia eli Hooken lakia.

3. Näytä, että Lagrangen kertojen \mathbf{p} fysikaalinen tulkinta funktionaalissa (5.53) on traktiovektori.

Luku 6

Kontinuumielementtejä

Kontinuumielementtien muodostaminen on melko suoraviivainen yleistys kaksidimensioisen lämmönjohtumisyhtälön tapauksesta. Elastisuusprobleeman ratkaisu elementtimenetelmällä tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilassa on samankaltainen, ainoa ero on materiaalin jäykkyyismatriisissa. Elementtimenetelmän perustana oleva heikko muoto on virtuaalisen työn yhtälö.

6.1 Tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilan elementit

Tarkastellaan nyt kimmoteorian yhtälöitä (x, y) -tasossa. Kaksi erilaista tapausta voidaan erotella:

1. *tasojännitystilasta*, jossa tason pinnan normaalin suuntainen jännityskomponentti häviää, eli $\sigma_z \equiv 0$, (myös $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$) sekä
2. *tasomuodonmuutostilasta*, jossa vastaavasti tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa muodonmuutoskomponentti häviää: $\epsilon_z \equiv 0$ (myös $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$).

Aloitetaan tasomuodonmuutostilan käsittelyllä. Nollasta eroavat muodonmuutos- ja jännityskomponentit karteesisessä suorakulmaisessa koordinaatistossa ovat

$$\mathbf{e} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T, \quad \mathbf{s} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy}]^T. \quad (6.1)$$

Tasomuodonmuutostilan konstitutiivinen yhteys saadaan suoraan yleisestä kolmi-dimensioisesta materiaalista, katso luku 5.1, jättämällä nollamuodonmuutoksia ja -jännityksiä vastaavat sarakkeet kirjoittamatta. Kimmoisan isotrooppisen aineen tapauksessa on tasomuodonmuutostilan konstitutiivinen yhtälö seuraavanlainen:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (6.2)$$

Yllä oleva materiaalilaki kirjoitetaan usein muodossa jossa jännityskomponentti σ_z jätetään merkitsemättä jännitysvektoriin \mathbf{s} , eli tällöin

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (6.3)$$

Tasomuodonmuutostilaa vastaava virtuaalisen työn yhtälö on (yksikön paksuista levyä kohden)

$$\int_{\Omega} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dA = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} dA + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}_S ds, \quad (6.4)$$

missä siirtymävektori \mathbf{u} pitää sisällään x ja y -akselin suuntaiset siirtymäkomponentit u :n ja v :n. Muodonmuutoskomponenttien virtuaaliset muutokset ovat

$$\delta \epsilon_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x}, \quad \delta \epsilon_y = \frac{\partial \delta v}{\partial y}, \quad \delta \gamma_{xy} = \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x}. \quad (6.5)$$

Kinemaattinen yhteys voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \text{eli} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{G}\mathbf{u}. \quad (6.6)$$

Virtuaalisille siirtymille ja virtuaalisille muodonmuutoksille pätee tietenkin yhtälö $\delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{G}\delta \mathbf{u}$. Ottamalla huomioon kinemaattinen yhteys (6.6) ja materiaalilaki (6.3) saadaan virtuaalisen työn yhtälö muotoon

$$\int_{\Omega} (\mathbf{G}\delta \mathbf{u})^T \mathbf{D}\mathbf{G}\mathbf{u} dA = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} dA + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}_S ds. \quad (6.7a)$$

Virtuaalisen työn yhtälö sisältää siirtymien ensimmäisiä derivaattoja. Täten elementtimenetelmän interpolaatiofunktioiksi kelpaavat C_0 -jatkuvat polynomit. Olkoon käytössä elementti, jossa on m solmua ja interpoloidaan molempia siirtymäkomponentteja samanlaisilla funktioilla, eli

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^m N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_m & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{N}\mathbf{u}^{(e)}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Sijoittamalla tämä siirtymäotaksuma virtuaalisen työn yhtälöön saadaan elementti-kohtaisiksi lausekkeiksi

- sisäisten jännitysten tekemälle virtuaaliselle työlle

$$\delta \mathbf{u}^{(e)T} \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{GN})^T \mathbf{DGN} dA \mathbf{u}^{(e)} = \delta \mathbf{u}^{(e)T} \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{DB} dA \mathbf{u}^{(e)} = \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \quad (6.9)$$

- ja ulkoisten voimien tekemälle virtuaaliselle työlle

$$\delta \mathbf{u}^{(e)T} \left(\int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dA + \int_{\Gamma_t^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t}_S ds \right) = \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)}, \quad (6.10)$$

missä elementin kuormavektoriin tulee termi reunakuormituksesta mikäli elementin jokin reuna on reunan osalla Γ_t .

Siirtymä-muodonmuutosmatriisi \mathbf{B} voidaan lohkoa solmukohtaisiin osiin seuraavasti:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_m] \quad (6.11)$$

missä

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

Derivaatat globaalien x, y -koordinaattien suhteen saadaan derivaattoina peruselementin luonnollisten koordinaattien suhteen kuten on aiemmin esitetty.

Tasojännitystilän elementti on täysin tasomuodonmuutostilan elementin kaltainen. Ainoa ero on se, että materiaalin jäykkyysmatriisi on erilainen. Tasojännitystilän ehtosta $\sigma_z = 0$ voidaan muodonmuutoskomponentti ϵ_z ratkaista

$$\lambda \epsilon_x + \lambda \epsilon_y + (\lambda + 2\mu) \epsilon_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_z = -\frac{\lambda(\epsilon_x + \epsilon_y)}{\lambda + 2\mu}. \quad (6.13)$$

Sijoittamalla tämä takaisin kolmidimensioiseen konstitutiiviseen yhtälöön, saadaan

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} + 2\mu & \bar{\lambda} & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (6.14)$$

missä on merkitty

$$\bar{\lambda} = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu}. \quad (6.15)$$

Siirtymä-muodonmuutosmatriisi \mathbf{B} on identtinen tasomuodonmuutostilan elementin kanssa.

6.2 Pyörähdyssymmetrisen tilan elementti

Pyörähdyssymmetrisesti kuormitetun pyörähdyssymmetrisen kappaleen ratkaisu muistuttaa tasomuodonmuutostilan ratkaisua. Pyörähdyskappale muodostuu, kun rz -tason alue pyörähtää z -akselin ympäri. Pyörähdyssymmetristä kappaletta voidaan tutkia vain tarkastelemalla halkileikkauksen puolikasta.

Merkitään rz -tason siirtymiä symboleilla u ja w aivan vastaten tasojännitys- ja tasomuodonmuutostehtävissä tason xy siirtymiä u ja v . Muodonmuutoskomponenttien lausekkeet sylinterikoordinaatistossa ovat

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,r} \\ w_{,z} \\ r^{-1}u \\ u_{,z} + w_{,r} \end{Bmatrix}. \quad (6.16)$$

Konstitutiivinen laki saadaan suoraan kolmiulotteisen tilan materiaalilaista ja on muotoa

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix}. \quad (6.17)$$

Otaksumalla siirtymille samanlainen interpolaatio kuin tasotehtävissäkin (6.8) saadaan siirtymä-muodonmuutosmatriisiksi

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_m], \quad (6.18)$$

missä

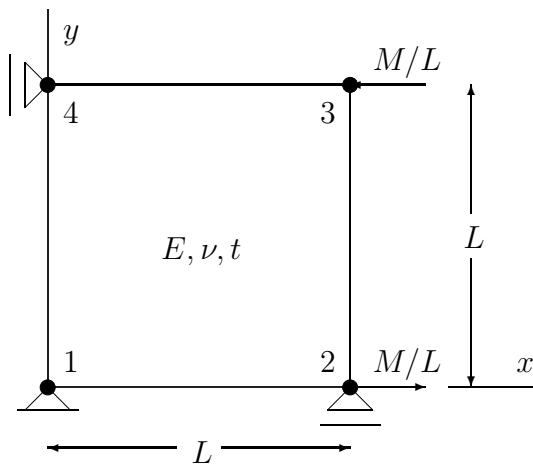
$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,r} & 0 \\ 0 & N_{i,z} \\ r^{-1}N_i & 0 \\ N_{i,z} & N_{i,r} \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

6.3 Esimerkkejä

Esimerkki 6.1 Määritä oheisen yhdestä bilineaarisesti interpoloidusta tasojännitystilän elementistä muodostetun rakennemallin siirtymät ja jännitystila. Rakenne on kuormitettu momenttikuormalla M joka voidaan aikaansaada kahdella pistekuormalla solmuissa 2 ja 3. Rakenteen materiaalin kimmokerroin ja suppeamaluku olkoot E ja ν . Ota huomioon symmetria ja antimetria aktiivien vapausasteiden (u_2, u_3, v_3, v_4) välillä, jolloin tehtävään jää ainoastaan kaksi tuntematonta solmupistesiertymää. Reunaehdothan ovat $u_1 = v_1 = v_2 = u_4 = 0$.

Havaitaan, että solmujen 2 ja 3 vaakasiirtymät ovat toistensa vastalukuja samaten kuin solmujen 3 ja 4 pystysiirtymät, eli

$$u_3 = -u_2, \quad v_4 = -v_3. \quad (6.20)$$



Ryhmitetään nyt elementin vapausasteet seuraavasti:

$$\mathbf{u}^{(e)} = \left[u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \right]^T. \quad (6.21)$$

Vapausasteita u_2, u_3, v_3 ja v_4 vastaava yhtälösystemi on

$$\begin{bmatrix} K_{33} & K_{35} & K_{36} & K_{38} \\ K_{53} & K_{55} & K_{56} & K_{58} \\ K_{63} & K_{65} & K_{66} & K_{68} \\ K_{83} & K_{85} & K_{86} & K_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_{x2} \\ \bar{f}_{x3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

Ottamalla nyt huomioon vapausasteita sitovat yhteydet, saadaan ratkaistavaksi kahden tuntemattoman systeemi

$$\begin{bmatrix} K_{33} - K_{35} & K_{36} - K_{38} \\ K_{63} - K_{65} & K_{66} - K_{68} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_{x2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

Oletetaan materiaalin jäykkyyismatriisin olevan muotoa

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Jäykkyyismatriisin solmuihin i ja j liittyvä lohko on siten

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j t dA, \quad (6.25)$$

jossa solmuun i liittyvä muodonmuutos-siirtymämatriisi \mathbf{B} on

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}, \quad (6.26)$$

joten

$$\mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} D_{11}N_{i,x}N_{j,x} + D_{33}N_{i,y}N_{j,y} & D_{12}N_{i,x}N_{j,y} + D_{33}N_{i,y}N_{j,x} \\ D_{12}N_{i,y}N_{j,x} + D_{33}N_{i,x}N_{j,y} & D_{22}N_{i,y}N_{j,y} + D_{33}N_{i,x}N_{j,x} \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

Nyt geometrian kuvaus on yksinkertainen

$$x = (N_2 + N_3)L = \frac{1}{2}(1 + \xi)L, \quad y = (N_3 + N_4)L = \frac{1}{2}(1 + \eta)L, \quad (6.28)$$

josta kuvauksen Jacobiaani ja sen käänteismatriisi ovat

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}L \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{J} = \frac{1}{4}L^2, \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

josta seuraa derivaattojen muunnoksille yhtälöt

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (6.30)$$

Tarvitaan interpolaatiofunktioiden derivaattoja paikallisten koordinaattien suhteen

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), & N_{1,\xi} &= -\frac{1}{4}(1 - \eta), & N_{1,\eta} &= -\frac{1}{4}(1 - \xi), \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), & N_{2,\xi} &= \frac{1}{4}(1 - \eta), & N_{2,\eta} &= -\frac{1}{4}(1 + \xi), \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), & N_{3,\xi} &= \frac{1}{4}(1 + \eta), & N_{3,\eta} &= \frac{1}{4}(1 + \xi), \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta), & N_{4,\xi} &= -\frac{1}{4}(1 + \eta), & N_{4,\eta} &= \frac{1}{4}(1 - \xi). \end{aligned}$$

Tarvittavat jäykkymatriisin alkiot saadaan nyt

$$\begin{aligned} K_{33} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{11}N_{2,x}^2 + D_{33}N_{2,y}^2) J d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{3}t(D_{11} + D_{33}), \end{aligned} \quad (6.31a)$$

$$\begin{aligned} K_{35} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{11}N_{2,x}N_{3,x} + D_{33}N_{2,y}N_{3,y}) J d\xi d\eta \\ &= \left(\frac{1}{6}D_{11} - \frac{1}{3}D_{33}\right)t, \end{aligned} \quad (6.31b)$$

$$\begin{aligned} K_{36} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{12}N_{2,x}N_{3,y} + D_{33}N_{2,y}N_{3,x}) J d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{4}t(D_{12} - D_{33}), \end{aligned} \quad (6.31c)$$

$$\begin{aligned} K_{38} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{12}N_{2,x}N_{4,y} + D_{33}N_{2,y}N_{4,x}) J d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{4}t(D_{12} + D_{33}), \end{aligned} \quad (6.31d)$$

$$\begin{aligned} K_{65} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{12}N_{3,x}N_{3,y} + D_{33}N_{3,y}N_{3,x}) J d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{4}t(D_{12} + D_{33}), \end{aligned} \quad (6.31e)$$

$$\begin{aligned} K_{66} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{22}N_{3,y}^2 + D_{33}N_{3,x}^2) J d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{3}t(D_{22} + D_{33}), \end{aligned} \quad (6.31f)$$

$$\begin{aligned} K_{68} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{22}N_{3,y}N_{4,y} + D_{33}N_{3,x}N_{4,x}) J d\xi d\eta \\ &= \left(\frac{1}{6}D_{22} + \frac{1}{3}D_{33}\right)t. \end{aligned} \quad (6.31g)$$

Tarvittavat matriisialkiot ovat siten

$$\begin{aligned} K_{33} - K_{35} &= \frac{1}{3}t(D_{11} + D_{33}) - \frac{1}{6}tD_{11} + \frac{1}{3}tD_{33} \\ &= \left(\frac{1}{6}D_{11} + \frac{2}{3}D_{33}\right)t, \end{aligned} \quad (6.32a)$$

$$\begin{aligned} K_{36} - K_{38} &= \frac{1}{4}t(D_{12} - D_{33}) + D_{12} - D_{33} \\ &= -\frac{1}{2}tD_{33}. \end{aligned} \quad (6.32b)$$

Isotrooppisesti kimmoisan aineen tapauksessa materiaalivakiot ovat

$$D_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad D_{33} = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (6.33)$$

jolloin siirtymien u_2 ja v_3 ratkaisuyhtälöiksi saadaan

$$\frac{Et}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\nu & -\frac{1}{4}(1 - \nu) \\ -\frac{1}{4}(1 - \nu) & \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M/L \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6.34)$$

Ratkaisu on siten

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{M}{ELt} \frac{1 - \nu^2}{\left(\frac{3}{16} - \frac{5}{24}\nu + \frac{7}{144}\nu^2\right)} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\nu & \frac{1}{4}(1 - \nu) \\ \frac{1}{4}(1 - \nu) & \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.35)$$

Lasketaan muutamalla eri ν :n arvolla

$$\nu = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{Bmatrix} \frac{M}{ELt} = \begin{Bmatrix} 2.6666 \\ 1.3333 \end{Bmatrix} \frac{M}{ELt}, \quad (6.36)$$

$$\nu = 0.25 \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.821 \\ 1.270 \end{Bmatrix} \frac{M}{ELt}. \quad (6.37)$$

Siirtymätila on siten

$$\begin{aligned} u &= N_2 u_2 - N_3 u_2 = \frac{1}{4} [(1 + \xi)(1 - \eta) - (1 + \xi)(1 + \eta)] u_2 \\ &= -\frac{1}{2} (1 + \xi) \eta u_2, \end{aligned} \quad (6.38a)$$

$$\begin{aligned} v &= N_3 v_3 - N_4 v_3 = \frac{1}{4} [(1 + \xi)(1 + \eta) - (1 - \xi)(1 + \eta)] v_3 \\ &= \frac{1}{2} (1 + \eta) \xi v_3. \end{aligned} \quad (6.38b)$$

Venymät saadaan määritelmän mukaan

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{L} \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\eta \frac{u_2}{L}, \quad (6.39a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2}{L} \frac{\partial v}{\partial \eta} = \xi \frac{v_3}{L}, \quad (6.39b)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2}{L} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \\ &= \left[-(1 + \xi) \frac{u_2}{L} + (1 + \eta) \frac{v_3}{L} \right]. \end{aligned} \quad (6.39c)$$

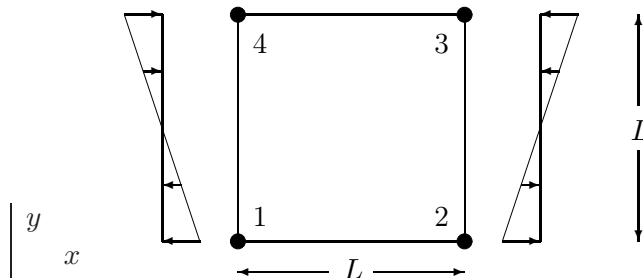
Havaitaan, että elementtiin syntyy liukumia vaikka kyseessä on puhdas taivutustila. Jännitykset saadaan konstitutiivisen lain kautta, ja ovat

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(-\eta \frac{u_2}{L} + \nu \xi \frac{v_3}{L} \right), \quad (6.40a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\xi \frac{v_3}{L} - \nu \eta \frac{u_2}{L} \right), \quad (6.40b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[-(1 + \xi) \frac{u_2}{L} + (1 + \eta) \frac{v_3}{L} \right]. \quad (6.40c)$$

Esimerkki 6.2 Määritä jännitykset kuvan bilineaarisessa tasojännitystilän elementissä, jota kuormittaa lineaarisesti jakautunut reunakuormitus joka on staattisesti samanarvoinen taivutusmomentin M kanssa. Ota huomioon symmetria ja antimetria vapausasteiden välillä. Kimmokerroin olkoon E ja suppeamaluku $\nu = 0$.



Koska suppeamaluksi on nolla ei kappaleeseen synny siirtymiä y -akselin suunnassa, eli $v \equiv 0$. Symmetrian perusteella taas $u_2 = u_4 = -u_1 = -u_3$, joten siirtymätila kuvataan lausekkeella

$$u = (-N_1 + N_2 - N_3 + N_4)u_2. \quad (6.41)$$

Virtuaalisen työn yhtälö

$$t \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dA = \int_{\Gamma_t} t_{Sx} \delta u ds, \quad (6.42)$$

supistuu nyt muotoon ($\epsilon_y = v_{,y} \equiv 0, \sigma_x = E\epsilon_x = Eu_{,x}, \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = Gu_{,y}$):

$$Et \int_{\Omega} (\epsilon_x \delta \epsilon_x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy}) dA = \int_{\Gamma_t} t_{Sx} \delta u ds. \quad (6.43)$$

Venymien lausekkeet ovat

$$\epsilon_x = \frac{2}{L} (-N_{1,\xi} + N_{2,\xi} - N_{3,\xi} + N_{4,\xi}) u_2, \quad (6.44)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{L} (-N_{1,\eta} + N_{2,\eta} - N_{3,\eta} + N_{4,\eta}) u_2. \quad (6.45)$$

Tarvittavat interpolaatiofunktioiden derivaatat lokaalien koordinaattien suhteen ovat

$$\begin{aligned} N_{1,\xi} &= -\frac{1}{4}(1-\eta), & N_{1,\eta} &= -\frac{1}{4}(1-\xi), \\ N_{2,\xi} &= \frac{1}{4}(1-\eta), & N_{2,\eta} &= -\frac{1}{4}(1+\xi), \\ N_{3,\xi} &= \frac{1}{4}(1+\eta), & N_{3,\eta} &= \frac{1}{4}(1+\xi), \\ N_{4,\xi} &= -\frac{1}{4}(1+\eta), & N_{4,\eta} &= \frac{1}{4}(1-\xi). \end{aligned} \quad (6.46)$$

Täten venymien lausekkeet ovat paikallisten koordinaattien avulla lausuttuna seuraavat

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{u_2}{2L} [(1-\eta) + (1-\eta) - (1+\eta) - (1+\eta)] u_2 \\ &= -2\eta \frac{u_2}{L}, \end{aligned} \quad (6.47a)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{u_2}{2L} [(1-\xi) - (1+\xi) - (1+\xi) + (1-\xi)] u_2 \\ &= -2\xi \frac{u_2}{L}. \end{aligned} \quad (6.47b)$$

Virtuaalisten venymien lausekkeet ovat vastaavasti

$$\delta \epsilon_x = -2\eta \frac{\delta u_2}{L}, \quad (6.48a)$$

$$\delta \gamma_{xy} = -2\xi \frac{\delta u_2}{L}. \quad (6.48b)$$

Lasketaan reunakuorman tekemä virtuaalinen työ. Reunakuormituksen maksimi-intensiteetti saadaan momentin M avulla

$$\bar{t}_m = 6 \frac{M}{L^2}. \quad (6.49)$$

Virtuaalinen siirtymä δu on reunalla 2:

$$\delta u(1, \eta) = (N_2 - N_3)\delta u_2 = -\eta\delta u_2. \quad (6.50)$$

Reunalla 2 virtuaalisen työn lauseke on

$$\int_{\Gamma_2} t_{Sx}\delta u ds = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 (-\eta t_m)(-\eta\delta u_2) d\eta = \frac{1}{3}t_m L \delta u_2. \quad (6.51)$$

Jännitysten tekemä virtuaalinen työ on

$$\begin{aligned} & Et \int_A (\epsilon_x \delta \epsilon_x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy}) dA \\ &= \delta u_2 \frac{1}{4} L^2 Et \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{4\eta^2}{L^2} + \frac{1}{2} \frac{4\xi^2}{L^2} \right) d\xi d\eta u_2 = \delta u_2 2Et u_2. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Siirtymä u_2 voidaan siten ratkaista yhtälöstä

$$2Et u_2 = \frac{2}{3} t_m L \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{1}{3} \frac{t_m L}{Et} = 2 \frac{M}{EtL}. \quad (6.53)$$

Elementin jännitykset ovat

$$\begin{aligned} \sigma_y &\equiv 0, \\ \sigma_x &= E\epsilon_x = -E2\eta \frac{u_2}{L} = -4 \frac{M}{tL^2} \eta, \end{aligned} \quad (6.54)$$

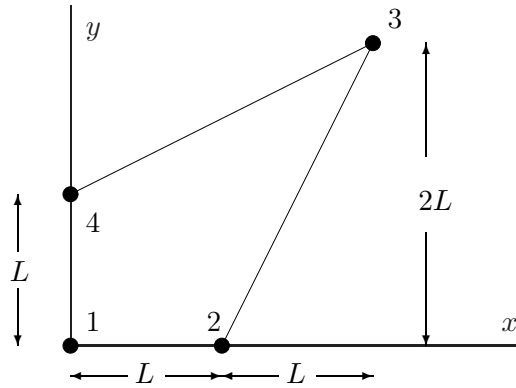
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = -E\xi \frac{u_2}{L} = -2 \frac{M}{tL^2} \xi. \quad (6.55)$$

Normaalijännityksille saatiin oikeat arvot, mutta elementtiin syntyy leikkausmuodonmuutosta ja siten leikkausjännityksiä puhtaan taivutuksen tapauksessa. Tämä johtuu bilineaarisesta interpolaatiosta, joka ei pysty kuvaamaan taivutustilaa korrektisti. Se vaatisi parabolisen siirtymätilan, tässä tapauksessa siis parabolisen v -komponentin.

6.4 Harjoitustehtäviä

1. Kirjoita tasomuodonmuutos- ja tasojännitystilän kimmoisen isotrooppisen aineen materiaalin jäykkyyismatriisit kimmokertoimen E ja suppeamaluvin ν avulla.
2. Muodosta tasojännitystilaa vastaavan lineaarisen kolmioelementin jäykkyyismatriisin eksplisiittinen lauseke.
3. Muodosta tasomuodonmuutostilaa vastaavan lineaarisen kolmioelementin jäykkyyismatriisin eksplisiittinen lauseke.
4. Muodosta tasojännitystilaa vastaavan bilineaarisesti interpoloidun elementin jäykkyyismatriisin eksplisiittinen lauseke.

5. Määritä oheisen tasojännitystilassa olevan levyelementin jännitykset elementin keskipisteessä ($\xi = \eta = 0$), kun solmupistesiirtymät ovat: $u_1 = u_4 = v_1 = v_2 = v_3 = 0, u_2 = v_4 = \Delta, u_3 = 2\Delta$. Elementin paksuus olkoon t ja materiaalia kuvataan lineaarisesti kimmoisalla isotrooppisella mallilla, jonka parametrit ovat E ja ν .



6. Oheista lineaarista *tasomuodonmuutostilan* kolmioelementtiä kuormittaa pystysuora pistevoima F solmussa 3. Solmujen 1 ja 2 vapausasteet ovat sidotut ($\equiv 0$). Ratkaise tehtävä, eli määritä elementin siirtymä- ja jännitystila. Materiaalivakiot olkoon E ja ν . Mitä tapahtuu kun $\nu \rightarrow 0,5$ ja miksi?

