

Luku 1

Johdanto

Luvun tarkoituksena on esitellä erilaisia differentiaaliyhtälötyyppejä ja antaa käsitys niiden ratkaisujen ominaisuuksista. Jotta voitaisiin konstruoida hyvin toimivia numeerisia menetelmiä, on tunnettava ratkaistavan ongelman luonteenpiirteet.¹

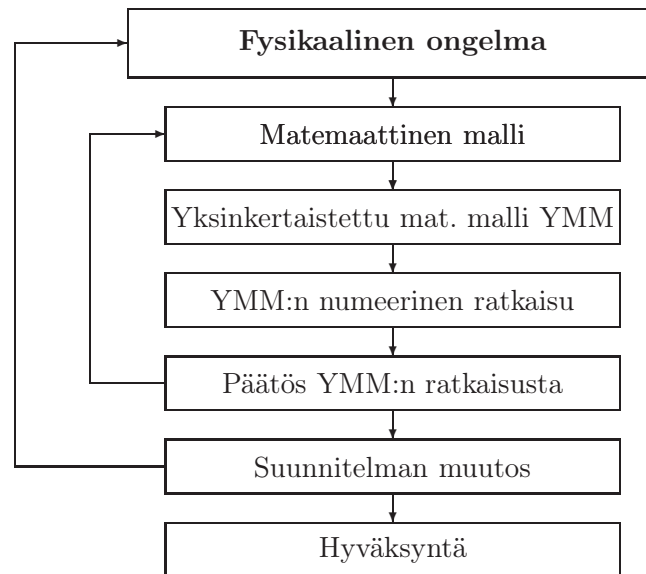
1.1 Fysikaalisten ilmiöiden mallintaminen

Luonnontieteellisten ja teknisten ongelmien ratkaisemisessa matemaattisella mallinnuksella on keskeinen rooli. Ratkaisun kulku on usein kuvan 1.1 mukainen. Ratkaistavana olevasta fysikaalisesta ongelmasta muodostetaan matemaattinen malli, jonka pitäisi pyrkiä kuvaamaan ongelmassa esiintyvät ilmiöt mahdollisimman hyvin. Tässä vaiheessa päätetään myös kriteerit joilla ongelman ratkaisun kelpoisuutta arvioidaan. Usein tällainen malli on liian monimutkainen, joten matemaattista mallia joudutaan yksinkertaistamaan jättämällä siitä pois osia, joiden vaikutuksen arvioidaan olevan haluttuun tarkkuuteen nähden vähäinen. Yksinkertaistettu matemaattinen mallikin voi olla liian monimutkainen, jotta ratkaisu onnistuisi analyttisesti. Tällöin malli voidaan ratkaista numeerisesti. Numeerisesta ratkaisusta tehdään päätelmiä yksinkertaistetun matemaattisen mallin toimivuudesta kyseiseen ongelmaan ja mahdollisesti siihen tehtävistä muutoksista. Ratkaisu voi tuoda esiin myös muutostarpeita itse fysikaalisen ongelman määrittelyyn.

Matemaattisen mallin ja yksinkertaistetun matemaattisen mallin ratkaisujen välistä erotusta kutsutaan mallinnusvirheeksi. Mikäli mallinnusvirheen suhteen haluttu tarkkuus voidaan saavuttaa, sanotaan probleeman ratkaisun olevan ennustettavissa. Kaikille tuttu esimerkki ennustamattomista tehtävistä on pitkän aikavälin sääennusteet. Mallinnusvirheeksi voidaan käsittää myös todellisuuden ja mallin välinen ero. Tämä "mallinnusvirhe" ei kuitenkaan ole kvantifioitavissa.

Yksinkertaistetun matemaattisen mallin ja sen numeerisen ratkaisun välistä erotusta kutsutaan laskentavirheeksi, ja ongelman sanotaan olevan laskettavissa, mikäli

¹Katso esimerkiksi J.G. Simmondsin artikkelia "Don't compute 'til you see the whites of their eyes" teoksessa *Analytical and computational models of shells*, ASME, 1989.



Kuva 1.1 Fysikaalisen ongelman ratkaisun periaate.

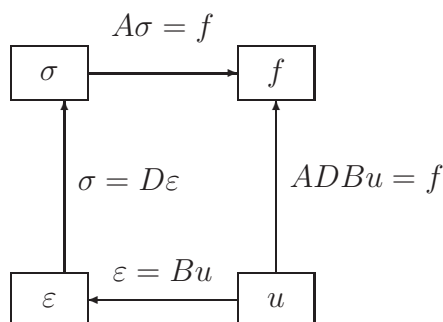
laskentavirheen suhteen haluttu tarkkuus voidaan saavuttaa.

1.2 Matemaattisen mallin perusrakenne

Hyvin usein fysikaalisten ilmiöiden matemaattisessa mallintamisessa joudutaan yhtälösystemiin, joka rakentuu kolmentyyppisistä relaatioista. Kyseisen fysikaalisen teoriakehyksen yleiset peruslait, aksioomat eli luonnonlait antavat osan vallitsevista yhtälöistä. Niiden pätevyyttä ei yleensä tarvitse epäillä. Ne eivät kuitenkaan riitä, vaan lisäksi tarvitaan ns. konstitutiivisia yhtälöitä, jotka kuvaavat kulloinkin esiintyvien materiaalien käyttäytymistä enemmän tai vähemmän totuudenmukaisesti. Aksiomien ja materiaalilakien matemaattinen esittäminen vaatii lisäksi geometrinen relaatioiden (kinematiikan) hallintaa.

Edellä esitetyn rakenteen mukaiset yhteydet ovat usein tyypiltään kimppu osittaisdifferentiaaliyhtälöitä tai yksinkertaisimmillaan algebrallisia relaatioita. Useat mekaniikassa esiintyvät ilmiöt voidaan mallintaa kuvassa 1.2 esiintyvän lohko-kaavion mukaisesti. Kuvassa 1.2 ylimmäisenä on esitetty Newtonin liikelakiin pohjautuvat tasapainoyhtälöt muodossa $A\sigma = f$, jossa A on kyseisen probleeman tasapaino-operaattori, joka kuvaa jännityksen σ ulkoisten kuormien joukon alkioksi f . Kuvion vasemmassa laidassa on esitetty materiaalilaki, jossa venymä ε kuvautuu materiaalin jäykkyysoperaattorin D välityksellä jännitysten joukon alkioksi σ . Systemin täydentää kinemaattiset yhteydet siirtymien u ja venymien ε välillä, joka välittyy operaattorin B kautta.

Oheinen struktuuri on hyvin yleinen fysikaalisten ongelmien mallinnuksessa, mm. lämmönjohtumisen, kosteudensiirtymisen, virtausongelmien jne. tapauksissa. Täl-



Kuva 1.2 Matemaattisen mallin perusstruktuuri.

lön fysikaalisten suureiden (σ, ε) ja (f, u) merkitys on vain erilainen.

Sähkömagneetiikan yhtälöiden rakenne on monimutkaisempi ja siihen palataan myöhemmin.

Ongelman ratkeavuuden, erityisesti yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolon edellytyksenä on myös riittävien reuna- ja/tai alkuehtojen asettaminen.

1.3 Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden luokittelusta

Vaikka useiden fysikaalisten ilmiöiden matemaattiset mallit voidaan kuvata kaavion 1.2 muodossa, voi niiden ratkaisujen käyttäytyminen poiketa huomattavastikin toisistaan, riippuen siitä millaisia olioita f, A, B, D ovat. Koska numeeristen likiratkaisujen onnistunut konstruoiminen edellyttää ratkaistavan probleeman luonteen tuntemusta, tarkastellaan hieman millaisia osittaisdifferentiaaliyhtälöiden perustyypppejä on olemassa ja mitkä ovat niiden karakteristiset ominaisuudet. Näitä ominaisuuksia pyritään numeeristen algoritmien kehittäessä matkimaan mahdollisimman aidosti.

Tarkastellaan nyt yksinkertaisuuden vuoksi osittaisdifferentiaaliyhtälöiden luokittelua lineaarisen skalaariyhtälön tapauksessa. Luokittelu voidaan myös yleistää yhtälösystemeille ja epälineaarisiin tapauksiin.

Yleinen kertalukua m oleva lineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö tuntemattoman skalaarifunktion $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ suhteen on muotoa ²

$$\sum a_{i_1 \dots i_n}(x) \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} + L_1 u = f(x), \quad \sum_{j=1}^n i_j = m, \quad (1.1)$$

jossa L_1 on lineaarinen osittaisdifferentiaalioperaattori joka on alhaisempaa astetta (astetta $< m$), kuin yhtälön ns. pääosa (astetta m) ja jossa $a_{i_1 \dots i_n}(x), f(x)$ ovat reaalisia muuttujien x_i funktioita. Yhtälön (1.1) ns. karakteristinen muoto on reaaliparametrien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ kertalukua m oleva multilineaarinen muoto

$$K(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum a_{i_1 \dots i_n}(x) \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_n^{i_n}, \quad \sum_{j=1}^n i_j = m. \quad (1.2)$$

²Tämän voi ajatella vaikkapa yhtälöksi $A D B u = f$, katso kuva 1.2.

Yhtälöä (1.1) sanotaan *paraboliseksi* (parabolisesti degeneroituneeksi) pisteessä x , mikäli on olemassa affiini muunnos muuttujien $\lambda_i = \lambda_i(\mu_1, \dots, \mu_n)$, $i = 1, \dots, n$ suhteen, joka muuntaa karakteristisen muodon muuttujien μ_i multilineaariseksi muodoksi ja johon jää riippuvuus vain ℓ :stä muuttujasta $0 < \ell < n$. Mikäli kyseessä ei ole parabolinen degeneraatio, kutsutaan yhtälöä (1.1) *elliptiseksi* pisteessä x , jos yhtälöllä

$$K(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \quad (1.3)$$

ei ole yhtään nollasta eroavaa reaalista ratkaisua. Mikäli kumpikaan edellämainsuista ehdoista ei toteudu, voi yhtälö olla *hyperbolinen* pisteessä x . Tämä voidaan määrittellä seuraavasti. Muuttujien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ määrittelemässä Euklidisessa avaruudessa on olemassa suora, joka otetaan uudeksi koordinaattiakseliksi. Merkitään uutta koordinaattijärjestelmää (μ_1, \dots, μ_n) joka siis saadaan järjestelmästä λ_i affinisella muunnoksella. Näin saatu muunnettu karakteristinen yhtälö (1.3) voidaan tulkita yhtälöksi tämän uuden akselin koordinaatin suhteen. Mikäli nyt tällä yhtälöllä on tasan m juurta (yksinkertaista tai moninkertaista) sanotaan tällöin yhtälöä (1.1) hyperboliseksi pisteessä x .

On syytä huomata, että yhtälön tyyppi saattaa muuttua eri ratkaisualan osissa. Tämä seikka vaikeuttaa huomattavasti yhtälön numeerista ratkaisua. Epälineaarisissa tapauksissa yhtälön (1.1) kertoimet a_{i_1, \dots, i_n} riippuvat paitsi paikkakoordinaatista x myös ratkaisusta u ja/tai sen derivaatoista kertalukuun $m - 1$ saakka. Koska epälineaarisella yhtälöllä saattaa olla useita ratkaisuja, on edellä esitetty luokittelu mielekäs vain mikäli identifioidaan myös tarkasteltavana oleva ratkaisun haara.

Esimerkkeinä tutkitaan kolmea tekniikan sovellutuksissa hyvin yleisesti esiintyvää osittaisdifferentiaaliyhtälöä:

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u &= f, \\ \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sigma\Delta u &= f, \\ D\Delta\Delta u &= f, \end{aligned} \quad (1.4)$$

jossa Δ on Laplacen operaattori, joka suorakulmaisessa koordinaatistossa saa tasotapauksessa muodon

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (1.5)$$

Ensimmäinen yhtälöistä (1.4) on diffuusioyhtälö, joka kuvaa esimerkiksi lämmön siirtymistä johtumalla. Siinä esiintyvät positiiviset vakiot c, ρ, k merkitsevät tällöin materiaalin ominaislämpöä, tiheyttä ja lämmönjohtavuutta. Yhtälön karakteristinen muoto, assosioimalla muuttujat $\lambda_1 \leftrightarrow x, \lambda_2 \leftrightarrow y, \lambda_3 \leftrightarrow t$ on

$$K(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -k(\lambda_1^2 + \lambda_2^2). \quad (1.6)$$

Havaitaan, että kyseessä on degeneroitunut tapaus, sillä muuttuja λ_3 ei esiinny ollelankaan karakteristisessä muodossa, joten yhtälön tyyppi on parabolinen.

Toinen yhtälöistä (1.4) on ns. aaltoyhtälö ja siinä u kuvaa esimerkiksi värähtelevän kalvon poikittaista siirtymää. Tällöin vakiot γ, σ merkitsevät massatiheyttä pinta-alayksikköä kohden ja kalvon jännitystä pituusyksikköä kohden. Yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f/\gamma, \quad c^2 = \frac{\sigma}{\gamma}, \quad (1.7)$$

jossa c on aaltoliikkeen etenemisnopeus. Karakteristinen yhtälö on

$$K(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_3^2 - c^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = 0, \quad (1.8)$$

jossa muuttujien assosiointi koordinaatteihin on sama kuin diffuusioyhtälön tapauksessa. Havaitaan, että ratkaisemalla karakteristinen yhtälö muuttujan λ_3 suhteen, on sillä tasmälleen kaksi ratkaisua, joten yhtälö on hyperbolinen.

Viimeisin esimerkkiyhtälöistä (1.4) on biharmoninen osittaisdifferentiaaliyhtälö jossa u kuvaa esimerkiksi laatan taivutuksessa keskipinnan poikittaista siirtymää ja on auki kirjoitettuna muotoa

$$D \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) = f, \quad (1.9)$$

jossa D merkitsee laatan taivutusjäykkyyttä. Karakteristinen yhtälö on muotoa

$$K(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^4 + 2\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 = 0 \quad (1.10)$$

josta heti havaitaan että ainoa reaalinen ratkaisu on nollaratkaisu, joten yhtälö on elliptinen.

Kaikista edellä esitetyistä yhtälöistä havaitaan, että ne säilyttävät tyyppinsä kaikilla muuttujien x, y ja t arvoilla, sillä yhtälöt ovat lineaarisia ja vakiokertoimisia.

Edellä esitetty tapa jaotella yhtälöitä saattaa tuntua hieman epämääräiseltä. Matemaattisesti täsmällinen teoria yhtälöiden luokittelusta kuuluu karakteristika-teorian piiriin. Tässä teoriassa luokittelu hyperbolisten, parabolisten ja elliptisten yhtälöiden välillä perustuu karakterististen pintojen (tai käyrien) olemassaoloon ja lukumäärään. Karakteristinen pinta on sellainen jolla ns. Cauchy-ongelmalla³ ei ole yksikäsitteistä ratkaisua. Cauchyn ongelma tarkoittaa sitä, että määrääkö tietyllä pinnalla annetut funktion ja sen derivaatan arvot (kertalukuun $m - 1$ saakka mikäli yhtälön kertaluku on m) ratkaisun tämän pinnan läheisyydessä. Tätä problemaa nimitetään myös karakteristiseksi alkuarvo-ongelmaksi.

³Ongelma on saanut nimensä ranskalaisen matemaatikon ja insinöörin Augustin Cauchyn (1789-1857) nimen mukaan. Häntä pidetään osittaisdifferentiaaliyhtälöiden modernin teorian alullepanijana ja hänen nimensä liitetään myös kuuluisaan teoreemaan osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisujen olemassaolosta, jonka puolalaissyntyinen matemaatikko Sophie Kowalewski todisti väitöskirjassaan melko yleisessä muodossa (Cauchy-Kowalewski teoreema).

1.4 Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisujen luonteesta

1.4.1 Parabolinen yhtälö

Tarkastellaan nyt edellä esitettyjen kolmen esimerkkiyhtälön ratkaisujen luonnetta. Aloitetaan tutkimalla parabolisen diffuusioyhtälön ratkaisua suorakulmaisessa alueessa $\Omega = \{(x, y) \in (0, a) \times (0, b)\}$, ja olettamalla ajanhetkellä $t = 0$ vallitsevan alkulämpötilan

$$u(x, y, 0) = u_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (1.11)$$

Oletetaan lisäksi, että lämpötila alueen Ω reunalla S on kaikilla ajanhetkillä vakio, eli lämpötilan reunaehdoksi asetetaan

$$u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in S \quad (1.12)$$

ja että alueessa Ω ei ole lämmönlähteitä, eli $f \equiv 0$. Tällöin ratkaistava ongelma voidaan asettaa seuraavasti: etsi funktio $u(x, y, t)$, joka toteuttaa

$$\begin{aligned} \text{kenttäyhtälön :} & \quad c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, & (x, y) \in \Omega, & (1.13) \\ \text{alkuehdon :} & \quad u(x, y, 0) = u_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, & (x, y) \in \Omega, & \\ \text{reunaehdon :} & \quad u(x, y, t) = 0, & (x, y) \in S. & \end{aligned}$$

Ratkaisu löydetään muodossa

$$u(x, y, t) = u_0 e^{-\beta t} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (1.14)$$

joka sijoittamalla yhtälöön (1.13) antaa lausekkeen

$$\left\{ -c\rho\beta + k \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right] \right\} = 0 \quad (1.15)$$

vakion β ratkaisemiseksi (huomaa $\beta > 0$):

$$\beta = \pi^2 \frac{k}{c\rho a^2} \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]. \quad (1.16)$$

Diffuusioyhtälön ratkaisu on siis ajan suhteen eksponentiaalisesti vaimeneva, mikä tuntuukin fysikaalisesti oikealta, sillä lämpö siirtyy kohti kylmempää aluetta ja lämpövirta tapahtuu alueesta ulospäin, jos $u_0 > 0$. Raja-arvona (kun $t \rightarrow \infty$) saadaan tietenkin tilanne, jossa lämpötila on tasaantunut koko alueessa, eli $u(x, y) \rightarrow 0$ kun $t \rightarrow \infty$. Huomaa myös, että diffuusioyhtälöllä on ratkaisua siloittava ominaisuus. Tämän voi havaita helposti tarkastelemalla ratkaisun kehittymistä ajan suhteen, kun alkuehdoksi asetetaan

$$u(x, y, 0) = u_{01} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + u_{0n} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (1.17)$$

missä n on positiivinen luonnollinen luku ja $n > 1$. Korkeataajuuksinen komponentti siloittuu pois ratkaisusta hyvin nopeasti.

1.4.2 Hyperbolinen yhtälö

Etsitään homogeenisen ($f = 0$) aaltoyhtälön ratkaisua suorakulmaisessa tasoalueessa $\Omega = \{(x, y) \in (0, a) \times (0, b)\}$ ajanhetkellä $t > 0$, eli funktiota $u(x, y, t)$, joka toteuttaa

$$\begin{aligned} \text{kenttäyhtälön :} \quad & \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, & (x, y) \in \Omega, & (1.18) \\ \text{alkuehdot :} \quad & u(x, y, 0) = u_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, & (x, y) \in \Omega, \\ & \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = v_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, & (x, y) \in \Omega, \\ \text{reunaehdon :} \quad & u(x, y, t) = 0, & (x, y) \in S. \end{aligned}$$

Huomaa ero diffuusioyhtälöön alkuehtojen lukumäärän suhteen. Ratkaisu voidaan löytää muodossa

$$u(x, y, t) = \left(u_0 \cos \frac{c\pi t}{s} + \frac{v_0 s}{c\pi} \sin \frac{c\pi t}{s} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (1.19)$$

jossa on merkitty $c^2 = \sigma/\gamma$ ja $s^{-2} = a^{-2} + b^{-2}$ ja joka kuvaa kalvon vaimentumatonta harmonista värähtelytilaa. Peruserona parabolisen ja hyperbolisen yhtälön välillä onkin juuri yhtälön suhde aikakoordinaattiin t : hyperbolinen yhtälö on aikasymmetrinen kun taas parabolisessa yhtälössä ajan suunnalla on merkityksensä. Aaltoyhtälölle on myös ominaista, että ratkaisun luonteenpiirteisiin vaikuttaa yhtälön koordinaattiavaruuden dimensio; yhden ja kolmen paikkakoordinaatin tapauksessa ratkaisu on hajaantumaton (engl. sharp) mitä se ei ole tasoalueessa. Ratkaisun hajaantuvuudella tarkoitetaan tässä sitä, miten se reagoi impulssivasteeseen; säilyttääkö ratkaisu tarkasti impulssin muodon vai aiheutuuko siitä myös muita väreilyjä.

Sähkömagneettisten kenttien käyttäytyminen saadaan selville ratkaisemalla fyziikan ja nykitekniikan ehkä tärkeimmät osittaisdifferentiaaliyhtälöt, eli Maxwellin yhtälöt

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.24)$$

jossa \mathbf{H} on magneettikentän voimakkuus, \mathbf{B} magneettivuon tiheys, \mathbf{E} sähkökentän voimakkuus, \mathbf{D} sähkövuon tiheys, \mathbf{J} sähkövirran tiheys ja ρ varaustiheys. Yhtälö (1.20) on nimeltään Ampère-Maxwellin yhtälö ja (1.21) on nimetty Faradayn mukaan. Edellä olevista viidestä yhtälöstä vain kolme on riippumattomia. Joko kolme

ensimmäistä (1.20)-(1.22) tai yhtälöt (1.20), (1.21) ja (1.24) voidaan valita riippumattomiksi yhtälöiksi. Näissä kolmessa yhtälössä on kuitenkin viisi tuntematonta vektorisuuretta, joten tarvitaan konstitutiiviset yhtälöt jotka kuvaavat materiaalin käyttäytymistä. Rajoittamalla yksinkertaiseen lineaariseen ja isotrooppiseen malliin, konstitutiiviset yhtälöt voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.25)$$

jossa ϵ on permittiivisyys, μ magneettinen permeabiliteetti ja σ sähkönjohtavuus.

Värahtelevän langan liikeyhtälö (1.18) on hyperbolinen skalaariyhtälö, kun taas Maxwellin yhtälöt muodostavat hyperbolisen yhtälösystemin. Maxwellin yhtälöt voidaan saattaa tietyin oletuksin muotoon

$$\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{J}, \quad (1.26)$$

tai vastaavasti

$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times (\epsilon^{-1} \nabla \times \mathbf{H}) - \nabla \times (\epsilon^{-1} \mathbf{J}). \quad (1.27)$$

1.4.3 Elliptinen yhtälö

Viimeisenä joskaan ei vähäpätöisimpänä tutkitaan elliptisen laattayhtälön ratkaisua suorakulmaisessa alueessa Ω . Valitaan ulkoiseksi kuormitukseksi suuruudeltaan F oleva pistekuorma kohdassa $(\xi, \eta) \in \Omega$, joten ratkaistavana on nyt taipumafunktio $u(x, y)$, joka toteuttaa

$$\begin{aligned} \text{kenttäyhtälön :} \quad & D \Delta \Delta u = F \delta(x - \xi, y - \eta), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.28) \\ \text{reunaehdot :} \quad & u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 0, \quad (x, y) \in S, \end{aligned}$$

jossa δ on ns. Diracin⁴ delta-distributio ja n viittaa reunakäyrän S ulkonormaan suuntaan. Ratkaisu saadaan Fourierin⁵ sarjojen avulla ja on muotoa

$$u(x, y) = \frac{4F}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{-2} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (1.29)$$

⁴Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984), englantilainen fyysikko.

⁵Jean Baptiste Fourier (1768–1830), ranskalainen matemaatikko ja fyysikko jonka tärkein teos on *Théorie analytique de la chaleur* (1822), joka käsittelee lämmön johtumista ja jossa hän esitti matemaattisen sarjateorian lämmönjohtumisongelman ratkaisemiseksi.

Oheinen ratkaisu pistekuormalle on hyödyllinen, sillä siitä saadaan probleeman (1.28) ns. Greenin funktio⁶ eli taipuman influenssipinta $K(x, y, \xi, \eta)$:

$$K(x, y, \xi, \eta) = \frac{4}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{-2} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (1.30)$$

joka siis kuvaa pisteessä (ξ, η) vaikuttavan yksikköpistekuorman kuormittamaa laatan taipumaa pisteessä (x, y) . Siitä voidaan konstruoida ratkaisu mille tahansa jakautuneelle kuormitukselle $f(\xi, \eta)$ käyttäen superpositioperiaatetta, jolloin saadaan

$$u(x, y) = \int \int_A f(\xi, \eta) K(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (1.31)$$

ja jossa integrointi suoritetaan kuormitetun pinnan ylitse. Greenin funktiosta havaitaan sen olevan symmetrinen muuttujien x, ξ ja y, η suhteen, josta mekaniikassa tunnettu Maxwellin vastavuoroisuusväittäjä voidaan helposti osoittaa paikkansa pitäväksi tälle erikoistapaukselle.

Pistekuormalla kuormitetun laatan ratkaisusta (1.29) havaitaan myös elliptisille yhtälöille ominainen piirre: olkoon kuormitus miten pieni tahansa, sen vaikutus ulottuu yli koko tarkasteltavan alueen.

1.4.4 Muutamia huomioita yhtälöiden luokittelussa

1.4.4.1 Rajatapaukset

Osittaisdifferentiaaliyhtälön käyttäytymisen määrittävät sen korkeimmat derivaatat. Mikäli niihin liittyvät kertoimet ovat pieniä verrattuna alhaisasteisempien termien kertoimiin, voi ratkaisun käyttäytyminen muuttua. Yksi mielenkiintoinen välimuototapaus on ns. diffuusio-konvektioyhtälö, joka dimensiottomassa muodossa kirjoitettuna yksiulotteisessa paikka-avaruudessa on

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{P} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = f, \quad (1.32)$$

ja jonka numeerinen ratkaisu tuotti ongelmia vielä 1980 luvun alkupuolelle saakka, etenkin konvektion dominoimissa tehtävissä (Pécletin luku P suuri). "Virallisesti" yhtälö on parabolinen, mutta käytännössä yhtälön käyttäytyminen on lähempänä hyperbolisen yhtälön käyttäytymistä kun P on suuri. Kun P on pieni (luokkaa ~ 1), diffuusion osuus dominoi ratkaisua ja yhtälön parabolinen luonne on hallitseva, eikä yhtälön ratkaisu tuota ongelmia tavanomaisille numeerisille menetelmillekään.

⁶George Green oli pääosin itseoppinut englantilainen matemaatikko, joka vuonna 1828 julkaisi omakustanteena teoksen "*On the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*". Teoksessaan hän johtaa integraaliesityksen mm. tietyille Laplacen yhtälön ratkaisuille.

Diffuusio-reaktioyhtälössä on toinen esimerkki rajatapauksesta erityisesti silloin kun reaktiitermi on hallitseva diffuusiotermiin verrattuna, katso harjoitustehtävä 12 sivulla 17. Kiinteän aineen mekaniikassa samankaltaisiin ongelmiin törmätään esimerkiksi laatta- ja kuorirakenteita analysoitaessa.

1.4.4.2 Tasapaino- ja etenemistehtävät

Diffuusio- (1.13) ja aaltoyhtälöistä (1.18) havaitaan, että yhdellä koordinaattisuorella, nimittäin ajalla, on oma erikoisasemansa. Tähän seikkaan nojautuen voidaan suorittaa tehtävätyypin jako myös fysikaalisin perustein ja ajasta riippuvia tehtäviä kutsutaan yhteisellä nimellä etenemistehtävät, jossa systeemin tilaa pyritään ennustamaan tietyssä ratkaisualueessa (paikkakoordinaattien suhteen) ajan suhteen edeten. Puhutaan myös alkuarvotehtävistä tai yhdistetyistä alku- reuna-arvotehtävistä.

Kappaleessa 1.3 esitetty osittaisdifferentiaaliyhtälöiden luokittelumetodi saattaa tuntua vaikeasti sovellettavalta. Erityisesti hyperbolisen ja parabolisen yhtälön erottaminen toisistaan voi olla hankalaa. Helppo tapa erottaa parabolinen yhtälö hyperbolisesta on sijoittaa yrite

$$u = e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (1.33)$$

ja etsiä kulmataajuuden ω ja aaltolukujen k_1, k_2, k_3 ($k = |\vec{k}|$, $\vec{k} = k_1\vec{i} + k_2\vec{j} + k_3\vec{k}$) välinen yhteys. Ratkaisemalla $\omega = \omega(k)$ tästä yhteydestä voidaan yhtälön tyyppi päätellä siitä ovatko kulmataajuudet ω reaalisia, jolloin yhtälö on hyperbolinen, vai ovatko ne imaginaarisia, jolloin yhtälö on parabolinen.

Hyperbolisen yhtälön tapauksessa voidaan kulmataajuuden ja aaltoluvun välisestä yhteydestä päätellä myös muita fysikaalisesti kiinnostavia ominaisuuksia. Vaihenopeus c määritellään yhtälöllä

$$c = \frac{\omega}{k}. \quad (1.34)$$

Mikäli c on riippuvainen aaltoluvusta k , tällöin aaltoliikkeessä esiintyvät eri aallonpituiset (muista, että aallonpituus λ on $\lambda = 2\pi/k$) komponentit etenevät eri nopeudella. Tällaista tapausta kutsutaan *dispersiiviseksi*.

Laattayhtälö (1.28) on luonteeltaan tasapainotehtävä, jossa systeemi ratkaistaan pysyvän eli stationäärisen tilan suhteen.

1.4.4.3 Ominaisarvotehtävät

Etenemis- ja tasapainotehtävien lisäksi on olemassa eräs tehtävätyyppi nimittäin ominaisarvotehtävät. Ominaisarvotehtävät voivat liittyä joko etenemistehtäviin tai tasapainotehtäviin. Tyypillisiä tapauksia ovat ominaisvärähtelyjen määrittäminen ja rakenteiden stabiiliusanalyysit. Esimerkiksi ominaisvärähtelytehtävä saadaan aaltoyhtälöstä (1.18), kun otaksutaan ratkaisu harmoniseksi värähtelyksi, jolloin voidaan otaksua aikariippuvuuden olevan muotoa

$$u(x, y, t) = e^{-i\omega t} \phi(x, y), \quad (1.35)$$

jossa i on imaginaariyksikkö ja ω on värähtelyn ominaistajuus. Sijoittamalla tämä yrite aaltoyhtälöön saadaan osittaisdifferentiaaliyhtälö pelkästään paikkakoordinaattien suhteen⁷

$$-\omega^2 \rho \phi - \sigma \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (1.36)$$

Tehtävänä on nyt ratkaista ominaisarvot ω^2 (tai ainakin joitain arvoja ominaisarvospektristä) ja niitä vastaavat ominaismuodot $\phi(x, y)$ annetuilla reunaehdoilla. Aaltoyhtälön aikakehitys voidaan kylläkin konstruoida käyttäen hyväksi laskettuja ominaisarvoja ja ominaismuotoja. Tätä menettelyä kutsutaan ominaismuotosuperpositioksi ja se on usein käyttökelpoinen värähtelytehtävissä joissa ratkaisu suurelta osin määräytyy alimpien ominaistajuuksien mukaan. Se ei tietenkään ole käyttökelpoinen sellaisenaan epälineaarisisissa tehtävissä eikä ole taloudellinen aallonetenevistehtävissä joissa rakenteen vaste on riippuvainen laajemmasta taajuuskaistasta kuin värähtelytehtävissä. Toisena esimerkkinä ominaisarvot tehtävistä voidaan mainita vaikkapa levyn lommahdusta tai palkin nurjahdusta kuvaavat yhtälöt, joissa määritetään kriittinen kuormaparametrin arvo ja sitä vastaava ominaismuoto. Esimerkkinä vaikkapa tehtävä

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} + P \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad x \in (0, L), \quad (1.37)$$

jossa P on ominaisarvo, eli nurjahduskuorma ja u on sitä vastaava nurjahdusmuoto. Sähkömagnetiikassa harmoonisuusotaksuma johtaa yhtälöön

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{e}) - \omega^2 \epsilon \mathbf{e} = 0, \quad (1.38)$$

tai vaihtoehtoisesti

$$\nabla \times (\epsilon^{-1} \nabla \times \mathbf{h}) - \omega^2 \mu \mathbf{e} = 0. \quad (1.39)$$

1.5 Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmistä

Kuten jo oheisista suhteellisen yksinkertaisista esimerkkitaapauksista voitaneen päätellä, on jo lineaaristen vakiokertoimistenkin osittaisdifferentiaaliyhtälöiden analyytinen ratkaisu vaikeaa mikäli kuormitus ja/tai alueen geometria ovat hiemankin monimutkaisemmat.

Onneksi tietokonetekniikan kehitys on mahdollistanut vaikeiden ongelmien likimääräisen ratkaisemisen monimutkaisissa geometrioissa. Perusajatuksena näissä numeerisissa menetelmissä on fyysikaalista ongelmaa kuvaavan matemaattisen mallin korvaaminen diskreetillä matemaattisella mallilla, jossa ratkaisua etsitään sopivien funktioiden joukosta ja että ratkaisu pystytään konstruoimaan äärellisellä määrällä diskreettejä parametreja, jotka ovat lineaarisessa yhteydessä approksimoiviin funktioihin, jolloin ratkaistavaksi jää äärellinen määrä algebrallisia yhtälöitä.

⁷Yhtälöä $(\Delta + k^2)u = 0$ eli aaltoyhtälön paikkamuotoa kutsutaan myös Helmholtzin yhtälöksi.

Ongelman ratkaisuun sopivan numeerisen metodin konstruointi riippuu ratkaistavan probleeman luonteesta. Tällä hetkellä elementtimenetelmä, tai tarkemmin suomennettuna äärellisten elementtien menetelmä on hallitseva elliptistyyppisten kenttäprobleemien ratkaisussa. Myös parabolisten yhtälöiden tapauksessa yhtälön elliptinen osa pääsääntöisesti diskretoidaan elementtimenetelmällä ja yhtälön aika-riippuvuus integroidaan jollain sopivalla differenssimenetelmällä, samaten kuin rakenteiden dynaamisessa analyysissä. Uudempaa tapaa ajasta riippuvien yhtälöiden diskretoimiseksi edustaa ns. ajan suhteen epäjakuvatkuva Galerkinin keino. Tietyissä tapauksissa se kuitenkin johtaa tunnettuihin differenssikaavoihin.

Virtausmekaniikan yhtälöt ovat usein hyperbolistyyppisiä myös paikkakoordinaatin suhteen. Tästä johtuen standardimuotoinen elementtimenetelmäformulaatio ei useinkaan toimi hyvin virtausmekaniikan ongelmassa. 1980-luvun aikana on ongelma kuitenkin pystytty voittamaan ja uusimmat virtausmekaniikan ohjelmat käyttävät elementtimenetelmää paikkakoordinaattien suhteen suoritettussa diskretoinnissa aikaisemmin yleisen differenssimenetelmän sijaan.

Elementtimenetelmän voidaan ajatella kehittyneen yleistyksenä klassisista Rayleighin-Ritzin (RRM) ja painotettujen jäännösten menetelmästä (PJM). Molemmat menetelmät käyttävät hyväksi variaatioperiaatteita, katso luku 2. Näissä menetelmissä tuntemattomalle funktiolle (tai funktioille) valitaan riittävät jatkuvuusominaisuudet toteuttavien lineaarisesti riippumattomien kantafunktioiden joukosta lineaarikombinaatio, jossa kantafunktioiden kertoimet ovat tuntemattomia parametrejä (diskretointi). Yhtälöt tuntemattomien parametrien määrittämiseksi Rayleighin ja Ritzin menetelmässä saadaan, kun funktion approksimaatio sijoitetaan ongelmalle ominaiseen funktionaaliin (esim. potentiaalienergian funktionaaliin) ja minimointi suoritetaan nyt tuntemattomien diskreettien muuttujien suhteen. Painotettujen jäännösten menetelmä eroaa edellämäinitusta siinä, että ratkaisufunktionaalina käytetään ongelmaan liittyvän yhtälön (esim. yhtälö $ADBu - f = 0$, katso kuva 1.2) approksimoidun muodon ratkaisualueen yli integroitua painotettua jäännöstä, jossa painofunktiolle valitaan jokin sopiva kantafunktiojoukko. Näistä ratkaisumenetelmistä saadaan helposti erilaisia versioita, mm. Galerkinin menetelmäksi kutsutaan menettelyä, jossa painofunktiolle valitaan sama kanta kuin ratkaistavalle funktiolle. Klassinen tapa on valita kantafunktiot siten, että ne ulottuvat yli koko ratkaistavan alueen. Tämä rajoittaa heti menetelmien käyttökelpoisuuden hyvin yksinkertaisiin alueisiin. Elementtimenetelmän perusidea jakaa tarkastelualue pienen äärellisiin osiin vapauttaa analysoinnin geometrian tuomilta ongelmilta. Elementtimenetelmää voitaisiin kutsua yleistetyksi painotettujen jäännösten menetelmäksi tai yleistetyksi Galerkinin menetelmäksi.

Esimerkki 1.1 *Ratkaise stationäärinen 1-dimensioinen diffuusio-konvektio-yhtälö*

$$-ku'' + \rho cvu' = f, \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0, \quad (1.40)$$

kun k, ρ, c, v ja f ovat positiivisia vakioita (k lämmönjohtavuus, ρ tiheys, c ominaislämpö, v väliaineen virtausnopeus). Piirrä ratkaisun kuvaaja suhteen $P = \rho cvL/k$ erilaisilla arvoilla, esim. $P = 1, P = 10, P = 100$. Mitä tapahtuu kun $P \rightarrow \infty$?

Yhtälö on toisen kertaluvun vakiokertoiminen epähomogeeninen tavallinen differentiaaliyhtälö, jonka täydellinen yleinen ratkaisu saadaan homogeenisen osan täydellisen ratkaisun ja täydellisen yhtälön jonkin yksityisratkaisun summana. Homogeenisen osan

$$-ku_0'' + \rho cv u_0' = 0 \quad (1.41)$$

yleinen ratkaisu konstruoidaan yrittäen $u_0(x) = A \exp(rx)$ avulla. Karakteristiseksi yhtälöksi saadaan

$$-kr^2 + \rho cv r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{tai} \quad r = \frac{\rho cv}{k}. \quad (1.42)$$

Homogeenisen osan ratkaisu on siten

$$u_0(x) = A \exp(\rho cv x/k) + B. \quad (1.43)$$

Yksityisratkaisu arvataan olevan lineaarista muotoa

$$u_f(x) = Cx, \quad (1.44)$$

joka sijoittamalla täydelliseen yhtälöön antaa vakion C arvoksi $C = f/\rho cv$. Ottamalla huomioon reunaehdot saadaan yhtälöt vakioiden A ja B määrittämiseksi

$$\begin{aligned} u(0) &= A + B = 0, \\ u(L) &= A \exp(\rho cv L/k) + B + fL/\rho cv = 0, \end{aligned} \quad (1.45)$$

josta seuraa vakioille arvot

$$A = \frac{fL}{\rho cv [1 - \exp(\rho cv L/k)]}, \quad B = -A. \quad (1.46)$$

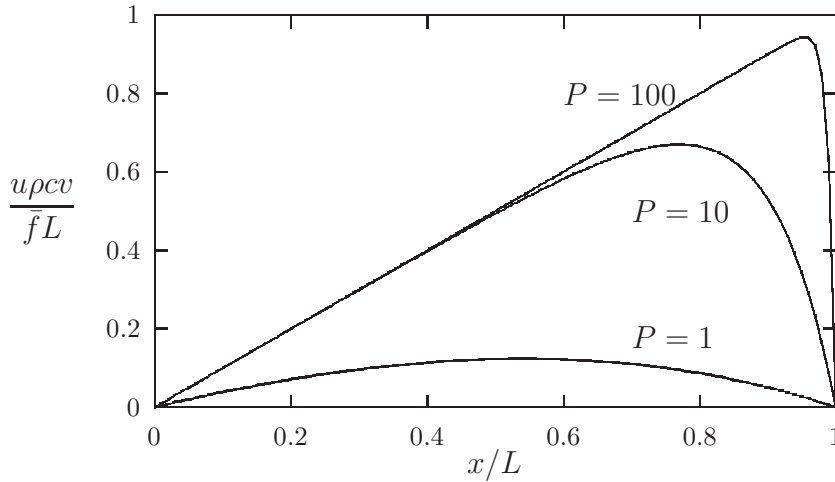
Yhtälön (1.40) täydellinen ratkaisu on siten

$$u(x) = \frac{fL}{\rho cv} \left(\frac{x}{L} - \frac{\exp(Px/L) - 1}{\exp(P) - 1} \right). \quad (1.47)$$

Kun Pécletin luku P on suuri aiheuttaa termit $\exp(P)$ ja $\exp(Px/L)$ hankaluuksia numeeristen arvojen laskennassa, joten muokataan ratkaisun lauseke sopivampaan muotoon

$$u(x) = \frac{fL}{\rho cv} \left\{ \frac{x}{L} - \exp[-P(1 - x/L)] \frac{1 - \exp(-Px/L)}{1 - \exp(-P)} \right\} \quad (1.48)$$

Yhtälö kuvaa esimerkiksi lämmön johtumista ja kulkeutumista nopeudella v etenevässä väliaineessa. Pécletin luku kuvaa siis kulkeutumisen ja johtumisen



Kuva 1.3 Yksidimensioisen stationäärisen diffuusio-konvektioyhtälön ratkaisuja Pécletin luvun P arvoilla $P = 1$, $P = 10$ ja $P = 100$.

välistä suhdetta. Kuvassa 1.3 on esitetty ratkaisun kulku kolmella eri Pécletin luvun arvolla. Mikäli P on suuri, on konvektion osuus dominoiva ja jotta ratkaisu toteuttaisi oikeanpuoleisen reunaehdon syntyy lähelle oikeaa reunaa ns. reunahäiriö. Häiriövyöhykkeen leveys voidaan arvioida kun määritetään funktion $u(x)$ maksimin sijaintikohta, joka saadaan ehdosta

$$\begin{aligned} u'(x) = 0 &\Rightarrow \exp(Px) = \frac{1}{P}(\exp(P) - 1), \\ \text{kun } P \text{ suuri} &\Rightarrow \exp(Px) \simeq \frac{1}{P} \exp(P) \end{aligned} \quad (1.49)$$

ja se on luokkaa

$$\sim \left(\frac{1}{P} \ln P \right) L. \quad (1.50)$$

Yhtälö on elliptinen reuna-arvotehtävä, mutta Pécletin luvun P suuretessa yhtälön (1.40) toisen derivaatan merkitys pienenee pienenemistään. Rajalla kun $P = \infty$ supistuu yhtälö pelkästään alkuarvotyypiseksi probleemaksi

$$\rho cv u' = f, \quad (1.51)$$

jolle voidaan antaa vain alkuehto $u(0) = 0$ ja jonka ratkaisu on $u(x) = fx/\rho cv$. Kuvasta 1.3 havaitaan yhtälön (1.40) ratkaisun pyrkivän ratkaisua (1.51) kohden P :n kasvaessa.

Yhtälön (1.40) epästationäärinen muoto on

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho cv \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad (1.52)$$

joka on parabolinen ODY (ks. harj. teht.). Mikäli nyt lämmönjohtavuus $k \rightarrow 0$ eli $P \rightarrow \infty$ muuntuu yhtälön tyyppi rajalla $k = 0$ hyperboliseksi. Suurilla

Pécletin luvun arvoilla yhtälön käyttäytyminen muistuttaa hyperbolisen yhtälön käyttäytymistä vaikkakin yhtälö on "virallisesti" parabolinen. Numeerisissa laskelmissa se saattaa aiheuttaa ongelmia. Tähän seikkaan palataan myöhemmin.

1.6 Yhteenveto

Tekniikassa esiintyvät osittaisdifferentiaaliyhtälöt voidaan luokitella tehtävän ajallisen luonteen perusteella (i) tasapainotehtäviin ja (ii) etenemistehtäviin tai karakterististen ominaisuuksien perusteella (a) elliptisiin, (b) parabolisiin ja (c) hyperbolisiin yhtälöihin. Tasapainotehtävät ovat ajasta riippumattomia stationäärisen tilan ongelmia ja ne ovat yleensä elliptisiä. Ajan suhteen muuttuvat etenemistehtävät (edetään ajassa) ovat joko parabolisia tai hyperbolisia yhtälöitä.

Tämän luokittelun lisäksi on olemassa ominaisarvotehtäviä, jotka liittyvät joko tasapainotehtäviin tai etenemistyyppisiin tehtäviin.

Sama yhtälö voi eri ratkaisualan kohdissa olla eri tyyppiä. Mikäli yhtälö on epälineaarinen, voi ratkaisu itsessään muuttaa yhtälön tyyppiä.

Elliptiset tasapainotehtävät ovat reuna-arvotehtäviä, joille on ominaista, että "kaikki vaikuttaa kaikkeen". Tämä tarkoittaa sitä, että pienimmänkin kuormituksen vaikutus ulottuu yli koko ratkaisualan.

Paraboliset etenemistehtävät ovat alkuarvo- reuna-arvotehtäviä, joille on ominaista aallonpituudesta riippuva vaimenemisominaisuus ja häiriön ääretön etenemisnopeus. Parabolisen ongelman ratkaisu siloittuu ajan edetessä, mikä tarkoittaa ratkaisun spatiaalisesti korkeataajuisempien komponenttien (lyhyempi aallonpituus) nopeampana vaimenemisenä.

Hyperboliset etenemistehtävät ovat alkuarvo- reuna-arvotehtäviä. Hyperbolisten yhtälöiden ratkaisut ovat konservatiivisia, eli ratkaisuun sisältyy jokin säilyvä ominaisuus, joka voi olla esimerkiksi energia. Lisäksi hyperboliselle systeemille on ominaista häiriön *äärellinen etenemisnopeus*. Ne ovat myös ajan suhteen symmetrisiä. Häiriön äärellisestä etenemisnopeudesta johtuen on häiriöllä tietty vaikutusalue aika-paikka avaruudessa.

1.7 Harjoitustehtäviä

1. Assosioi lämmönjohtumisprobleemassa esiintyvät suureet kuvan 1.2 perusstruktuuriin. Identifioi myös operaattorit A , B ja D .
2. Kirjoita taivutetun palkin probleemassa esiintyvät suureet perusstruktuurin muodossa. Identifioi myös operaattorit A , B ja D .
3. Näytä, että kaksidimensioinen stationäärinen lämmönjohtumisyhtälö

$$-k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f$$

on tyypiltään elliptinen osittaisdifferentiaaliyhtälö.

4. Näytä, että epästationäärinen diffuusio-konvektioyhtälö (1.40) on parabolinen. Tutki myös degeneroitunutta tapausta kun lämmönjohtavuus $k = 0$.

5. Näytä, että funktio

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-(\xi+\tau)^2 P/4\tau}$$

toteuttaa dimensiottomaan muotoon kirjoitetun homogeenisen diffuusio-konvektioyhtälön

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{P} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Piirrä yhtälön kuvaajia eri dimensiottoman ajan τ hetkillä ja Pécletin luvun P arvoilla 1 ja 100. Näytä myös, että siirtymällä liikkuvaan koordinaatistoon $X = \xi + \tau$ ja $T = \tau/P$ yllä oleva yhtälö palautuu muotoon

$$\frac{\partial u}{\partial T} - \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = 0.$$

6. Mitä tyyppiä yhtälö

$$\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f$$

on? Mitä fysikaalista ilmiötä se kuvaa?

7. Näytä, että diffuusioyhtälön (1.13) ratkaisu on muotoa (1.14) käyttämällä muuttujien erottelukeinoa, eli otaksumalla

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t),$$

jossa X, Y, T ovat tuntemattomia yhden muuttujan funktioita, jotka määritetään sijoittamalla yrite kenttäyhtälöön, josta seuraa kullekin funktiolle ratkaistavaksi tavallinen differentiaaliyhtälö.

8. Käy läpi yksityiskohdat aaltoyhtälön ratkaisun (1.19) johdossa. Huomaa, että muuttujien erottelukeino on tässäkin tapauksessa hyödyllinen menettely.

9. Näytä, että aaltoyhtälön (1.18) toteuttaa myös yrite

$$u(x, y, t) = e^{i(k_1 x + k_2 y + \omega t)},$$

jossa $i = \sqrt{-1}$. Johda yhteys aallon etenemisnopeuden c ja aaltolukujen k_1, k_2 ja ominaistajuuden ω välille.

10. Näytä, että aaltoyhtälö kolmiulotteisessa paikkakoordinaattiavaruudessa redusoituu pallosymmetrisessä tapauksessa yksidimensioiseen aaltoyhtälöön

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(ru) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) = 0,$$

jossa r on säteen suuntainen pallokoordinaatti.

11. Ratkaise yksiulotteinen diffuusioyhtälö alueessa $\Omega = \{x \in (0, L)\}$ kun kuormituksena on lämmönlähde $f(x) = f_c \cos(\pi x/2L)$ ja alkulämpötila hetkellä $t = 0$ on $u(x, 0) \equiv 0$, sekä reunaehdot $u'(0) = 0, u(L) = 0$. Määritä myös lämpövuoto reunalla $x = L$.
12. Ratkaise stationäärinen 1-dimensioinen diffuusioyhtälö

$$-ku'' = f, \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0,$$

kun lähdetermi f riippuu ratkaisusta tavalla $f = s - qu$, jossa s ja q ovat positiivisia vakioita. Piirrä ratkaisun kuvaajia eri suhteen qL^2/k arvoilla. Mitä tapahtuu kun $qL^2/k \rightarrow \infty$?

13. Esimerkkitehtävän 1.1 ratkaisut on piirretty kuvaan 1.3 eri Pécletin luvun arvoilla. Ratkaisu on esitetty dimensiottomassa muodossa jakamalla lämpötila u suureella $fL/\rho cv$. Koska lämmönjohtavuuden k arvo on eliminoitu käyttäen hyväksi Pécletin lukua P , vastaavat kuvassa esitetyt ratkaisut ongelmaa, jossa lähdetermi f kasvaa Pécletin luvun kasvaessa. Piirrä ratkaisut kun lämmönlähteen antoisuus ja lämmönjohtavuus pidetään vakiona, eli esitä kuvaaja skaalaamalla u suureella fL^2/k .
14. Johda harmoonisuusotaksuman avulla Maxwellin yhtälöistä (1.20)-(1.24) aaltoyhtälö (1.38 tai vaihtoehtoisesti (1.39)).
15. Johda yhtälö (1.26) tai (1.27) Maxwellin yleisistä yhtälöistä (1.20)-(1.24) käyttäen hyväksi väliaine- eli konstitutiivisia yhtälöitä (1.25).

