

# Johdatus mekaniikan ja sähkömagnetiikan numeerisiin menetelmiin

luentomoniste - 2014

Reijo KOUHIA

Markku TUOMALA

# Sisältö

<b>1 Johdanto</b>	<b>1</b>
1.1 Fysikaalisten ilmiöiden mallintaminen	1
1.2 Matemaattisen mallin perusrakenne	2
1.3 Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden luokittelusta	3
1.4 Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisujen luonteesta	6
1.4.1 Parabolinen yhtälö	6
1.4.2 Hyperbolinen yhtälö	7
1.4.3 Elliptinen yhtälö	8
1.4.4 Muutamia huomioita yhtälöiden luokittelussa	9
1.5 Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmistä	11
1.6 Yhteenveto	15
1.7 Harjoitustehtäviä	15
<b>2 Variaatioperiaatteet</b>	<b>19</b>
2.1 Variaatiolaskennan perusteita	19
2.2 Oleelliset ja luonnolliset reunaehdot	26
2.3 Variaatiotehtävän likiratkaisumenetelmiä	29
2.3.1 Painotettujen jäännösten menetelmä	29
2.3.2 Kollokaatiomenetelmät	33
2.3.3 Pienimmän neliön menetelmä	34
2.3.4 Galerkinin menetelmä	35
2.3.5 Rayleighin-Ritzin menetelmä	36
2.3.6 Muutamia huomautuksia	36
2.4 Yhteenveto	37
2.5 Harjoitustehtäviä	38
<b>3 Johdatus elementtimenetelmään</b>	<b>41</b>
3.1 Malliprobleema	41
3.2 Elementtimenetelmän perusosat	43
3.2.1 Yleistä	43
3.2.2 Interpolaatiofunktiot	44
3.3 Malliprobleema elementtimenetelmällä	49

3.4	Diffuusio-konvektioyhtälön numeerinen ratkaisu . . . . .	60
3.5	Stabiloidut formulaatit . . . . .	65
3.6	Yhteenvedo . . . . .	70
3.7	Harjoitustehtäviä . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Elementtimenetelmä tasoalueessa</b>	<b>73</b>
4.1	Kvasiharmoninen yhtälö . . . . .	73
4.2	Lineaarinen kolmioelementti . . . . .	76
4.3	Alakoordinaatit . . . . .	79
4.4	Korkeamman asteen kolmioelementtejä . . . . .	81
4.5	Esimerkkejä diffuusioyhtälön ratkaisusta tasoalueessa . . . . .	86
4.6	Nelikulmioelementtejä . . . . .	99
4.6.1	Elementtiperheet . . . . .	99
4.6.2	Parametrinen kuvaus . . . . .	100
4.6.3	Bilineaarinen interpolaatio . . . . .	102
4.6.4	Bikvadraattinen ja korkeamman asteen interpolaatio . . . . .	105
4.7	Elementtimatriisien muodostaminen . . . . .	107
4.8	Parametriset kolmioelementit . . . . .	110
4.9	Hierarkkinen interpolaatio kahdessa dimensiossa . . . . .	113
4.9.1	Nelikulmioelementit . . . . .	113
4.9.2	Kolmioelementit . . . . .	114
4.10	Yhteenvedo . . . . .	115
4.11	Harjoitustehtäviä . . . . .	115
<b>5</b>	<b>Mekaniikan variaatioperiaatteita</b>	<b>119</b>
5.1	Johdanto . . . . .	119
5.2	Virtuaalisen työn periaate . . . . .	123
5.3	Potentiaalienergian minimin periaate . . . . .	124
5.4	Muunnoksia potentiaalienergian minimin periaatteesta . . . . .	127
5.5	Harjoitustehtäviä . . . . .	128
<b>6</b>	<b>Kontinuumielementtejä</b>	<b>129</b>
6.1	Tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilan elementit . . . . .	129
6.2	Pyörähdyssymmetrisen tilan elementti . . . . .	132
6.3	Esimerkkejä . . . . .	132
6.4	Harjoitustehtäviä . . . . .	138
<b>7</b>	<b>Numeerinen integrointi</b>	<b>141</b>
7.1	Johdanto . . . . .	141
7.2	Newton-Cotes menetelmä . . . . .	142
7.3	Gaussin-Legendren menetelmä . . . . .	144
7.4	Gaussin-Lobatto menetelmä . . . . .	148

7.5	Numeerinen integrointi kolmioelementissä . . . . .	149
7.6	Isoparametristen elementtien integrointi . . . . .	149
7.6.1	Yleistä . . . . .	149
7.6.2	Redusoitu integrointi ja nollaenergiamuodot . . . . .	151
7.6.3	Mekanismien kontrollointi . . . . .	155
7.6.4	Nollaenergiamuotojen määrä elementtiverkossa . . . . .	156
7.6.5	Reunakuormitus . . . . .	158
<b>8</b>	<b>Elementtiapproksimaation tarkkuus</b>	<b>163</b>
8.1	Virheen mittaaminen . . . . .	163
8.2	A priori virhearviot . . . . .	164
8.3	Säännöllisyysluokat . . . . .	165
8.4	Elementtimenetelmän $h$ -, $p$ - ja $hp$ -versiot . . . . .	166
8.5	Elementtimenetelmän geometrinen tulkinta . . . . .	167
8.6	Elementtimenetelmän abstrakti formulaatio . . . . .	169
<b>9</b>	<b>Palkkielementejä</b>	<b>171</b>
9.1	Eulerin-Bernoullin palkkimalli . . . . .	171
9.2	Timoshenkon palkkimalli . . . . .	175
9.2.1	Virtuaalisen työn yhtälö . . . . .	175
9.2.2	Yksinkertainen elementti . . . . .	175
9.2.3	Parannettu elementti . . . . .	179
9.2.4	Numeerinen ali-integrointi . . . . .	181
9.2.5	Leikkausjäykkyyden redusointi . . . . .	182
9.2.6	Viisivapausasteinen elementti . . . . .	187
9.3	Diskreetti EB-palkkimallin elementti . . . . .	188
9.3.1	Tapa 1: kuubinen taipuma, kvadraattinen kiertymä . . . . .	188
9.3.2	Tapa 2: sekä taipuma että kiertymä kvadraattinen . . . . .	189
9.4	Harjoitustehtäviä . . . . .	191
<b>10</b>	<b>Laattaelementtejä</b>	<b>195</b>
10.1	Kirchhoffin laattamalli . . . . .	195
10.1.1	Kinemaattiset otaksumat . . . . .	195
10.1.2	Virtuaalisen työn yhtälö . . . . .	197
10.1.3	Ohuen laatan elementin yhteensopivuus- ja täydellisyysvaatimukset	199
10.2	Laattaelementtejä historian lehdiltä . . . . .	200
10.2.1	Suorakaide-elementti . . . . .	200
10.2.2	Bikuubinen suorakaide-elementti . . . . .	201
10.2.3	Morleyn vakiokaarevuuselementti . . . . .	202
10.2.4	Muita kolmioelementtejä . . . . .	203
10.3	Reissnerin-Mindlinin laattamalli . . . . .	204
10.3.1	Elementin formulointi . . . . .	204

10.3.2	Numeerinen integrointi . . . . .	207
10.3.3	Reissnerin-Mindlinin laattaelementtien mekanismit . . . . .	210
10.4	DK otaksumaan perustuvat elementit . . . . .	211
10.5	Toinen DK-elementtien johtotapa . . . . .	214
10.6	Laatan reunaehdot . . . . .	218
10.7	Esimerkkejä . . . . .	220
10.8	Stabiileja Reissnerin-Mindlinin-laattamallin elementtejä . . . . .	225
10.8.1	Johdanto . . . . .	225
10.8.2	Arnoldin ja Falkin epäkonformi elementti . . . . .	225
10.8.3	Stabiloidut MITC-elementit . . . . .	226
10.8.4	Yleinen stabilointitekniikka Reissnerin-Mindlinin laattamallin elementteille	233
10.9	Harjoitustehtäviä . . . . .	236
<b>11</b>	<b>Kaarevien sauvojen analysointi</b>	<b>239</b>
11.1	Kehäsauvaelementti . . . . .	239
11.2	Isoparametrinen kaarielementti . . . . .	242
<b>12</b>	<b>3D elementtimenetelmä</b>	<b>249</b>
12.1	Johdanto . . . . .	249
12.2	Kolmiulotteinen interpolaatio . . . . .	250
12.2.1	Lineaarinen interpolaatio . . . . .	250
12.2.2	Tilavuuskoordinaatit . . . . .	251
12.2.3	Muita 3D-elementtigeometrioita . . . . .	252
12.2.4	Isoparametrinen kuvaus . . . . .	252
12.2.5	Solmuihin sidottu interpolaatio . . . . .	255
12.2.6	Hierarkkinen interpolaatio . . . . .	257
<b>13</b>	<b>Kuorielementtejä</b>	<b>261</b>
13.1	Tasokuorielementti . . . . .	261
13.2	Kaareva, isoparametrinen kuorielementti . . . . .	266
13.2.1	Kuorielementin geometriset suureet . . . . .	266
13.2.2	Siirtymien interpolointi . . . . .	269
13.2.3	Kuoren muodonmuutokset . . . . .	270
<b>14</b>	<b>Derivaattasuureiden laskennasta</b>	<b>275</b>
14.1	Ekstrapolaatio . . . . .	275
14.2	Pienimmän neliön keino . . . . .	276
14.2.1	Harjoitustehtäviä . . . . .	279
<b>15</b>	<b>Sekaelementtimenetelmät</b>	<b>281</b>
15.1	Johdanto . . . . .	281
15.2	Yksinkertainen esimerkkiongelman . . . . .	281

15.2.1	Symmetrisen heikon muodon johto . . . . .	281
15.2.2	Muutamia huomautuksia . . . . .	284
15.3	Eulerin-Bernoullin palkkimallin sekaelementtimenetelmäformulaatio . . . . .	286
15.4	Kokoonpuristumattoman aineen ongelma . . . . .	286
15.5	Stabiloidut sekaelementtimenetelmäformulaatiot . . . . .	290
<b>16</b>	<b>Sähkömagnetiikan numeerisia menetelmiä</b>	<b>291</b>
16.1	Johdanto . . . . .	291
16.2	Maxwellin yhtälön ratkaisujen luonteesta . . . . .	294
16.3	Staattiset kentät . . . . .	295
16.4	Vektoripotentialiyhtälön numeerinen ratkaisu . . . . .	297
16.4.1	Heikko muoto . . . . .	297
16.4.2	Ominaisarvottehtävä aikaharmoniselle sähkökentälle . . . . .	299
16.5	Roottoriyhteensopivat kantafunktiot . . . . .	299
<b>17</b>	<b>Systeemyhtälöiden ratkaisu</b>	<b>307</b>
17.1	Johdanto . . . . .	307
17.2	Suorat eliminaatiomenetelmät . . . . .	310
17.2.1	Croutin ja Choleskyn hajotelmat . . . . .	310
17.2.2	Aaltorintamatekniikka . . . . .	313
17.2.3	Alirakennetekniikka . . . . .	313
17.3	Iteratiiviset menetelmät . . . . .	314
17.3.1	Yksinkertaisia iteraatioalgoritmeja . . . . .	315
17.3.2	Minimointialgoritmejä . . . . .	319
17.3.3	Pohjustinstrategioista . . . . .	323
17.3.4	Moniverkkoalgoritmi . . . . .	323
17.4	Menetelmien vertailua . . . . .	326
<b>18</b>	<b>Etenemistehtävien numeerinen ratkaisu - diffuusioyhtälö</b>	<b>329</b>
18.1	Diffuusioyhtälö . . . . .	329
18.2	Yksiaskeldifferenssimenetelmiä . . . . .	330
18.2.1	Eulerin menetelmät . . . . .	330
18.2.2	Crankin-Nicolsonin menetelmä . . . . .	331
18.2.3	Keskipistekaava . . . . .	331
18.2.4	Eksplisiittiset ja implisiittiset menetelmät . . . . .	332
18.2.5	Menetelmien tarkkuus ja stabiilius . . . . .	332
18.3	Galerkinin menetelmät etenemistehtävien ratkaisussa . . . . .	334
18.3.1	Globaali Galerkinin menetelmä . . . . .	334
18.3.2	Aika-askeleittain jatkuva Galerkinin menetelmä . . . . .	335
18.3.3	Epäjatkua Galerkinin menetelmä . . . . .	336
18.4	Diffuusioyhtälön semidiskreetti muoto . . . . .	337
18.5	Diskreetti diffuusioyhtälö . . . . .	338

18.6	Yleistetyt keskipistekaavan analyysi . . . . .	339
18.6.1	Diagonalisointi ominaismuotosuperpositiolla . . . . .	339
18.6.2	Stabiilius . . . . .	340
18.6.3	Konsistenssi ja konvergenssi . . . . .	342
18.6.4	Muutamia huomioita . . . . .	342
18.6.5	Korkeamman asteen eksplisiittiset yksiaskelmenetelmät . . . . .	344
18.6.6	Korkeamman asteen implisiittiset yksiaskelmenetelmät . . . . .	345
18.7	Moniaskelmenetelmät . . . . .	347
<b>19</b>	<b>Etenemistehtävien numeerinen ratkaisu - liikeyhtälö</b>	<b>353</b>
19.1	Yksivapausasteinen liikeyhtälö . . . . .	353
19.2	Keskeisdifferenssimenetelmä . . . . .	354
19.3	Newmarkin menetelmäperhe . . . . .	355
19.3.1	Menetelmä ja sen stabiiliusanalyysi . . . . .	355
19.3.2	Newmarkin menetelmäperheen tunnettuja edustajia . . . . .	359
19.4	Vaimennettu värähtelijä . . . . .	360
19.4.1	Keskeisdifferenssimenetelmä vaimennetulle liikeyhtälölle . . . . .	361
19.4.2	Newmarkin menetelmä vaimennetulle liikeyhtälölle . . . . .	363
19.5	Yleistetty $\alpha$ -menetelmä . . . . .	366
19.6	Moniaskelmenetelmät . . . . .	367
19.6.1	Johto Taylorin kehittämän avulla . . . . .	368
19.6.2	Moniaskelmenetelmän kertaluku . . . . .	370
19.6.3	Konsistenssi . . . . .	371
19.6.4	Kankeat yhtälöt . . . . .	374
19.6.5	Moniaskelmenetelmän stabiiliusalue . . . . .	374
19.6.6	Toisen kertaluvun yhtälöt . . . . .	377
19.7	Vaimennuksen mallintaminen . . . . .	380
19.7.1	Väliaineen vastus . . . . .	381
19.7.2	Materiaalin vaimennus . . . . .	383
<b>20</b>	<b>Elementtimenetelmän ohjelmointi</b>	<b>385</b>
20.1	Johdanto . . . . .	385
20.2	Elementtimatriisien muodostaminen . . . . .	386
20.2.1	Interpolaatiofunktiot . . . . .	386
20.3	Matriisin varastointitavat ja kokoamisprosessi . . . . .	386
20.4	Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu . . . . .	386
20.4.1	Johdanto . . . . .	386
20.4.2	Suorat ratkaisijat . . . . .	387
	<b>Kirjallisuutta</b>	<b>393</b>
	<b>Liitteet</b>	<b>398</b>

---

<b>A</b>	<b>Hermiten interpolaatiopolynomit</b>	<b>399</b>
A.1	Solmuinterpolaatio . . . . .	399
A.2	Hierarkiset $C_1$ -interpolaatiofunktiot . . . . .	400
<b>B</b>	<b>Lagrangen kertojamenettely</b>	<b>403</b>
<b>C</b>	<b>R-M laattamallin reunahäiriöt</b>	<b>409</b>
C.1	Tasapainoyhtälöiden muokkaus . . . . .	409
C.2	Esimerkkinä puoliääretön laatta . . . . .	411
C.3	Yhteenvedo . . . . .	416





# Luku 1

## Johdanto

Luvun tarkoituksena on esitellä erilaisia differentiaaliyhtälötyyppejä ja antaa käsitys niiden ratkaisujen ominaisuuksista. Jotta voitaisiin konstruoida hyvin toimivia numeerisia menetelmiä, on tunnettava ratkaistavan ongelman luonteenpiirteet.<sup>1</sup>

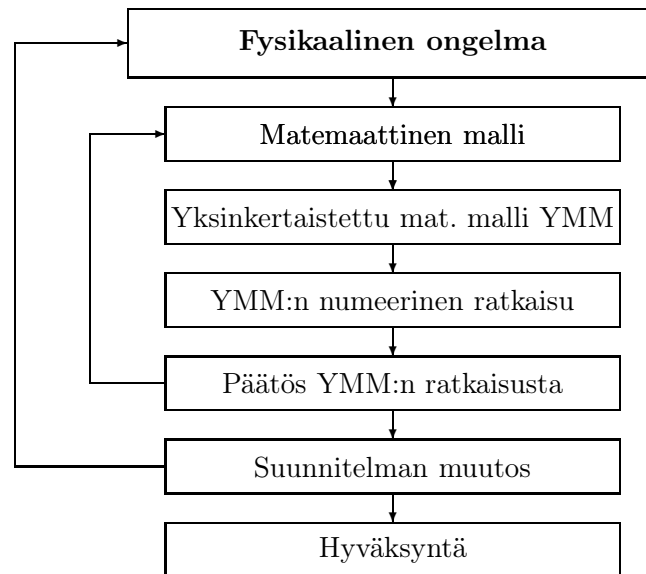
### 1.1 Fysikaalisten ilmiöiden mallintaminen

Luonnontieteellisten ja teknisten ongelmien ratkaisemisessa matemaattisella mallinnuksella on keskeinen rooli. Ratkaisun kulku on usein kuvan 1.1 mukainen. Ratkaistavana olevasta fysikaalisesta ongelmasta muodostetaan matemaattinen malli, jonka pitäisi pyrkiä kuvaamaan ongelmassa esiintyvät ilmiöt mahdollisimman hyvin. Tässä vaiheessa päätetään myös kriteerit joilla ongelman ratkaisun kelpoisuutta arvioidaan. Usein tällainen malli on liian monimutkainen, joten matemaattista mallia joudutaan yksinkertaistamaan jättämällä siitä pois osia, joiden vaikutuksen arvioidaan olevan haluttuun tarkkuuteen nähden vähäinen. Yksinkertaistettu matemaattinen mallikin voi olla liian monimutkainen, jotta ratkaisu onnistuisi analyttisesti. Tällöin malli voidaan ratkaista numeerisesti. Numeerisesta ratkaisusta tehdään päätelmiä yksinkertaistetun matemaattisen mallin toimivuudesta kyseiseen ongelmaan ja mahdollisesti siihen tehtävistä muutoksista. Ratkaisu voi tuoda esiin myös muutostarpeita itse fysikaalisen ongelman määrittelyyn.

Matemaattisen mallin ja yksinkertaistetun matemaattisen mallin ratkaisujen välistä erotusta kutsutaan mallinnusvirheeksi. Mikäli mallinnusvirheen suhteen haluttu tarkkuus voidaan saavuttaa, sanotaan probleeman ratkaisun olevan ennustettavissa. Kaikille tuttu esimerkki ennustamattomista tehtävistä on pitkän aikavälin sääennusteet. Mallinnusvirheeksi voidaan käsittää myös todellisuuden ja mallin välinen ero. Tämä “mallinnusvirhe” ei kuitenkaan ole kvantifioitavissa.

Yksinkertaistetun matemaattisen mallin ja sen numeerisen ratkaisun välistä erotusta kutsutaan laskentavirheeksi, ja ongelman sanotaan olevan laskettavissa, mikäli

<sup>1</sup>Katso esimerkiksi J.G. Simmondsin artikkelia “Don’t compute ’til you see the whites of their eyes” teoksessa *Analytical and computational models of shells*, ASME, 1989.



**Kuva 1.1** Fysikaalisen ongelman ratkaisun periaate.

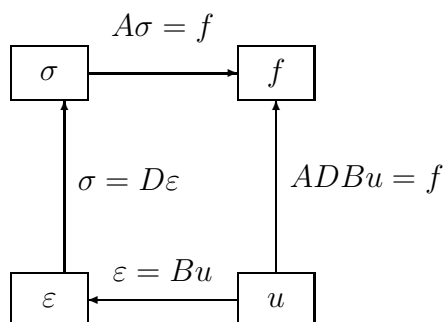
laskentavirheen suhteen haluttu tarkkuus voidaan saavuttaa.

## 1.2 Matemaattisen mallin perusrakenne

Hyvin usein fysikaalisten ilmiöiden matemaattisessa mallintamisessa joudutaan yhtälösystemiin, joka rakentuu kolmentyyppisistä relaatioista. Kyseisen fysikaalisen teoriakehyksen yleiset peruslait, aksioomat eli luonnonlait antavat osan vallitsevista yhtälöistä. Niiden pätevyyttä ei yleensä tarvitse epäillä. Ne eivät kuitenkaan riitä, vaan lisäksi tarvitaan ns. konstitutiivisia yhtälöitä, jotka kuvaavat kulloinkin esiintyvien materiaalien käyttäytymistä enemmän tai vähemmän totuudenmukaisesti. Aksiomien ja materiaalilakien matemaattinen esittäminen vaatii lisäksi geometrinen relaatioiden (kinematiikan) hallintaa.

Edellä esitetyn rakenteen mukaiset yhteydet ovat usein tyypiltään kimppu osittaisdifferentiaaliyhtälöitä tai yksinkertaisimmillaan algebrallisia relaatioita. Useat mekaniikassa esiintyvät ilmiöt voidaan mallintaa kuvassa 1.2 esiintyvän lohko-kaavion mukaisesti. Kuvassa 1.2 ylimmäisenä on esitetty Newtonin liikelakiin pohjautuvat tasapainoyhtälöt muodossa  $A\sigma = f$ , jossa  $A$  on kyseisen probleeman tasapaino-operaattori, joka kuvaa jännityksen  $\sigma$  ulkoisten kuormien joukon alkioksi  $f$ . Kuvion vasemmassa laidassa on esitetty materiaalilaki, jossa venymä  $\varepsilon$  kuvautuu materiaalin jäykkyysoperaattorin  $D$  välityksellä jännitysten joukon alkioksi  $\sigma$ . Systemin täydentää kinemaattiset yhteydet siirtymien  $u$  ja venymien  $\varepsilon$  välillä, joka välittyy operaattorin  $B$  kautta.

Oheinen struktuuri on hyvin yleinen fysikaalisten ongelmien mallinnuksessa, mm. lämmönjohtumisen, kosteudensiirtymisen, virtausongelmien jne. tapauksissa. Täl-



**Kuva 1.2** Matemaattisen mallin perusstruktuuri.

lön fysikaalisten suureiden  $(\sigma, \varepsilon)$  ja  $(f, u)$  merkitys on vain erilainen.

Sähkömagnetiikan yhtälöiden rakenne on monimutkaisempi ja siihen palataan myöhemmin.

Ongelman ratkeavuuden, erityisesti yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolon edellytyksenä on myös riittävien reuna- ja/tai alkuehtojen asettaminen.

### 1.3 Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden luokittelusta

Vaikka useiden fysikaalisten ilmiöiden matemaattiset mallit voidaan kuvata kaavion 1.2 muodossa, voi niiden ratkaisujen käyttäytyminen poiketa huomattavastikin toisistaan, riippuen siitä millaisia olioita  $f, A, B, D$  ovat. Koska numeeristen likiratkaisujen onnistunut konstruoiminen edellyttää ratkaistavan probleeman luonteen tuntemusta, tarkastellaan hieman millaisia osittaisdifferentiaaliyhtälöiden perustyypppejä on olemassa ja mitkä ovat niiden karakteristiset ominaisuudet. Näitä ominaisuuksia pyritään numeeristen algoritmien kehittäessä matkimaan mahdollisimman aidosti.

Tarkastellaan nyt yksinkertaisuuden vuoksi osittaisdifferentiaaliyhtälöiden luokittelua lineaarisen skalaariyhtälön tapauksessa. Luokittelu voidaan myös yleistää yhtälösystemeille ja epälineaarisiin tapauksiin.

Yleinen kertalukua  $m$  oleva lineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö tuntemattoman skalaarifunktion  $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$  suhteen on muotoa <sup>2</sup>

$$\sum a_{i_1 \dots i_n}(x) \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} + L_1 u = f(x), \quad \sum_{j=1}^n i_j = m, \quad (1.1)$$

jossa  $L_1$  on lineaarinen osittaisdifferentiaalioperaattori joka on alhaisempaa astetta (astetta  $< m$ ), kuin yhtälön ns. pääosa (astetta  $m$ ) ja jossa  $a_{i_1 \dots i_n}(x), f(x)$  ovat reaalisia muuttujien  $x_i$  funktioita. Yhtälön (1.1) ns. karakteristinen muoto on reaaliparametrien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  kertalukua  $m$  oleva multilineaarinen muoto

$$K(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum a_{i_1 \dots i_n}(x) \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_n^{i_n}, \quad \sum_{j=1}^n i_j = m. \quad (1.2)$$

<sup>2</sup>Tämän voi ajatella vaikkapa yhtälöksi  $ADB u = f$ , katso kuva 1.2.

Yhtälöä (1.1) sanotaan *paraboliseksi* (parabolisesti degeneroituneeksi) pisteessä  $x$ , mikäli on olemassa affiini muunnos muuttujien  $\lambda_i = \lambda_i(\mu_1, \dots, \mu_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$  suhteen, joka muuntaa karakteristisen muodon muuttujien  $\mu_i$  multilineaariseksi muodoksi ja johon jää riippuvuus vain  $\ell$ :stä muuttujasta  $0 < \ell < n$ . Mikäli kyseessä ei ole parabolinen degeneraatio, kutsutaan yhtälöä (1.1) *elliptiseksi* pisteessä  $x$ , jos yhtälöllä

$$K(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \quad (1.3)$$

ei ole yhtään nollasta eroavaa reaalista ratkaisua. Mikäli kumpikaan edellämainituista ehdoista ei toteudu, voi yhtälö olla *hyperbolinen* pisteessä  $x$ . Tämä voidaan määrittellä seuraavasti. Muuttujien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  määrittelemässä Euklidisessa avaruudessa on olemassa suora, joka otetaan uudeksi koordinaattiakseliksi. Merkitään uutta koordinaattijärjestelmää  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  joka siis saadaan järjestelmästä  $\lambda_i$  affinisella muunnoksella. Näin saatu muunnettu karakteristinen yhtälö (1.3) voidaan tulkita yhtälöksi tämän uuden akselin koordinaatin suhteen. Mikäli nyt tällä yhtälöllä on tasan  $m$  juurta (yksinkertaista tai moninkertaista) sanotaan tällöin yhtälöä (1.1) hyperboliseksi pisteessä  $x$ .

On syytä huomata, että yhtälön tyyppi saattaa muuttua eri ratkaisualan osissa. Tämä seikka vaikeuttaa huomattavasti yhtälön numeerista ratkaisua. Epälineaarisissa tapauksissa yhtälön (1.1) kertoimet  $a_{i_1, \dots, i_n}$  riippuvat paitsi paikkakoordinaatista  $x$  myös ratkaisusta  $u$  ja/tai sen derivaatoista kertalukuun  $m - 1$  saakka. Koska epälineaarisella yhtälöllä saattaa olla useita ratkaisuja, on edellä esitetty luokittelu mielekäs vain mikäli identifioidaan myös tarkasteltavana oleva ratkaisun haara.

Esimerkkeinä tutkitaan kolmea tekniikan sovellutuksissa hyvin yleisesti esiintyvää osittaisdifferentiaaliyhtälöä:

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u &= f, \\ \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sigma\Delta u &= f, \\ D\Delta\Delta u &= f, \end{aligned} \quad (1.4)$$

jossa  $\Delta$  on Laplacen operaattori, joka suorakulmaisessa koordinaatistossa saa tasotapauksessa muodon

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (1.5)$$

Ensimmäinen yhtälöistä (1.4) on diffuusioyhtälö, joka kuvaa esimerkiksi lämmön siirtymistä johtumalla. Siinä esiintyvät positiiviset vakiot  $c, \rho, k$  merkitsevät tällöin materiaalin ominaislämpöä, tiheyttä ja lämmönjohtavuutta. Yhtälön karakteristinen muoto, assosioimalla muuttujat  $\lambda_1 \leftrightarrow x, \lambda_2 \leftrightarrow y, \lambda_3 \leftrightarrow t$  on

$$K(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -k(\lambda_1^2 + \lambda_2^2). \quad (1.6)$$

Havaitaan, että kyseessä on degeneroitunut tapaus, sillä muuttuja  $\lambda_3$  ei esiinny ollelankaan karakteristisessa muodossa, joten yhtälön tyyppi on parabolinen.

Toinen yhtälöistä (1.4) on ns. aaltoyhtälö ja siinä  $u$  kuvaa esimerkiksi värähtelevän kalvon poikittaista siirtymää. Tällöin vakiot  $\gamma, \sigma$  merkitsevät massatiheyttä pinta-alayksikköä kohden ja kalvon jännitystä pituusyksikköä kohden. Yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f/\gamma, \quad c^2 = \frac{\sigma}{\gamma}, \quad (1.7)$$

jossa  $c$  on aaltoliikkeen etenemisnopeus. Karakteristinen yhtälö on

$$K(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_3^2 - c^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = 0, \quad (1.8)$$

jossa muuttujien assosiointi koordinaatteihin on sama kuin diffuusioyhtälön tapauksessa. Havaitaan, että ratkaisemalla karakteristinen yhtälö muuttujan  $\lambda_3$  suhteen, on sillä tasmälleen kaksi ratkaisua, joten yhtälö on hyperbolinen.

Viimeisin esimerkkiyhtälöistä (1.4) on biharmoninen osittaisdifferentiaaliyhtälö jossa  $u$  kuvaa esimerkiksi laatan taivutuksessa keskipinnan poikittaista siirtymää ja on auki kirjoitettuna muotoa

$$D \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) = f, \quad (1.9)$$

jossa  $D$  merkitsee laatan taivutusjäykkyyttä. Karakteristinen yhtälö on muotoa

$$K(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^4 + 2\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 = 0 \quad (1.10)$$

josta heti havaitaan että ainoa reaalinen ratkaisu on nollaratkaisu, joten yhtälö on elliptinen.

Kaikista edellä esitetyistä yhtälöistä havaitaan, että ne säilyttävät tyyppinsä kaikilla muuttujien  $x, y$  ja  $t$  arvoilla, sillä yhtälöt ovat lineaarisia ja vakiokertoimisia.

Edellä esitetty tapa jaotella yhtälöitä saattaa tuntua hieman epämääräiseltä. Matemaattisesti täsmällinen teoria yhtälöiden luokittelusta kuuluu karakteristika-teorian piiriin. Tässä teoriassa luokittelu hyperbolisten, parabolisten ja elliptisten yhtälöiden välillä perustuu karakterististen pintojen (tai käyrien) olemassaoloon ja lukumäärään. Karakteristinen pinta on sellainen jolla ns. Cauchy-ongelmalla<sup>3</sup> ei ole yksikäsitteistä ratkaisua. Cauchyn ongelma tarkoittaa sitä, että määrääkö tietyllä pinnalla annetut funktion ja sen derivaatan arvot (kertalukuun  $m - 1$  saakka mikäli yhtälön kertaluku on  $m$ ) ratkaisun tämän pinnan läheisyydessä. Tätä problemaa nimitetään myös karakteristiseksi alkuarvo-ongelmaksi.

<sup>3</sup>Ongelma on saanut nimensä ranskalaisen matemaatikon ja insinöörin Augustin Cauchyn (1789-1857) nimen mukaan. Häntä pidetään osittaisdifferentiaaliyhtälöiden modernin teorian alullepanijana ja hänen nimensä liitetään myös kuuluisaan teoreemaan osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisujen olemassaolosta, jonka puolalaissyntyinen matemaatikko Sophie Kowalewski todisti väitöskirjassaan melko yleisessä muodossa (Cauchy-Kowalewski teoreema).

## 1.4 Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisujen luonteesta

### 1.4.1 Parabolinen yhtälö

Tarkastellaan nyt edellä esitettyjen kolmen esimerkkiyhtälön ratkaisujen luonnetta. Aloitetaan tutkimalla parabolisen diffuusioyhtälön ratkaisua suorakulmaisessa alueessa  $\Omega = \{(x, y) \in (0, a) \times (0, b)\}$ , ja olettamalla ajanhetkellä  $t = 0$  vallitsevan alkulämpötilan

$$u(x, y, 0) = u_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (1.11)$$

Oletetaan lisäksi, että lämpötila alueen  $\Omega$  reunalla  $S$  on kaikilla ajanhetkillä vakio, eli lämpötilan reunaehdoksi asetetaan

$$u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in S \quad (1.12)$$

ja että alueessa  $\Omega$  ei ole lämmönlähteitä, eli  $f \equiv 0$ . Tällöin ratkaistava ongelma voidaan asettaa seuraavasti: etsi funktio  $u(x, y, t)$ , joka toteuttaa

$$\begin{aligned} \text{kenttäyhtälön :} & \quad c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, & (x, y) \in \Omega, & (1.13) \\ \text{alkuehdon :} & \quad u(x, y, 0) = u_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, & (x, y) \in \Omega, & \\ \text{reunaehdon :} & \quad u(x, y, t) = 0, & (x, y) \in S. & \end{aligned}$$

Ratkaisu löydetään muodossa

$$u(x, y, t) = u_0 e^{-\beta t} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (1.14)$$

joka sijoittamalla yhtälöön (1.13) antaa lausekkeen

$$\left\{ -c\rho\beta + k \left[ \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \right] \right\} = 0 \quad (1.15)$$

vakion  $\beta$  ratkaisemiseksi (huomaa  $\beta > 0$ ):

$$\beta = \pi^2 \frac{k}{c\rho a^2} \left[ 1 + \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right]. \quad (1.16)$$

Diffuusioyhtälön ratkaisu on siis ajan suhteen eksponentiaalisesti vaimeneva, mikä tuntuukin fysikaalisesti oikealta, sillä lämpö siirtyy kohti kylmempää aluetta ja lämpövirta tapahtuu alueesta ulospäin, jos  $u_0 > 0$ . Raja-arvona (kun  $t \rightarrow \infty$ ) saadaan tietenkin tilanne, jossa lämpötila on tasaantunut koko alueessa, eli  $u(x, y) \rightarrow 0$  kun  $t \rightarrow \infty$ . Huomaa myös, että diffuusioyhtälöllä on ratkaisua siloittava ominaisuus. Tämän voi havaita helposti tarkastelemalla ratkaisun kehittymistä ajan suhteen, kun alkuehdoksi asetetaan

$$u(x, y, 0) = u_{01} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + u_{0n} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (1.17)$$

missä  $n$  on positiivinen luonnollinen luku ja  $n > 1$ . Korkeataajuuksinen komponentti siloittuu pois ratkaisusta hyvin nopeasti.

### 1.4.2 Hyperbolinen yhtälö

Etsitään homogeenisen ( $f = 0$ ) aaltoyhtälön ratkaisua suorakulmaisessa tasoalueessa  $\Omega = \{(x, y) \in (0, a) \times (0, b)\}$  ajanhetkellä  $t > 0$ , eli funktiota  $u(x, y, t)$ , joka toteuttaa

$$\begin{aligned} \text{kenttäyhtälön :} \quad & \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sigma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, & (x, y) \in \Omega, & (1.18) \\ \text{alkuehdot :} \quad & u(x, y, 0) = u_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, & (x, y) \in \Omega, \\ & \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = v_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, & (x, y) \in \Omega, \\ \text{reunaehdon :} \quad & u(x, y, t) = 0, & (x, y) \in S. \end{aligned}$$

Huomaa ero diffuusioyhtälöön alkuehtojen lukumäärän suhteen. Ratkaisu voidaan löytää muodossa

$$u(x, y, t) = \left( u_0 \cos \frac{c\pi t}{s} + \frac{v_0 s}{c\pi} \sin \frac{c\pi t}{s} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (1.19)$$

jossa on merkitty  $c^2 = \sigma/\gamma$  ja  $s^{-2} = a^{-2} + b^{-2}$  ja joka kuvaa kalvon vaimentumatonta harmonista värähtelytilaa. Peruserona parabolisen ja hyperbolisen yhtälön välillä onkin juuri yhtälön suhde aikakoordinaattiin  $t$ : hyperbolinen yhtälö on aikasymmetrinen kun taas parabolisessa yhtälössä ajan suunnalla on merkityksensä. Aaltoyhtälölle on myös ominaista, että ratkaisun luonteenpiirteisiin vaikuttaa yhtälön koordinaattiavaruuden dimensio; yhden ja kolmen paikkakoordinaatin tapauksessa ratkaisu on hajaantumaton (engl. sharp) mitä se ei ole tasoalueessa. Ratkaisun hajaantuvuudella tarkoitetaan tässä sitä, miten se reagoi impulssivasteeseen; säilyttääkö ratkaisu tarkasti impulssin muodon vai aiheutuuko siitä myös muita väreilyjä.

Sähkömagneettisten kenttien käyttäytyminen saadaan selville ratkaisemalla fyziikan ja nykytekniikan ehkä tärkeimmät osittaisdifferentiaaliyhtälöt, eli Maxwellin yhtälöt

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.24)$$

jossa  $\mathbf{H}$  on magneettikentän voimakkuus,  $\mathbf{B}$  magneettivuon tiheys,  $\mathbf{E}$  sähkökentän voimakkuus,  $\mathbf{D}$  sähkövuon tiheys,  $\mathbf{J}$  sähkövirran tiheys ja  $\rho$  varaustiheys. Yhtälö (1.20) on nimeltään Ampère-Maxwellin yhtälö ja (1.21) on nimetty Faradayn mukaan. Edellä olevista viidestä yhtälöstä vain kolme on riippumattomia. Joko kolme



ensimmäistä (1.20)-(1.22) tai yhtälöt (1.20), (1.21) ja (1.24) voidaan valita riippumattomiksi yhtälöiksi. Näissä kolmessa yhtälössä on kuitenkin viisi tuntematonta vektorisuuretta, joten tarvitaan konstitutiiviset yhtälöt jotka kuvaavat materiaalin käyttäytymistä. Rajoittamalla yksinkertaiseen lineaariseen ja isotrooppiseen malliin, konstitutiiviset yhtälöt voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.25)$$

jossa  $\epsilon$  on permittiivisyys,  $\mu$  magneettinen permeabiliteetti ja  $\sigma$  sähkönjohtavuus.

Värahtelevän langan liikeyhtälö (1.18) on hyperbolinen skalaariyhtälö, kun taas Maxwellin yhtälöt muodostavat hyperbolisen yhtälösystemin. Maxwellin yhtälöt voidaan saattaa tietyin oletuksin muotoon

$$\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{J}, \quad (1.26)$$

tai vastaavasti

$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times (\epsilon^{-1} \nabla \times \mathbf{H}) - \nabla \times (\epsilon^{-1} \mathbf{J}). \quad (1.27)$$

### 1.4.3 Elliptinen yhtälö

Viimeisenä joskaan ei vähäpätöisimpänä tutkitaan elliptisen laattayhtälön ratkaisua suorakulmaisessa alueessa  $\Omega$ . Valitaan ulkoiseksi kuormitukseksi suuruudeltaan  $F$  oleva pistekuorma kohdassa  $(\xi, \eta) \in \Omega$ , joten ratkaistavana on nyt taipumafunktio  $u(x, y)$ , joka toteuttaa

$$\begin{aligned} \text{kenttäyhtälön :} \quad & D\Delta\Delta u = F\delta(x - \xi, y - \eta), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.28) \\ \text{reunaehdot :} \quad & u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 0, \quad (x, y) \in S, \end{aligned}$$

jossa  $\delta$  on ns. Diracin<sup>4</sup> delta-distributio ja  $n$  viittaa reunakäyrän  $S$  ulkonormaan suuntaan. Ratkaisu saadaan Fourierin<sup>5</sup> sarjojen avulla ja on muotoa

$$u(x, y) = \frac{4F}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{-2} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (1.29)$$

<sup>4</sup>Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984), englantilainen fyysikko.

<sup>5</sup>Jean Baptiste Fourier (1768–1830), ranskalainen matemaatikko ja fyysikko jonka tärkein teos on *Théorie analytique de la chaleur* (1822), joka käsittelee lämmön johtumista ja jossa hän esitti matemaattisen sarjateorian lämmönjohtumisongelman ratkaisemiseksi.

Oheinen ratkaisu pistekuormalle on hyödyllinen, sillä siitä saadaan probleeman (1.28) ns. Greenin funktio<sup>6</sup> eli taipuman influenssipinta  $K(x, y, \xi, \eta)$ :

$$K(x, y, \xi, \eta) = \frac{4}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{-2} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (1.30)$$

joka siis kuvaa pisteessä  $(\xi, \eta)$  vaikuttavan yksikköpistekuorman kuormittamaa laatan taipumaa pisteessä  $(x, y)$ . Siitä voidaan konstruoida ratkaisu mille tahansa jakautuneelle kuormitukselle  $f(\xi, \eta)$  käyttäen superpositioperiaatetta, jolloin saadaan

$$u(x, y) = \int \int_A f(\xi, \eta) K(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (1.31)$$

ja jossa integrointi suoritetaan kuormitetun pinnan ylitse. Greenin funktiosta havaitaan sen olevan symmetrinen muuttujien  $x, \xi$  ja  $y, \eta$  suhteen, josta mekaniikassa tunnettu Maxwellin vastavuoroisuusväittäjä voidaan helposti osoittaa paikkansa pitäväksi tälle erikoistapaukselle.

Pistekuormalla kuormitetun laatan ratkaisusta (1.29) havaitaan myös elliptisille yhtälöille ominainen piirre: olkoon kuormitus miten pieni tahansa, sen vaikutus ulottuu yli koko tarkasteltavan alueen.

#### 1.4.4 Muutamia huomioita yhtälöiden luokittelussa

##### 1.4.4.1 Rajatapaukset

Osittaisdifferentiaaliyhtälön käyttäytymisen määrittävät sen korkeimmat derivaatat. Mikäli niihin liittyvät kertoimet ovat pieniä verrattuna alhaisasteisempien termien kertoimiin, voi ratkaisun käyttäytyminen muuttua. Yksi mielenkiintoinen välimuototapaus on ns. diffuusio-konvektioyhtälö, joka dimensiottomassa muodossa kirjoitettuna yksiulotteisessa paikka-avaruudessa on

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{P} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = f, \quad (1.32)$$

ja jonka numeerinen ratkaisu tuotti ongelmia vielä 1980 luvun alkupuolelle saakka, etenkin konvektion dominoimissa tehtävissä (Pécletin luku  $P$  suuri). "Virallisesti" yhtälö on parabolinen, mutta käytännössä yhtälön käyttäytyminen on lähempänä hyperbolisen yhtälön käyttäytymistä kun  $P$  on suuri. Kun  $P$  on pieni (luokkaa  $\sim 1$ ), diffuusion osuus dominoi ratkaisua ja yhtälön parabolinen luonne on hallitseva, eikä yhtälön ratkaisu tuota ongelmia tavanomaisille numeerisille menetelmillekään.

<sup>6</sup>George Green oli pääosin itseoppinut englantilainen matemaatikko, joka vuonna 1828 julkaisi omakustanteena teoksen "On the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism". Teoksessaan hän johtaa integraaliesityksen mm. tietyille Laplacen yhtälön ratkaisuille.

Diffuusio-reaktioyhtälössä on toinen esimerkki rajatapauksesta erityisesti silloin kun reaktiitermi on hallitseva diffuusiotermiin verrattuna, katso harjoitustehtävä 12 sivulla 17. Kiinteän aineen mekaniikassa samankaltaisiin ongelmiin törmätään esimerkiksi laatta- ja kuorirakenteita analysoitaessa.

#### 1.4.4.2 Tasapaino- ja etenemistehtävät

Diffuusio- (1.13) ja aaltoyhtälöistä (1.18) havaitaan, että yhdellä koordinaattisuorella, nimittäin ajalla, on oma erikoisasemansa. Tähän seikkaan nojautuen voidaan suorittaa tehtävätyypin jako myös fysikaalisin perustein ja ajasta riippuvia tehtäviä kutsutaan yhteisellä nimellä etenemistehtävät, jossa systeemin tilaa pyritään ennustamaan tietyssä ratkaisualueessa (paikkakoordinaattien suhteen) ajan suhteen edeten. Puhutaan myös alkuarvotehtävistä tai yhdistetyistä alku- reuna-arvotehtävistä.

Kappaleessa 1.3 esitetty osittaisdifferentiaaliyhtälöiden luokittelumetodi saattaa tuntua vaikeasti sovellettavalta. Erityisesti hyperbolisen ja parabolisen yhtälön erottaminen toisistaan voi olla hankalaa. Helppo tapa erottaa parabolinen yhtälö hyperbolisesta on sijoittaa yrite

$$u = e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (1.33)$$

ja etsiä kulmataajuuden  $\omega$  ja aaltolukujen  $k_1, k_2, k_3$  ( $k = |\vec{k}|$ ,  $\vec{k} = k_1 \vec{i} + k_2 \vec{j} + k_3 \vec{k}$ ) välinen yhteys. Ratkaisemalla  $\omega = \omega(k)$  tästä yhteydestä voidaan yhtälön tyyppi päätellä siitä ovatko kulmataajuudet  $\omega$  reaalisia, jolloin yhtälö on hyperbolinen, vai ovatko ne imaginaarisia, jolloin yhtälö on parabolinen.

Hyperbolisen yhtälön tapauksessa voidaan kulmataajuuden ja aaltoluvun välisestä yhteydestä päätellä myös muita fysikaalisesti kiinnostavia ominaisuuksia. Vaihenopeus  $c$  määritellään yhtälöllä

$$c = \frac{\omega}{k}. \quad (1.34)$$

Mikäli  $c$  on riippuvainen aaltoluvusta  $k$ , tällöin aaltoliikkeessä esiintyvät eri aallonpituiset (muista, että aallonpituus  $\lambda$  on  $\lambda = 2\pi/k$ ) komponentit etenevät eri nopeudella. Tällaista tapausta kutsutaan *dispersiiviseksi*.

Laattayhtälö (1.28) on luonteeltaan tasapainotehtävä, jossa systeemi ratkaistaan pysyvän eli stationäärisen tilan suhteen.

#### 1.4.4.3 Ominaisarvotehtävät

Etenemis- ja tasapainotehtävien lisäksi on olemassa eräs tehtävätyyppi nimittäin ominaisarvotehtävät. Ominaisarvotehtävät voivat liittyä joko etenemistehtäviin tai tasapainotehtäviin. Tyypillisiä tapauksia ovat ominaisvärähtelyjen määrittäminen ja rakenteiden stabiiliusanalyysit. Esimerkiksi ominaisvärähtelytehtävä saadaan aaltoyhtälöstä (1.18), kun otaksutaan ratkaisu harmoniseksi värähtelyksi, jolloin voidaan otaksua aikariippuvuuden olevan muotoa

$$u(x, y, t) = e^{-i\omega t} \phi(x, y), \quad (1.35)$$

jossa  $i$  on imaginaariyksikkö ja  $\omega$  on värähtelyn ominaistajuus. Sijoittamalla tämä yrite aaltoyhtälöön saadaan osittaisdifferentiaaliyhtälö pelkästään paikkakoordinaattien suhteen<sup>7</sup>

$$-\omega^2 \rho \phi - \sigma \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (1.36)$$

Tehtävänä on nyt ratkaista ominaisarvot  $\omega^2$  (tai ainakin joitain arvoja ominaisarvospektristä) ja niitä vastaavat ominaismuodot  $\phi(x, y)$  annetuilla reunaehdoilla. Aaltoyhtälön aikakehitys voidaan kylläkin konstruoida käyttäen hyväksi laskettuja ominaisarvoja ja ominaismuotoja. Tätä menettelyä kutsutaan ominaismuotosuperpositioksi ja se on usein käyttökelpoinen värähtelytehtävissä joissa ratkaisu suurelta osin määräytyy alimpien ominaistajuuksien mukaan. Se ei tietenkään ole käyttökelpoinen sellaisenaan epälineaarisisissa tehtävissä eikä ole taloudellinen aallonetenevistehtävissä joissa rakenteen vaste on riippuvainen laajemmasta taajuuskaistasta kuin värähtelytehtävissä. Toisena esimerkkinä ominaisarvot tehtävistä voidaan mainita vaikkapa levyn lommahdusta tai palkin nurjahdusta kuvaavat yhtälöt, joissa määritetään kriittinen kuormaparametrin arvo ja sitä vastaava ominaismuoto. Esimerkkinä vaikkapa tehtävä

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} + P \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad x \in (0, L), \quad (1.37)$$

jossa  $P$  on ominaisarvo, eli nurjahduskuorma ja  $u$  on sitä vastaava nurjahdusmuoto. Sähkömagnetiikassa harmoonisuusotaksuma johtaa yhtälöön

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{e}) - \omega^2 \epsilon \mathbf{e} = 0, \quad (1.38)$$

tai vaihtoehtoisesti

$$\nabla \times (\epsilon^{-1} \nabla \times \mathbf{h}) - \omega^2 \mu \mathbf{e} = 0. \quad (1.39)$$

## 1.5 Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmistä

Kuten jo oheisista suhteellisen yksinkertaisista esimerkkitaapauksista voitaneen päätellä, on jo lineaaristen vakiokertoimistenkin osittaisdifferentiaaliyhtälöiden analyytinen ratkaisu vaikeaa mikäli kuormitus ja/tai alueen geometria ovat hiemankin monimutkaisemmat.

Onneksi tietokonetekniikan kehitys on mahdollistanut vaikeiden ongelmien likimääräisen ratkaisemisen monimutkaisissa geometrioissa. Perusajatuksena näissä numeerisissa menetelmissä on fyysikaalista ongelmaa kuvaavan matemaattisen mallin korvaaminen diskreetillä matemaattisella mallilla, jossa ratkaisua etsitään sopivien funktioiden joukosta ja että ratkaisu pystytään konstruoimaan äärellisellä määrällä diskreettejä parametreja, jotka ovat lineaarisessa yhteydessä approksimoiviin funktioihin, jolloin ratkaistavaksi jää äärellinen määrä algebrallisia yhtälöitä.

<sup>7</sup> Yhtälöä  $(\Delta + k^2)u = 0$  eli aaltoyhtälön paikkamuotoa kutsutaan myös Helmholtzin yhtälöksi.

Ongelman ratkaisuun sopivan numeerisen metodin konstruoiminen riippuu ratkaistavan probleeman luonteesta. Tällä hetkellä elementtimenetelmä, tai tarkemmin suomennettuna äärellisten elementtien menetelmä on hallitseva elliptistyyppisten kenttäprobleemojen ratkaisussa. Myös parabolisten yhtälöiden tapauksessa yhtälön elliptinen osa pääsääntöisesti diskretoidaan elementtimenetelmällä ja yhtälön aika-riippuvuus integroidaan jollain sopivalla differenssimenetelmällä, samaten kuin rakenteiden dynaamisessa analyysissä. Uudempaa tapaa ajasta riippuvien yhtälöiden diskretoimiseksi edustaa ns. ajan suhteen epäjakuvatkuva Galerkinin keino. Tietyissä tapauksissa se kuitenkin johtaa tunnettuihin differenssikaavoihin.

Virtausmekaniikan yhtälöt ovat usein hyperbolistyyppisiä myös paikkakoordinaatin suhteen. Tästä johtuen standardimuotoinen elementtimenetelmäformulaatio ei useinkaan toimi hyvin virtausmekaniikan ongelmissa. 1980-luvun aikana on ongelma kuitenkin pystytty voittamaan ja uusimmat virtausmekaniikan ohjelmat käyttävät elementtimenetelmää paikkakoordinaattien suhteen suoritettussa diskretoinnissa aikaisemmin yleisen differenssimenetelmän sijaan.

Elementtimenetelmän voidaan ajatella kehittyneen yleistyksenä klassisista Rayleighin-Ritzin (RRM) ja painotettujen jäännösten menetelmästä (PJM). Molemmat menetelmät käyttävät hyväksi variaatioperiaatteita, katso luku 2. Näissä menetelmissä tuntemattomalle funktiolle (tai funktioille) valitaan riittävät jatkuvuusominaisuudet toteuttavien lineaarisesti riippumattomien kantafunktioiden joukosta lineaarikombinaatio, jossa kantafunktioiden kertoimet ovat tuntemattomia parametrejä (diskretointi). Yhtälöt tuntemattomien parametrien määrittämiseksi Rayleighin ja Ritzin menetelmässä saadaan, kun funktion approksimaatio sijoitetaan ongelmalle ominaiseen funktionaaliin (esim. potentiaalienergian funktionaaliin) ja minimointi suoritetaan nyt tuntemattomien diskreettien muuttujien suhteen. Painotettujen jäännösten menetelmä eroaa edellämäinitusta siinä, että ratkaisufunktionaalina käytetään ongelmaan liittyvän yhtälön (esim. yhtälö  $ADBu - f = 0$ , katso kuva 1.2) approksimoidun muodon ratkaisualueen yli integroitua painotettua jäännöstä, jossa painofunktiolle valitaan jokin sopiva kantafunktiojoukko. Näistä ratkaisumenetelmistä saadaan helposti erilaisia versioita, mm. Galerkinin menetelmäksi kutsutaan menettelyä, jossa painofunktiolle valitaan sama kanta kuin ratkaistavalle funktiolle. Klassinen tapa on valita kantafunktiot siten, että ne ulottuvat yli koko ratkaistavan alueen. Tämä rajoittaa heti menetelmien käyttökelpoisuuden hyvin yksinkertaisiin alueisiin. Elementtimenetelmän perusidea jakaa tarkastelualue pienen äärellisiin osiin vapauttaa analysoinnin geometrian tuomilta ongelmilta. Elementtimenetelmää voitaisinkin kutsua yleistetyksi painotettujen jäännösten menetelmäksi tai yleistetyksi Galerkinin menetelmäksi.

**Esimerkki 1.1** *Ratkaise stationäärinen 1-dimensioinen diffuusio-konvektio-yhtälö*

$$-ku'' + \rho cvu' = f, \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0, \quad (1.40)$$

kun  $k, \rho, c, v$  ja  $f$  ovat positiivisia vakioita ( $k$  lämmönjohtavuus,  $\rho$  tiheys,  $c$  ominaislämpö,  $v$  väliaineen virtausnopeus). Piirrä ratkaisun kuvaaja suhteen  $P = \rho cvL/k$  erilaisilla arvoilla, esim.  $P = 1, P = 10, P = 100$ . Mitä tapahtuu kun  $P \rightarrow \infty$  ?

Yhtälö on toisen kertaluvun vakiokertoiminen epähomogeeninen tavallinen differentiaaliyhtälö, jonka täydellinen yleinen ratkaisu saadaan homogeenisen osan täydellisen ratkaisun ja täydellisen yhtälön jonkin yksityisratkaisun summana. Homogeenisen osan

$$-ku_0'' + \rho cvu_0' = 0 \quad (1.41)$$

yleinen ratkaisu konstruoidaan yrittäen  $u_0(x) = A \exp(rx)$  avulla. Karakteristiseksi yhtälöksi saadaan

$$-kr^2 + \rho cvr = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{tai} \quad r = \frac{\rho cv}{k}. \quad (1.42)$$

Homogeenisen osan ratkaisu on siten

$$u_0(x) = A \exp(\rho cvx/k) + B. \quad (1.43)$$

Yksityisratkaisu arvataan olevan lineaarista muotoa

$$u_f(x) = Cx, \quad (1.44)$$

joka sijoittamalla täydelliseen yhtälöön antaa vakion  $C$  arvoksi  $C = f/\rho cv$ . Ottamalla huomioon reunaehdot saadaan yhtälöt vakioiden  $A$  ja  $B$  määrittämiseksi

$$\begin{aligned} u(0) &= A + B = 0, \\ u(L) &= A \exp(\rho cvL/k) + B + fL/\rho cv = 0, \end{aligned} \quad (1.45)$$

josta seuraa vakioille arvot

$$A = \frac{fL}{\rho cv [1 - \exp(\rho cvL/k)]}, \quad B = -A. \quad (1.46)$$

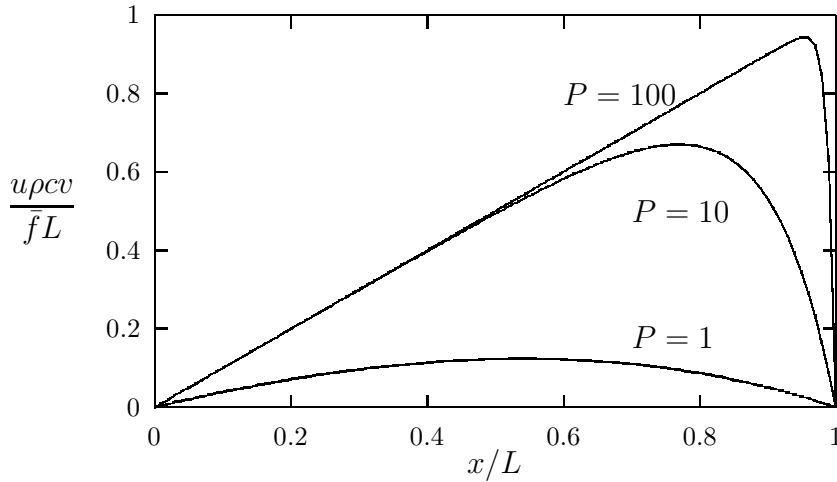
Yhtälön (1.40) täydellinen ratkaisu on siten

$$u(x) = \frac{fL}{\rho cv} \left( \frac{x}{L} - \frac{\exp(Px/L) - 1}{\exp(P) - 1} \right). \quad (1.47)$$

Kun Pécletin luku  $P$  on suuri aiheuttaa termit  $\exp(P)$  ja  $\exp(Px/L)$  hankaluuksia numeeristen arvojen laskennassa, joten muokataan ratkaisun lauseke sopivampaan muotoon

$$u(x) = \frac{fL}{\rho cv} \left\{ \frac{x}{L} - \exp[-P(1 - x/L)] \frac{1 - \exp(-Px/L)}{1 - \exp(-P)} \right\} \quad (1.48)$$

Yhtälö kuvaa esimerkiksi lämmön johtumista ja kulkeutumista nopeudella  $v$  etenevässä väliaineessa. Pécletin luku kuvaa siis kulkeutumisen ja johtumisen



**Kuva 1.3** Yksidimensioisen stationäärisen diffuusio-konvektioyhtälön ratkaisuja Pécletin luvun  $P$  arvoilla  $P = 1$ ,  $P = 10$  ja  $P = 100$ .

välistä suhdetta. Kuvassa 1.3 on esitetty ratkaisun kulku kolmella eri Pécletin luvun arvolla. Mikäli  $P$  on suuri, on konvektion osuus dominoiva ja jotta ratkaisu toteuttaisi oikeanpuoleisen reunaehdon syntyy lähelle oikeaa reunaa ns. reunahäiriö. Häiriövyöhykkeen leveys voidaan arvioida kun määritetään funktion  $u(x)$  maksimin sijaintikohta, joka saadaan ehdosta

$$\begin{aligned} u'(x) = 0 &\Rightarrow \exp(Px) = \frac{1}{P}(\exp(P) - 1), \\ \text{kun } P \text{ suuri} &\Rightarrow \exp(Px) \simeq \frac{1}{P} \exp(P) \end{aligned} \quad (1.49)$$

ja se on luokkaa

$$\sim \left( \frac{1}{P} \ln P \right) L. \quad (1.50)$$

Yhtälö on elliptinen reuna-arvotehtävä, mutta Pécletin luvun  $P$  suuretessa yhtälön (1.40) toisen derivaatan merkitys pienenee pienenemistään. Rajalla kun  $P = \infty$  supistuu yhtälö pelkästään alkuarvotyypiseksi probleemaksi

$$\rho cv u' = f, \quad (1.51)$$

jolle voidaan antaa vain alkuehto  $u(0) = 0$  ja jonka ratkaisu on  $u(x) = fx/\rho cv$ . Kuvasta 1.3 havaitaan yhtälön (1.40) ratkaisun pyrkivän ratkaisua (1.51) kohden  $P$ :n kasvaessa.

Yhtälön (1.40) epästationäärinen muoto on

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho cv \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad (1.52)$$

joka on parabolinen ODY (ks. harj. teht.). Mikäli nyt lämmönjohtavuus  $k \rightarrow 0$  eli  $P \rightarrow \infty$  muuntuu yhtälön tyyppi rajalla  $k = 0$  hyperboliseksi. Suurilla

Pécletin luvun arvoilla yhtälön käyttäytyminen muistuttaa hyperbolisen yhtälön käyttäytymistä vaikkakin yhtälö on "virallisesti" parabolinen. Numeerisissa laskelmissa se saattaa aiheuttaa ongelmia. Tähän seikkaan palataan myöhemmin.

## 1.6 Yhteenveto

Tekniikassa esiintyvät osittaisdifferentiaaliyhtälöt voidaan luokitella tehtävän ajallisen luonteen perusteella (i) tasapainotehtäviin ja (ii) etenemistehtäviin tai karakterististen ominaisuuksien perusteella (a) elliptisiin, (b) parabolisiin ja (c) hyperbolisiin yhtälöihin. Tasapainotehtävät ovat ajasta riippumattomia stationäärin tilan ongelmia ja ne ovat yleensä elliptisiä. Ajan suhteen muuttuvat etenemistehtävät (edetään ajassa) ovat joko parabolisia tai hyperbolisia yhtälöitä.

Tämän luokittelun lisäksi on olemassa ominaisarvotehtäviä, jotka liittyvät joko tasapainotehtäviin tai etenemistyyppiin tehtäviin.

Sama yhtälö voi eri ratkaisualueen kohdissa olla eri tyyppiä. Mikäli yhtälö on epälineaarinen, voi ratkaisu itsessään muuttaa yhtälön tyyppiä.

**Elliptiset** tasapainotehtävät ovat reuna-arvotehtäviä, joille on ominaista, että "kaikki vaikuttaa kaikkeen". Tämä tarkoittaa sitä, että pienimmänkin kuormituksen vaikutus ulottuu yli koko ratkaisualueen.

**Paraboliset** etenemistehtävät ovat alkuarvo- reuna-arvotehtäviä, joille on ominaista aallonpituudesta riippuva vaimenemisominaisuus ja häiriön ääretön etenemisnopeus. Parabolisen ongelman ratkaisu siloittuu ajan edetessä, mikä tarkoittaa ratkaisun spatiaalisesti korkeataajuisempien komponenttien (lyhyempi aallonpituus) nopeampana vaimenemisenä.

**Hyperboliset** etenemistehtävät ovat alkuarvo- reuna-arvotehtäviä. Hyperbolisten yhtälöiden ratkaisut ovat konservatiivisia, eli ratkaisuun sisältyy jokin säilyvä ominaisuus, joka voi olla esimerkiksi energia. Lisäksi hyperboliselle systeemille on ominaista häiriön *äärellinen etenemisnopeus*. Ne ovat myös ajan suhteen symmetrisiä. Häiriön äärellisestä etenemisnopeudesta johtuen on häiriöllä tietty vaikutusalue aika-paikka avaruudessa.

## 1.7 Harjoitustehtäviä

1. Assosioi lämmönjohtumisprobleemassa esiintyvät suureet kuvan 1.2 perusstruktuuriin. Identifioi myös operaattorit  $A$ ,  $B$  ja  $D$ .
2. Kirjoita taivutetun palkin probleemassa esiintyvät suureet perusstruktuurin muodossa. Identifioi myös operaattorit  $A$ ,  $B$  ja  $D$ .
3. Näytä, että kaksidimensioinen stationäärinen lämmönjohtumisyhtälö

$$-k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f$$



on tyypiltään elliptinen osittaisdifferentiaaliyhtälö.

4. Näytä, että epästationäärinen diffuusio-konvektioyhtälö (1.40) on parabolinen. Tutki myös degeneroitunutta tapausta kun lämmönjohtavuus  $k = 0$ .

5. Näytä, että funktio

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-(\xi+\tau)^2 P/4\tau}$$

toteuttaa dimensiottomaan muotoon kirjoitetun homogeenisen diffuusio-konvektioyhtälön

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{P} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Piirrä yhtälön kuvaajia eri dimensiottoman ajan  $\tau$  hetkillä ja Pécletin luvun  $P$  arvoilla 1 ja 100. Näytä myös, että siirtymällä liikkuvaan koordinaatistoon  $X = \xi + \tau$  ja  $T = \tau/P$  yllä oleva yhtälö palautuu muotoon

$$\frac{\partial u}{\partial T} - \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = 0.$$

6. Mitä tyyppiä yhtälö

$$\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f$$

on? Mitä fysikaalista ilmiötä se kuvaa?

7. Näytä, että diffuusioyhtälön (1.13) ratkaisu on muotoa (1.14) käyttämällä muuttujien erottelukeinoa, eli otaksumalla

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t),$$

jossa  $X, Y, T$  ovat tuntemattomia yhden muuttujan funktioita, jotka määritetään sijoittamalla yrite kenttäyhtälöön, josta seuraa kullekin funktiolle ratkaistavaksi tavallinen differentiaaliyhtälö.

8. Käy läpi yksityiskohdat aaltoyhtälön ratkaisun (1.19) johdossa. Huomaa, että muuttujien erottelukeino on tässäkin tapauksessa hyödyllinen menettely.

9. Näytä, että aaltoyhtälön (1.18) toteuttaa myös yrite

$$u(x, y, t) = e^{i(k_1 x + k_2 y + \omega t)},$$

jossa  $i = \sqrt{-1}$ . Johda yhteys aallon etenemisnopeuden  $c$  ja aaltolukujen  $k_1, k_2$  ja ominaistajuuden  $\omega$  välille.

10. Näytä, että aaltoyhtälö kolmiulotteisessa paikkakoordinaattiavaruudessa redusoituu pallosymmetrisessä tapauksessa yksidimensioiseen aaltoyhtälöön

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(ru) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) = 0,$$

jossa  $r$  on säteen suuntainen pallokoordinaatti.

11. Ratkaise yksiulotteinen diffuusioyhtälö alueessa  $\Omega = \{x \in (0, L)\}$  kun kuormituksena on lämmönlähde  $f(x) = f_c \cos(\pi x/2L)$  ja alkulämpötila hetkellä  $t = 0$  on  $u(x, 0) \equiv 0$ , sekä reunaehdot  $u'(0) = 0, u(L) = 0$ . Määritä myös lämpövuoto reunalla  $x = L$ .
12. Ratkaise stationäärinen 1-dimensioinen diffuusioyhtälö

$$-ku'' = f, \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0,$$

kun lähdetermi  $f$  riippuu ratkaisusta tavalla  $f = s - qu$ , jossa  $s$  ja  $q$  ovat positiivisia vakioita. Piirrä ratkaisun kuvaajia eri suhteen  $qL^2/k$  arvoilla. Mitä tapahtuu kun  $qL^2/k \rightarrow \infty$  ?

13. Esimerkkitehtävän 1.1 ratkaisut on piirretty kuvaan 1.3 eri Pécletin luvun arvoilla. Ratkaisu on esitetty dimensiottomassa muodossa jakamalla lämpötila  $u$  suureella  $fL/\rho cv$ . Koska lämmönjohtavuuden  $k$  arvo on eliminoitu käyttäen hyväksi Pécletin lukua  $P$ , vastaavat kuvassa esitetyt ratkaisut ongelmaa, jossa lähdetermi  $f$  kasvaa Pécletin luvun kasvaessa. Piirrä ratkaisut kun lämmönlähteen antoisuus ja lämmönjohtavuus pidetään vakiona, eli esitä kuvaaja skaalaamalla  $u$  suureella  $fL^2/k$ .
14. Johda harmoonisuusotaksuman avulla Maxwellin yhtälöistä (1.20)-(1.24) aaltoyhtälö (1.38 tai vaihtoehtoisesti (1.39)).
15. Johda yhtälö (1.26) tai (1.27) Maxwellin yleisistä yhtälöistä (1.20)-(1.24) käyttäen hyväksi väliaine- eli konstitutiivisia yhtälöitä (1.25).



# Luku 2

## Variaatioperiaatteet

Luvun tarkoituksena on antaa perustiedot variaatiolaskennasta. Tämän luentomonisteen kannalta variaatioperiaatteiden tärkein ominaisuus on mahdollisuus likiratkaisujen muodostamiseen. Variaatiomenetelmillä on myös muita hyviä ominaisuuksia: (i) varioitavalla funktiolla on usein selkeä fysikaalinen merkitys, (ii) se on invariantti koordinaatistomuunnosten suhteen, (iii) ne mahdollistavat usein jonkin suureen ylä- ja alarajaratkaisut ja (iv) ne mahdollistavat ongelman muuntamisen toiseksi ekvivalentiksi ongelmaksi, joka on ehkä helpommin ratkaistava (Legendren-Fenchelin muunnos).

### 2.1 Variaatiolaskennan perusteita

Differentiaalilaskennan perustoimitus on yhden tai useamman muuttujan funktion ääriarvon etsintä ja funktion ominaisuuksien tutkiminen ääriarvon läheisyydessä. Päätelmiä ääriarvon luonteesta ja funktion käyttäytymisestä tehdään tutkimalla funktion derivaattoja mahdollisessa ääriarvopisteessä. Variaatiolaskennan perustehtävä on löytää funktio, joka antaa ääriarvon ns. funktionaalille eli kuvaukselle, joka liittyy reaalityön tarkasteltavaan funktioon.<sup>1</sup> Funktionaalin käyttäytymisestä taas voidaan tehdä päätelmiä tutkimalla sen variaatioita ääriarvopisteessä (= se *funktio*, joka antaa funktionaalille ääriarvon). Ääriarvon etsiminen palautuu differentiaaliyhtälön ratkaisuun, joten funktionaalin minimointi ja differentiaaliyhtälön ratkaisu ovat ekvivalentteja toimenpiteitä. Koska differentiaaliyhtälöiden ratkaisu on vaikeaa, voidaan kysyä: mitä etua variaatiomenetelmän käyttöönotto tuo tullessaan? Kysymykseen vastaaminen on helppoa, sillä variaatiomenetelmien suurin etu (etenkin

<sup>1</sup> Formaalin näkökannan mukaan määrätyn integraalin minimoiminen on aito variaatiolaskennan tehtävä kun taas funktion minimointi kuuluu tavallisen differentiaalilaskennan piiriin. Historiallisesti nämä kaksi ongelmatyyppiä tulivat esille miltei samanaikaisesti ja selvää eroa niiden välillä ei tehty ennen kuin Joseph-Louis Lagrange kehitti yleisen variaatiolaskennan metodiikan teoksessaan *Mécanique Analytique* 1788. Eräs variaatiolaskennan äitiongelmia on nopeimman laskun käyrän yhtälön määrittäminen; ongelma jonka Jean Bernoulli esitti 1696 ja jonka ratkaisun löysivät toisistaan riippumatta Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz ja Bernoulli itse. Variaatio-ongelman yhteyden differentiaaliyhtälöihin havaitsivat Leonhard Euler ja Lagrange.

näin tietokoneiden aikakaudella) on helppous muodostaa probleeman likiratkaisuja.

Tarkastellaan funktionaalia

$$I(w) = \int_a^b F(x; w, w') dx, \quad (2.1)$$

ja etsitään funktiota  $w(x)$ , joka antaa minimiarvon  $I$ :lle ja joka toteuttaa reunapisteissä ehdot

$$w(a) = u_a, \quad w(b) = u_b. \quad (2.2)$$

Otaksutaan lisäksi, että funktio  $w$  on vähintään kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva, eli  $w \in C_2(a, b)$ .<sup>2</sup>

Olkoon  $u(x)$  se funktio, joka antaa minimiarvon funktionaalille (2.1), eli

$$I(u) = \min_{w \in C_2(a, b)} \int_a^b F(x; w, w') dx \quad (2.3)$$

ja toteuttaa reunaehdot (2.2). Määritellään *varioitu funktio*

$$w(x) = u(x) + \delta u(x) = u(x) + \epsilon \hat{u}(x), \quad (2.4)$$

jossa  $\epsilon$  on *mielivaltainen reaaliluku* ja  $\hat{u}$  on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva, homogeeniset reunaehdot ( $\hat{u}(a) = \hat{u}(b) = 0$ ) toteuttava mielivaltainen funktio (mielivaltainen, mutta täysin *kiinnitetty* kun valitaan variaatioksi). Funktiota  $\delta u(x) = \epsilon \hat{u}(x)$  kutsutaan funktion  $u$  variaatioksi. Sijoitetaan varioitu funktio funktionaalin (2.1) lausekkeeseen, jolloin saadaan

$$I(w) = I(u + \epsilon \hat{u}) = I(\epsilon) = \int_a^b F(x; u + \epsilon \hat{u}, u' + \epsilon \hat{u}') dx. \quad (2.5)$$

Huomaa, että funktionaali on nyt vain  $\epsilon$ :n funktio, sillä sekä  $u$  että  $\hat{u}$  ovat kiinnitettyjä funktioita. Oletuksen mukaan funktio  $u(x)$  antaa  $I$ :lle minimiarvon ja vastaa edellisen funktionaalin arvoa, kun  $\epsilon = 0$ . Minimiolemassaolon välttämätön ehto on

$$\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial w} \frac{dw}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial w'} \frac{dw'}{d\epsilon} \right) dx = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial w} \hat{u}(x) + \frac{\partial F}{\partial w'} \hat{u}'(x) \right) dx = 0. \quad (2.6)$$

Osittaisintegroimalla jälkimmäinen termi

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial w'} \hat{u}'(x) dx = \left[ \frac{\partial F}{\partial w'} \hat{u} - \int_a^b \hat{u}(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w'} \right) dx \right] \quad (2.7)$$

saadaan

$$\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w'} \right) \right] \hat{u}(x) dx = 0, \quad (2.8)$$

sillä sijoitustermi häviää, koska funktio  $\hat{u}$  toteuttaa homogeeniset reunaehdot.

Nyt tarvitaan hieman aputuloksia matematiikasta.

<sup>2</sup>n-kertaa jatkuvasti derivoituvien funktioiden luokkaa merkitään  $C_n$ .

**Lause 2.1** Mikäli funktio  $f(x)$  on jatkuva välillä  $[a, b]$  ja

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0 \quad (2.9)$$

kaikille funktioille  $\eta(x) \in C_2(a, b)$  ja  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ , niin  $f(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$ .

Soveltamalla tätä tulosta yhtälöön (2.8), saadaan funktionaalin (2.1) ns. Eulerin yhtälö<sup>3</sup>

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w'} \right) = 0, \quad (2.10)$$

joka on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö funktion  $w(x)$  määrittämiseksi ja välttämätön ehto sille, että  $w(x)$  antaa funktionaalille  $I$  suhteellisen minimin. Yhtälön (2.10) ja reunaehdot (2.2) toteuttavaa funktiota kutsutaan myös funktionaalin (2.1) ekstremaaliksi.

Yhteenvedon voidaan todeta, että funktionaalin minimin etsiminen annetuilla reunaehdoilla on ekvivalenttia differentiaaliyhtälön ratkaisulle ko. reunaehdoilla.

Funktion  $u$  variaatio  $\delta u$  määritellään yhtälöllä

$$\delta u(x) = \epsilon \hat{u}(x), \quad \text{eli} \quad \delta u = \epsilon \left. \frac{d(u + \epsilon \hat{u})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}. \quad (2.11)$$

Samalla tavalla voidaan määritellä myös funktionaalin variaatio

$$\delta I = \epsilon \left. \frac{dI(u + \epsilon \hat{u})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}. \quad (2.12)$$

Yhtälön (2.8) mukaan

$$\delta I = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w'} \right) \right] \delta u dx = 0, \quad (2.13)$$

eli funktionaali  $I$  saavuttaa ääriarvon, jos ja vain jos  $\delta I = 0$ . Funktioalan  $I$  korkeampia variaatioita voidaan määrittää rekursiivisesti, esimerkiksi

$$\begin{aligned} \delta^2 I &= \delta(\delta I) = \delta \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial w} \delta u + \frac{\partial F}{\partial w'} \delta u' \right) dx \\ &= \int_a^b \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} (\delta u)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial w \partial w'} \delta u \delta u' + \frac{\partial^2 F}{\partial w'^2} (\delta u')^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Yleisesti voidaan kirjoittaa lauseke

$$I(u + \delta u) = I(u) + \delta I(u) + \frac{1}{2!} \delta^2 I(u) + \dots, \quad (2.15)$$

<sup>3</sup>Usein kutsutaan myös Eulerin-Lagrangein yhtälöksi.

joka on analoginen funktion Taylorin kehitelmän kanssa. Yhtälön (2.13) mukaan funktionaalien ääriarvon olemassaolon välttämätön ehto on sen ensimmäisen variaation häviäminen. Täten ääriarvon laadun tutkiminen voidaan suorittaa tutkimalla funktionaalien toista variaatiota.

Yhden muuttujan funktion  $w$  tapauksessa, jos integrandifunktio  $F$  riippuu funktiosta  $w$  ja sen derivaatoista kertalukuun  $n$  saakka, on variaatioformulaatio muotoa

$$\min_{w \in \mathcal{A}} I(w) = \min_{w \in \mathcal{A}} \int_a^b F(x; w, w', w'', \dots, w^{(n)}) dx, \quad (2.16)$$

jossa  $\mathcal{A}$  merkitsee luvallisten funktioiden joukkoa, eli funktioita joiden derivaatat ovat jatkuvia aina kertalukuun  $2n$  saakka ja jotka toteuttavat reunaehdot  $w$ :lle ja sen derivaatoille kertalukuun  $n - 1$  saakka. Funktioalain (2.16) Eulerin yhtälö on

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial w'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial w''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial F}{\partial w^{(n)}} = 0. \quad (2.17)$$

Tarkastellaan seuraavassa useamman muuttujan funktioiden variaatioformulaatiota, ja käydään lävitse funktionaalien

$$I(w) = \int_A F(x, y; w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}) dA \quad (2.18)$$

Eulerin yhtälön johto tasoalueessa  $A$  jonka reunakäyrää merkitään  $S$ :llä. Käytetään seuraavia kompakteja merkintöjä osittaisderivaatoille:

$$w_{,x} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w_{,y} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w_{,xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{jne..} \quad (2.19)$$

Merkitään nyt varioitua funktiota

$$w(x, y) = u(x, y) + \epsilon \hat{u}(x, y), \quad (2.20)$$

jossa  $\hat{u}(x, y)$  toteuttaa homogeeniset reunaehdot reunalla  $S$  ja otaksutaan funktion  $u(x, y)$  antavan funktionaalille (2.18) stationäärisen arvon. Nyt varioitu funktioalain saa muodon

$$I(\epsilon) = \int_A F(x, y; u + \epsilon \hat{u}, u_{,x} + \epsilon \hat{u}_{,x}, u_{,y} + \epsilon \hat{u}_{,y}) dA. \quad (2.21)$$

Aivan vastaavasti kuin yksidimensioisessa tapauksessa, on ääriarvon edellytyksenä nyt ensimmäisen variaation häviäminen, eli

$$\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 \implies I(u) = \min_w I(w), \quad (2.22)$$

josta saadaan

$$\begin{aligned} \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} &= \int_A \left[ \frac{\partial F}{\partial w} \frac{dw}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial(w_{,x})} \frac{d(w_{,x})}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial(w_{,y})} \frac{d(w_{,y})}{d\epsilon} \right] dA \\ &= \int_A \left[ \frac{\partial F}{\partial w} \hat{u} + \frac{\partial F}{\partial(w_{,x})} \hat{u}_{,x} + \frac{\partial F}{\partial(w_{,y})} \hat{u}_{,y} \right] dA. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Jotta mielivaltainen, mutta variaatiotoimituksen ajaksi kiinnitetty funktio  $\hat{u}(x, y)$  saataisiin yhteiseksi tekijäksi oheiseen lausekkeeseen, muokataan integrandin kahta viimeistä termiä:

$$\begin{aligned} & \int_A \left[ \frac{\partial F}{\partial(w,x)} \hat{u}_{,x} + \frac{\partial F}{\partial(w,y)} \hat{u}_{,y} \right] dA \\ = & \int_A \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial(w,x)} \hat{u} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial(w,y)} \hat{u} \right) \right] dA \\ & - \int_A \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial(w,x)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial(w,y)} \right) \right] \hat{u} dA. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Nyt ensimmäiseen termiin voidaan soveltaa Gaussin<sup>4</sup> lausetta kahdessa dimensiossa, (katso esim. K. Väisälä: *Vektorianalyysi*)

$$\int_A \nabla \cdot \vec{g} dA = \oint_S \vec{g} \cdot \vec{n} ds, \quad (2.25)$$

jossa  $\vec{n}$  on reunakäyrän  $S$  ulkonormaali. Tällöin saadaan

$$\int_A \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \hat{u} \frac{\partial F}{\partial(w,x)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \hat{u} \frac{\partial F}{\partial(w,y)} \right) \right] dA = \oint_S \hat{u} \left[ \frac{\partial F}{\partial(w,x)} n_x + \frac{\partial F}{\partial(w,y)} n_y \right] ds = 0, \quad (2.26)$$

jossa  $n_x, n_y$  ovat reunakäyrän yksikköulkonormaalien  $\vec{n}$  komponentit. Kokoamalla nyt tulokset yhteen saadaan

$$\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} = \int_A \hat{u} \left[ \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial(w,x)} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial(w,y)} \right) \right] dxdy = 0. \quad (2.27)$$

Aivan vastaavasti kuin yksidimensioisessakin tapauksessa voidaan todistaa lauseen 2.1 vastine useampidimensioiseen avaruuteen, jolloin funktionaalien (2.18) Eulerin yhtälöksi saadaan

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial(w,x)} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial(w,y)} \right) = 0, \quad (2.28)$$

joka on toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälö tuntemattoman funktion  $w$  ratkaisemiseksi tasoalueessa riittävillä reunaehdoilla.

Lopuksi voidaan todeta, että mikä tahansa differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa variaatiomuotoon. Eräs tapa tämän toteamiseksi voidaan konstruoida seuraavasti: Toteuttakoon funktio  $u(x, y)$  osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$G(x, y; u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial y^m}) = 0 \quad (2.29)$$

<sup>4</sup> Karl Friedrich Gauss (1777–1855), saksalainen matemaatikko.



ja tietyt sopivat reunaehdot. Tällöin voidaan määrittellä funktionaali

$$I(w) = \int_A \left[ G(x, y; w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^m w}{\partial y^m}) \right]^2 dA, \quad (2.30)$$

ja  $A$  on alue  $(x, y)$  tasossa jossa yhtälö  $G = 0$  on ratkaistava ja jossa  $w$  on mikä tahansa funktio, joka toteuttaa  $u$ :lle asetetut reunaehdot. On selvää, että oheinen integrandi on aina positiivinen ja häviää silloin kun  $w \equiv u$ , joten  $I$ :n minimiarvo (nolla) saavutetaan kun  $w \equiv u$ . Funktionaali (2.30) ei kuitenkaan kuvaa mitään fysikaalista mielekästä suuretta.

**Esimerkki 2.1** *Taivutetun pyörähdysymmetrisen laatan potentiaalienergian funktionaali on*

$$\Pi(w) = \int_A \left[ \frac{1}{2} (M_r \kappa_r + M_\phi \kappa_\phi) - qw \right] dA, \quad (2.31)$$

jossa

$$\begin{aligned} M_r &= D(\kappa_r + \nu \kappa_\phi), & \kappa_r &= -\frac{d^2 w}{dr^2} = -w'', \\ M_\phi &= D(\kappa_\phi + \nu \kappa_r), & \kappa_\phi &= -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = -\frac{w'}{r}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

ja  $D$  on laatan taivutusjäykkyys ja  $\nu$  materiaalin suppeamaluku. Johda pyörähdysymmetrisen laatan Eulerin yhtälö.

Sijoitetaan momenttien lausekkeet muodonmuutosenergian lausekkeeseen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} U(w) &= \frac{1}{2} \int D (\kappa_r^2 + \kappa_\phi^2 + 2\nu \kappa_r \kappa_\phi) 2\pi r dr \\ &= \frac{1}{2} \int D \left[ (w'')^2 + \frac{1}{r^2} (w')^2 + \frac{2\nu}{r} w'' w' \right] 2\pi r dr. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Korvataan  $w \rightarrow w + \epsilon \hat{w}$ , ja suoritetaan variaatio, eli

$$\left. \frac{d\Pi}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 2\pi \int \left\{ D \left[ \left( w'' + \frac{\nu}{r} w' \right) \hat{w}'' + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} w' + \nu w'' \right) \hat{w}' \right] - q \hat{w} \right\} r dr = 0. \quad (2.34)$$

Otaksutaan sellaiset reunaehdot, jotka johtavat sijoitustermien häviämiseen osittaisintegroitaessa ja otaksutaan vielä, että laatan taivutusjäykkyys  $D$  on vakio, jolloin saadaan

$$\int \left\{ D \left[ (r w'' + \nu w')'' - \left( \nu w'' + \frac{1}{r} w' \right)' \right] - qr \right\} \hat{w} dr = 0, \quad (2.35)$$

josta sieventämällä tulee

$$\int \left[ D \left( w'''' + \frac{2}{r} w''' - \frac{1}{r^2} w'' + \frac{1}{r^3} w' \right) - q \right] \hat{w} r dr = 0. \quad (2.36)$$

Koska funktio  $\hat{w}$  on mielivaltainen, saadaan Eulerin yhtälöksi

$$D \left( w'''' + \frac{2}{r} w''' - \frac{1}{r^2} w'' + \frac{1}{r^3} w' \right) = q. \quad (2.37)$$

**Esimerkki 2.2** Johda Eulerin yhtälö funktionaalille

$$I(w) = \frac{1}{2} \int \int \left[ a \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2b \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) + c \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (2.38)$$

jossa  $a, b$  ja  $c$  ovat vakioita. Milloin oheisen funktionaalin minimoinnista voidaan oikeutetusti puhua, ts. tutki funktionaalin toista variaatiota.

Suoritetaan variaatio, eli korvataan  $w \rightarrow w + \epsilon \hat{w}$ . Otaksutaan, että  $w$ :lle on annettu arvot koko alueen reunalla, joten variaation  $\hat{w}$  on toteutettava homogeeniset reunaehdot. Saadaan siis

$$\begin{aligned} I(w + \epsilon \hat{w}) &= \frac{1}{2} \int \int (aw_{,x}^2 + 2bw_{,x}w_{,y} + cw_{,y}^2) dx dy \\ &\quad + \epsilon \int \int [aw_{,x}\hat{w}_{,x} + b(w_x\hat{w}_{,y} + w_{,y}\hat{w}_x) + cw_{,y}\hat{w}_{,y}] dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2}\epsilon^2 \int \int (a\hat{w}_{,x}^2 + 2b\hat{w}_{,x}\hat{w}_{,y} + c\hat{w}_{,y}^2) dx dy, \end{aligned} \quad (2.39)$$

jossa on merkitty osittaisderivaattoja lyhyesti esim.  $\partial w / \partial x = w_{,x}$ . Eulerin yhtälö saadaan ensimmäisen variaation avulla

$$\begin{aligned} \left. \frac{dI}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \int \int [(aw_{,x} + bw_{,y}) \hat{w}_{,x} + (bw_{,x} + cw_{,y}) \hat{w}_{,y}] dx dy \\ &= \int \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(aw_{,x} + bw_{,y}) \hat{w}] + \frac{\partial}{\partial y} [(bw_{,x} + cw_{,y}) \hat{w}] \right\} dx dy \\ &\quad - \int \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} (aw_{,x} + bw_{,y}) + \frac{\partial}{\partial y} (bw_{,x} + cw_{,y}) \right] \hat{w} dx dy \\ &= \oint [(aw_{,x} + bw_{,y}) n_x + (bw_{,x} + cw_{,y}) n_y] \hat{w} ds \\ &\quad - \int \int (aw_{,xx} + 2bw_{,xy} + cw_{,yy}) \hat{w} dx dy = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Koska variaatio  $\hat{w}$  toteuttaa homogeeniset reunaehdot, häviää reunaintegraalitermi ja variaation mielivaltaisuudesta seuraa Eulerin yhtälö

$$aw_{,xx} + 2bw_{,xy} + cw_{,yy} = 0. \quad (2.41)$$

Tutkitaan nyt funktionaalin ominaisuuksia hieman tarkemmin. Jotta funktionaalilla varmasti olisi minimi on toisen variaation oltava aidosti positiivinen, eli

$$\delta^2 I = \epsilon^2 \left. \frac{d^2 I}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} = \epsilon^2 \int \int (a\hat{w}_{,x}^2 + 2b\hat{w}_{,x}\hat{w}_{,y} + c\hat{w}_{,y}^2) dx dy > 0 \quad (2.42)$$

Koska variaatio  $\hat{w}$  on täysin mielivaltainen, on positiivisuuden edellytys, että integrandi on positiivinen kaikissa tarkastelualueen pisteissä  $(x, y)$ . Merkitään variaation  $\hat{w}$  derivaatan arvoja pisteessä  $(x, y)$  seuraavilla symboleilla

$$s = \hat{w}_{,x}(x, y), \quad r = \hat{w}_{,y}(x, y). \quad (2.43)$$

Nyt toisen variaation positiivisuusvaatimus voidaan esittää

$$as^2 + 2bsr + cr^2 > 0. \quad (2.44)$$

Havaitaan lausekkeen olevan neliömuoto, joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix} > 0. \quad (2.45)$$

Jotta yllä oleva lauseke olisi positiivinen, on neliömuodon matriisin oltava positiivisesti definiitti, eli sen ominaisarvojen on oltava positiivisia. Ominaisarvot  $\lambda_i$  saadaan yhtälöstä

$$\det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{bmatrix} = 0, \quad (2.46)$$

josta seuraa

$$\lambda = \frac{1}{2}(a + c) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a + c)^2 - ac + b^2}. \quad (2.47)$$

Jotta molemmat ominaisarvot olisivat positiivisia, on oltava

$$\frac{1}{4}(a + c)^2 - ac + b^2 < \frac{1}{4}(a + c)^2 \quad (2.48)$$

josta seuraa

$$ac - b^2 > 0. \quad (2.49)$$

Oheisella ehtoyhtälöllä voidaan toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöitä luokitella. Yhtälö on elliptinen, mikäli minimointi onnistuu, eli kun  $ac - b^2 > 0$  ja hyperbolinen kun  $ac - b^2 < 0$ . Rajatapauksena on parabolinen yhtälö kun  $ac - b^2 = 0$ . Paraboliseen yhtälöön liittyy kuitenkin tietty varaus. Mikäli esimerkiksi  $c = b = 0$  ei vastaava yhtälö  $w_{,xx} = 0$  ole parabolinen vaan elliptinen. Sen sijaan yhtälö  $w_{,xx} + w_{,y} = 0$  olisi parabolinen.

## 2.2 Oleelliset ja luonnolliset reunaehdot

Kuten on jo mainittu, tarvitaan differentiaaliyhtälöiden ratkaisuun riittävä määrä reunaehtoja. Mikäli reunaehtoja ei ole asetettu, tai ne ovat puutteelliset, ei yksikäsitteistä ratkaisua voida löytää. Herääkin kysymys: mikä on kullekin yhtälölle riittävä määrä reunaehtoja ratkaisun yksikäsitteisyyden takaamiseksi? Variaatiomenetelmä antaa tähän vastauksen.

Tarkastellaan esimerkkinä taivutetun ohuen palkin yhtälöä (Eulerin-Bernoullin palkkimalli). Palkin potentiaalienergian funktionaali on

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} \int_0^L EI(v'')^2 dx - \int_0^L f v dx, \quad (2.50)$$

ja jonka Eulerin yhtälöksi saadaan

$$EIv'''' = f. \quad (2.51)$$

Suoritetaan yksityiskohtaisesti Eulerin yhtälön johto. Varioidaan taipumafunktiota  $v \rightarrow v + \epsilon \hat{v}$ , jossa  $\epsilon \hat{v}$  on taipuman variaatiofunktio. Mitkä reunaehdot funktion  $\hat{v}$  on toteutettava riippuu minimointiprobleemalle

$$\min \Pi(v), \quad v \in \mathcal{A} \quad (2.52)$$

asettavista reunaehdoista, eli siitä millainen on kinemaattisesti luvallisten taipumafunktioiden joukko  $\mathcal{A}$ . Palataan  $\hat{v}$ :lle asetettavaan reunaehtovaatimukseen kun käsitellään minimointiongelman spesifejä reunaehtotapauksia.

Stationäärisyysehdoista seuraa

$$\left. \frac{d\Pi}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_0^L (EIv''\hat{v}'' - f\hat{v}) dx = 0. \quad (2.53)$$

Suorittamalla kaksi osittaisintegrointia saadaan tulokseksi<sup>5</sup>

$$EI [v''(L)\hat{v}'(L) - v''(0)\hat{v}'(0) - v'''(L)\hat{v}(L) + v'''(0)\hat{v}(0)] + \int_0^L (EIv'''' - f) \hat{v} dx = 0. \quad (2.54)$$

Mikäli nyt otaksutaan Eulerin yhtälön  $EIv'''' = f$  toteutuvan, jää jäljelle sijoitus-termit reunoilta, joiden tulee hävitä, eli

$$v''(L)\hat{v}'(L) - v''(0)\hat{v}'(0) - v'''(L)\hat{v}(L) + v'''(0)\hat{v}(0) = 0. \quad (2.55)$$

Tutkitaan nyt erikseen neljää mahdollista reunaehtotapausta.

1. *Jäykästi kiinnitetyt reumat.* Tällöin taipumaviivalta vaaditaan

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, & v(L) &= 0, \\ v'(0) &= 0, & v'(L) &= 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Koska taipuman variaatio toteuttaa homogeeniset reunaehdot,  $\hat{v}(0) = \hat{v}'(0) = \hat{v}(L) = \hat{v}'(L) = 0$  toteutuu reunatermien (2.55) häviäminen automaattisesti, joten lisäehtoja ei tarvita.

<sup>5</sup> Huomaa, että sijoitustermi voidaan kirjoittaa muodossa:  
 $M(0)\hat{v}'(0) - M(L)\hat{v}'(L) - Q(0)\hat{v}(0) + Q(L)\hat{v}(L)$ .

2. *Vapaasti tuetut reunat.* Tällöin taipumalta vaaditaan ainoastaan

$$v(0) = 0, \quad v(L) = 0. \quad (2.57)$$

Koska taipuman variaation derivaatat päätepisteissä ovat nyt mielivaltaiset, tarvitaan kaksi lisäehtoa, jotta reunatermit häviäisivät:

$$v''(0) = 0, \quad v''(L) = 0, \quad (2.58)$$

jotka täydentävät annetut siirtymäreunaehdot.

3. *Toinen pää jäykästi kiinnitetty ja toinen vapaa.* Olkoon palkki kiinnitetty pisteestä  $x = 0$ . Tällöin taipumalta vaadittavat reunaehdot ovat:

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0. \quad (2.59)$$

Vapaassa päässä ei taipumalle eikä kaltevuuskulmallekaan aseteta mitään ehtoja, joten taipuman ja sen derivaatan variaatioillekaan ei voida asettaa mitään vaatimuksia. Täten vaaditaan ehtojen (2.59) lisäksi

$$v''(L) = 0, \quad v'''(L) = 0. \quad (2.60)$$

4. *Molemmat päät vapaat.* Tällöin taipumalle ei aseteta mitään annettuja ehtoja kummassakaan päässä. Kuitenkin taipuman on toteutettava luonnollisesti seuraavat ehdot, jotta reunaehtotermit (2.55) häviäisivät:

$$\begin{aligned} v''(0) &= 0, & v''(L) &= 0, \\ v'''(0) &= 0, & v'''(L) &= 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Intuitiivisesti voidaan päätellä, että tämä tapaus on hieman muita kolmea tapausta mutkikkaampi. Ilmeisestikään palkki ei voi leijua ilmassa annettujen kuormien alaisuudessa, vaan niiden on oltava tasapainossa itsensä kanssa, eli kuormafunktion  $f$  on toteutettava tasapainoehdot

$$\int_0^L f dx = 0, \quad \int_0^L x f dx = 0. \quad (2.62)$$

Kuten edellisestä esimerkistä voidaan havaita, vaaditaan ohuen palkin tapauksessa neljän reunaehdon toteutuminen, jotta probleeman ratkaisu olisi yksikäsitteinen. Annettuja reunaehtoja (2.56), (2.57) ja (2.59) täydentävät ns. luonnolliset reunaehdot (2.58), (2.60) ja (2.61), jotka tulevat luonnollisesti esiin variaatioformulaatiossa. Annettuja reunaehtoja kutsutaan usein oleellisiksi reunaehdoiksi tai Dirichletin reunaehdoiksi ja luonnollisia reunaehtoja Neumannin reunaehdoiksi. Huomaa erityisesti, että annettuja oleellisia reunaehtoja vastaavissa reunan pisteissä variaation on hävittävä.

## 2.3 Variaatiotehtävän likiratkaisumenetelmiä

Tämä kappale toimii johdatteluna elementtimenetelmään. Variaatioperiaatteiden käytöstä likiratkaisujen saamiseksi esitetään klassiset painotettujen jäännösten menetelmä, kollokaatiomenetelmä ja Galerkinin menetelmä soveltaen niitä yksiulotteiseen tasapainotyypiseen esimerkkiongelmään.

### 2.3.1 Painotettujen jäännösten menetelmä

Olkoon ratkaistavana differentiaaliyhtälö (tavallinen tai osittainen)

$$Fu = f \quad (2.63)$$

alueessa  $\Omega$  reunaehdoilla

$$Au = a \quad (2.64)$$

alueen  $\Omega$  reunalla  $S$ . Oletetaan myös, että operaattorit  $F$  ja  $A$  ovat lineaarisia. Painotettujen jäännösten menetelmä tai jäännösformulaatio muodostetaan seuraavalla tavalla. Tuntematonta funktiota approksimoidaan yritteellä

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n \phi_i \alpha_i, \quad (2.65)$$

jossa  $\phi_i$ :t ovat sopivasti valittuja paikkakoordinaateista riippuvia kantafunktioita ja  $\alpha_i$ :t tuntemattomia parametreja. Yhtälöt (2.63) ja (2.64) kerrotaan painofunktiolla

$$w = \sum_{i=1}^n \psi_i w_i, \quad (2.66)$$

jossa  $\psi_i$ :t ovat paikkakoordinaateista riippuvia kantafunktioita ja  $w_i$ :t mielivaltaisia parametreja. Integroidaan näin saatu lauseke alueen tai reunanosan ylitse, eli

$$\int_{\Omega} w(F\tilde{u} - f)dV + \gamma \int_S w(A\tilde{u} - a)dS = 0, \quad (2.67)$$

jossa  $\gamma$  on mahdollisesti dimensiollinen painokerroin. Sijoittamalla painofunktion lauseke (2.66) yllä olevaan lausekkeeseen, saadaan

$$\sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \psi_i (F\tilde{u} - f) dV + \gamma \int_S \psi_i (A\tilde{u} - a) dS \right) w_i = 0. \quad (2.68)$$

Koska painokertoimet  $w_i$  ovat mielivaltaisia, on sulkulausekkeen sisällä olevien lausekkeiden hävittävä, täten yhtälö (2.68) muodostavaa itse asiassa  $n$ -kappaletta lineaar-

risia yhtälöitä

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \left( \int_{\Omega} \psi_1 F \phi_j d\Omega + \gamma \int_S \psi_1 A \phi_j dS \right) \alpha_j &= \int_{\Omega} \psi_1 f d\Omega + \gamma \int_S \psi_1 a dS, \\
\sum_{j=1}^n \left( \int_{\Omega} \psi_2 F \phi_j d\Omega + \gamma \int_S \psi_2 A \phi_j dS \right) \alpha_j &= \int_{\Omega} \psi_2 f d\Omega + \gamma \int_S \psi_2 a dS, \\
&\vdots \\
\sum_{j=1}^n \left( \int_{\Omega} \psi_n F \phi_j d\Omega + \gamma \int_S \psi_n A \phi_j dS \right) \alpha_j &= \int_{\Omega} \psi_n f d\Omega + \gamma \int_S \psi_n a dS.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Tämä voidaan ilmaista kompaktisti

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} \alpha_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.70}$$

jossa

$$\begin{aligned}
K_{ij} &= \int_{\Omega} \psi_i F \phi_j dV + \gamma \int_S \psi_i A \phi_j dS, \\
f_i &= \int_{\Omega} \psi_i f dV + \gamma \int_S \psi_i a dS,
\end{aligned} \tag{2.71}$$

ja josta tuntemattomat parametrit  $\alpha_i$  voidaan ratkaista. On huomattava, että *lineaarisesti riippumattomia painofunktioita* on oltava  $n$  kappaletta, jotta ongelmalla olisi yksikäsitteinen ratkaisu. Mikäli yrite  $\tilde{u}$  ei ole ongelman tarkka ratkaisu, jäännökset  $R_{\Omega} = F\tilde{u} - f$  ja  $R_S = A\tilde{u} - a$  eivät milloinkaan häviä identtisesti koko alueessa  $\Omega$  ja reunalla  $S$ . Täten painotettujen jäännösten menetelmä on tulkittavissa systeemin (2.63), (2.64) heikennetyksi muodoksi, jossa yhtälön toteutumista pisteittäin jokaisessa kohdassa ei vaadita, vaan yhtäsuuruus saadaan integraalin mielessä koko alueen suhteen. Kirjallisuudessa käytetään usein termejä vahva muoto ja heikko muoto, jossa vahva muoto viittaa differentiaaliyhtälöön (2.63) ja heikko muoto puolestaan variaatioyhtälöön (2.67).

Yhtälöt (2.67) ovat jäännösten  $R_{\Omega}$  ja  $R_S$  ortogonaalirelaatioita painofuntioiden  $\psi_i$  suhteen, kun skalaaritulona on integraali

$$\int_{\Omega} \psi_i R_{\Omega} d\Omega \quad \text{ja} \quad \int_S \psi_i R_S dS. \tag{2.72}$$

Matemaattisesti ilmaistuna likimääräisratkaisu  $\tilde{u}$  on siten tarkan ratkaisun ortogonaaliprojektio yllä olevan pistetulon mielessä. Huomaa kuitenkin, että “kohtisuoruutta” mitataan painofunktion suhteen, joka ei valttämättä ole samassa funktioavaruudessa kuin itse yritefunktio.

Kuten yhtälöstä (2.67) havaitaan, ei menetelmän käyttö sellaisenaan vaadi painofunktioilta minkäänlaista jatkuvuutta. Ne voivat olla epäjatkuvia funktioita tai vaikkapa yleistettyjä funktioita, kuten esimerkiksi Diracin delta-funktio. Tuntemattoman funktion  $u$  approksimaation  $\tilde{u}$  sileysominaisuuksien pitää olla sopusoinnussa operaattorin  $F$  korkeimman kertaluvun derivaatan kanssa. Jos  $F$ :n kertaluku on  $2m$  on yritefunktion  $\tilde{u}$  oltava vähintään  $2m - 1$  kertaa jatkuvasti derivoituva (mikäli  $f$  on jatkuva), siis  $\tilde{u} \in C_{2m-1}$ .

Yritefunktioiksi kelpaavien funktioiden joukkoa voidaan laajentaa, mikäli yhtälön (2.67) ensimmäinen termi osittaisintegroidaan. Tällöin päädytään muotoa

$$\int_{\Omega} (G_1 \psi_i G_2 \tilde{u} - \psi_i f) dV + \int_S G_3 \psi_i G_4 \tilde{u} dS + \gamma \int_S \psi_i (A \tilde{u} - a) dS = 0 \quad (2.73)$$

olevaan yhtälöön, jossa  $G_1 \dots G_4$  ovat differentiaalioperaattoreita (tai pelkästään algebrallisia operaattoreita), joiden kertaluku on pienempi kuin operaattorin  $F$ . Jos operaattori  $F$  on itseadjungoitu, niin pätee  $G_1 = G_2$ , ja joiden kertaluku on  $m$ . Havaitaan, että painofunktioilta vaaditaan nyt enemmän sileysominaisuuksia kuin muodon (2.67) tapauksessa. Tämä tuntuu kuitenkin luonnolliselta; jotainhan on maksettava siitä, että yritefunktioita voidaan valita vapaammin suuremmasta funktioluokasta.

Ongelmana on nyt löytää sopiva yritefunktion approksimoimiseen ja painofunktioiden valinta. Yritefunktion optimaalinen valinta perustuu tietenkin ongelman ratkaisun erityisluonteeseen. Mikäli tiedetään jotain ratkaisun tyypistä, voidaan yritefunktioiksi ottaa joitain samantapaisesti käyttäytyviä yksinkertaisia funktioita. Painofunktioiden valinta pitäisi pystyä automatisoimaan kullekin probleemalle optimaaliseksi. Tätä seikkaa käsitellään kuitenkin huonosti alan kirjallisuudessa. Koska asian perin pohjainen käsittely menee hieman liian pitkälle peruskurssin tarpeita silmälläpitäen, turvaudutaan standardiformulaation valintoihin. Asiasta enemmän kiinnostuneille lukijoille suositellaan perehtymistä artikkeleihin [44], [55].

Edellä esitetty ajatuskulku saattaa tuntua hyvin abstraktilta. Asian sovellustapa selvinnee kuitenkin seuraavasta esimerkistä.

**Esimerkki 2.3** *Tarkastellaan yksidimensioisen lämmönjohtumisyhtälön*

$$-(ku')' = f \quad (2.74)$$

*ratkaisua alueessa  $\Omega = (0, L)$  reunaehdoin*

$$u(0) = u_0, \quad q(L) = -ku'(L) = 0. \quad (2.75)$$

*Pilkku suureen oikeassa yläkulmassa merkitsee derivointia paikkakoordinaatin  $x$  suhteen. Otaksutaan, että lämmönlähteen  $f$  antoisuus on vakio koko tarkasteltavalla alueella ja että lämmönjohtavuus  $k$  muuttuu lineaarisesti arvosta  $k_0$  arvoon  $2k_0$ , joten  $k(x) = k_0(1 + x/L)$ . Suorita analyttinen ratkaisu ja likiratkaisu jäännösmenetelmällä.*



Yhtälön tarkan ratkaisun löytäminen on triviaali toimenpide

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 \left\{ 1 + \frac{fL^2}{k_0 u_0} \left[ 2 \ln\left(1 + \frac{x}{L}\right) - \frac{x}{L} \right] \right\} \\ &= u_0 \left\{ 1 + \beta \left[ 2 \ln\left(1 + \frac{x}{L}\right) - \frac{x}{L} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

jossa on merkitty annetun lämpötilan  $u_0$ , lämmönlähteen antoisuuden  $f$  ja lämmönjohtumiskertoimen  $k_0$  suhdetta  $f = \beta u_0 k_0 L^{-2}$ , ja  $\beta$  on dimensioton vakio.

Ratkaistaan tehtävä likimääräisesti valitsemalla kaksiparametrinen yritefunktio, joka toteuttaa annetun lämpötilareunaehdon (oleellisen reunaehdon)

$$\tilde{u}(x) = u_0 + \alpha_1(x/L) + \alpha_2(x/L)^2 \quad (2.77)$$

ja alueen painofunktioiksi vakio  $\psi_1 = 1$  ja lineaarinen termi  $\psi_2 = (x/L)$ . Kirjoitetaan painotettujen jäännösten formulaatio (2.67) esimerkkitehtävälle:

$$\int_0^L \psi_i [(k\tilde{u}')' + f] dx + \gamma \psi_i [-k(L)\tilde{u}'(L)] = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.78)$$

Ongelmana on nyt oikeanpuoleisen reunaehdon (pisteessä  $x = L$ ) painon  $\gamma$  hyvä valinta. Jotta esitetty muoto olisi dimensionaalisesti mielekäs, on lämpövuoreunaehdon painokertoimen oltava laaduton, kuten on myös kenttäalueen painokerroin. Täten voidaan valita yksinkertaisesti  $\gamma = 1$ . Sijoittamalla yhtälösystemiin valitut painokertoimet ja yritefunktio saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^L \left\{ \frac{k_0}{L^2} \left[ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \left( \frac{x}{L} \right) \right] + f \right\} dx - \frac{2k_0}{L} (\alpha_1 + 2\alpha_2) &= 0, \\ \int_0^L \left( \frac{x}{L} \right) \left\{ \frac{k_0}{L^2} \left[ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \left( \frac{x}{L} \right) \right] + f \right\} dx - \frac{2k_0}{L} (\alpha_1 + 2\alpha_2) &= 0, \end{aligned} \quad (2.79)$$

josta seuraa lineaarinen yhtälöryhmä kahden tuntemattoman kertoimen  $\alpha_1$  ja  $\alpha_2$  ratkaisemiseksi:

$$\frac{k_0}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} fL = \begin{Bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \beta \frac{u_0 k_0}{L}, \quad (2.80)$$

josta ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{5} \end{Bmatrix} \beta u_0. \quad (2.81)$$

Lämpötilafunktion approksimaatio jäännösmenetelmällä on siten

$$\tilde{u}(x) = \left[ 1 + \beta \left( \frac{x}{L} \right) - \frac{3}{5} \beta \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] u_0. \quad (2.82)$$

Ratkaisu on piirretty kuvaan 2.1. Mikäli reunatermiä ei oteta mukaan yhtälöihin ollenkaan, saadaan lineaarinen approksimaatio  $\tilde{u}(x) = u_0 [1 - \beta(x/L)]$ , mikä on kelvoton tulos.

### 2.3.2 Kollokaatiomenetelmät

Mikäli painofunktiot  $\psi_i$  valitaan Diracin delta-funktioiksi, eli

$$\psi_i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (2.83)$$

jossa  $\mathbf{r}$  merkitsee paikkavektoria, saadaan pistekollokaatiomenetelmä. Toisin sanoen, jäännös (2.67) vaaditaan häviämään tietyissä pisteissä  $\mathbf{r}_i$ , joita kutsutaan kollokaatiomenetelmän kontrollipisteiksi.

On myös mahdollista jakaa alue  $\Omega$  osa-alueisiin  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  ja valita painofunktioksi

$$\psi_i = 1 \text{ alueessa } \Omega_i, \quad \psi_i = 0 \text{ muualla}, \quad (2.84)$$

jolloin saadaan menetelmä, jota kutsutaan osa-aluekollokaatiomenetelmäksi.

**Esimerkki 2.4** *Sovelletaan kollokaatiomenetelmää edellisen esimerkin tehtävään.*

Käytetään samaa yritettä kuin edellä, ja valitaan kontrollipisteiksi välin kolmasosapisteet. Reunaehtoja varten käytetään samantyyppisiä painofunktioita kuin edellä (tehdään ainoastaan dimensiokorjaus  $\gamma = L^{-1}$ ), joten ratkaisuyhtälöiksi saadaan <sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^L \delta(x - \frac{1}{3}L) \left[ \frac{k_0}{L^2} \left( \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \frac{x}{L} \right) + f \right] dx - \frac{2k_0}{L^2} (\alpha_1 + 2\alpha_2) &= 0, \\ \int_0^L \delta(x - \frac{2}{3}L) \left[ \frac{k_0}{L^2} \left( \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \frac{x}{L} \right) + f \right] dx - \frac{2k_0}{L^2} (\alpha_1 + 2\alpha_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.85)$$

josta seuraa

$$\frac{k_0}{L^2} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} f = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{\beta u_0 k_0}{L^2}. \quad (2.86)$$

Ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \beta u_0, \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}(x) = u_0 \left[ 1 + \beta \left( \frac{x}{L} \right) \right]. \quad (2.87)$$

Kollokaatiomenetelmän antama likiratkaisu on siis suora !!! Ei ole menetelmän huonoutta, että saatiin keho tulos, vaan päävastuu surkeasta ratkaisusta lankeaa nyt reunaehtojen painojen valinnalle. Suoritetaan laskelma uudestaan valitsemalla kontrollipisteessä  $x = L/3$  muodostetun yhtälön oikeanpuoleisen reunaehdon painoksi vaikkapa  $\gamma = 0$ . Tämä merkitsee sitä, että oikeanpuoleista reunaehto ei painoteta ollenkaan vasemmanpuoleisen kontrollipisteen kohdalla, jolloin saadaan

$$\frac{k_0}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \beta \frac{u_0 k_0}{L^2}, \quad (2.88)$$

<sup>6</sup> Diracin delta-distributiohan poimii funktion arvon, mikäli se esiintyy integrandissa tulomuodossa kyseisen funktion kanssa, eli  $\int_a^b \delta(x - c) f(x) dx = f(c)$ , jossa piste  $c$  kuuluu väliin  $(a, b)$ .

josta ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \beta u_0, \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}(x) = u_0 \left[ 1 + \frac{2}{3} \beta \left( \frac{x}{L} \right) - \frac{1}{2} \beta \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right]. \quad (2.89)$$

Tämäkään kollokaatiomenetelmän antama approksimaatio ei ole kovin hyvä. On mielenkiintoista havaita, että jättämällä reunatermi kokonaan pois päädytään lineaariseen ratkaisuun, joka on sama kuin painotettujen jäännösten menetelmässä, jossa reunatermi on myös jätetty pois.

### 2.3.3 Pienimmän neliön menetelmä

Pienimmän neliön keinossa painofunktioiksi valitaan yksinkertaisesti jäännöstermi itse, eli

$$w = R_\Omega, \quad \text{alueessa } \Omega \quad \text{ja} \quad w = R_S \quad \text{reunalla } S, \quad (2.90)$$

jolloin painotettujen jäännösten variaatiomuoto saadaan näyttämään seuraavalta:

$$\min_{\tilde{u}} \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} (F\tilde{u} - f)^2 dV + \gamma^2 \int_S (A\tilde{u} - a)^2 dS \right], \quad (2.91)$$

jossa kerroin  $\gamma$  pitää huolen dimensionaalisuuden oikeellisuudesta ja puolikas lausekkeen edessä on valittu mukavuussyistä.

**Esimerkki 2.5** Tutkitaan edellinen esimerkkititehtävä myös pienimmän neliön keinolla käyttäen samaa yritefunktiota.

Minimoitava funktionaali on nyt

$$I(\tilde{u}) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ (k\tilde{u}')' + f \right]^2 dx + \frac{1}{2} \gamma^2 [k(L)\tilde{u}'(L)]^2. \quad (2.92)$$

Sijoittamalla yritefunktio, on funktionaali kahden parametrin  $\alpha_1$  ja  $\alpha_2$  funktio

$$I(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \frac{k_0}{L^2} \left( \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \frac{x}{L} \right) + f \right]^2 dx + \frac{\gamma^2}{2} \left[ \frac{2k_0}{L} (\alpha_1 + 2\alpha_2) \right]^2. \quad (2.93)$$

Minimin välttämätön ehto on osittaisderivaattojen häviäminen näiden parametrien suhteen, eli

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \alpha_1} &= \frac{k_0^2}{L^4} \int_0^L \left( \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \frac{x}{L} \right) dx + \frac{k_0}{L^2} \int_0^L f dx + \gamma^2 \frac{4k_0^2}{L^2} (\alpha_1 + 2\alpha_2) = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial \alpha_2} &= \frac{k_0^2}{L^4} \int_0^L \left( \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \frac{x}{L} \right) \left( 2 + 4\frac{x}{L} \right) dx + \frac{k_0}{L^2} \int_0^L f \left( 2 + 4\frac{x}{L} \right) dx \\ &\quad + \gamma^2 \frac{8k_0^2}{L^2} (\alpha_1 + 2\alpha_2) = 0. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Suorittamalla integroinnit saadaan yhtälösystemi

$$\frac{k_0}{L^2} \begin{bmatrix} 1 + 4\gamma^2 L & 4(1 + 2\gamma^2 L) \\ 4(1 + 2\gamma^2 L) & \frac{52}{3} + 16\gamma^2 L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -4 \end{Bmatrix} \beta \frac{u_0 k_0}{L^2}. \quad (2.95)$$

Mikäli valitaan oikeanpuoleisen reunaehdon painoksi  $\gamma = 0$ , tulee approksi-  
maatioksi lineaarinen lauseke  $\tilde{u}(x) = u_0 [1 - \beta(x/L)]$ , joten ratkaisun paran-  
tamiseksi on syytä valita  $\gamma \neq 0$ . Lasketaan tehtävä painokertoimen arvolla  
 $\gamma^2 = L^{-1}$ , jolloin parametrien arvoiksi ja ratkaisuksi saadaan  $\alpha_1 = \frac{11}{17}\beta u_0$  ja  
 $\alpha_2 = -\frac{6}{17}\beta u_0$ , joten

$$\tilde{u}(x) = u_0 \left[ 1 + \frac{11}{17}\beta \left(\frac{x}{L}\right) - \frac{7}{17}\beta \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right]. \quad (2.96)$$

Likiratkaisu ei ole erityisen hyvä, ja se on piirretty kuvaan 2.1.

### 2.3.4 Galerkinin menetelmä

Galerkinin mukaan on saanut nimensä menettely, jossa painofunktioiksi valitaan  
samat kantafunktiot kuin ratkaisuyritteelle, eli

$$\psi_i = \phi_i. \quad (2.97)$$

Menetelmää voidaan tietenkin soveltaa muotoon (2.67) tai siitä osittaisintegroimalla  
saatuun muotoon (2.73).

**Esimerkki 2.6** Ratkaistaan jo tutuksi tullut 1-dimensioinen esimerkkitehtävä  
vielä Galerkinin keinolla. Tarkastellaan lisäksi muodon (2.73) reunatermejä  
huolellisemmin.

Ratkaistaan tehtävä ensin käyttäen muotoa (2.67). Yhtälöiksi saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi_1 \left[ (k\tilde{u}')' + f \right] dx - \gamma k(L)\tilde{u}'(L) &= 0, \\ \int_0^L \phi_2 \left[ (k\tilde{u}')' + f \right] dx - \gamma k(L)\tilde{u}'(L) &= 0, \end{aligned} \quad (2.98)$$

josta havaitaan ylimmäisen olevan identtinen jäännös menetelmällä ratkaistun  
tehtävän toisen yhtälön kanssa, mikä on luonnollista, koska käytettiin samaa  
yritettä ja painofunktiota  $(x/L)$ . Suorittamalla alimmaisen yhtälön integointi  
saadaan yhtälösystemi muotoon

$$\frac{k_0}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - 2\gamma & \frac{7}{3} - 4\gamma \\ \frac{1}{3} - 2\gamma & \frac{5}{3} - 4\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{Bmatrix} \beta \frac{u_0 k_0}{L}, \quad (2.99)$$

Otaksumalla painokertoimelle arvo  $\gamma = 1$ , saadaan ratkaisuksi  $\alpha_1 = \frac{11}{13}\beta u_0$  ja  
 $\alpha_2 = -\frac{6}{13}\beta u_0$ , joten

$$\tilde{u}(x) = u_0 \left[ 1 + \frac{11}{13}\beta \left(\frac{x}{L}\right) - \frac{6}{13}\beta \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right]. \quad (2.100)$$

Tulos on piirretty kuvaan 2.1 ja se on paras tähänastisista. Mikäli painoker-toimeksi valitaan  $\gamma = 0$  saadaan tulos:  $\alpha_1 = -\beta u_0, \alpha_2 = 0$ . Ratkaisu on lineaarinen approksimaatio, joka ei ole kelvollinen.

Toinen tapa soveltaa Galerkinin keinoa saadaan kun suoritetaan osittaisin-tegointi painotetusta kenttäyhtälöstä, jolloin päädytään yhtälöihin

$$\int_0^L \phi_i [(k\tilde{u}')' + f] dx - \gamma k(L)\tilde{u}'(L) = 0 \quad (2.101)$$

$$\Rightarrow \int_0^L k\phi_i'\tilde{u}' dx - \left[ \phi_i(k\tilde{u}') + \gamma k(L)\tilde{u}'(L) \right]_0^L = \int_0^L f\phi_i dx. \quad (2.102)$$

Havaitaan, että osittaisintegointi toi mukanaan informaation luonnollisesta reunaehdosta ja sen mahdollisesta painosta. Kun valitaan  $\gamma = 1$ , niin oleellista reunaehto vastavaa termi häviää ratkaisuyhtälöstä, joka siten yksinkertaistuu muotoon

$$\int_0^L k\phi_i'\tilde{u}' dx = \int_0^L f\phi_i dx. \quad (2.103)$$

Sijoittamalla interpolaatioiden lausekkeet ja suorittamalla integointi päädy-tään yhtälösystemiin

$$\frac{k_0}{L} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \beta \frac{u_0 k_0}{L}. \quad (2.104)$$

Yhtälön ratkaisu on luonnollisestikin sama kuin (2.100), jossa lähtökohtana oli Galerkinin keino osittaisintegroidun muoto. Tämä likimääräisratkaisu on piirretty kuvaan 2.1 ja havaitaan sen approksimoivan erinomaisesti analyyt-tistä ratkaisua, ottaen huomioon yrittien karkeus.

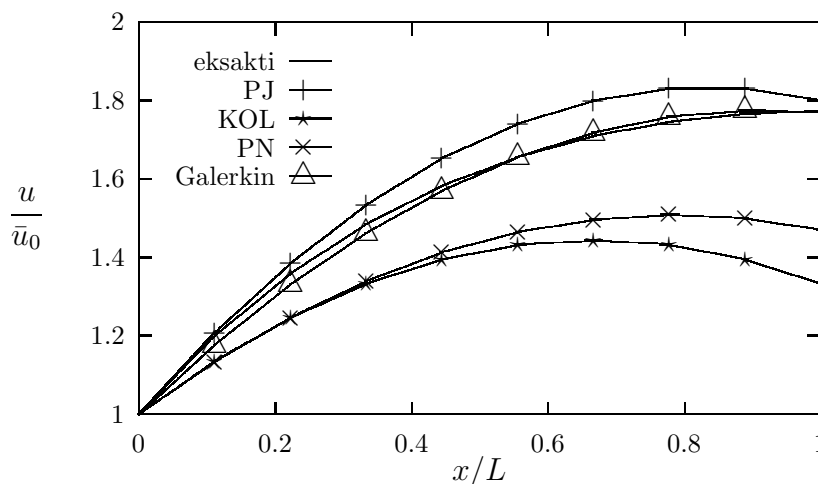
### 2.3.5 Rayleighin-Ritzin menetelmä

Rayleighin ja Ritzin menetelmä, tai lyhyesti pelkkä Ritzin menetelmä ei oikeastaan eroa Galerkinin menetelmästä. Ritzin menetelmäksi kutsutaan likiratkaisumenetel-mää, jossa lähdetään liikkeelle minimoitavasta funktionaalista. Täten Ritzin ja Ga-lerkinin menetelmän antamat likiratkaisut ovat identtiset.

On kuitenkin huomattava, että Galerkinin menetelmän soveltaminen ei ole ra-joittunut vain ongelmiin, jotka voidaan pukea sellaiseen variaatiomuotoon, joka on seurauksena funktionaalin minimoimisesta, joten Galerkinin menetelmää voidaan pitää yleispätevämpänä.

### 2.3.6 Muutamia huomautuksia

Lasketusta esimerkiksi voisi vetää sen johtopäätöksen, että Galerkinin keino on se ainoa oikea. Näin ei kuitenkaan ole asianlaita kaikissa ongelmissa, katso myös harjoi-tustehtävä 8. Voidaan kuitenkin osoittaa, että se on optimaalinen tietylle ryhmälle



**Kuva 2.1** Yksidimensioisen esimerkkitehtävän analyttinen ratkaisu (yhtenäinen viiva) ja neljä erilaista likiratkaisua (PJ = painotettujen jäännösten menetelmä, KOL = kollokaatiomenetelmä, ja PN = pienimmän neliön menetelmä). Piirretty  $\beta$ :n arvolla  $\beta = 2$ .

differentiaaliyhtälöitä (osittaisia tai tavallisia), nimittäin elliptisille yhtälöille, joukkoon johon juuri kyseinen stationäärinen lämmönjohtumisyhtälö kuuluu. Virtausmekaniikassa vallitsevat yhtälöt ovat usein hyperbolisluonteisia, ja tällöin Galerkinin menetelmä saattaa tuottaa pahasti oskilloivia tuloksia.

Tässä esitettyä Galerkinin menetelmää kutsutaan myös Bubnovin-Galerkinin menetelmäksi erotuksena ns. Petrovin-Galerkinin menetelmälle, jossa painofunktioina käytetään eri tavalla valittuja kantafunktioita kuin itse ratkaisuyritteelle. Tätä menetelmää on sovellettu menestyksellisesti juuri virtausmekaniikassa. Asiasta kiinnostuneelle lukijalle suositellaan lisälukemisenä artikkeleja [44], [55].

Edellisissä esimerkeistä voitaneen myös päätellä, ettei painofunktioiden konstruointi ole aivan triviaali toimenpide. Eräs mahdollinen keino saada hyvää informaatiota soveliaista reunaehtopainoista on käyttää Lagrangen kertojamenettelyä ja identifioida määräämättömän kertojan fysikaalinen tulkinta.

Tässä luvussa ei ole otettu suuremmin kantaa kelvollisten painofunktioiden valintaan, eikä menetelmän mahdolliseen suppenemiseen eli konvergenssiin, kun kantafunktioiden lukumäärää kasvatetaan. Likimenetelmien suppenemiseen palataan kuitenkin myöhemmin itse elementtimenetelmän yhteydessä.

## 2.4 Yhteenveto

Funktionaalien ääriarvon etsiminen on ekvivalentti funktionaalien variaation tuloksena syntyvän differentiaaliyhtälön ratkaisun kanssa.

Variaatiolaskenta mahdollistaa likiratkaisumenetelmien konstruoinnin. Paino-

tettujen jäännösten menetelmä on perusperiaatteeltaan seuraavanlainen: (i) ratkaistava ongelma kerrotaan testi- eli painofunktiolla ja (ii) integroidaan tarkastelualueen yli. Ratkaistavalle funktiolle valitaan sopiva yrite. Mikäli yritefunktiioon kohdistuvien derivointioperaatioiden lukumäärää halutaan vähentää suoritetaan sopiva määrä osittaisintegrointeja. Galerkinin keino saadaan kun painofunktion kannaksi valitaan sama kanta kuin yritefunktiolle.

## 2.5 Harjoitustehtäviä

1. Määritä variaatiolaskentaa soveltamalla sen käyrän yhtälö, joka muodostaa lyhimmän tien Euklidisen avaruuden tason kahden pisteen välille.

2. Ratkaise klassinen brakistokroniongelma, eli sen tasokäyrän yhtälö joka vakio-painovoimakentässä johtaa massapartikkelin nopeimpaan laskuun kahden tason pisteen välillä.

3. Etsi funktionaalin

$$I(y) = \int_a^b x^2 (y')^2 dx$$

extremaalit. Määrää lisäksi pisteiden  $(1, 1)$  ja  $(3, \frac{1}{2})$  kautta kulkeva ekstremaali. Mikä on kyseisen funktionaalin fysikaalinen tulkinta ?

4. Etsi funktionaalin

$$I(y, z) = \int_0^{\pi/2} [(y')^2 + (z')^2 + 2yz] dx$$

ekstremaali, joka toteuttaa reunaehdot:  $y(0) = 0, y(\pi/2) = 1, z(0) = 0, z(\pi/2) = -1$ . Mikä on kyseisen funktionaalin fysikaalinen tulkinta ?

5. Yksidimensioisen stationäärisen lämmönjohtumisyhtälön energiafunktio on

$$I(w) = \int_a^b \left[ \frac{1}{2} k (w')^2 - f w \right] dx,$$

jossa  $k$  on lämmönjohtavuuskerroin (oletetaan vakioksi) ja  $f$  on ulkoinen lämmönlähde. Näytä, että vastaava Eulerin yhtälö on  $-k w'' = f$ . Näytä myös, että samaan differentiaaliyhtälöön päädytään mikäli funktionaaliksi valitaan

$$J(w) = \int_a^b (k w'' + f)^2 dx.$$

6. Muodosta vapaasti tuetun yksiaukkoisen kimmoisalla alustalla olevan taivutetun ja puristetun palkin Eulerin yhtälö lähtien potentiaalienergian  $\Pi$  lausekkeesta

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_0^L [EI (w'')^2 - P (w')^2 + k (w)^2] dx - \int_0^L f w dx.$$

Tutki myös kokonaispotentiaalienergian funktionaalin toista variaatiota.

7. Olkoon ratkaistavana yllä olevaan potentiaalienergian lausekkeeseen liittyvä minimointitehtävä (ilman puristavaa voimaa  $P$ ) seuraavin reunaehdoin:

- (a)  $v(0) = 0$
- (b)  $v(0) = v_0$ ,
- (c)  $v'(L) = \phi_L$ ,
- (d)  $Q(0) = -EIv'''(0) = F$ .

Mikä on kinemaattisesti luvallisten funktioiden joukko  $\mathcal{A}$ ? Mitkä ovat taipuman variaatiolle asetettavat reunaehtovaatimukset?

8. Ratkaise yhtälö

$$-ku'' - cu = fx,$$

( $k, c, f$  ovat vakioita,  $c = \beta kL^{-2}$  jossa  $\beta$  dimensioton vakio) reunaehdoilla  $u(0) = u(L) = 0$  analyttisesti ja likimääräisesti

- (a) pistekollokaatiomenetelmällä valitsemalla kontrollipiste alueen keskelle,
- (b) osa-aluekollokaatiomenetelmällä valitsemalla osa-alueeksi koko väli  $(0, L)$ ,
- (c) pienimmän neliön keinolla ja
- (d) Galerkinin menetelmällä

käyttäen yksiparametristä yritettä  $\tilde{u}(x) = \alpha_1 \sin \pi x/L$ . Suorita laskelmat  $\beta$ :n arvoilla 1 ja 100.

9. Ratkaise Galerkinin menetelmällä Poissonin yhtälö

$$-k\Delta u = f,$$

(eli stationäärinen lämmönjohtumisyhtälö) suorakaiteen muotoisessa alueessa  $(x, y) \in (0, a) \times (0, b)$ . Reunaehdot ovat homogeeniset, eli  $u = 0$  reunaviivalla, ja  $k, \bar{f}$  ovat vakioita koko alueessa. Käytä approksimaatiota

$$\tilde{u}(x, y) = \alpha_1(x^2 - ax)(y^2 - by).$$

10. Yksiaukkoisen vapaasti tuetun taivutetun ohuen palkin taipuman analyttinen lauseke tasan jakautuneesta kuormasta  $f$  on

$$v(x) = \frac{fL^4}{24EI} \left(\frac{x}{L}\right) \left[ \left(\frac{x}{L}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1 \right],$$

välillä  $x \in (0, L)$ . Ratkaise tehtävä likimääräisesti Galerkinin menetelmällä käyttämällä trigonometrista sarjamuotoista yritettä

$$\tilde{v}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$



ja minimoimalla potentiaalienergia

$$\Pi(\tilde{v}) = \frac{1}{2} \int_0^L EI(\tilde{v}'')^2 dx - \int_0^L f\tilde{v} dx.$$

Suppeneeko sarjaratkaisu kohti analyttistä ratkaisua? Määritä virhe keskipisteen taipumassa kun otetaan mukaan vain sarjan muutama ensimmäinen termi.

# Luku 3

## Johdatus elementtimenetelmään

Luvun tarkoituksena on esitellä elementtimenetelmän perusosat ja tarkastella interpolaatiofunktioiden muodostamista yksidimensioisessa tapauksessa. Elementtimenetelmän  $h$ - ja  $p$ -version peruseriaatteet esitetään. Tavanomaisen elementtimenetelmän ongelmista käsitellään esimerkkinä diffuusio-konvektioyhtälön tapaus. Luvun lopussa annetaan lyhyt johdatus stabiloituihin formulaatioihin.

### 3.1 Malliprobleema

Elementtimenetelmä voidaan johtaa edellä esitetyistä periaatteista, eli painotettujen jäännösten menetelmästä tai sen eri muunnoksista. Ainoa ero klassisten variaatiomenetelmien ja elementtimenetelmän välillä on se, että klassisissa menetelmissä interpoloivat kantafunktiot ovat määritellyt koko tarkasteltavassa alueessa, kun taas elementtimenetelmässä interpoloivat funktiot määritellään paikallisesti osa-alueen eli elementin sisällä, josta myös menetelmän nimi äärellisten elementtien menetelmä. Ratkaisu saadaan kokoamalla kunkin elementin osuudet globaaliin yhtälösystemiin.

Tarkastellaan asiaa yksidimensioisen lämmönjohtumisyhtälön (tai aksiaalisesti kuormitetun sauvan) tapauksessa. Olkoon ratkaistavana probleema

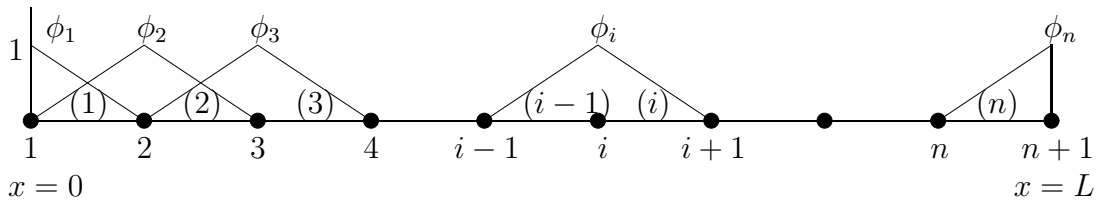
$$-(ku')' = f \tag{3.1}$$

alueessa  $\Omega = \{x|x \in (0, L)\}$  reunaehdoilla  $u(0) = u(L) = 0$ . Valitaan yhtälöiden muodostamistavaksi Galerkinin menetelmä, jolloin malliprobleeman (3.1) heikko muoto eli variaatiomuoto saadaan kun kyseinen differentiaaliyhtälö kerrotaan puolittain testifunktioilla  $\hat{u}$  ja integroidaan ratkaisualueen ylitse

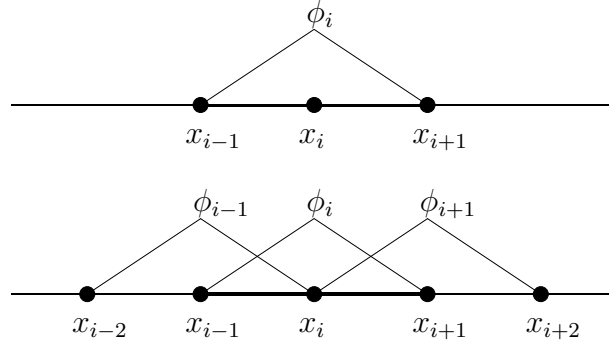
$$-\int_0^L \hat{u}(ku')' dx = \int_0^L \hat{u} f dx. \tag{3.2}$$

Osittaisintegroimalla vasemmanpuoleinen termi saadaan

$$\int_0^L \hat{u}' ku' dx - \left|_0^L \hat{u} ku' \right| = \int_0^L \hat{u} f dx. \tag{3.3}$$



**Kuva 3.1** Elementtimenetelmän paloittain lineaariset kantafunktiot.



**Kuva 3.2** Solmuun  $i$  liittyvä painofunktio  $\phi_i$ , ja välille  $(x_{i-1}, x_{i+1})$  liittyvät yritefunktion kantapolynomit.

Koska variaation  $\hat{u}$  on toteutettava homogeeniset reunaehdot, päädytään muotoon

$$\int_0^L \hat{u}' k u' dx = \int_0^L \hat{u} f dx. \quad (3.4)$$

Elementtimenetelmä poikkeaa klassisista painotetun jäännösten menetelmän variaatioista ainoastaan siinä, että kantafunktiot määritellään vain osassa aluetta  $\Omega$ . Yhtälöstä (3.4) havaitaan, että testifunktioille  $\hat{u}$  ja itse ratkaisuyritteelle  $\tilde{u}$  riittää valita funktiot jotka ovat vain  $C_0$ -jatkuvia. Toisin sanoen edes ensimmäisen derivaatan jatkuvuudelle ei aseteta ehtoja. Tällaisten interpolaatiosuhteiden muodostaminen onnistuu mutkattomasti jopa useammassa kuin yhdessä dimensiossa. Kuvassa 3.1 on käytetty paloittain lineaarisia kantafunktioita, ja ratkaisuyrite voidaan kirjoittaa muodossa

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \phi_i(x). \quad (3.5)$$

Huomaa, että tuntemattomilla parametreilla on suureen  $u$  arvot solmuissa  $i$ , joten voidaan kirjoittaa  $\alpha_i = u_i$ .

Galerkinin menetelmässä testi- eli painofunktiolle valitaan myös sama kanta  $\phi_i$ . Kuten kuvasta 3.2 voidaan havaita, on solmuun  $i$  liittyvää testifunktiota  $\hat{u} = \phi_i \hat{u}_i$

vastaava osa integraalia (3.4):

$$\begin{aligned} \hat{u}_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d\phi_i}{dx} k \frac{d\phi_{i-1}}{dx} dx u_{i-1} + \hat{u}_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{d\phi_i}{dx} k \frac{d\phi_i}{dx} dx u_i + \hat{u}_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\phi_i}{dx} k \frac{d\phi_{i+1}}{dx} dx u_{i+1} \\ = \hat{u}_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i f dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Koska painofunktion arvo solmussa  $\hat{u}_i$  on mielivaltainen, on se voitu supistaa pois yllä olevasta yhtälöstä. Merkitään osavälin  $(i) = \{x | x \in (x_i, x_{i+1})\}$  pituutta symbolilla  $h^{(i)} = x_{i+1} - x_i$ , jolloin

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_{i-1}}{dx} = -\frac{1}{h^{(i-1)}} \quad \text{kun } x \in (x_{i-1}, x_i), \quad \frac{d\phi_i}{dx} = -\frac{1}{h^{(i)}} \quad \text{kun } x \in (x_i, x_{i+1}), \\ \frac{d\phi_i}{dx} = \frac{1}{h^{(i-1)}} \quad \text{kun } x \in (x_{i-1}, x_i), \quad \frac{d\phi_{i+1}}{dx} = \frac{1}{h^{(i)}} \quad \text{kun } x \in (x_i, x_{i+1}). \end{aligned}$$

Olettamalla lähdetermin vakioisuus integraalista (3.6) saadaan

$$k \left[ -\frac{1}{h^{(i-1)}} u_{i-1} + \left( \frac{1}{h^{(i-1)}} + \frac{1}{h^{(i)}} \right) u_i - \frac{1}{h^{(i)}} u_{i+1} \right] = \frac{1}{2} f (h^{(i-1)} + h^{(i)}). \quad (3.7)$$

Käytettäessä paloittain lineaarisia kantafunktioita kytkeytyvät yksidimensioises- sa ongelmassa ainoastaan tuntemattomat  $u_{i-1}$ ,  $u_i$  ja  $u_{i+1}$  toisiinsa. Tämä johtaa nauhamaiseen kerroinmatriisiin, joka kyseisessä tehtävässä on tridiagonaalinen.

Edellä kuvattu ratkaisutapa on kätevä käsinlaskussa. Vielä systemaattisempi tietokonelaskentaan soveltuva lähestymistapa elementtimenetelmään saadaan kokoamalla systeemyhtälön alkiot elementteittäin. Merkitään alueen  $\Omega$  toisistaan eriäviä osa-alueita  $\Omega^{(e)} = \{x | x \in (x_1^{(e)}, x_2^{(e)})\}$ . Mikäli jako suoritetaan  $n$ :ään elementtiin, katso kuva 3.1, niin integraalin additiivisuuteen nojautuen yhtälö (3.4) saa muodon

$$\sum_{e=1}^n \int_{\Omega^{(e)}} \hat{u}' k u' dx = \sum_{e=1}^n \int_{\Omega^{(e)}} \hat{u} f dx. \quad (3.8)$$

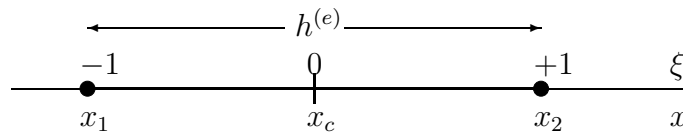
Tämä muoto toimii elementtimenetelmän perustana. Tarkastellaan seuraavassa hie- man yksityiskohtaisemmin ja systemaattisemmin elementtimenetelmän interpolaa- tiofunktioita ja elementtikohtaista kokoamisprosessia.

## 3.2 Elementtimenetelmän perusosat

### 3.2.1 Yleistä

Tietyn elementtityypin määrittely vaatii kolmen perusasian selvittämistä:

1. elementin muodon eli geometrian (jana, kolmio, nelikulmio, tetraedri, särmiö, jne.),



**Kuva 3.3** Janaelementti.

2. interpoloivien funktioiden ja
3. elementin vapaiden parametrien eli vapausasteiden määrittelyn.

Nämä kolme seikkaa määräävät ns. solmujen lukumäärän ja sijainnin. Riippuen siitä, millaiset kantafunktiot ja vapausasteet on valittu, ei kaikkia vapausasteita voi välttämättä assosoida tiettyihin solmuihin tai paikkaan yksikäsitteisesti. Tähän seikkaan tullaan palaamaan vielä myöhemmin.

### 3.2.2 Interpolaatiofunktiot

Elementin alueella kuvataan haluttua suuretta interpolaatiofunktioilla, joita kutsutaan myös muotofunktioiksi. Interpolaatiofunktiot voidaan jakaa ainakin kahteen ryhmään:

1. tavanomaisiin, eli solmuihin sidottuihin ja
2. hierarkisiin interpolaatiofunktioihin.

Interpolaation muodostavat kantafunktiot voitaisiin periaatteessa valita miltei mielivaltaisesti. Tavallisesti käytetään kuitenkin yksinkertaisia polynomeja. Tavanomaisille interpolaatiofunktioille on ominaista, että kaikki kantafunktiot muuttuvat polynomin asteen  $p$  kasvaessa. Hierarkisessa kantajärjestelmässä interpolaatiopolynomin asteen kasvattaminen ei muuta vanhoja alhaisempaa astetta olevia kantafunktioita.

Aloitetaan tarkastelu yksidimensioisesta janaelementistä. Otetaan käyttöön paikallinen koordinaatisto, jonka koordinaattia merkitään kirjaimella  $\xi$  ja joka määritellään alueessa  $\xi \in (-1, 1)$ . Täten muunnos rakennekoordinaatistosta eli globaalista  $x$ -koordinaatistosta paikalliseen eli elementin lokaaliin  $\xi$ -koordinaatistoon voidaan ilmaista yhtälönä

$$\xi = 2 \frac{x - x_c}{h}, \quad (3.9)$$

jossa  $x_c$  on elementin keskipisteen globaali rakennekoordinaatti ja  $h$  on janaelementin pituus, katso kuva 3.3.

Yksinkertaisin mahdollinen polynomimuotoinen kantafunktiojärjestelmä on varmastikin

$$\phi_i = x^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Tämä ei ole sellaisenaan kuitenkaan käyttökelpoinen, sillä näin muodostettu kanta on numeerisesti mahdollisimman pahanlaatuinen ja äärellisellä laskentatarkkuudella operoitaessa pyöristysvirheet hyvin äkkiä saastuttavat tulokset kelvottomiksi. Havainnollistetaan tätä esimerkillä.

**Esimerkki 3.1** *Apksimoidaan funktiota  $f(x) = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$  välillä  $(0, 1)$  käyttäen polynomikantaa (3.10) ja pienimmän neliön keinoa. Mikä on virhe tuloksissa, kun käytetään kuudennen asteen interpolaatiota ja reaali-luvuille käytetään 32-bittistä esitystä, mikä merkitsee operoimista seitsemällä kahdeksalla merkitsevällä numerolla.*

Apksimaatio on siis

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) f_i, \quad (3.11)$$

jossa  $f_i$ :t ovat vielä määräämättömiä kertoimia. Minimoitava virhefunktio on

$$E(f_i) = \frac{1}{2} \int_0^L [f(x) - \tilde{f}(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ f(x) - \sum_{i=1}^n \phi_i f_i \right]^2 dx. \quad (3.12)$$

Kertoimien  $f_i$  ratkaisuyhtälöt ovat

$$\frac{\partial E}{\partial f_j} = \int_0^L \left[ f(x) - \sum_{i=1}^n \phi_i f_i \right] \phi_j dx = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.13)$$

joka kirjoitettuna matriisimuodossa on

$$\begin{bmatrix} (\phi_1, \phi_1) & (\phi_1, \phi_2) & \dots & (\phi_1, \phi_n) \\ (\phi_2, \phi_1) & (\phi_2, \phi_2) & \dots & (\phi_2, \phi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_n, \phi_1) & (\phi_n, \phi_2) & \dots & (\phi_n, \phi_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (f, \phi_1) \\ (f, \phi_2) \\ \vdots \\ (f, \phi_n) \end{Bmatrix}, \quad (3.14)$$

jossa on merkitty integraalimuotoista sisätuloa kaarisulkeilla  $(\cdot, \cdot)$ . Suorittamalla integroinnit saadaan tulokseksi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} \end{Bmatrix}, \quad (3.15)$$

jossa kerroinmatriisi  $\mathbf{A}$  on surullisenkuuluisa Hilbertin matriisi. Ratkaisu on esitetty seuraavassa taulukossa.

	tarkka arvo	numeerinen arvo	suhteellinen virhe %
$f_1$	1.00000000	1.00052619	0.05261898
$f_2$	1.00000000	0.98027061	1.97293762
$f_3$	1.00000000	1.18187832	18.18783188
$f_4$	1.00000000	0.31600904	68.39909363
$f_5$	1.00000000	2.22156572	122.15657043
$f_6$	1.00000000	-0.03333282	103.33328247
$f_7$	1.00000000	1.33333324	33.33332443

### 3.2.2.1 Solmuihin sidotut Lagrangen kantapolynomit

Suosittelavia tapoja estää edellisen esimerkin kaltainen pyöristysvirheräjähdyks on käyttää esimerkiksi Lagrangen polynomeja tai ns. ortogonaalipolynomijärjestelmiä interpolaatiofunktioina.

Lagrangen astetta  $p$  oleva polynomi määritellään

$$l_k^p(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \cdots (\xi - \xi_{k-1})(\xi - \xi_{k+1}) \cdots (\xi - \xi_p)}{(\xi_k - \xi_0)(\xi_k - \xi_1) \cdots (\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k+1}) \cdots (\xi_k - \xi_p)}, \quad (3.16)$$

joka antaa yksikköarvon pisteessä  $\xi = \xi_k$  ja leikkaa koordinaattiakselin  $p$ :ssä pisteessä  $\xi_i, i = 0, 1, \dots, p$  ( $i \neq k$ ).

Lineaarinen interpolaatio välillä ( $\xi_0 = -1, \xi_1 = 1$ ) saadaan, kun asetetaan  $\xi_k = \xi_0$  ja  $\xi_k = \xi_1$  vuoron perään, eli

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= l_0^1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \\ N_2(\xi) &= l_1^1(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Paraboliseksi interpolaatioksi saadaan ( $\xi_0 = -1, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1$ )

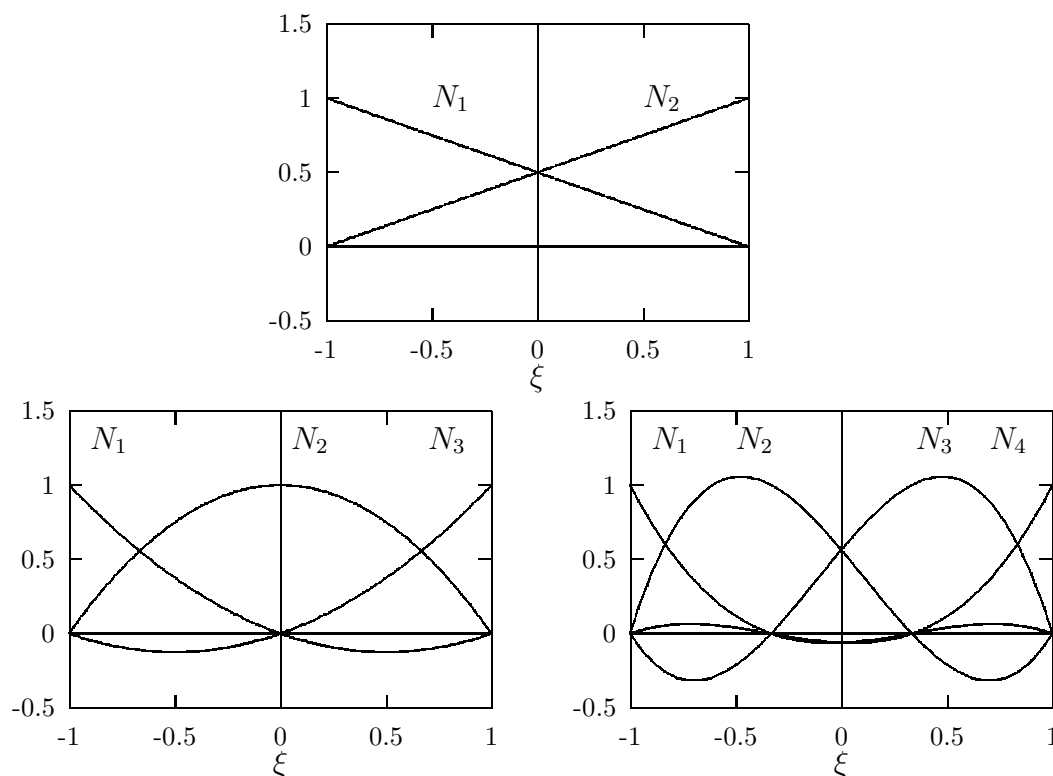
$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= l_0^2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1), \\ N_2(\xi) &= l_1^2(\xi) = 1 - \xi^2, \\ N_3(\xi) &= l_2^2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi), \end{aligned} \quad (3.18)$$

ja kuubiset Lagrangen polynomit ovat ( $\xi_0 = -1, \xi_1 = -1/3, \xi_2 = 1/3, \xi_3 = 1$ )

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= l_0^3(\xi) = -\frac{9}{16}(\xi + \frac{1}{3})(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1), \\ N_2(\xi) &= l_1^3(\xi) = \frac{27}{16}(\xi + 1)(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1), \\ N_3(\xi) &= l_2^3(\xi) = -\frac{27}{16}(\xi + 1)(\xi + \frac{1}{3})(\xi - 1), \\ N_4(\xi) &= l_3^3(\xi) = \frac{9}{16}(\xi + 1)(\xi + \frac{1}{3})(\xi - \frac{1}{3}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Lineaariset, paraboliset ja kuubiset interpolaatiopolynomit on piirretty kuvaan 3.4.

Kuten havaitaan, voidaan Lagrangen polynomien avulla muodostaa kokonainen perhe interpolaatiofunktioita. Jos näitä funktioita käytetään elementtimenetelmässä, puhutaan Lagrangen elementtiperheestä.



**Kuva 3.4** Lineaariset, paraboliset ja kuubiset Lagrangen interpolaatiopolynomit.

### 3.2.2.2 Hierarkinen kantapolynomijärjestelmä

Uudempi tapa konstruoida interpolaatiofunktioita on käyttää hierarkisia kantafunktioita [34]. Eräs mahdollinen järjestelmä saadaan kun valitaan

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi), \quad N_i(\xi) = \psi_{i-1}(\xi), \quad i = 3, 4, \dots, p + 1, \quad (3.20)$$

jossa  $\psi_j$  määritellään Legendren polynomien  $P_{j-1}$  integraalien avulla:

$$\psi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t) dt, \quad j = 2, 3, \dots \quad (3.21)$$

Legendren polynomit  $P_n(\xi)$  ovat Legendren differentiaaliyhtälön

$$(1 - \xi^2)y'' - 2\xi y' + n(n + 1)y = 0, \quad -1 < \xi < 1 \quad (3.22)$$

ratkaisuja, kun  $n = 0, 1, 2, \dots$  ja jossa pilkku tarkoittaa derivointia  $\xi$ :n suhteen. Kaksi ensimmäistä polynomia ovat

$$P_0(\xi) = 1 \quad \text{ja} \quad P_1(\xi) = \xi, \quad (3.23)$$



josta korkeamman asteen polynomit voidaan generoida *Bonnetin rekursiokaavan*

$$(n+1)P_{n+1}(\xi) = (2n+1)\xi P_n(\xi) - nP_{n-1}(\xi), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

avulla, josta seuraa

$$\begin{aligned} P_2(\xi) &= \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1), & P_3(\xi) &= \frac{1}{2}(5\xi^3 - 3\xi), \\ P_4(\xi) &= \frac{1}{8}(35\xi^4 - 30\xi^2 + 3), & P_5(\xi) &= \frac{1}{8}(63\xi^5 - 70\xi^3 + 15\xi) \quad \text{jne..} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Erittäin hyödyllisiä ovat myös palautuskaavat derivaatoille:

$$nP'_{n+1}(\xi) = (2n+1)\xi P'_n(\xi) - (n+1)P'_{n-1}(\xi), \quad (3.26a)$$

$$(2n+1)P_n(\xi) = P'_{n+1}(\xi) - P'_{n-1}(\xi). \quad (3.26b)$$

Yllä olevien Legendren polynomien rekursiokaavojen perusteella on helppo johtaa rekursiokaava interpolaatiofunktioille  $\psi(\xi)$

$$\psi_j(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(2j-1)}} [P_j(\xi) - P_{j-2}(\xi)]. \quad (3.27)$$

Hierarkisen järjestelmän (3.21) ensimmäiset ns. solmuttomat kantafunktiot ovat siis

$$N_3(\xi) = \psi_2(\xi) = \frac{\sqrt{6}}{4}(\xi^2 - 1), \quad (3.28a)$$

$$N_4(\xi) = \psi_3(\xi) = \frac{\sqrt{10}}{4}(\xi^3 - \xi), \quad (3.28b)$$

$$N_5(\xi) = \psi_4(\xi) = \frac{\sqrt{14}}{16}(5\xi^4 - 6\xi^2 + 1), \quad (3.28c)$$

$$N_6(\xi) = \psi_5(\xi) = \frac{\sqrt{18}}{16}(7\xi^5 - 10\xi^3 + 3\xi), \quad \text{jne..} \quad (3.28d)$$

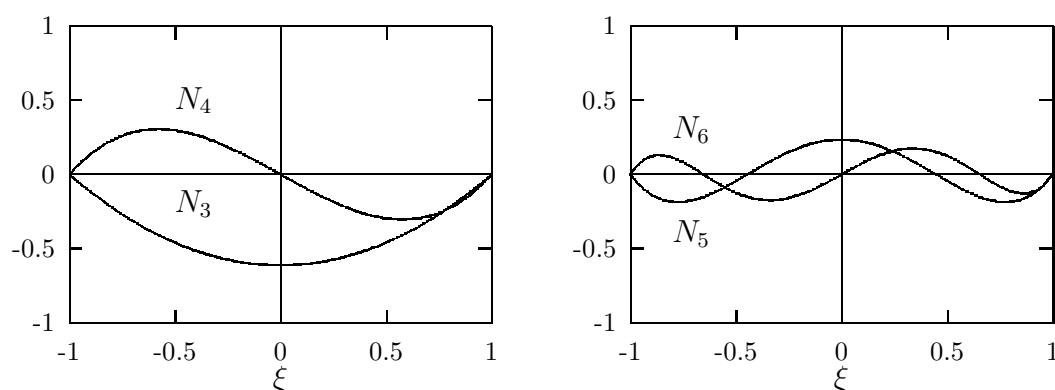
jotka ovat piirrettyinä kuvassa 3.5. Kantafunktioita  $N_1$  ja  $N_2$  kutsutaan solmuinterpolaatiofunktioiksi tai ulkoisiksi interpolaatiofunktioiksi tai ulkoisiksi muodoiksi, kun taas kantafunktioita  $N_i, i = 3, 4, \dots$  kutsutaan sisäisiksi interpolaatiofunktioiksi tai sisäisiksi muodoiksi tai “kuplamuodoiksi”. Kantafunktiot (3.20) ovat erityisen sopivia elementtimenetelmän interpolaatiofunktioiksi erityisesti tietokoneimplemtointia silmälläpitäen, sillä ne muodostavat numeerisesti stabiilin kantafunktioiden joukon ja niiden ohjelmointi onnistuu kätevästi rekursiokaavan avulla mielivaltaiselle asteluvulle  $p$ .

Legendren polynomien yksi mielenkiintoisista ominaisuuksista on ortogonaalisuus

$$\int_{-1}^1 P_i(\xi)P_j(\xi)d\xi = \begin{cases} \frac{2}{2i+1}, & \text{jos } i = j \\ 0, & \text{jos } i \neq j. \end{cases} \quad (3.29)$$

Tästä aiheutuen on yhtälön (3.21) avulla määritellyillä interpolaatiofunktioilla seuraavanlainen sovellutuksia silmälläpitäen tärkeä ortogonaalisuusominaisuus:

$$\int_{-1}^1 \frac{d\psi_i}{d\xi} \frac{d\psi_j}{d\xi} d\xi = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j, \\ 0, & \text{jos } i \neq j. \end{cases} \quad (3.30)$$



**Kuva 3.5** Hierarkisen järjestelmän (3.21) sisäisiä interpolaatiofunktioita.

### 3.3 Malliprobleema elementtimenetelmällä

Palataan uudestaan esimerkkiongelmään (3.1) ja sen variaatiomuotoon (3.4), joka on perusta elementtimenetelmän diskreeteille yhtälöille. Kirjoitetaan heikko muoto uudelleen näkyviin:

$$\int_0^L ku' \hat{u}' dx = \int_0^L f \hat{u} dx. \quad (3.31)$$

Otetaan käyttöön yksinkertaisin mahdollinen  $C_0$ -interpolaatio eli lineaariset polynomit

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (3.32)$$

Ratkaisua siis approksimoidaan kunkin elementin alueella kaavalla

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x)^{(e)} &= \tilde{u}(\xi(x))^{(e)} = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi(x)) u_i \\ &= N_1(\xi) u_1 + N_2(\xi) u_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi) u_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi) u_2, \end{aligned} \quad (3.33)$$

jossa  $u_i$ :t ovat tuntemattomia parametreja eli  $u$ :n approksimaation arvoja solmupisteissä. Kun painofunktiolle  $\hat{u}$  valitaan myös samat kantafunktiot (3.32) ja jaetaan alue  $N$ :ään elementtiin, saadaan heikon muodon (3.31) diskreetti vastine kirjoitettua muotoon

$$\sum_{e=1}^N \sum_{j=1}^2 \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} k \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx u_j = \sum_{e=1}^N \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} f N_i dx, \quad i = 1, 2. \quad (3.34)$$

Integroinnit voidaan suorittaa elementtikohtaisesti paikallisessa  $\xi$ -koordinaatistossa, jolloin yhtälössä (3.34) olevissa integraaleissa suoritetaan muuttujan vaihto  $x \rightarrow \xi$ ,

jolloin rajat muuttuvat  $x_1^{(e)} \rightarrow -1$  ja  $x_2^{(e)} \rightarrow +1$  ja saadaan lausekkeet

$$\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} k \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx = \int_{-1}^1 k \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} J^{-1} d\xi, \quad (3.35a)$$

$$\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} f N_i dx = \int_{-1}^1 f N_i J d\xi, \quad (3.35b)$$

jossa  $J = dx/d\xi = \frac{1}{2}h^{(e)} = \frac{1}{2}(x_2^{(e)} - x_1^{(e)})$ . Huomaa, että derivaatoille pätee

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} = \frac{1}{J} \frac{d}{d\xi} = \frac{2}{h^{(e)}} \frac{d}{d\xi}. \quad (3.36)$$

Yhtälö (3.34) voidaan kirjoittaa matriisimuodossa seuraavasti:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.37)$$

jossa globaali rakennekoordinaatiston jäykkyyismatriisi  $\mathbf{K}$  ja kuormitusvektori  $\mathbf{f}$  kootaan paikallisista elementtien osuuksista

$$\mathbf{K} = \underset{e=1}{\overset{N}{\mathbf{A}}} \mathbf{K}^{(e)}, \quad \mathbf{f} = \underset{e=1}{\overset{N}{\mathbf{A}}} \mathbf{f}^{(e)}. \quad (3.38)$$

Elementtimatriisin  $\mathbf{K}^{(e)}$  ja vektoreiden  $\mathbf{u}^{(e)}$  ja  $\mathbf{f}^{(e)}$  komponenttiesitykset ovat

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}^{(e)} = \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad (3.39)$$

joissa

$$K_{ij}^{(e)} = \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 k \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} d\xi, \quad f_i = \frac{1}{2}h^{(e)} \int_{-1}^1 f N_i d\xi. \quad (3.40)$$

Ottamalla käyttöön matriisimerkinnot

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}^{(e)}, \quad \mathbf{N} = [ N_1 \quad N_2 ], \quad \mathbf{B} = \frac{d}{dx}\mathbf{N}, \quad \mathbf{D} = k \quad (3.41)$$

voidaan elementin jäykkyyismatriisi ja kuormitusvektori kirjoittaa yleisessä muodossa

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} f \mathbf{N}^T dV. \quad (3.42)$$

Yllä olevasta jäykkyyismatriisin esityksestä havaitaan yhteys aivan alussa mainittuun fysikaalisten ilmiöiden matemaattisen mallin perusstruktuuriin, katso kuva 1.2. Tässä siis matriisi  $\mathbf{B}$  välittää diskreetissä muodossa kinemaattisen yhteyden; matriisi  $\mathbf{D}$  vastaavasti materiaalilain ja koska kyseessä on itseadjungoitu yhtälö  $\mathbf{B}^T$  on tasapaino-operaattorin diskreetti vastine.

Mikäli otaksutaan  $k$  vakioksi elementin alueella ja käytetään lineaarisia interpolaatiopolynomeja (3.32), saadaan jäykkyysmatriisiksi (tai johtavuusmatriisiksi)

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Kvadraattista interpolaatiota (3.18)

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x)^{(e)} &= \tilde{u}(\xi(x))^{(e)} = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi(x))u_i = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 + N_3(\xi)u_3 \\ &= \frac{1}{2}\xi(\xi-1)u_1 + (1-\xi^2)u_2 + \frac{1}{2}\xi(1+\xi)u_3 \end{aligned} \quad (3.44)$$

käytettäessä saadaan jäykkyysmatriisiksi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k}{3h^{(e)}} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Mikäli käytetään hierarkista kantaa (3.20) saadaan yksinkertainen jäykkyysmatriisi, jossa ensimmäinen  $2 \times 2$  lohko on identtinen matriisin (3.43) kanssa ja ortogonaalisuuden (3.30) perusteella tulee sisäisten muotojen kontribuutioksi vain diagonaalitermit

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

**Esimerkki 3.2** Mikäli kuormitustermi on  $f(x) = -f_c(x/L) \ln(x/L)$  ( $f_c$  on vakio) ja lämmönjohtavuus  $k$  on vakio koko alueessa  $(0, L)$ , niin määritä lämpötilajakauma malliprobleemalle, kun alue jaetaan tasavälisesti kolmeen lineaariseen elementtiin. Määritä likiratkaisusta myös lämpövuon arvot.

Kaikkien elementtien jäykkyysmatriisit ovat samanlaisia, koska  $k$  on vakio ja elementit ovat yhtä pitkiä. Ne saadaan yhtälöstä (3.43) sijoittamalla  $h^{(e)} = L/3$ . Systemin globaali jäykkyysmatriisi kootaan, kun ensin identifoidaan paikallisia vapausasteita vastaavat globaalit vapausastenumerot:

	elem. 1	elem. 2	elem. 3
paikalliset vapausasteet	1	2	1
globaalit vapausasteet	-	1	1

Globaalin eli rakennekoordinaatiston jäykkyyso-matriisin alkiot ovat siten:

$$K_{11} = K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)}, \quad K_{12} = K_{12}^{(2)}, \quad K_{22} = K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)}, \quad (3.47)$$

johon sijoittamalla arvot saadaan

$$\mathbf{K} = \frac{3k}{L} \begin{bmatrix} 1+1 & -1 \\ -1 & 1+1 \end{bmatrix} = \frac{3k}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Kuormitusvektorin termit ovat

$$f_1 = f_2^{(1)} + f_1^{(2)}, \quad f_2 = f_2^{(2)} + f_1^{(3)}, \quad (3.49)$$

jossa yksittäiset alkiot ovat

$$f_2^{(1)} = -\frac{1}{6}f_cL \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{6}\right) \ln\left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{6}\right) \frac{1}{2}(1+\xi) d\xi, \quad (3.50a)$$

$$f_1^{(2)} = -\frac{1}{6}f_cL \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}(1-\xi) d\xi, \quad (3.50b)$$

$$f_2^{(2)} = -\frac{1}{6}f_cL \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}(1+\xi) d\xi, \quad (3.50c)$$

$$f_1^{(3)} = -\frac{1}{6}f_cL \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6}\xi + \frac{5}{6}\right) \ln\left(\frac{1}{6}\xi + \frac{5}{6}\right) \frac{1}{2}(1-\xi) d\xi, \quad (3.50d)$$

jossa on käytetty yhtälön (3.9) käännteistä muotoa

$$x = \frac{1}{2}h^{(e)}\xi + x_c^{(e)}. \quad (3.51)$$

Suorittamalla integroinnit saadaan kuormitusvektoriksi ja ratkaisuksi

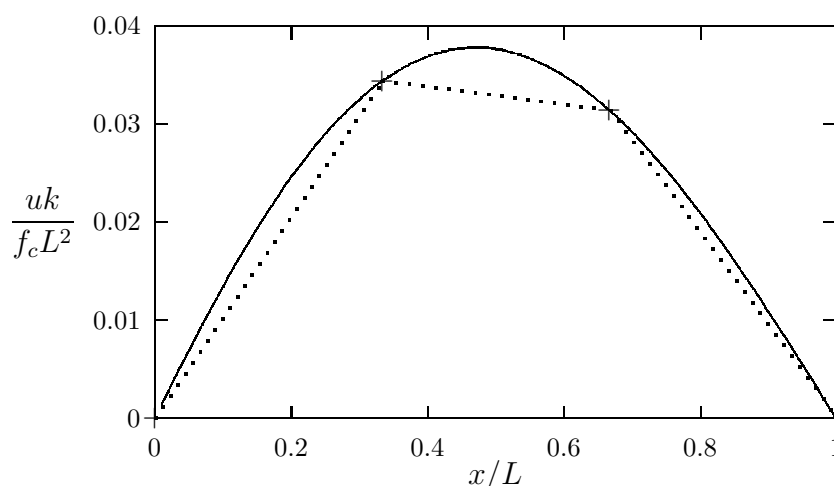
$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 0.11197 \\ 0.08539 \end{Bmatrix} f_cL \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{u} &= \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} = \frac{L}{9k} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.11197 \\ 0.08539 \end{Bmatrix} f_cL \\ &= \begin{Bmatrix} 0.034371 \\ 0.031417 \end{Bmatrix} \frac{f_cL^2}{k}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Tarkka ratkaisuhan on

$$u(x) = \frac{f_cL^2}{6k} \left(\frac{x}{L}\right) \left[ \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(\ln\frac{x}{L} - \frac{5}{6}\right) + \frac{5}{6} \right], \quad (3.54)$$

ja alla olevassa taulukossa on vertailtu analyttisen ja elementtimenetelmän antamia tuloksia tietyissä pisteissä (kerrottava tekijällä  $f_cL^2/k$ ), katso myös kuvaa 3.6.



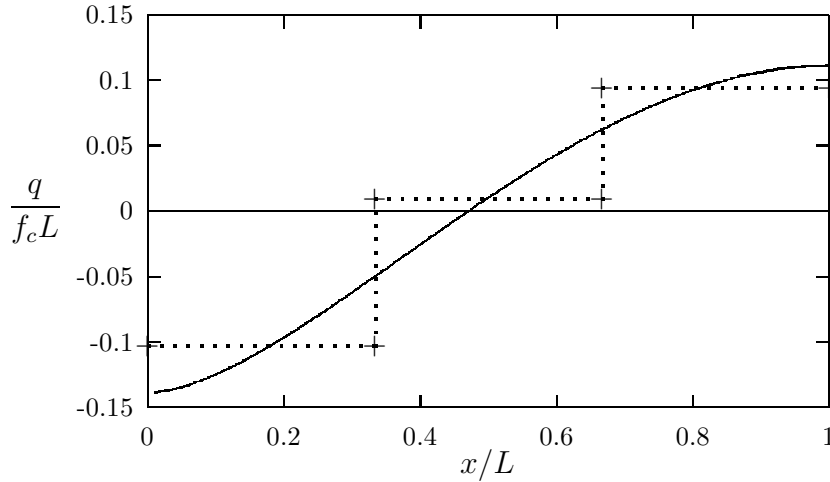
**Kuva 3.6** Esimerkkiongelman tarkka ratkaisu (yhtenäinen viiva) ja elementtimenetelmällä laskettu (katkoviiva) käyttäen kolmea lineaarista elementtiä.

	solmu 1 ( $x/L = 1/3$ )	keskipiste ( $x/L = 1/2$ )	solmu 2 ( $x/L = 2/3$ )
tarkka	0.034371	0.037643	0.031417
FEM	0.034371	0.032894	0.031417

Havaitaan, että elementtimenetelmän antamat tulokset yhtyvät solmupisteissä tarkkaan ratkaisuun, eli elementtiapproksimaatio on tarkan ratkaisun interpolantti. Tämän paremmin ei voisi käydä. Tietenkin asia herättää heti kysymyksen: “Miksi näin?”. Ratkaisu on yksinkertainen, kun havaitaan käytettyjen interpolatiofunktioiden olevan ratkaistavan differentiaaliyhtälön homogeenisen osan yleinen ratkaisu. Lineaariset funktiot toteuttavat siis yhtälön

$$-ku'' = 0. \quad (3.55)$$

Tämä havainto pätee yleisemminkin. Mikäli elementin interpolatiofunktioiksi valitaan funktiot, joista voidaan konstruoida ratkaistavan differentiaaliyhtälön homogeenisen osan täydellinen ratkaisu, saadaan solmupisteissä tarkan ratkaisun arvot riippumatta siitä millainen kuormitusermi  $f$  on. Tuloksen on ensimmäisenä havainnut ja todistanut tietävästi P. Tong julkaisussaan [57] vuonna 1969. Selitys miksi homogeenisen osan tarkan ratkaisun toteutuminen riittää yritefunktioille on seuraava. Koska kuorma/lähdetermi diskretoitaessa siirretään pistekuormiksi solmuihin, on elementtimenetelmäratkaisu oikeastaan homogeenisen osan ratkaisua kussakin elementissä erikseen. Mikäli nyt homogeenisen osan tarkka ratkaisu pystytään konstruoimaan interpolatiofunktioilla, saadaan myös ratkaistavalle ongelmalle tarkat arvot juuri solmupisteissä, eli elementin interpolatiofunktioit ovat myös tarkan ratkaisun interpolantteja.



**Kuva 3.7** Esimerkkiongelman lämpövuon tarkka ratkaisu (yhtenäinen viiva) ja elementtimenetelmällä laskettu (katkoviiva) käyttäen kolmea lineaarista elementtiä.

Valitettavasti tätä strategiaa voidaan menestyksellisesti soveltaa vain yksidimensioisiin ongelmiin ja niissäkin usein vain vakio kertoimisiin tapauksiin.

Tarkastellaan vielä lämpövuon  $q = -ku'$  jakautumista. Käytetyssä elementtimenetelmäaprosimaatiossa tämä suure on nyt vakio kunkin elementin sisällä, eli

$$\tilde{q}^{(e)} = -k^{(e)} \frac{1}{h^{(e)}} (u_2^{(e)} - u_1^{(e)}) = \frac{k^{(e)}}{h^{(e)}} (u_1^{(e)} - u_2^{(e)}) \quad (3.56)$$

Analyttisestä ratkaisusta saadaan lämpövuolle lauseke

$$q(x) = -f_c L \left[ \frac{5}{36} + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \left( \ln \frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (3.57)$$

Elementtimenetelmän antamaa aprosimaatiota lämpövuolle on verrattu analyttiseen kuvassa 3.7.

**Esimerkki 3.3** Ratkaistaan luvun 2.3 esimerkkiongelman, eli probleeman

$$-(ku')' = f, \quad (3.58)$$

reunaehdoilla  $u(0) = u_0$  ja  $q(L) = -ku'(L) = 0$  ja jossa  $k = k(x) = k_0(1 + x/L)$  ja kuormitusermi  $f = \beta u k_0 L^{-2}$  on vakio ( $\beta$  on dimensioton vakio).

Materiaaliparametrille  $k$  voidaan ottaa elementin alueella lineaaristen interpolatiefunktioiden avulla ilmaistu lauseke

$$k(\xi) = k_1 N_1(\xi) + k_2 N_2(\xi) = \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1) \xi], \quad (3.59)$$

jossa  $k_1, k_2$  ovat  $k$ :n arvot elementin päätepisteissä. Sijoitettaessa tämä elementtimatriisin lausekkeeseen saadaan

$$K_{ij}^{(e)} = \frac{1}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} d\xi. \quad (3.60)$$

Käytetään aluksi kahta lineaarista elementtiä. Elementin jäykkyydematriisiksi saadaan siten

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k_1 + k_2}{2h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Sijoittamalla arvot saadaan kyseisen ongelman elementtien osuuksiksi

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{5k_0}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(2)} = \frac{7k_0}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{f}^{(2)} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} fL. \quad (3.63)$$

Kokoamalla yhtälöt saadaan systeemi

$$\frac{k_0}{2L} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -5 & 12 & -7 \\ 0 & -7 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} fL = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\beta u_0 k_0}{L}, \quad (3.64)$$

josta ratkaisu on

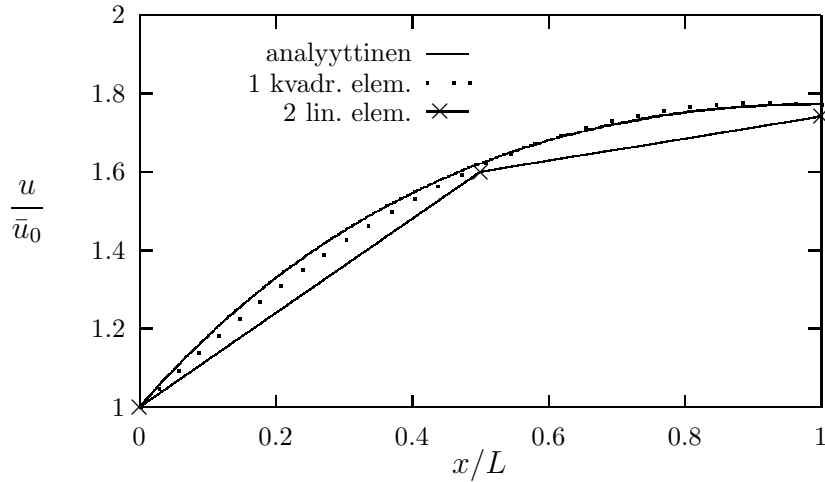
$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{2}{35} \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} \left( \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \beta + \frac{5}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) u_0 = \begin{Bmatrix} 1 + \frac{3}{10}\beta \\ 1 + \frac{13}{35}\beta \end{Bmatrix} u_0. \quad (3.65)$$

Ratkaisu on piirretty kuvaan 3.8.

Ratkaistaan tehtävä vielä käyttäen yhtä kvadraattista elementtiä. Elementtimatriisin alkiot ovat

$$\begin{aligned} K_{11}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \left[ \frac{1}{2}(2\xi - 1) \right]^2 d\xi = \frac{11k_1 + 3k_2}{6h^{(e)}}, \\ K_{12}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \frac{1}{2}(2\xi - 1)(-2\xi) d\xi = -\frac{6k_1 + 2k_2}{3h^{(e)}}, \\ K_{13}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \frac{1}{2}(2\xi - 1)\frac{1}{2}(1 + 2\xi) d\xi = \frac{k_1 + k_2}{6h^{(e)}}, \\ K_{22}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] 4\xi^2 d\xi = \frac{8(k_1 + k_2)}{3h^{(e)}}, \\ K_{23}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] (-2\xi)\frac{1}{2}(1 + 2\xi) d\xi = -\frac{2k_1 + 6k_2}{3h^{(e)}}, \\ K_{33}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \left[ \frac{1}{2}(1 + 2\xi) \right]^2 d\xi = \frac{3k_1 + 11k_2}{6h^{(e)}}, \end{aligned} \quad (3.66)$$





**Kuva 3.8** Esimerkkiongelman tarkka ratkaisu (yhtenäinen viiva) ja elementtimenetelmällä laskettu (katkoviiva) käyttäen kahta lineaarista tai yhtä kvadraattista elementtiä. Ratkaisut vakion  $\beta$  arvolla  $\beta = 2$ .

jossa  $k_1$  ja  $k_2$  ovat  $k$ :n arvot elementin päätepisteissä. Elementin kuormitusvektori on vastaavasti

$$f_1^{(e)} = \frac{1}{2}fh^{(e)} \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)d\xi = \frac{1}{6}fh^{(e)}, \quad (3.67a)$$

$$f_2^{(e)} = \frac{1}{2}fh^{(e)} \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)d\xi = \frac{2}{3}fh^{(e)}, \quad (3.67b)$$

$$f_3^{(e)} = \frac{1}{2}fh^{(e)} \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)d\xi = \frac{1}{6}fh^{(e)}. \quad (3.67c)$$

Yhtälösystemiksi saadaan

$$\frac{k_0}{L} \begin{bmatrix} \frac{17}{6} & -\frac{10}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{10}{3} & 8 & -\frac{14}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{14}{3} & \frac{25}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} fL = \frac{1}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\beta u_0 k_0}{L}, \quad (3.68)$$

josta ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{9}{104} \begin{bmatrix} \frac{25}{6} & \frac{14}{3} \\ \frac{14}{3} & 8 \end{bmatrix} \left( \frac{1}{6} \begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \beta + \begin{Bmatrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \right) u_0 = \begin{Bmatrix} 1 + \frac{4}{13}\beta \\ 1 + \frac{5}{13}\beta \end{Bmatrix} u_0. \quad (3.69)$$

Tämäkin ratkaisu on piirretty kuvaan 3.8. Ratkaisu on tietenkin identtinen kuvassa 2.1 olevan Galerkinin menetelmän ratkaisun kanssa. Huomaa, että yhdellä kvadraattisella elementillä laskettaessa saatiin parempi tulos kuin kahdella lineaarisella elementillä.

Lasketaan tehtävä vielä käyttäen yhtä elementtiä ja hierarkista menettelyä.

Demonstroidaan asiaa käyttämällä vain kvadraattista kuplamuotoa. Interpolatiopolynomit ovat siten

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi), \quad N_3 = \frac{\sqrt{6}}{4}(\xi^2 - 1), \quad (3.70)$$

ja niiden derivaatat  $\xi$ :n suhteen

$$\frac{dN_1}{d\xi} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{dN_2}{d\xi} = \frac{1}{2}, \quad \frac{dN_3}{d\xi} = \frac{\sqrt{6}}{2}\xi. \quad (3.71)$$

Koska materiaalivakio (lämmönjohtavuus)  $k$  on paikkakoordinaatin funktio, ei hierarkisen muodon ortogonaalisuus (3.30) toteudu. Laskettavana on siten termejä

$$\begin{aligned} K_{13}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{6}}{2} \xi d\xi = -\frac{\sqrt{6}(k_2 - k_1)}{6h^{(e)}}, \\ K_{23}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \frac{1}{2} \frac{\sqrt{6}}{2} \xi d\xi = \frac{\sqrt{6}(k_2 - k_1)}{6h^{(e)}}, \\ K_{33}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\xi\right)^2 d\xi = \frac{k_1 + k_2}{h^{(e)}}, \\ f_3^{(e)} &= \frac{1}{2} f h^{(e)} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{6}}{4} (\xi^2 - 1) d\xi = -\frac{\sqrt{6}}{6} f h^{(e)}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Mikäli  $k$  muuttuu lineaarisesti, on jäykkyyismatriisi hierarkista kvadraattista muotoa käyttävälle elementille seuraava

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k_1 + k_2}{2h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{\sqrt{6}}{3}\alpha \\ -1 & 1 & \frac{\sqrt{6}}{3}\alpha \\ -\frac{\sqrt{6}}{3}\alpha & \frac{\sqrt{6}}{3}\alpha & 2 \end{bmatrix} \quad \text{jossa} \quad \alpha = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}, \quad (3.73)$$

vastaten solmupisteparametreja  $u_1^{(e)}, u_2^{(e)}, \Delta u_0^{(e)}$ . Sijoittamalla probleeman arvot saadaan

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_2 \\ \Delta u_0^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{Bmatrix} \beta u_0, \quad (3.74)$$

josta ratkaisu on

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \Delta u_0^{(1)} \end{Bmatrix} &= \frac{3}{13} \begin{bmatrix} 3 & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & 3 \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{Bmatrix} \beta + \begin{Bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{Bmatrix} \right) u_0 \\ &= \begin{Bmatrix} 1 + \frac{5}{13}\beta \\ -\frac{\sqrt{6}}{13}\beta \end{Bmatrix} u_0. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Elementin solmun 2 arvo yhtyy tavanomaisella parabolisella elementillä laskettuun tulokseen, kuten pitääkin. Tarkistetaan vielä elementin keskipistessä  $u$ :n arvo, joka tulee nyt olemaan

$$\begin{aligned} \tilde{u}\left(\frac{1}{2}L\right) &= N_1(0)u_1 + N_2(0)u_2 + N_3(0)\Delta u_1^{(1)} \\ &= \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{13}\beta\right)u_0 - \frac{\sqrt{6}}{13}\beta u_0 \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = \left(1 + \frac{4}{13}\beta\right)u_0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Tämäkin tulos on sama kuin tavanomaisella parabolisella elementillä laskettaessa saatu keskisolmun arvo.

Mainittakoon vielä, että koska interpolaatiopolynomeista ei nyt voida konstruoida ratkaistavan ongelman homogeenisen osan yleistä ratkaisua, eivät solmupiste- arvot ole tarkkoja.

**Esimerkki 3.4** *Ratkaise elementtimenetelmällä stationäärinen 1-dimensioinen diffuusio-konvektioyhtälö*

$$-ku'' + \rho cvu' = f, \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0, \quad (3.77)$$

kun  $k, \rho, c, v$  ja  $f$  ovat positiivisia vakioita. Käytä kolmea lineaarista elementtiä ja suorita ratkaisu Pécletin luvun  $P = \rho cvL/k$  arvoilla  $P = 10$  ja  $P = 100$ .

Kerrotaan differentiaaliyhtälö painofunktiolla  $\hat{u}$  ja integroidaan alueen yli. Painofunktioiden on toteutettava homogeeniset reunaehdot, sillä funktion  $u$  arvot on annettu kummassakin päässä. Suoritetaan ns. diffuusiotermin osittaisintegrointi, jossa sijoitustemi häviää painofunktiolta vaadittavien reunaehto- jen perusteella, eli

$$\begin{aligned} -k \int_0^L \hat{u}(x)u''(x)dx + \rho cv \int_0^L \hat{u}(x)u'(x)dx &= \int_0^L \hat{u}(x)f dx, \\ \Rightarrow k \int_0^L \hat{u}'(x)u'(x)dx + \rho cv \int_0^L \hat{u}(x)u'(x)dx &= \int_0^L \hat{u}(x)f dx. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Elementtimenetelmässä otaksutaan elementin alueella interpolaatio

$$u = \sum_i N_i u_i, \quad (3.79)$$

ja Galerkinin keinossa painofunktiolle valitaan sama kanta, eli  $\hat{u}_i = N_i$ . Teh- tävän variaatiomuodossa on korkeintaan ensimmäisen kertaluvun derivaattoja, joten  $C_0$ -jatkuvuus on riittävä. Lineaariset interpolaatiofunktiot ovat

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (3.80)$$

Siirretään tarkastelu elementin alueella paikalliseen  $\xi$ -koordinaatistoon, jolloin on huomattava, että

$$dx = \frac{h}{2}d\xi \quad \text{ja} \quad \frac{d}{dx} = \frac{2}{h} \frac{d}{d\xi}, \quad (3.81)$$

missä  $h$  on elementin pituus. Täten elementin jäykkyyismatriisille ja kuorma- vektorille saadaan kaavat

$$K_{ij}^{(e)} = k \int_{x_1}^{x_2} N_{i,x} N_{j,x} dx + \rho cv \int_{x_1}^{x_2} N_i N_{j,x} dx \quad (3.82)$$

$$= \frac{2k}{h} \int_{-1}^1 N'_i N'_j d\xi + \rho cv \int_{-1}^1 N_i N'_j d\xi, \quad (3.83)$$

$$f_i^{(e)} = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 N_i f d\xi, \quad (3.84)$$

jossa pilkku symbolin oikeassa yläkulmassa merkitsee nyt derivointia paikallisen  $\xi$ -koordinaatin suhteen. Merkitään jäykkyysmatriisin osia

$$A_{ij} = \frac{2k}{h} \int_{-1}^1 N'_i N'_j d\xi, \quad B_{ij} = \rho cv \int_{-1}^1 N_i N'_j d\xi. \quad (3.85)$$

$\mathbf{A}$  matriisi on jo entuudestaan tuttu, ja se on

$$\mathbf{A} = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

Matriisi  $\mathbf{B}$  saadaan integroimalla termit

$$\begin{aligned} B_{11} &= \rho cv \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-\xi)(-\frac{1}{2})d\xi = -\rho cv \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1-\xi)d\xi = -\frac{1}{2}\rho cv, \\ B_{12} &= \rho cv \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-\xi)\frac{1}{2}d\xi = \frac{1}{2}\rho cv, \\ B_{21} &= \rho cv \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1+\xi)(-\frac{1}{2})d\xi = -\rho cv \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1+\xi)d\xi = -\frac{1}{2}\rho cv, \\ B_{22} &= \rho cv \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1+\xi)\frac{1}{2}d\xi = \frac{1}{2}\rho cv. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Elementin jäykkyysmatriisi on siten

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho cv}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.88)$$

Huomaa, että kulkeutumistermiä vastaava elementtimatriisi  $\mathbf{B}$  ei riipu elementin pituudesta.

Tehtävässä pyydettiin jakamaan alue kolmeen yhtäpitkään elementtiin, joten  $h = L/3$  ja kaikilla elementeilla on sama jäykkyysmatriisi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{3k}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho cv}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad e = 1, 2, 3. \quad (3.89)$$

Otetaan käyttöön dimensioton Pécletin luku  $P = \rho cvL/k$ , josta  $k/L = \rho cv/P$ , jolloin elementtien jäykkyysmatriisiksi saadaan

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{3\rho cv}{P} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho cv}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad e = 1, 2, 3. \quad (3.90)$$

Koko rakenteen yhtälöryhmäksi saadaan

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \end{Bmatrix}. \quad (3.91)$$

Ratkaistaan tehtävä ensin Pécletin luvulla  $P=1$ . Yhtälöryhmäksi saadaan

$$\rho cv \begin{bmatrix} 6 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} fL, \quad (3.92)$$

josta ratkaisuksi saadaan  $u_2 = \frac{34}{327}fL/\rho cv \approx 0.1040fL/\rho cv$  ja  $u_3 = \frac{40}{327}fL/\rho cv \approx 0.1223fL/\rho cv$ .

Vastaavasti Pécletin luvulla  $P = 10$  yhtälöryhmä on

$$\frac{\rho cv}{10} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} fL, \quad (3.93)$$

josta ratkaisuksi saadaan  $u_2 = \frac{10}{39}fL/\rho cv \approx 0.2564fL/\rho cv$  ja  $u_3 = \frac{35}{39}fL/\rho cv \approx 0.8974fL/\rho cv$ .

Pécletin luvulla  $P = 100$  kulkeutuminen eli konvektio dominoi ratkaisua ja yhtälöryhmäksi saadaan

$$\frac{\rho cv}{100} \begin{bmatrix} 6 & 47 \\ -53 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} fL, \quad (3.94)$$

josta ratkaisuksi saadaan  $u_2 = -\frac{4100}{7581}fL/\rho cv \approx -0.5408fL/\rho cv$  ja  $u_3 = \frac{5900}{7581}fL/\rho cv \approx 0.7783fL/\rho cv$ .

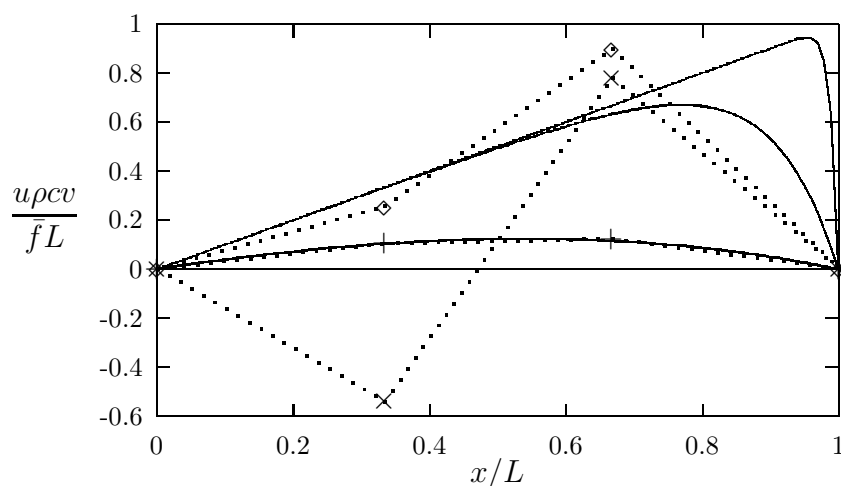
Ratkaisu alkaa siten heittelehtiä, eli numeerinen ratkaisumenetelmä on epästabili kyseiselle tehtävälle suurilla Pécletin luvun arvoilla. Edellä esitetyt elementtimenetelmäratkaisut on piirretty analyttisten ratkaisujen kanssa kuvaan 3.9.

Ratkaisun epästabilius voidaan välttää käyttämällä reunahäiriön luona tiheämpää elementtiverkkoa, tai ottamalla käyttöön erilaiset painofunktiot, jotka ottavat huomioon tehtävän luonteen. Tätä selvitetään seuraavassa kappaleessa.

### 3.4 Diffuusio-konvektioyhtälön numeerinen ratkaisu

Kuten esimerkkinä lasketusta yksidimensioisesta diffuusio-konvektioyhtälöstä havaitaan, toimii standardi elementtimenetelmäformulaatio (eli Galerkinin menetelmä) huonosti, kun konvektion osuus on hallitseva diffuusion verrattuna. Ongelmalle on esitetty useita parannusehdotuksia ja seuraavassa tarkastellaan esimerkinomaisesti keinotekoisien diffuusion lisäämistä yhtälöön, joka on ekvivalentti toispuoleisen (ylävirta) differenssimenetelmän soveltamiseen ongelman aiheuttavaan konvektiotermiin. Samalla tuodaan esille elementtimenetelmän ja differenssimenetelmän välinen yhteys kyseisessä esimerkkit tehtävässä.

Tarkastellaan nyt elementtimenetelmällä muodostettuja diskreettejä yhtälöitä. Otaksutaan, että ratkaisualue on jaettu yhtäpitkiin lineaarisesti interpoloituihin ele-



**Kuva 3.9** Tasavälisellä kolmen lineaarisen elementin verkolla ratkaistu diffuusio-konvektioyhtälö Pécletin luvun arvoilla  $P = \rho cvL/k = 1, 10, 100$ . Analyttiset ratkaisut on piirretty kuvaan yhtenäisellä viivalla.

mentteihin, joiden pituus olkoon  $h$ . Systemin tasapainoyhtälö on siten muotoa

$$\left( \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} + \frac{\rho cv}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \end{Bmatrix} = fh \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{Bmatrix}. \quad (3.95)$$

Täten mielivaltaista sisäpistettä  $i$  vastaava yhtälö on muotoa

$$\frac{k}{h^2}(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}) + \frac{\rho cv}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) = f, \quad (3.96)$$

jossa vasemmanpuoleinen sulkulauseke on operaattorin  $-d^2/dx^2$  keskeisdifferenssiaprossimaatio ja oikeanpuoleinen sulkulauseke vastaavasti keskeisdifferenssiaprossimaatio operaattorille  $d/dx$ . Johtopäätöksenä voitaisiin siten todeta tavanomaisen elementtimenetelmän ottavan huomosti huomioon kyseisen ongelman erityispiirteen, eli kulkeutumisen. Kun kulkeutuminen eli konvektio on hallitseva johtumiseen eli diffuusioon verrattuna ( $\rho cv \gg k/h$ ), ei alavirran puolella olevien pisteiden  $i+1, i+2, \dots$  merkitys ratkaisuun ole tietenkään sama kuin ylävirran puoleisten pisteiden  $\dots i-2, i-1$ , sillä “informaatio” tulee ylävirran suunnasta. Jotta asia korjaantuisi ja numeeriseen ratkaisumenetelmään saataisiin enemmän painotusta ylävirran puolelle, lienee soveliaista käyttää konvektiotermin toispuoleista differenssilauseketta

$$\frac{d}{dx} \sim \frac{1}{h}(u_i - u_{i-1}), \quad (3.97)$$

tai jollain tavalla kombinoitua versiota keskeis- ja ylävirtadifferenssilausekkeista

$$\frac{d}{dx} \sim \frac{\alpha}{h}(u_i - u_{i-1}) + \frac{1-\alpha}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}), \quad (3.98)$$

jossa  $\alpha \in [0, 1]$  on parametri, jonka optimaalinen arvo arvattavastikin riippuu Péceltin luvusta  $P$ . Optimaalisella arvolla voidaan tässä yhteydessä tarkoittaa arvoa, joka tekee numeerisesta menetelmästä stabiilin (ei heilahteluja) sekä on kyseisellä interpolaatiolla mahdollisimman tarkka.

Ylävirtadifferenssilauseke (3.97) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{1}{h}(u_i - u_{i-1}) = \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{1}{2h}(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}), \quad (3.99)$$

eli ensimmäisen derivaatan keskeisdifferenssilausekkeeksi ja verkkoparametrissa  $h$  riippuvan toisen kertaluvun differentiaalioperaattorin

$$-\frac{h}{2} \frac{d^2}{dx^2} \quad (3.100)$$

keskeisdifferenssilausekkeiden summaksi. Differenssikaava (3.98) voidaan vastaavasti kirjoittaa muodossa

$$\frac{d}{dx} \sim \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{\alpha}{2h}(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}), \quad (3.101)$$

jolloin alkuperäinen differenssiyhtälö (3.96) muuntuu muotoon

$$\frac{k + \frac{1}{2}\alpha\rho cvh}{h^2}(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}) + \frac{\rho cv}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) = f, \quad (3.102)$$

joka siis vastaisi keskeisdifferenssimenetelmän tai tavanomaisen elementtimenetelmän soveltamista yhtälöön

$$-(k + \frac{1}{2}\alpha\rho cvh)u'' + \rho cvu' = f. \quad (3.103)$$

Toisin sanoen ylävirtapainotus metkitsee tavanomaisen elementtimenetelmän painofunktiolla keinotekoisen diffuusion lisäämistä, eli lämmönjohtavuuden lauseketta kasvatetaan verkkoparametrissa  $h$  riippuvalla lausekkeella:  $k \rightarrow k + \frac{1}{2}\alpha\rho cvh$ . Yhtälöstä (3.103) voidaan havaita siihen perustuvan numeerisen menetelmän olevan konsistentti alkuperäisen differentiaaliyhtälön

$$-ku'' + \rho cvu' = f \quad (3.104)$$

kanssa, eli elementtiverkkoa tihennettäessä ( $h \rightarrow 0$ ) yhtälö (3.103) lähestyy yhtälöä (3.104).

Analysoidaan nyt hieman differenssilausekkeita (3.96) ja (3.98). Aloitetaan lausekkeesta (3.96) johon sijoitetaan yrite  $u_i = \lambda^i$ . Kahden vierekkäisen pisteen  $i$  ja  $i + 1$  lausekkeet ovat siten

$$\begin{aligned} -\lambda^{i+1} + 2\lambda^i - \lambda^{i-1} + \frac{\rho cvh}{2k}(\lambda^{i+1} - \lambda^{i-1}) &= \frac{fh^2}{k}, \\ -\lambda^{i+2} + 2\lambda^{i+1} - \lambda^i + \frac{\rho cvh}{2k}(\lambda^{i+2} - \lambda^i) &= \frac{fh^2}{k}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Vähennetään alempi lauseke ylemmästä ja merkitään diskreettiä Pécletin lukua  $P_h = \rho cvh/k$ , jolloin jakamalla puolittain termillä  $\lambda^{i-1}$  saadaan yhtälö

$$(1 - \frac{1}{2}P_h)\lambda^3 + (\frac{1}{2}P_h - 3)\lambda^2 + (\frac{1}{2}P_h + 3)\lambda - (1 + \frac{1}{2}P_h) = 0. \quad (3.106)$$

Helposti havaitaan yhden juurista olevan  $\lambda = 1$ , jolloin jäljelle jää polynomiyhtälö

$$(1 - \frac{1}{2}P_h)\lambda^2 - 2\lambda + 1 + \frac{1}{2}P_h = 0, \quad (3.107)$$

jonka juuret ovat  $\lambda = 1$  ja  $\lambda = (1 + \frac{1}{2}P_h)/(1 - \frac{1}{2}P_h)$ . Jotta numeerisessa ratkaisussa ei esiintyisi epäfysikaalista oskillointia on kaikkien juurien oltava positiivisia, joten saadaan ehtoyhtälö

$$P_h < 2 \quad \implies \quad h < \frac{2k}{\rho cv} \quad \implies \quad \frac{h}{L} < \frac{2k}{\rho cvL} = \frac{2}{P}. \quad (3.108)$$

Esimerkkimme tapauksessa  $P = 10$  saavutettaisiin heilahtelematon ratkaisu käyttämällä vahintään viittä elementtiä.

Ylävirtapainotteisen differenssilausekkeen (3.98) tapauksessa analyysi on aivan vastaava; korvataan vain  $P_h$  lausekkeella  $P_h/(1 + \frac{1}{2}\alpha P_h)$ , jolloin saadaan ehtoyhtälö

$$\frac{P_h}{1 + \frac{1}{2}\alpha P_h} < 2 \quad \implies \quad \alpha > 1 - \frac{2}{P_h}, \quad \alpha_{cr} = 1 - \frac{2}{P_h}. \quad (3.109)$$

Mikäli nyt  $\alpha$ -parametri valitaan oheisen epäyhtälön mukaisesti, saadaan kaikilla verkontiheyksillä stabiili ratkaisu.

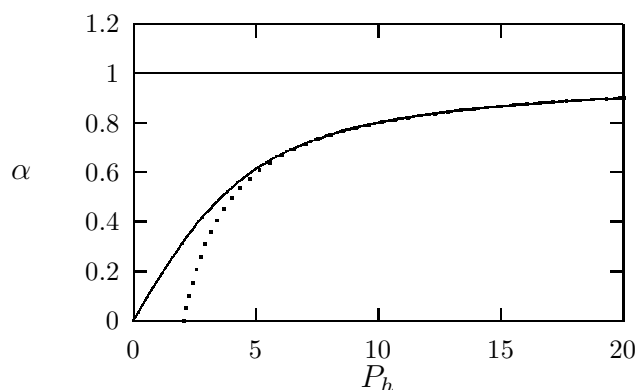
Voidaan osoittaa, että valitsemalla

$$\alpha_{opt} = \coth(\frac{1}{2}P_h) - \frac{2}{P_h} \quad (3.110)$$

saadaan kyseisen vakiokertoimisen yksidimensioisen diffuusio-konvektioyhtälön (3.104) tapauksessa  $u$ :lle solmupisteissä tarkka ratkaisu. Parametrin  $\alpha$  kriittinen (3.109) ja optimaalinen arvo (3.110) on piirretty kuvaan 3.10 diskreetin Pécletin luvun funktiona.

Useampiulotteisessa tapauksessa on keinotekoista diffuusiota lisättävä vain virtauksen suunnassa. Tällöin ei numeeriseen menetelmään aiheuteta ns. valediffuusiota virtausta vastaan kohtisuorassa suunnassa. Galerkinin menetelmää voidaan systemaattisesti soveltaa, mikäli painofuntiot valitaan ylävirtapainotteisesti kuvan 3.11





**Kuva 3.10** Keinotekoisien diffuusion voimakkuuden määräävän parametrin kriittisen ( $\alpha_{cr} \dots$ ) ja optimaalisen arvon ( $\alpha_{opt}$  —) riippuvuus diskreetistä Pécletin luvusta  $P_h$ .

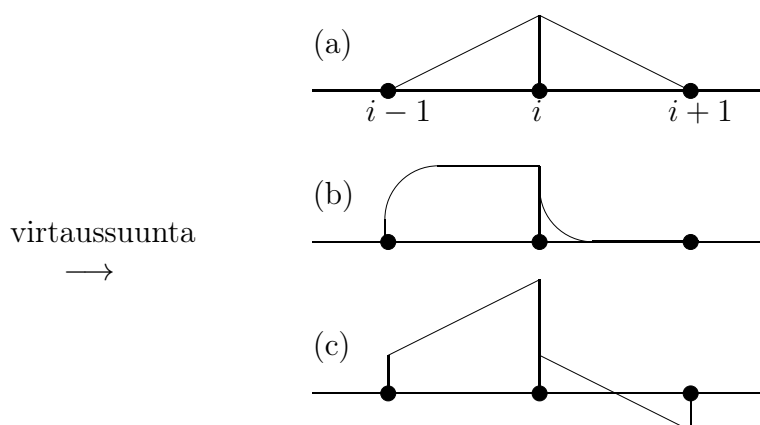
mukaisesti, jolloin puhutaan Petrovin-Galerkinin menetelmästä erotukseksi tavanomaisesta Galerkinin menettelystä, jota nimitetään Bubnovin-Galerkinin menetelmäksi.<sup>1</sup> Konvektio-diffuusioyhtälön tapauksessa hyvin toimivan menettelyn nimi koko komeudessaan olisi: virtaviiva-ylävirta-Petrov-Galerkin (engl. SUPG = Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin) menetelmä.<sup>2</sup> Kuvassa keskellä esiintyvät painofunktiot voidaan laskentateknisesti korvata helpommilla *epäjatkuvilla* painofunktioilla. Tällöin joudutaan elementtien reunoilla tapahtuvat painofunktioiden hyyt ottamaan huomioon ratkaisuyhtälöissä. Asiasta kiinnostuneelle lukijalle suositellaan tutustumista artikkeleihin [44], [55] ja niiden lähdeviitteisiin.

Epäyhtälöstä (3.109) havaitaan, että menetelmä on aina stabiili mikäli valitaan  $\alpha = 1$ . Tämä on järkevää ainoastaan hyvin suurilla Pécletin luvun arvoilla, sillä kyseinen tapaus vastaa toispuoleisen differenssiosamäärän käyttöä, joka on tarkkuudeltaan vain ensimmäistä kertalukua (keskeisdifferenssimenetelmän tarkkuus on toista kertalukua) Tämän voi lukija todeta laskemalla esimerkkitehtävän Pécletin luvun arvolla  $P = 1$  käyttämällä keinotekoista diffuusiota ja parametrin arvoa  $\alpha = 1$  ja vertaamalla laskettuihin standardin Galerkinin menetelmän antamiin tuloksiin.

Mainittakoon vielä, että diffuusio-konvektioyhtälöön, jonka vakiokertoaminen yksidimensioiden muoto on esitetty yhtälössä (3.104), ei voida liittää fysikaalisesti mielekäästä funktionaalia, jolla olisi minimiominaisuus ja jonka Eulerin yhtälö se olisi.

<sup>1</sup> I.G. Bubnov (1879-1919): Venäläinen insinööri, joka sovelsi painotettujen jäännösten menettelyä elastisuusteorian yhtälöiden likiratkaisuun 1913 ja menettelyn yleisti Pietarissa vaikuttanut B.G. Galerkin (1871-1945) vuonna 1915. G.I. Petrov (1912-?) yleisti Galerkinin menettelyä 1940 siten, että painofunktiona voidaan käyttää eri funktioita kuin interpolaatiosfunktioina.

<sup>2</sup>Kutsutaan myös virtaviivadiffuusiomenetelmäksi.



**Kuva 3.11** Solmuun  $i$  liittyvät (a) tavanomaisen Galerkinin menetelmän painofunktiot, (b) Petrovin-Galerkinin menetelmän optimaaliset painofunktiot ja (c) laskentateknisesti edulliset Petrovin-Galerkinin menetelmän epäjatkuvat painofunktiot.

### 3.5 Stabiloidut formulaatiot

Petrovin-Galerkinin keinossa painofunktioita muuttamalla saadaan diffuusio-konvektioyhtälön numeerinen ratkaisu stabiiliksi. Toinen tapa on täydentää standardi Galerkinin (Bubnov-Galerkin) menetelmää sopivilla funktioilla, jotka tässä esityksessä rajataan vain lokaaleiksi, kunkin elementin sisällä vaikuttaviksi polynomeiksi.

Diffuusio-konvektioyhtälön numeerisen ratkaisun ongelmat esiintyvät, kun ratkaisun luonnetta hallitsee konvektio. Tällöin ratkaisussa voi esiintyä hyvin pienille alueille keskittyviä reunahäiriöitä. Toisin sanoen ratkaisun luonnetta karakterisoi kaksi mittaskaalaa, pitkän skaalan pituus on ratkaisualueen dimension luokkaa  $\sim L$  ja lyhyen, reunahäiriön leveys vain  $\sim L \ln P/P$ , katso esimerkkiä 1.1. Voidaan päätellä, että mikäli elementin koko on paljon ratkaisulle olennaista reunahäiriön mittaskaalaa pienempi, ei standardi Galerkinin keino pysty sitä kunnolla ratkaisemaan.

Stabiloiduissa formulaatioissa tuo ”ratkaisematon” mittaskaala pyritään vangitsemaan paikallisesti elementin alueella määritellyillä kuplamuodoilla. Tarkastellaan stationääristä diffuusio-konvektioyhtälöä (1.40):

$$-ku'' + \rho cvu' = f, \quad u(0) = u(L) = 0, \quad (3.111)$$

ja symbolien merkitys on kuten esimerkeissä 1.1 ja 3.4. Merkitään kenttäyhtälön jäännöstä eli residuaalia symbolilla  $R$ , eli

$$R(u) \equiv -ku'' + \rho cvu' - f, \quad (3.112)$$

joka tietenkin häviää identtisesti mikäli  $u$  on yhtälön (1.40) ratkaisu. Stabiloitu

formulaatio saadaan kun alkuperäiseen heikkoon muotoon

$$k \int_0^L \hat{u}' \tilde{u}' dx + \rho cv \int_0^L \hat{u} \tilde{u}' dx = \int_0^L \hat{u} f dx, \quad (3.113)$$

lisätään sopivasti painotettu jäännös- eli residuaalitermi, esimerkiksi

$$k \int_0^L \hat{u}' \tilde{u}' dx + \rho cv \int_0^L \hat{u} \tilde{u}' dx + \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} \tau (-k \hat{u}'' + \rho cv \hat{u}') R(\tilde{u}) dx = \int_0^L \hat{u} f dx, \quad (3.114)$$

missä  $\tau$  on ns. stabilointi tai viritysparametri. Summalauseke korostaa termien elementtikohtaisuutta ja käytettäessä esimerkiksi lineaarisia interpolaatiofunktioita on  $\hat{u}'' = \tilde{u}'' \equiv 0$  kunkin elementin alueella.

Ottamalla käyttöön lyhennysmerkintä

$$L(u) = -ku'' + \rho cv u' \quad (3.115)$$

diffuusio-konvektioyhtälön operaattorille, voidaan variaatioformulaation (3.114) stabilointitermi kirjoittaa muodossa

$$S = \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} \tau L(\hat{u}) R(\tilde{u}) dx. \quad (3.116)$$

Toinen yhtä mahdollinen vaihtoehto olisi

$$S = - \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} \tau L^*(\hat{u}) R(\tilde{u}) dx, \quad (3.117)$$

missä  $L^*$  tarkoittaa operaattorin  $L$  adjunganttia, eli diffuusio-konvektioyhtälön (1.40) tapauksessa  $L^*(u) = -ku'' - \rho cv u'$ .

Variaatiomuoto (3.114) voidaan kirjoittaa muodossa

$$k \int_0^L \hat{u}' \tilde{u}' dx + \rho cv \int_0^L \hat{u} \tilde{u}' dx + S = \int_0^L \hat{u} f dx, \quad (3.118)$$

missä stabilointitermi  $S$  on joko yhtälön (3.116) tai (3.117) mukainen. Täten standardi Galerkinin menetelmään vain lisätään “sopivia” termejä.

Tarkastellaan seuraavassa miten edellä esitettyihin stabiloituihin formulaatioihin päädytään rikastuttamalla elementtiapproksimaatiota  $\tilde{u}$  elementtikohtaisilla kuplamuodoilla, sekä miten stabilointiparametrin  $\tau$  arvo voidaan määrittää.

Lisätään lineaariseen interpolaatiofunktioiden muodostamaan yritefunktioon elementtikohtaiset kuplamuodot, joten approksimaatio on

$$\tilde{u} = u_L + u_B, \quad (3.119)$$

missä alaindeksi  $L$  viittaa interpolaation lineaariseen ja  $B$  kuplamuoto-osaan. Sijoitetaan yrite (3.119) Galerkinin variaatiomuotoon (3.113), jolloin saadaan

$$k \int_0^L (\hat{u}'_L + \hat{u}'_B)(u'_L + u'_B) dx + \rho cv \int_0^L (\hat{u}_L + \hat{u}_B)(u'_L + u'_B) dx = \int_0^L (\hat{u}_L + \hat{u}_B) f dx. \quad (3.120)$$

Koska testifunktiot ovat mielivaltaisia homogeeniset reunaehdot toteuttavia funktioita, valitaan ensin  $\hat{u}_L = 0$ , jolloin ryhmittelemällä saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} (k\hat{u}'_B u'_B + \rho cv \hat{u}_B u'_B) dx &= \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} (\hat{u}_B f - k\hat{u}'_B u'_L - \rho cv \hat{u}_B u'_L) dx \\ &= \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} \hat{u}_B (f + k u''_L - \rho cv u'_L) dx \\ &= - \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} \hat{u}_B R(u_L) dx. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Tämä voidaan ratkaista kuplamuotojen  $u_B$  suhteen, ja merkitään ratkaisua symbolisesti

$$u_B = M_B(f - Lu_L), \quad (3.122)$$

missä  $M_B$  on lineaarinen operaattori. Sijoittamalla ratkaisu (3.122) heikkoon muotoon (3.120) ja asettamalla nyt  $\hat{u}_B = 0$  saadaan

$$\begin{aligned} k \int_0^L \hat{u}'_L u'_L dx + \rho cv \int_0^L \hat{u}_L u'_L dx &= \int_0^L \hat{u}_L f dx - \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} (\hat{u}'_L u'_B + \rho cv \hat{u}_L u'_B) dx \\ &= \int_0^L \hat{u}_L f dx + \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} (k\hat{u}''_L + \rho cv \hat{u}'_L) u_B dx \\ &= \int_0^L \hat{u}_L f dx - \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} L^*(\hat{u}_L) M_B [f - L(u_L)] dx \\ &= \int_0^L \hat{u}_L f dx + \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} L^*(\hat{u}_L) M_B [R(u_L)] dx. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Havaitaan, että saadaan muotoa (3.117) oleva stabilointitermi ja että stabilointiparametri  $\tau$  määräytyy jollain tavalla operaattorista  $M_B$ .

Mikä on operaattori  $M_B$ ? Tarkastelemalla kuplamuodon ratkaisuyhtälöä (3.121), joka on siis

$$-ku''_B + \rho cv u'_B = -(L(u_L) - f), \quad \text{alueessa } I^{(e)} \quad (3.124)$$

reunaehdoilla  $u_B(x_1^{(e)}) = u_B(x_2^{(e)}) = 0$ . Havaitaan, että  $M_B$  määrittelee diffuusio- konvektioyhtälön Greenin funktion  $G(x, \xi)$  elementin alueella.

Elementtikohtaisen kuplamuodon ratkaisu voidaan siten kirjoittaa Greenin funktion  $G(x, \xi)$  avulla seuraavasti

$$u_B^{(e)}(x) = \int_{I^{(e)}} G^{(e)}(x, \xi) [f - L(u_L(\xi))] d\xi. \quad (3.125)$$

Elementtikohtainen Greenin funktio on taas diffuusio-konvektioyhtälön ratkaisu pistemäiselle lämmönlähteelle kohdassa  $\xi \in I^{(e)}$ :

$$-kG''(x, \xi) + \rho cv G'(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad \text{alueessa } I^{(e)} \quad (3.126)$$

homogeenisin reunaehdoin  $G^{(e)}(x_1^{(e)}, \xi) = G^{(e)}(x_2^{(e)}, \xi) = 0$ .

Tarkastellaan elementin  $(e)$  osuutta stabilointitermiin

$$S = - \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} L^*(\hat{u}_L) M_B [R(u_L)] dx \quad (3.127)$$

yksityiskohtaisesti. Käytettäessä lineaarisia interpolaatiofunktioita pätee

$$R(u_L) = \rho cv u'_L - f = f_1 = \text{vakio}, \quad (3.128a)$$

$$L^*(\hat{u}_L) = -\rho cv \hat{u}'_L = f_2 = \text{vakio}, \quad (3.128b)$$

jolloin stabilointitermistä saadaan

$$S^{(e)} = -f_2 \int_{I^{(e)}} M_B(f_1) dx = - \int_{I^{(e)}} f_2 dx \frac{1}{h^{(e)}} \int_{I^{(e)}} M_B(f_1) dx \quad (3.129)$$

jolloin vertaamalla tätä muotoon (3.117) saadaan

$$\tau = \frac{1}{h^{(e)}} \int_{I^{(e)}} M_B(f_1) dx. \quad (3.130)$$

Yhtälön (3.124) mukaan seuraa siis

$$M_B(f_1) = b^{(e)}, \quad (3.131)$$

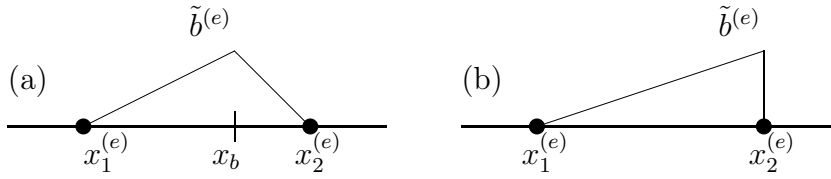
missä  $b^{(e)}$  on ratkaisu elementtikohtaiselle probleemalle

$$-k(b^{(e)})'' + \rho cv (b^{(e)})' = f_1, \quad b^{(e)}(x_1^{(e)}) = b^{(e)}(x_2^{(e)}) = 0. \quad (3.132)$$

Stabilointiparametrin arvo saadaan siten kuplan  $b^{(e)}$  integraalina

$$\tau = \frac{1}{h^{(e)}} \int_{I^{(e)}} b^{(e)} dx. \quad (3.133)$$

Ensi näkemältä stabilointiparametrin (3.133) ratkaisu tuntuu yhtä työläältä kuin alkuperäisen ongelman ratkaisukin. On kuitenkin huomattava, että stabilointiparametrin arvon laskennassa tarvitaan vain kuplamuodon integraalia, ja sitä varten voidaan elementtikohtainen ongelma (3.132) ratkaista likimääräisesti. Yhtälön (3.124)



**Kuva 3.12** Näennäisesti jäännöksetön kuplamuotoehdoka.

toteuttavaa kuplamuotoa sanotaan *jäännöksettömäksi* kuplamuodoksi ja sen yhtälön (3.132) likimääräistä kuplamuotoa  $\tilde{b}$  *näennäisesti jäännöksettömäksi* (englanniksi “pseudo residual-free bubble”).

Ongelmana on nyt miten valita sopiva kuplamuoto. Otetaan kuplamuodoksi hattufunktio  $\tilde{b}$ , jonka huippu asetetaan pisteeseen  $x_b \in (x_1^{(e)}, x_2^{(e)})$ , katso kuvaa 3.12. Määritellään  $\tilde{b} = \beta B$ , missä  $B$  on hattufunktio, joka saa arvon 1 pisteessä  $x_b$ . Ongelmana on nyt määrittää parametri  $\beta$  ja kuplamuodon huipun paikkakoordinaatti  $x_b$ .

Tarkastellaan nyt vain konvektion dominoimaa tilannetta jolloin elementin Pécletin luku on suuri:  $P_h = \rho cv h/k \gg 1$ . Tällöin voidaan yhtälöstä (1.40) diffuusiotermin pudottaa pois miltei koko alueella. Rajatapauksenahan saadaan puhdas konvektioyhtälö, jonka ratkaisu reunaehtolla  $u(x_1^{(e)}) = 0$  on  $u(x) = fx/(\rho cv)$ , ja tätä vastaava kuplamuoto olisi kolmio, jossa reunalla  $x_2^{(e)}$  on hyppy, katso kuvaa 3.12b.

Stabilointiparametrin (3.133) arvoksi saadaan

$$\tau = \frac{1}{h^{(e)}} \int_{I^{(e)}} b^{(e)} dx = \frac{f_1}{2\rho cv}. \quad (3.134)$$

Tutkitaan nyt millaisen muutoksen variaatiomuodon (3.118) stabilointitermi (3.127)

$$S = - \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} L^*(\hat{u}_L) M_B [R(u_L)] dx \quad (3.135)$$

tuottaa standardiformulaatioon nähden. Kirjoitetaan residuaalin ja adjungantin lausekkeet (3.128a) uudelleen näkyviin:

$$R(u_L) = \rho cv u'_L - f = f_1 = \text{vakio} = \rho cv \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{h^{(e)}} - f, \quad (3.136)$$

$$L^*(\hat{u}_L) = -\rho cv \hat{u}'_L = f_2 = \text{vakio} = \rho cv \frac{u_1^{(e)} - u_2^{(e)}}{h^{(e)}}. \quad (3.137)$$

Elementtikohtainen stabilointitermi on siten

$$S^{(e)} = -\frac{1}{2} \left( \hat{u}_1^{(e)} - \hat{u}_2^{(e)} \right) \left( \rho cv \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{h^{(e)}} - f \right) h^{(e)} \quad (3.138)$$

Stabilointitermillä on täten vaikutus niin elementin jäykkyyssmatriisiin kuin elementin kuormavektoriinkin:

$$\begin{aligned} S^{(e)} &= \frac{1}{2}\rho cv \left( \hat{u}_2^{(e)} - \hat{u}_1^{(e)} \right) \left( u_2^{(e)} - u_1^{(e)} \right) + \frac{1}{2}h^{(e)} f \left( \hat{u}_1^{(e)} - u_2^{(e)} \right) \\ &= \frac{1}{2}\rho cv \begin{Bmatrix} \hat{u}_1^{(e)} \\ \hat{u}_2^{(e)} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}h^{(e)} f \left( \hat{u}_1^{(e)} - u_2^{(e)} \right), \end{aligned} \quad (3.139)$$

missä  $P_h = \rho cv h^{(e)} / k$  elementin Pécletin luku. Täten tulos vastaa toispuoleisen differenssimenetelmän käyttöä konvektiotermille, eli  $\alpha$  parametrin arvoa  $\alpha = 1$  yhtälöissä (3.98) ja (3.103). Menetelmä on siten hyvin stabiili, mutta mikäli diffuusion osuus on merkittävä, ei tarkkuus ole paras mahdollinen. Tällöin kuplamuodon ratkaisussa ei diffuusiotermejä voi unohtaa.

Yhtälö (3.132) voidaan yksidimensioisessa ja vakiokertoimisessa tapauksessa ratkaista analyttisesti. Tällöin stabilointiparametrille saadaan lauseke

$$\tau = \frac{h^{(e)}}{2\alpha} \left( \coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \quad \text{missä} \quad \alpha = \frac{\rho cv h^{(e)}}{2k}, \quad (3.140)$$

tai elementin Pécletin luvun  $P_h$  avulla ilmaistuna

$$\tau = \frac{h^{(e)}}{P_h} \left( \coth \frac{1}{2}P_h - \frac{2}{P_h} \right) \quad \text{missä} \quad P_h = \frac{\rho cv h^{(e)}}{k} \quad (3.141)$$

### 3.6 Yhteenveto

Luvussa käsiteltiin yksidimensioisessa tapauksessa elementtimenetelmän rakenneosat. Elementtimenetelmän perustana olevan interpolaation konstruomiseksi esitettiin sekä tavanomainen solmuihin sidottu että hierarkinen kantafunktiojärjestelmä. Solmuihin sidottu kantafunktiojärjestelmä toimii perustana ns. elementtimenetelmän  $h$ -versiossa, jossa ratkaisun parantaminen tapahtuu elementtien lukumäärää lisäämällä, eli pienentämällä elementin kokoa  $h$ . Hierarkinen kantafunktiojärjestelmä on pohjana  $p$ -elementtimenetelmässä, jossa ratkaisun paraneminen tapahtuu pääsääntöisesti interpolaatiopolynomien astetta  $p$  korottamalla. Hierarkisessa kantafunktiojärjestelmässä interpolaation asteen korottaminen ei vaikuta alhaisasteisempiin kantafunktioihin, toisin kuin solmuihin sidotussa järjestelmässä.

Elementtimenetelmän ongelmatapauksista esitellään diffuusio-konvektioyhtälö, jossa toimiva elementtiaprosimaatio saadaan muuttamalla painofunktioita siten, että probleeman luonne tulee paremmin huomioon otetuksi. Lisäksi esitetään stabiloitujen elementtimenetelmien perusteet.

### 3.7 Harjoitustehtäviä

1. Suorita esimerkin funktion  $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$  interpolaation etsintä käyttäen Legendren polynomeja  $P_n(x)$ .

2. Osoita interpolaatiofunktioiden rekursiokaava (3.27) paikkansa pitäväksi.
3. Totea polynomien  $\psi_2(\xi), \psi_3(\xi), \psi_4(\xi)$  (3.21) ortogonaalisuusominaisuus (3.30).
4. Johda palautuskaava interpolaatiofunktioiden  $\psi_j$  derivaatoille.
5. Ratkaise esimerkkitehtävä 3.4 käyttäen yhtä elementtiä ja hierarkisia interpolaatiofunktioita aina neljänteen asteeseen saakka.
6. Ratkaise esimerkkitehtävä 3.4 käyttäen kolmea lineaarista elementtiä. Konstruoi elementtiverkko siten, että reunahäiriökohtaan tulevan elementin pituus on häiriövyöhykkeen luokkaa, kaksi muuta elementtiä voivat olla yhtäpitkiä.
7. Ratkaise stationaarinen 1-dimensioinen diffuusio-reaktioyhtälö

$$-ku'' + cu = 0, \quad u(0) = 0, u(L) = \bar{u}_L,$$

kun  $k, c$  ovat positiivisia vakioita  $c = \beta^2 k L^{-2}$  elementtimenetelmällä, jakamalla alue kolmeen yhtäpitkään lineaariseen elementtiin. Suorita laskelmat  $\beta$ :n arvoilla 1 ja 100. Suorita laskelmat myös käyttäen jäykkyysmatriisin termille

$$\int \hat{c} u u dx$$

lumpattua muotoa. Matriisin luppauksella tarkoitetaan seuraavaa:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} & 0 \\ 0 & a_{21} + a_{22} \end{bmatrix}.$$

Mitä voit sanoa tuloksista?

8. Ratkaise stationaarinen 1-dimensioinen diffuusio-konvektioyhtälö

$$-ku'' + \rho cvu' = f, \quad u(0) = u(L) = 0,$$

kun  $k, \rho, c, v$  ja  $f$  ovat positiivisia vakioita. Ratkaise tapaus jossa suhde  $P = \rho cvL/k = 100$  seuraavilla keinoilla (käytä lineaarisia interpolaatiofunktioita):

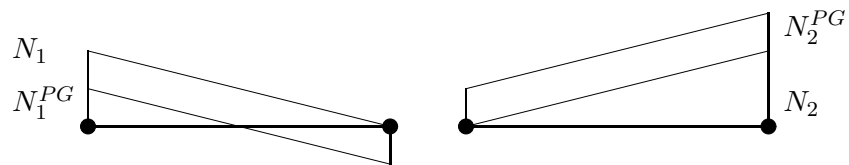
- (a) Käytä standardi elementtimenetelmää (Bubnov-Galerkin) ja jaa alue kolmeen yhtäpitkään elementtiin.
- (b) Kuten edellä, mutta jaa alue kolmeen elementtiin siten, että reunahäiriön kohdalle oikeaan reunaan tulee kaksi  $5L/100$ :n pituista elementtiä.
- (c) Jaa alue kolmeen yhtäpitkään elementtiin ja käytä ylävirtapainotteisia painofunktioita eli ns. Petrovin-Galerkinin menetelmää. Petrovin-Galerkinin menetelmän painofunktiot määritellään seuraavasti:

$$w_{PG} = w + \frac{1}{2} \alpha h w_{,x}$$

missä  $w$  on tavanomainen painofunktio ja vakio  $\alpha$  määritellään lausekkeella

$$\alpha = \begin{cases} P_h/6 & \text{kun } P_h \leq 6, \\ 1 & \text{kun } P_h > 6, \end{cases} \quad P_h = \frac{\rho cvh}{k}.$$





Mitä voit sanoa tuloksista?

9. Kuinka moneen tasapituiseen lineaariseen elementtiin ratkaisualue olisi jaettava jotta standardi Galerkinin menetelmällä saataisiin heilahtelematon tulos edellisessä tehtävässä?
10. Toista edelliset tehtävät käyttäen kvadraattista elementtiä.
11. Näytä, että ratkaisemalla kuplamuoto  $b^{(e)}$  analyttisesti yhtälöstä (3.132) päädytään stabilointitermiin, joka on ekvivalentti optimaalisen ylävirtapainotuksen kanssa (3.110).

# Luku 4

## Elementtimenetelmä tasoalueessa

Elementtimenetelmän yleistys useampiulotteisiin tapauksiin on sängen suoraviivaista. Kaksidimensionaalisuus mahdollistaa erilaisia elementtigeometrioita, joista tässä luvussa esitetään kolmio ja nelikulmio. Geometrian kuvaaminen mahdollistaa mielivaltaisten alueiden analysoimisen. Isoparametrisissa elementeissä elementin geometriaa kuvataan samoilla interpolaatiofunktioilla kuin itse ratkaistavaa suuretta. Luvussa sovelletaan elementtimenetelmää kvasiharmonisen yhtälön ratkaisuun.

### 4.1 Kvasiharmoninen yhtälö

Elementtimenetelmää olisi tuskin kehitetty alkua pidemmälle, jollei sen yleistäminen useampiulotteisiin tapauksiin ja mutkikkaisiin geometrioihin olisi ollut mahdollista. Tarkastellaan seuraavassa ns. kvasiharmonisen yhtälön

$$-\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla u) + cu = f \quad (4.1)$$

ratkaisua elementtimenetelmällä. Tällä yhtälöllä on näennäisestä yksinkertaisuudesta huolimatta suuri merkitys fysikaalisten ongelmien mallinnuksessa. Taulukossa 4.1 on esitetty yhtälön (4.1) tärkeimpiä sovellutusalueita ja suureiden merkityksiä. Mikäli yhtälön (4.1) kerroin  $c$  on negatiivinen vakio ja lähdetermi  $f = 0$ , on yhtälö ominaisarvotehtävä, jota kutsutaan myös Helmholtzin yhtälöksi.

Otetaan esimerkkinä kvasiharmonisesta yhtälöstä lämmön siirtymistä johtumalla kuvaava osittaisdifferentiaaliyhtälö, jossa lämmönlähde ei riipu lämpötilasta itsestään ( $c = 0$ )

$$-\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla u) = f \quad (4.2)$$

kaksidimensioisessa alueessa  $\Omega$  reunaehdoilla

$$u = u_s, \quad \text{reunan } S \text{ osalla } S_u, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_s, \quad \text{reunan } S \text{ osalla } S_q. \quad (4.4)$$

**Taulukko 4.1** Kvasiharmonisen yhtälön  $-\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla u) + cu = f$  sovellutusalueita.

Fysikaalinen ongelma	Suure	Suureen tulkinta	Materiaalilain nimitys
lämmönjohtuminen ( $c = 0$ )	$u$ $\mathbf{D}$ $f$	lämpötila lämmönjohtavuudet lämmönlähteen antoisuus	$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla u$ = lämpövuoto Fourier
diffuusio ( $c = 0$ )	$u$ $\mathbf{D}$ $f$	konsentraatio diffuusiokertoimet lähteen antoisuus	$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla u$ = vuoto Fick
suotovirtaus ( $c = 0$ )	$u$ $\mathbf{D}$ $f$	hydraulinen korkeus vedenläpäisykertoimet virtauslähteen antoisuus	$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla u$ = virtavuoto Darcy
st. sähkökenttä eristeessä ( $c = 0$ )	$u$ $\mathbf{D}$ $f$	jännite permittiivisyys sähkövarauksen antoisuus	$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla u$ = sähkövuon tiheys -
virtastationääri tila johteessa ( $c = 0$ )	$u$ $\mathbf{D}$ $f$	jännite sähkönjohtavuus sähkövarauksen antoisuus	$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla u$ virrantiheys Ohm
kitkattoman ja kokoonpuristumattoman nesteen pyörteetön virtaus ( $c = 0$ )	$u$ $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ $f$	nopeuspotentiaali virtauslähteen antoisuus	$\mathbf{v} = -\nabla u$ = nopeusvektori (1)
kalvon taipuma ( $c = 0$ )	$u$ $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ $f = p/S$	poikittainen taipuma paine/kalvon jännitys	
massiivipoikkileikkausten vapaa vääntö ( $c = 0$ ) (B. de St. Venant/L. Prandtl)	$u$ $\mathbf{D} = G^{-1}\mathbf{I}$ $f = 2\theta$	Prandtlin jännitysfunktio $G$ =leikkausmoduuli $\theta$ = vääntymä	
matalan veden seisova aaltoliike (Seiche-aalto) $f = 0$	$u$ $\mathbf{D} = h\mathbf{I}$ $c = -\frac{4\pi^2}{gT^2}$ $T$	aallonkorkeus perustilaan $h$ = veden syvyys perustilassa $g$ = painovoiman kiihtyvyyden värähdysliikkeen jaksonaika	
akustiset värähtelyt $f = 0$	$u$ $c = -(w/v)^2$ $v$	paineen muutos perustilaan $w$ = aaltoliikkeen taajuus aallon nopeus väliaineessa	

(1) ei ole materiaalilaki

Lämpövuoto  $\mathbf{q}$  on yhteydessä lämpötilan gradienttiin konstitutiivisen yhteyden

$$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla u, \quad (4.5)$$

välityksellä. Yhtälö (4.2) voidaan siis kirjoittaa myös muodossa

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = f, \quad (4.6)$$

josta kertomalla painofunktioilla  $\hat{u}$  ja integroimalla alueen  $\Omega$  yli seuraa

$$\int_{\Omega} \hat{u} \nabla \cdot \mathbf{q} dA = \int_{\Omega} \hat{u} f dA. \quad (4.7)$$

Osittaisintegroimalla ja käyttämällä Gaussin lausetta ensimmäiseen termiin, saadaan muoto

$$\oint_S \hat{u} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} (\nabla \hat{u})^T \mathbf{q} dA = \int_{\Omega} \hat{u} f dA. \quad (4.8)$$

Ottamalla huomioon se, että testifunktio häviää reunan osalla  $S_u$  ( $u_s = 0$ ) ja lämpövuoto on annettu reunan osalla  $S_q$  ( $\mathbf{q} = \mathbf{q}_s$ ) sekä sijoittamalla yhtälöön materiaalilaki (4.5), päädytään lopulliseen muotoon

$$\int_{\Omega} (\nabla \hat{u})^T \mathbf{D} \nabla u dA = \int_{\Omega} \hat{u} f dA - \int_{S_q} \hat{u} \mathbf{q}_s \cdot \mathbf{n} ds, \quad (4.9)$$

joka on yhtälön (4.2) heikko muoto. Otetaan käyttöön elementtimenetelmän mukainen kantafunktiojärjestelmä  $N_i(x, y)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , missä  $n$  on solmupisteiden lukumäärä ratkaisualueessa. Funktio  $u$  ja painofunktio  $\hat{u}$  voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa kantafunktioista  $N_i$  seuraavasti:

$$u = \mathbf{N} \mathbf{u}, \quad \hat{u} = \mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}, \quad (4.10)$$

missä pystyvektorit  $\mathbf{u}$  ja  $\hat{\mathbf{u}}$  sisältävät  $u$ :n ja  $\hat{u}$ :n vapausasteet, jotka ovat tässä tapauksessa suureiden solmupistearvot koko alueessa  $\Omega$ . Käytetään gradienttioperaattorin diskreetille vastineelle merkintää

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N}. \quad (4.11)$$

Suorakulmaisessa kaksiulotteisessa karteesisessa koordinaatistossa gradienttioperaattori on muotoa

$$\nabla = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right]^T, \quad (4.12)$$

jolloin

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N} = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{N} \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{N} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{N}_{,x} \\ \mathbf{N}_{,y} \end{array} \right]. \quad (4.13)$$

Nyt heikko muoto (4.9) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\hat{\mathbf{u}}^T \left( \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \mathbf{u} - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T f dA + \int_{S_q} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s \cdot \mathbf{n} ds \right) = 0. \quad (4.14)$$

Koska painofunktiot ovat mielivaltaisia, on oltava

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \mathbf{u} - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T f dA + \int_{S_q} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s \cdot \mathbf{n} ds = \mathbf{0}. \quad (4.15)$$

Koska elementtimenetelmän kantafunktiot ovat paikallisia vain elementin alueella  $\Omega^{(e)}$  määriteltyjä funktioita, voidaan integrointi suorittaa elementteittäin ja merkitään elementin jäykkyyismatriisia

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA. \quad (4.16)$$

Osittamalla diskreetti gradienttimatriisi  $\mathbf{B}$  elementin paikallisten solmujen mukaan seuraavasti

$$\mathbf{B} = [ \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_m ], \quad (4.17)$$

voidaan diffuusioyhtälön heikko muoto lausua myös muodossa

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^N \sum_{j=1}^m \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dA u_j \\ = & \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^{(e)}} N_i f dA - \sum_{e(S_q)} \int_{S_q^{(e)}} N_i \mathbf{q}_s \cdot \mathbf{n} ds, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.18)$$

missä  $m$  on yksittäisen elementin solmupisteiden lukumäärä. Viimeisessä lausekkeessa summaus suoritetaan niiden elementtien yli, joiden reunaviiva osuu kappaleen reunan osalle  $S_q$ .

## 4.2 Lineaarinen kolmioelementti

Yksinkertaisin mahdollinen kaksidimensioinen elementti on lineaarinen kolmioelementti, katso kuva 4.1. Lineaarisen funktion kuvaamiseen tarvitaan kolme parametria, joten funktion  $u$  interpolaatio voidaan kirjoittaa muodossa

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha}, \quad (4.19)$$

jossa

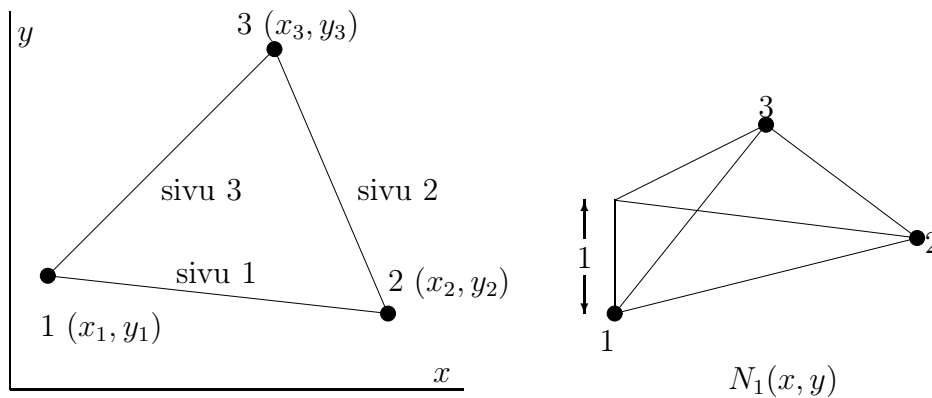
$$\mathbf{P} = [ 1 \quad x \quad y ], \quad \boldsymbol{\alpha} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \right\}. \quad (4.20)$$

Sijoittamalla interpolaatioyhtälöön solmujen koordinaattien arvot ja vastaava funktion  $u$  arvo päädytään kolmen tuntemattoman yhtälöryhmään, josta kertoimet  $\alpha$  voidaan ratkaista, eli

$$\left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \right\}, \quad \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}. \quad (4.21)$$

Interpolaatio elementin  $e$  alueella voidaan nyt kirjoittaa interpolaatiofunktioiden

$$\mathbf{N} = \mathbf{P} \mathbf{A}^{-1} = [ N_1 \quad N_2 \quad N_3 ] \quad (4.22)$$



**Kuva 4.1** Lineaarinen kolmioelementti.

avulla muodossa

$$u = \mathbf{N}\mathbf{u}^{(e)}. \quad (4.23)$$

Matriisin  $\mathbf{A}$  käänteismatriisin muodostaminen onnistuu helposti, ja se on

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}\mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

missä  $A$  on kolmion 1-2-3 pinta-ala

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2) = \frac{1}{2}(x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21}), \quad (4.25)$$

jossa on käytetty merkintää  $x_{ij} = x_i - x_j$  ja  $y_{ij} = y_i - y_j$ . Yhtälö (4.23) voidaan nyt kirjoittaa auki muodossa

$$u(x, y) = N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 + N_3(x, y)u_3, \quad (4.26)$$

jossa lineaariset interpolaatiofunktiot ovat

$$N_1 = (a_1 + b_1x + c_1y)/2A, \quad (4.27a)$$

$$N_2 = (a_2 + b_2x + c_2y)/2A, \quad (4.27b)$$

$$N_3 = (a_3 + b_3x + c_3y)/2A, \quad (4.27c)$$

sekä vakiot

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2, & b_1 &= y_2 - y_3, & c_1 &= x_3 - x_2, \\ a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= x_1 - x_3, \\ a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1, & b_3 &= y_1 - y_2, & c_3 &= x_2 - x_1. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Havaitaan, että indeksit vakioiden  $a_i$ ,  $b_i$  ja  $c_i$  lausekkeissa muodostavat syklisen permutaation solmunumeroiden suhteen.

Palataan nyt hieman taaksepäin muotoon (4.15) tai (4.18). Siinä olevat elementtien osuudet ovat

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dA. \quad (4.29)$$

Gradienttimatriisi  $\mathbf{B}$  saa kolmisolmuisen elementin tapauksessa muodon

$$\mathbf{B} = [ \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 ] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Koska interpolaatiofunktiot  $N_1, N_2$  ja  $N_3$  ovat lineaarisia funktioita, on matriisi  $\mathbf{B}$  kolmisolmuisen lineaarisen kolmioelementin tapauksessa vakiomatriisi

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Tarkastellaan nyt hieman yksityiskohtaisemmin konstitutiivista yhteyttä eli materiaalilakia, joka sitoo toisiinsa lämmönjohtumisyhtälön tapauksessa lämpötilagradientin ja lämpövuon muodossa

$$\mathbf{q} = -\mathbf{D} \nabla u. \quad (4.32)$$

Fysikaalisten syiden vuoksi lämpö virtaa kuumemmasta kohti kylmempää aluetta, josta seuraa miinusmerkki yllä olevaan yhtälöön. Siitä seuraa myös, että lämpötilagradientin ja lämpövuovektorin sisätulo on negatiivinen, eli ne muodostavat tylpän kulman keskenään

$$(\nabla u) \cdot \mathbf{q} = (\nabla u)^T \mathbf{q} < 0, \quad (4.33)$$

joka on havainnollistettu myös kuvassa 4.2. Sijoittamalla yllä olevaan epäyhtälöön materiaalilaki (4.32) seuraa epäyhtälö

$$(\nabla u)^T \mathbf{D} \nabla u > 0 \quad \forall \nabla u \neq 0, \quad (4.34)$$

joka osoittaa konstitutiivisen matriisin  $\mathbf{D}$  olevan positiivisesti definiitin. Energiaargumenttien perusteella se on myös symmetrinen eli

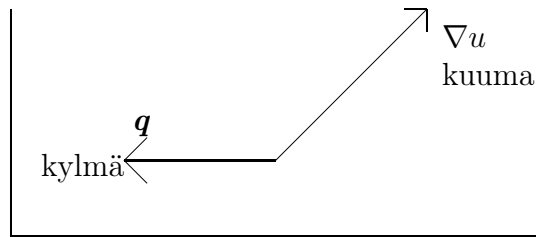
$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^T, \quad (4.35)$$

ja sen yleinen muoto kahdessa dimensiossa on:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{xy} & k_{yy} \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

jossa  $k_{xx}, k_{xy}$  ja  $k_{yy}$  ovat lämmönjohtumiskertoimia. Mikäli koordinaattiakselit yhtyvät materiaalin pääsuuntiin, saadaan ortotrooppisen aineen konstitutiivinen yhteys

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{yy} \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$



**Kuva 4.2** Lämpövuovektori  $\mathbf{q}$  ja lämpötilagradientti  $\nabla u$ .

Materiaalia kutsutaan isotrooppiseksi, mikäli sen ominaisuudet ovat jokaisessa suunnassa samanlaiset. Tällöin materiaalilaki yksinkertaistuu muotoon

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = k\mathbf{I}. \quad (4.38)$$

Koordinaatiston muunnoksella voidaan matriisiin  $\mathbf{D}$  täysi muoto (4.36) aina saattaa diagonaaliseen muotoon (4.37). Tämä on laskentateknisesti edullista, sillä tällöin jäykkyysmatriisia muodostettaessa suoritettavien kertolaskujen määrä vähenee huomattavasti.

Kolmisolmuisen lineaarisen kolmioelementin jäykkyysmatriisi voidaan kvasiharmonisen yhtälön tapauksessa kirjoittaa auki eksplisiittisesti:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA = \int_{\Omega^{(e)}} (k_{xx} \mathbf{N}_{,x}^T \mathbf{N}_{,x} + k_{yy} \mathbf{N}_{,y}^T \mathbf{N}_{,y}) dA \\ &= \frac{k_{xx}}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_1 b_2 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ b_1 b_3 & b_2 b_3 & b_3^2 \end{bmatrix} + \frac{k_{yy}}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_1 c_2 & c_2^2 & c_2 c_3 \\ c_1 c_3 & c_2 c_3 & c_3^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Kuormitusvektori on tasan jakautuneen lämmönlähteen ja reunoille tasan jakautuneen lämpövuon tapauksessa

$$\mathbf{f}^{(e)} = \frac{f A^{(e)}}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} q_{n1} s_1 + q_{n3} s_3 \\ q_{n1} s_1 + q_{n2} s_2 \\ q_{n2} s_2 + q_{n3} s_3 \end{Bmatrix}, \quad (4.40)$$

jossa  $q_{ni}$  viittaa reunaehtona annetun lämpövuon normaalikomponenttiin sivulla  $i$ , ja vastaavasti  $s_i$  on sivun  $i$  pituus, katso kuva 4.3.

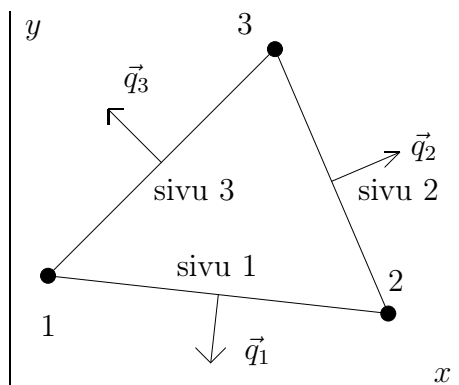
### 4.3 Alakoordinaatit

Ajatellaan kolmio 1-2-3 jaetuksi kolmeen osa-alueeseen joiden pinta-alat ovat  $A_1$ ,  $A_2$  ja  $A_3$  ja jotka kohtaavat pisteessä  $P$ , katso kuva 4.4. Kolmion luonnolliset eli alakoordinaatit <sup>1</sup> määritellään suhteina

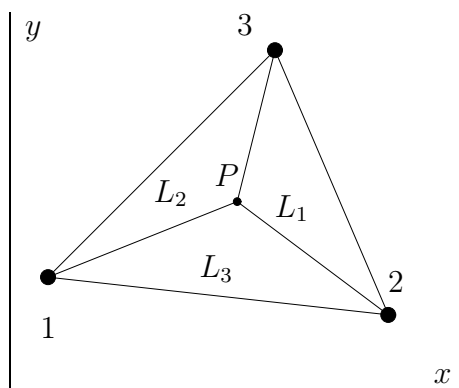
$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_2}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A}, \quad (4.41)$$

<sup>1</sup>Kutsutaan myös barysentrisiksi koordinaateiksi.





**Kuva 4.3** Kolmion sivujen numerointi ja lämpövuon normaalikomponentit.



**Kuva 4.4** Alakoordinaatit.

jossa  $A$  on kolmion 1-2-3 pinta-ala. Koordinaatit  $L_1$ ,  $L_2$  ja  $L_3$  eivät ole riippumattomia, sillä niitä sitoo rajoiteyhtälö

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1. \quad (4.42)$$

Alakoordinaatit voidaan tulkita myös etäisyysuhteina. Esimerkiksi koordinaatin  $L_1$  tasa-arvoviivat on piirretty kuvaan 4.4. Jokainen näistä viivoista on yhdensuuntainen sen sivun kanssa josta koordinaatin mittausta alkaa.

Tarkastellaan lähemmin koordinaatin  $L_1$  lauseketta. Mielivaltaisen, kolmion 1-2-3 alueella olevan pisteen  $P$  koordinaatit ovat  $(x, y)$ . Kolmion  $P$ -2-3 alaksi saadaan

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} |[(x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j}] \times [(x_3 - x)\vec{i} + (y_3 - y)\vec{j}]| \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x & y_2 - y & 0 \\ x_3 - x & y_3 - y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y], \end{aligned} \quad (4.43)$$

joten alakoordinaatin  $L_1$  lauseke on

$$L_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{1}{2A} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] = \frac{1}{2A} (a_1 + b_1 x + c_1 y). \quad (4.44)$$

Se on täsmälleen sama kuin aikaisemmin johdettu lineaarisen interpolaatiofunktion lauseke (4.27a). Vastaavasti voidaan myös johtaa alakoordinaateille  $L_2$  ja  $L_3$  samanlainen kaava ja tulos voidaan kirjoittaa yleisessä muodossa

$$L_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y). \quad (4.45)$$

Nyt lukijalle helposti herää kysymys onko alakoordinaateista mitään etua ensin esitettyyn lähestymistapaan nähden. Lineaarisen kolmioelementin tapauksessa ne eivät tuo mitään erikoista formulaatioon, mutta korkeamman asteen elementtien yhteydessä ne helpottavat käsittelyä huomattavasti.

## 4.4 Korkeamman asteen kolmioelementtejä

Tasoalueessa lineaarisen funktion esittäminen vaatii kolme parametriä, kvadraattisen muodon kuvaaminen vastaavasti kuusi ja kuubisen kymmenen parametria. Funktion  $u$  interpolointi kvadraattisella tai kuubisella esityksellä voitaisiin kirjoittaa muodoissa

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2, \quad (4.46)$$

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3.$$

Mikäli nyt otetaan käyttöön Lagrangen tyylinen interpolaatio tarvitaan joko kuusi tai kymmenen pistettä, joiden kautta kyseinen interpolaatio voidaan pakottaa kulkemaan. Vastaavasti, kuten lineaarisenkin elementin tapauksessa, voidaan solmuinterpolaatiofunktiot konstruoida kirjoittamalla nämä yhtälöt, jolloin päädytään lineaariseen, tyyppiä (4.21) olevaan yhtälösystemiin



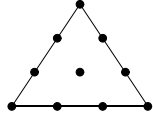
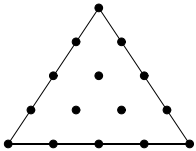
$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \quad (4.47)$$

jossa  $\mathbf{A}$  on solmupisteiden koordinaateista riippuva vakiomatriisi ja josta parametrit  $\boldsymbol{\alpha}$  voidaan, ainakin muodollisesti, helposti ratkaista.

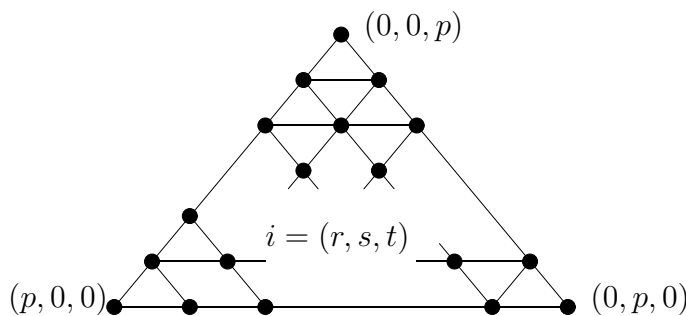
Edellä kuvattu menettely on kuitenkin epäkäytännöllisen hankala. Miellyttävämpi tapa konstruoida interpolaatiofunktiot on kirjoittaa ne auki suoraan kuten yksidimensioisessa tapauksessakin käyttäen hyväksi joitain tunnettuja polynomeja.

Kolmioelementit sallivat täydellisen tiettyä astetta olevan polynomin käytön kenttäsuureen interpolaatiossa. Kuvassa 4.5 on esitetty interpolaatiossa olevien kantapolynomien ja solmukonfiguraation suhdetta aina asteeseen neljä saakka. Havaitaan, että kolmannen ja sitä korkeamman asteen elementeissä joudutaan käyttämään sisäsolmuja. Niiden mukaantulo ei kuitenkaan ole haitallista, vaan päinvastoin edullista, sillä niihin liittyvät vapausasteet on mahdollista kondensoida elementtitasolla pois globaalista yhtälösystemistä.

Tarkastellaan yleistä tapausta, jossa kolmioelementin alueella interpolaatioon käytetään täydellistä astetta  $p$  olevaa polynomia. Elementin solmupisteet voidaan

Pascalin kolmio	polynomien aste $p$ $n$		kolmioelementtien solmukonfiguraatiot
1	0	1	
$x$ $y$	1	3	
$x^2$ $xy$ $y^2$	2	6	
$x^3$ $x^2y$ $xy^2$ $y^3$	3	10	
$x^4$ $x^3y$ $x^2y^2$ $xy^3$ $y^4$	4	15	

**Kuva 4.5** Lagrangen tyyppisen kolmioelementin interpolaatio ja solmukonfiguraatio. Kolmioelementissä on solmuja sama määrä kuin interpolaatiossa termijä ( $n = (p + 1)(p + 2)/2$ ).



**Kuva 4.6** Astetta  $p$  oleva kolmioelementti.

määrittää kuvan 4.6 mukaisesti jakamalla kukin sivu  $p$ :n osaan. Tarkastellaan mielivaltaista solmua  $i$ , jonka kuvaamiseen tarvittavien alakoordinaattien arvot olkoot  $L_{1(i)}$ ,  $L_{2(i)}$  ja  $L_{3(i)}$ . Määritellään solmuun  $i$  liittyvä interpolaatiofunktio

$$N_i(L_1, L_2, L_3) = l_r^r(L_1)l_s^s(L_2)l_t^t(L_3), \quad (4.48)$$

jossa  $l_r^r$ ,  $l_s^s$  ja  $l_t^t$  ovat Lagrangen astetta  $r$ ,  $s$  ja  $t$  olevia interpolaatiopolynomeja (3.16), jossa nyt  $\xi$ :n tilalla argumenttina on alakoordinaatit  $L_i$ . Lukukolmikun  $r, s, t$  arvoja sitoo tietenkin ehto

$$r + s + t = p. \quad (4.49)$$

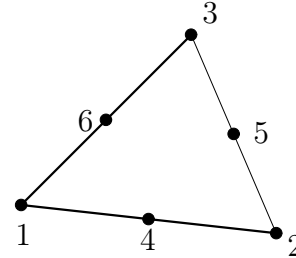
Suoritetaan yksityiskohtainen interpolaatiofunktioiden johto kvadraattiselle elementille. Solmuun 1 liittyvä funktio on kaavan (4.48) mukaan

$$N_1 = l_2^2(L_1). \quad (4.50)$$

Funktion  $N_1$  kulku voidaan mieltää yksiulotteisena paraabelina pitkin reunaviivaa 1-2 tai 1-3, se kumpaa ajatellaan on yhdentekevää. Funktio saa tunnetut arvot sol-

mupisteissä, eli arvon 1 solmussa 1 ja arvon 0 solmuissa 2 ja 4, mikäli tutkitaan kulkua viivalla 1-2. Vastaavasti alakoordinaatin  $L_1$  arvot ovat  $1, \frac{1}{2}, 0$ . Täten interpolaatiofunktion  $N_1$  kulku voidaan konstruoida mainittujen kolmen pisteen kautta. Kirjoitetaan funktion  $N_1$  interpolaatiodata vielä taulukon muodossa.

Lagrangen interpolaatiopisteen # (k)	0	1	2
elementin solmun #	2	4	1
alakoordinaatin $L_1$ arvo $L_{1(k)}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$N_1(L_1, L_2, L_3) = l_2^2(L_1)$	0	0	1



Nyt voidaan funktio  $N_1$  kirjoittaa

$$N_1 = l_2^2(L_1) = \frac{(L_1 - L_{1(0)})(L_1 - L_{1(1)})}{(L_{1(2)} - L_{1(0)})(L_{1(2)} - L_{1(1)})} = \frac{L_1(L_1 - \frac{1}{2})}{1 \cdot \frac{1}{2}} = L_1(2L_1 - 1). \quad (4.51)$$

Vastaavasti saadaan kaikille kolmion kärkien interpolaatiofunktioille samanlainen lauseke, joten parabolisen kolmioelementin solmufunktioille voidaan kirjoittaa

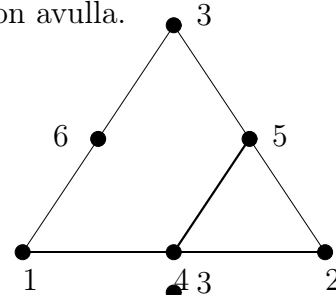
$$N_i = L_i(2L_i - 1). \quad (4.52)$$

Sivujen keskisolmujen lausekkeet saadaan samalla tavalla, esimerkiksi

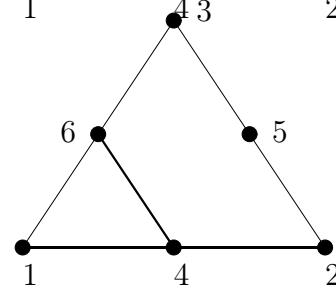
$$N_4 = l_1^1(L_1)l_1^1(L_2). \quad (4.53)$$

Tämä on siis lineaarinen polynomi kummankin koordinaatin  $L_1$  ja  $L_2$  suhteen. Lausekkeen muodon ymmärtämiseksi on syytä kuvitella funktion  $N_4$  kulkua pitkin linjoja 4-5 ja 4-6, joita pitkin interpolaatiopolynomit  $l_1^1(L_1)$  ja  $l_1^1(L_2)$  voidaan konstruoida. Havainnollistetaan asiaa uudelleen taulukon avulla.

Lagrangen interpolaatiopisteen # (k)	0	1
elementin solmun #	4	5
alakoordinaatin $L_1$ arvo $L_{1(k)}$	$\frac{1}{2}$	0
$N_4(L_1, L_2, L_3) = l_1^1(L_1)l_1^1(L_2)$	1	0



Lagrangen interpolaatiopisteen # (k)	0	1
elementin solmun #	4	6
alakoordinaatin $L_2$ arvo $L_{2(k)}$	$\frac{1}{2}$	0
$N_4(L_1, L_2, L_3) = l_1^1(L_1)l_1^1(L_2)$	1	0



Muodostetaan nyt lauseke

$$N_4 = l_1^1(L_1)l_1^1(L_2) = 4L_1L_2. \quad (4.54)$$

Muiden sivujen keskiolosmujen lausekkeet ovat vastaavanlaisia, joten kvadraattisen elementin kuusi interpolaatiofunktioita ovat:

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1), \quad (4.55a)$$

$$N_2 = L_2(2L_2 - 1), \quad (4.55b)$$

$$N_3 = L_3(2L_3 - 1), \quad (4.55c)$$

$$N_4 = 4L_1L_2, \quad (4.55d)$$

$$N_5 = 4L_2L_3, \quad (4.55e)$$

$$N_6 = 4L_1L_3. \quad (4.55f)$$

Elementin jäykkyyismatriisia muodostettaessa tarvitaan derivaattojen lausekkeitä koordinaattien  $x$  ja  $y$  suhteen. Ne on helppo muodostaa ketjuderivoinnin avulla seuraavaan tapaan:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial L_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_3}, \quad (4.56a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial L_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial y} \frac{\partial}{\partial L_3}, \quad (4.56b)$$

jossa

$$\frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A}, \quad \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2A}. \quad (4.57)$$

Vakiot  $b_i$  ja  $c_i$  on annettu yhtälöissä (4.28).

Yleinen lauseke interpolaatiofunktion (4.48) osuudelle  $l_q^q(L_k)$  on

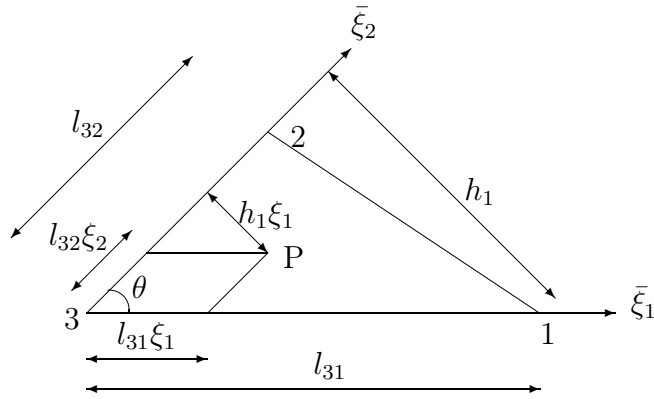
$$l_q^q(L_k) = \begin{cases} \prod_{j=1}^q \frac{pL_k - j + 1}{j} & \text{kun } q \geq 1, \\ 1 & \text{kun } q = 0. \end{cases} \quad (4.58)$$

Alakoordinaattien potenssien integraaleja tarvitaan elementtimatriiseja ja vektoreita muodostettaessa, jossa seuraava kaava on hyödyllinen

$$\int_{\Omega^{(e)}} L_1^i L_2^j L_3^k dA = 2A^{(e)} \frac{i!j!k!}{(2+i+j+k)!}, \quad A^{(e)} = \text{ala}(\Omega^{(e)}). \quad (4.59)$$

Yllä oleva kaava voidaan johtaa seuraavasti. Alakoordinaatit on määritelty pintaalojen suhteina

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\text{kolmion 3P2 pinta-ala}}{\text{kolmion 123 pinta-ala}} \\ &= \frac{\bar{\xi}_1}{l_{31}} = \frac{l_{32}h_1\xi_1\frac{1}{2}}{l_{32}h_1\frac{1}{2}} = \xi_1 \end{aligned} \quad (4.60)$$



Koska kaikki alakoordinaatit eivät ole riippumattomia, niille pätee ehdot

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \Rightarrow L_3 = 1 - L_1 - L_2 \text{ ja reunalla 1-2: } L_1 + L_2 = 1. \quad (4.61)$$

Differentiaalinen alaelementti  $dA$  on

$$dA = l_{31} dL_1 \sin \theta l_{32} dL_2 = l_{31} h_2 dL_1 dL_2 = 2A^{(e)} dL_1 dL_2, \quad (4.62)$$

missä  $A^{(e)}$  on kolmion 123 pinta-ala. Täten on

$$\int_{\Omega^{(e)}} L_1^i L_2^j L_3^k dA = 2A^{(e)} \int_0^1 L_1^i \left[ \int_0^{1-L_1} L_2^j (1 - L_1 - L_2)^k dL_2 \right] dL_1. \quad (4.63)$$

Integroimalla alakoordinaatin  $L_2$  yli antaa tuloksen

$$\begin{aligned} & \int_0^{1-L_1} L_2^j (1 - L_1 - L_2)^k dL_2 = \\ & - \frac{1}{k+1} \Big|_0^{1-L_1} L_2^j (1 - L_1 - L_2)^{k+1} + \frac{j}{k+1} \int_0^{1-L_1} L_2^{j-1} (1 - L_1 - L_2)^{k+1} dL_2 = \\ & \frac{j}{k+1} \left[ - \frac{1}{k+2} \Big|_0^{1-L_1} L_2^{j-1} (1 - L_1 - L_2)^{k+2} + \frac{j-1}{k+2} \int_0^{1-L_1} L_2^{j-2} (1 - L_1 - L_2)^{k+2} dL_2 \right] = \\ & \frac{j}{k+1} \frac{j-1}{k+2} \dots \frac{j-j+1}{k+j} \int_0^{1-L_1} L_2^{j-j} (1 - L_1 - L_2)^{k+j} dL_2 = \\ & \frac{j!k!}{(k+j)!} \frac{-1}{k+j+1} \Big|_0^{1-L_1} (1 - L_1 - L_2)^{k+j+1} = \frac{j!k!}{(k+j+1)!} (1 - L_1)^{k+j+1}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

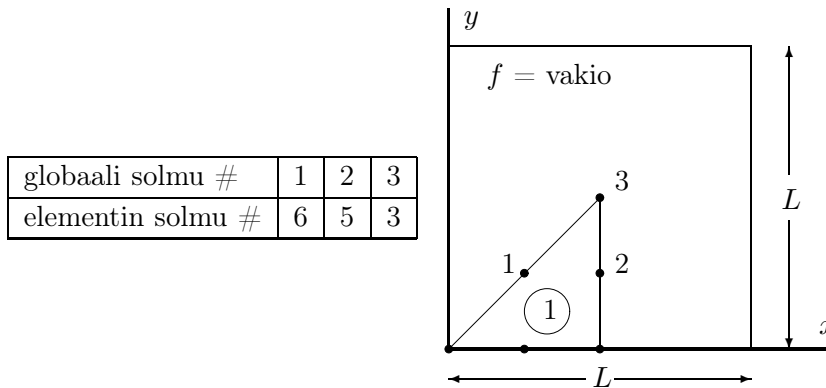
Integroimalla alakoordinaatin yli  $L_1$ , saadaan

$$\begin{aligned}
 & \frac{j!k!}{(k+j+1)!} \int_0^1 L_1^i (1-L_1)^{k+j+1} dL_1 \\
 &= \frac{j!k!}{(k+j+1)!} \frac{i}{k+j+2} \cdots \frac{i-i+1}{k+j+i+1} \int_0^1 L_1^{i-i} (1-L_1)^{k+j+i+1} dL_1 \\
 &= \frac{j!k!}{(k+j+1)!} \frac{i!}{(k+j+2) \cdots (k+j+i+2)} \Big|_0^1 [-(1-L_1)^{k+j+i+2}] \\
 &= \frac{i!j!k!}{(k+j+i+2)!}. \tag{4.65}
 \end{aligned}$$

Kokoamalla tulokset yhteen saadaan tulos (4.59).

## 4.5 Esimerkkejä diffuusioyhtälön ratkaisusta tasoalueessa

**Esimerkki 4.1** Määritä lämpötilajakauma oheisessa neliön muotoisessa alueessa käyttäen yhtä parabolista elementtiä alueen kahdeksasosalle. Oletetaan, että materiaali on isotrooppista ja sen lämmönjohtavuuskerroin  $k$  on vakio koko alueessa. Otaksutaan lisäksi homogeeniset reunaehdot ja että lämmönlähteen antoisuus on vakio.



Lasketaan elementin jäykkymatriisin ja kuormavektorin lausekkeet:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA = \int_{\Omega^{(e)}} (k_{xx} \mathbf{N}_{,x}^T \mathbf{N}_{,x} + k_{yy} \mathbf{N}_{,y}^T \mathbf{N}_{,y}) dA, \tag{4.66}$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T f dA - \int_{S_q^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{nyt } \mathbf{q}_s \equiv \mathbf{0}). \tag{4.67}$$

Interpolaatiofunktio matriisi  $\mathbf{N}$  on kvadraattiselle elementille muotoa

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 \end{bmatrix}, \tag{4.68}$$

jossa interpolaatofunktiot on annettu yhtälöissä (4.55a). Tarvitaan derivaattojen lausekkeita:

$$\begin{aligned} N_{i,x} &= \frac{\partial}{\partial x} [L_i (2L_i - 1)] = (4L_i - 1) \frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A^{(e)}} (4L_i - 1), \\ N_{i+3,x} &= \frac{\partial}{\partial x} (4L_i L_{i+}) = 4 \left( L_i \frac{\partial L_{i+}}{\partial x} + L_{i+} \frac{\partial L_i}{\partial x} \right) = \frac{2}{A^{(e)}} (L_i b_{i+} + L_{i+} b_i), \\ N_{i,y} &= \frac{c_i}{4A^{(e)}} (2L_i - 1), \\ N_{i+3,y} &= \frac{2}{A^{(e)}} (L_i c_{i+} + L_{i+} c_i), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Merkintä  $i+$  tarkoittaa elementin solmunumeroa, joka seuraa solmua  $i$  vastapäivään kierrettäessä.

Jäykkyysmatriisin termi  $K_{11}^{(e)}$  on siten:

$$\begin{aligned} K_{11}^{(e)} &= \frac{1}{4(A^{(e)})^2} \int_{\Omega^{(e)}} (k_{xx} b_1^2 + k_{yy} c_1^2) (16L_1^2 - 8L_1 + 1) dA \\ &= \frac{1}{4(A^{(e)})^2} (k_{xx} b_1^2 + k_{yy} c_1^2) 2A^{(e)} \left( \frac{4}{3} - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4A^{(e)}} (k_{xx} b_1^2 + k_{yy} c_1^2), \end{aligned} \quad (4.70)$$

jossa on käytetty kaavaa (4.59) integrointien suorittamiseen.

Suorittamalla muiden termien integrointi samaan tapaan, saadaan kvadraattisen elementin jäykkyysmatriisiksi (vastaten solmupistevapausasteita  $u_1, u_2, \dots, u_6$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \frac{k_{xx}}{A^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}b_1^2 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b_1b_2 & 0 & \frac{1}{3}b_1b_3 \\ & \frac{1}{4}b_2^2 & 0 & \frac{1}{3}b_1b_2 & \frac{1}{3}b_2b_3 & 0 \\ & & \frac{1}{4}b_3^2 & 0 & \frac{1}{3}b_2b_3 & \frac{1}{3}b_1b_3 \\ & & & \frac{2}{3}B_{12} & \frac{1}{3}B_{213} & \frac{1}{3}B_{123} \\ & & & & \frac{2}{3}B_{23} & \frac{1}{3}B_{312} \\ & & & & & \frac{2}{3}B_{13} \end{bmatrix} \\ &+ \frac{k_{yy}}{A^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}c_1^2 & 0 & 0 & \frac{1}{3}c_1c_2 & 0 & \frac{1}{4}c_1c_3 \\ & \frac{1}{4}c_2^2 & 0 & \frac{1}{3}c_1c_2 & \frac{1}{2}c_2c_3 & 0 \\ & & \frac{1}{4}c_3^2 & 0 & \frac{1}{3}c_2c_3 & \frac{1}{3}c_1c_3 \\ & & & \frac{2}{3}C_{12} & \frac{1}{3}C_{213} & \frac{1}{3}C_{123} \\ & & & & \frac{2}{3}C_{23} & \frac{1}{3}C_{312} \\ & & & & & \frac{2}{3}C_{13} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

jossa on käytetty lyhennysmerkintöjä

$$B_{ij} = b_i^2 + b_i b_j + b_j^2, \quad (4.72a)$$

$$C_{ij} = c_i^2 + c_i c_j + c_j^2, \quad (4.72b)$$

$$B_{ijk} = b_i(b_1 + b_2 + b_3) + 2b_j b_k, \quad (4.72c)$$

$$C_{ijk} = c_i(c_1 + c_2 + c_3) + 2c_j c_k. \quad (4.72d)$$

Kuormitusvektoriksi saadaan

$$\mathbf{f}^{(e)} = \frac{1}{3} f A^{(e)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (4.73)$$



Rakenteen jäykkyyismatriisi on siten

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} K_{66}^{(1)} & K_{65}^{(1)} & K_{63}^{(1)} \\ & K_{55}^{(1)} & K_{53}^{(1)} \\ & & K_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \\ &= \frac{k}{A^{(1)}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(B_{13} + C_{13}) & \frac{1}{3}(B_{312} + C_{312}) & \frac{1}{3}(b_1 b_3 + c_1 c_3) \\ & \frac{2}{3}(B_{23} + C_{23}) & \frac{1}{3}(b_2 b_3 + c_2 c_3) \\ & & \frac{1}{12}(b_3^2 + c_3^2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Määritetään vakiot

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3 = -\frac{1}{2}L, \\ b_2 &= y_3 - y_1 = \frac{1}{2}L, \\ b_3 &= y_1 - y_2 = 0, \\ c_1 &= x_3 - x_2 = 0, \\ c_2 &= x_1 - x_3 = -\frac{1}{2}L, \\ c_3 &= x_2 - x_1 = \frac{1}{2}L, \end{aligned} \quad (4.75)$$

ja lasketaan termit

$$B_{13} = b_1^2 + b_1 b_3 + b_3^2 = \frac{1}{4}L^2, \quad (4.76a)$$

$$C_{13} = c_1^2 + c_1 c_3 + c_3^2 = \frac{1}{4}L^2, \quad (4.76b)$$

$$B_{321} = b_3(b_1 + b_2 + b_3) + 2b_1 b_2 = -\frac{1}{2}L^2, \quad (4.76c)$$

$$C_{321} = c_3(c_1 + c_2 + c_3) + 2c_1 c_2 = 0. \quad (4.76d)$$

Kolmion pinta-alahan on  $\frac{1}{8}L^2$ , joten yhtälösystemiksi saadaan

$$k \begin{bmatrix} 16 & -8 & 0 \\ -8 & 16 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}fL^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.77)$$

Ratkaisuksi saadaan siten  $u_1 = \frac{7}{160}fL^2/k$ ,  $u_2 = \frac{9}{160}fL^2/k$ ,  $u_3 = \frac{12}{160}fL^2/k = 0,075fL^2/k$ .

Keskipisteen tarkka ratkaisu on

$$u_3 = \frac{16}{\pi^4} \frac{fL^2}{k} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin(\frac{1}{2}m\pi) \sin(\frac{1}{2}n\pi)}{(m^2 + n^2)mn} \approx 0.07367fL^2/k. \quad (4.78)$$

joten virhe siinä on noin 1,8 %.

Määritetään vielä lämpövuoto  $x$ -akselilla. Lämpötilan approksimaatio elementin alueella on

$$\begin{aligned} u &= N_3 u_3^{(1)} + N_5 u_5^{(1)} + N_6 u_6^{(1)} = N_3 u_3 + N_5 u_2 + N_6 u_1 \\ &= \left( \frac{3}{40}N_3 + \frac{9}{160}N_5 + \frac{7}{160}N_6 \right) \frac{\bar{f}L^2}{k}, \end{aligned} \quad (4.79)$$

josta lämpövuoto reunalla 1-2 (elementin solmunumeroita) saadaan

$$q_{n1} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_1, \quad (4.80)$$

jossa  $\mathbf{n}_1$  on elementin sivun 1 yksikkönormaali  $\mathbf{n}_1 = -\vec{j}$ . Täten lämpövuoksi elementin reunalla 1 saadaan

$$q_{n1} = k \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.81)$$

Määritetään interpolaatiofunktioiden  $N_3, N_5$  ja  $N_6$  derivaatat

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_3}{\partial y} &= \frac{c_3}{2A^{(1)}}(4L_3 - 1) = -\frac{2}{L}, \\ \frac{\partial N_5}{\partial y} &= \frac{2}{A^{(1)}}(L_2c_3 + L_3c_2) = \frac{8}{L}L_2, \\ \frac{\partial N_6}{\partial y} &= \frac{2}{A^{(1)}}(L_3c_1 + L_1c_3) = \frac{8}{L}L_1, \end{aligned} \quad (4.82)$$

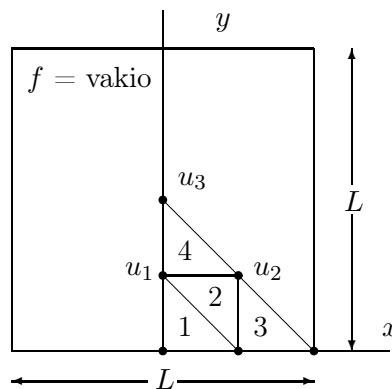
jossa on otettu huomioon että alakoordinaatti  $L_3$  saa arvon nolla pitkin reunaa 1. Interpolaatiofunktioiden  $L_1$  ja  $L_2$  lausekkeet reunalla 1 ovat

$$L_1 = 1 - 2\frac{x}{L}, \quad L_2 = 2\frac{x}{L}, \quad (4.83)$$

joten lämpövuon lauseke pitkin reunaviivaa 1 on

$$q_{n1} = \left[-\frac{3}{20} + \frac{9}{160}16x + \frac{7}{160}8(1-2x)\right] \bar{f}L = \frac{1}{5}(1+x)\bar{f}L. \quad (4.84)$$

**Esimerkki 4.2** Ratkaise elementtimenetelmällä lämmönjohtumisongelma neliöalueessa (sivun pituus  $L$ ) kun kuormituksena on tasa-antoinen lämmönlähde ( $f(x, y) = f = \text{vakio}$ ). Reunaehdot ovat homogeeniset, eli  $u = 0$  koko reunalla. Käytä hyväksesi symmetriaa oheisen kuvan mukaisesti ja ratkaise tehtävä käyttäen neljää lineaarista elementtiä. Määritä myös lämpövuon reunalla  $y = 0$ . Materiaali on isotrooppista ja sen lämmönjohtavuuskerroin on  $k$ .



Havaitaan, että elementtimatriisit elementeistä 1, 3 ja 4 ovat identtiset. Täten riittää muodostaa vain elementit 1 ja 2. Kolmioelementin lausekkeissa ovat  $b_i$  ja  $c_i$  vakiot

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3, & c_1 &= x_3 - x_2 \\ b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= x_1 - x_3 \\ b_3 &= y_1 - y_2, & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (4.85)$$

on määritetty alla olevaan taulukkoon

i	elementit 1,3,4		elementti 2	
	$b_i$	$c_i$	$b_i$	$c_i$
1	$-L/4$	$-L/4$	0	$-L/4$
2	$L/4$	0	$L/4$	$L/4$
3	0	$L/4$	$-L/4$	0

Kaikkien elementtien pinta-ala on  $A^{(e)} = L^2/32$  ja elementtimatriisit ovat seuraavat:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(1)} &= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(2)} &= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Elementtien paikallisten solmupisteiden ja kuvan globaalien solmunumeroiden välillä on seuraavan taulukon mukainen yhteys.

elem.	solmu		
	1	2	3
1	-	-	1
2	-	2	1
3	-	-	2
4	1	2	3

Taulukosta voidaan nyt lukea globaalin jäykkyysmatriisin elementtialkiot:

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_{33}^{(1)} + K_{33}^{(2)} + K_{11}^{(4)}, \\ K_{12} &= K_{32}^{(2)} + K_{12}^{(4)}, \\ K_{13} &= K_{13}^{(4)}, \\ K_{22} &= K_{22}^{(2)} + K_{33}^{(3)} + K_{22}^{(4)}, \\ K_{23} &= K_{23}^{(4)}, \\ K_{33} &= K_{33}^{(4)}, \end{aligned} \quad (4.88)$$

Globaali jäykkyysmatriisi on siten

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (4.89)$$

jonka käänteismatriisi on

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}. \quad (4.90)$$

Rakenteen kuormitusvektori on

$$\begin{aligned} f_1 &= f_3^{(1)} + f_3^{(2)} + f_1^{(4)} = 3 \cdot \frac{1}{3} f \frac{1}{32} L^2 = \frac{1}{32} f L^2, \\ f_2 &= \frac{1}{32} f L^2, \\ f_3 &= \frac{1}{96} f L^2. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Solmupisteiden lämpötiloiksi saadaan

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{11}{192} \frac{f L^2}{k} \approx 0.0573 \frac{f L^2}{k}, \\ u_2 &= \frac{17}{384} \frac{f L^2}{k} \approx 0.0443 \frac{f L^2}{k}, \\ u_3 &= \frac{5}{64} \frac{f L^2}{k} \approx 0.0781 \frac{f L^2}{k}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Keskipisteen tarkka ratkaisu on  $u_3 = 0.07367 f L^2 / k$ , joten virhe on noin 6 %.

Lämpövuon määrittämiseen Fourierin lämmönjohtumislain mukaan seuraavasti

$$\vec{q} = -k \nabla u. \quad (4.93)$$

Nyt kysyttiin lämpövuota reunalla 1-2, jonka normaalin suunta on negatiivisen  $y$ -akselin suunta, eli  $\vec{n} = -\vec{j}$ , joten lämpövuon reunalla 1-2 saadaan lausekkeesta

$$q_{n_{12}} = \vec{q} \cdot \vec{n} = k \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.94)$$

Elementissä 1 on lämpötilaratkaisu muotoa

$$u = N_3 u_1 = \frac{1}{2A} (a_3 + b_3 x + c_3 y) u_1, \quad (4.95)$$

joten

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{c_3}{2A} u_1 = \frac{L}{4} \frac{32}{2L^2} \frac{11}{192} \frac{f L^2}{k} = \frac{11}{48} \frac{f L}{k} = 0.2292 \frac{f L}{k}, \quad (4.96)$$

ja

$$\vec{q}_{n_{12}} = -\frac{11}{48} f L \vec{j}. \quad (4.97)$$

Vastaavasti elementille 3:

$$u = N_3 u_2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{c_3}{2A} u_2 = \frac{17}{96} \frac{f L}{k} = 0.1771 \frac{f L}{k}, \quad (4.98)$$

$$\vec{q}_{n_{12}} = -\frac{17}{96} f L \vec{j}. \quad (4.99)$$

Vuon on tietenkin vakio jokaisessa elementissä erikseen, koska kysymyksessä on lineaarinen kolmioelementti.

**Esimerkki 4.3** Määritä ja piirrä edellisen tehtävän lämpötilan tasa-arvokäyrät  $u_{max}/3$  ja  $2u_{max}/3$ , jossa  $u_{max}$  on keskipisteen lämpötila.

Lasketuista solmupistearvoista voidaan päätellä, että tasa-arvoviiva  $\frac{2}{3}u_3$  leikkaa elementit 1, 2 ja 4. Vastaavasti tasa-arvoviiva  $\frac{1}{3}u_3$  leikkaa elementit 1, 2 ja 3.

Käydään jokainen elementti lävitse. Aloitetaan elementistä 4. Interpolaatio on

$$u(x, y) = N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 + N_3(x, y)u_3, \quad (4.100)$$

jossa

$$N_i = L_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y). \quad (4.101)$$

Vakiot  $b_i$  ja  $c_i$  ovat jo määritetyt edellisessä tehtävässä. Vakiot  $a_i$  on määritettävä kussakin elementissä erikseen, sillä

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2, \\ a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3, \\ a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Elementissä 4 vakioiden arvot ovat  $a_1 = L^2/8$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = -L^2/16$ . Ratkaistavana on siis suora, joka toteuttaa

$$N_1 \frac{u_1}{u_3} + N_2 \frac{u_2}{u_3} + N_3 = \frac{u}{u_3}. \quad (4.103)$$

Sijoittamalla lukuarvot saadaan

$$\frac{2}{3} = N_1 \frac{11}{15} + N_2 \frac{17}{30} + N_3. \quad (4.104)$$

Elementissä 4 alakoordinaattien lausekkeet ovat

$$\begin{aligned} N_1 &= 16 \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \frac{x}{L} - \frac{1}{4} \frac{y}{L} \right) = 2 - 4\xi - 4\eta, \\ N_2 &= 16 \frac{1}{4} \frac{x}{L} = 4\xi, \\ N_3 &= 16 \left( -\frac{1}{16} + \frac{1}{4} \frac{y}{L} \right) = -1 + 4\eta, \end{aligned} \quad (4.105)$$

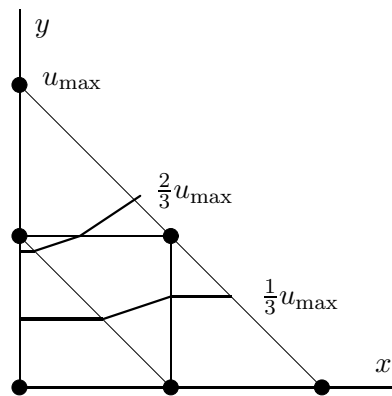
jossa on merkitty  $\xi = x/L$  ja  $\eta = y/L$ . Yhtälöstä (4.104) saadaan

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= (2 - 4\xi - 4\eta) \frac{11}{15} + 4\xi \frac{17}{30} + 4\eta - 1 \\ \Rightarrow 0 &= -10\xi + 16\eta - 3. \end{aligned} \quad (4.106)$$

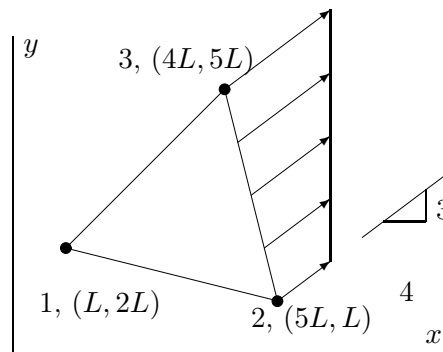
Ratkaistaan nyt yllä olevan suoran leikkauspisteet elementin 4 reunaviivojen  $\eta = \frac{1}{4}$  ja  $\eta = \frac{1}{2} - \xi$  kanssa. Saadaan ratkaisut

$$\xi = \frac{1}{10}, \quad \eta = \frac{1}{4}, \quad \text{ja} \quad \xi = \frac{5}{26} \approx 0.1923, \quad \eta = \frac{4}{13} \approx 0.3077. \quad (4.107)$$

Vastaavalla tavalla käydään muut elementit lävitse ja saadaan oheisen kuvan mukainen tasa-arvoviivasto.



**Esimerkki 4.4** Määritä oheisen lineaarisen tasolementin kuormitusvektori kun lämpövuoto muuttuu lineaarisesti arvosta  $q_1$  arvoon  $q_2$  reunalla 2 (solmuväli 2 – 3).



Kuvion perusteella vuovektori reunalla 2 on

$$\vec{q}_1 = q_1 \left( \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \right), \quad \text{solmussa 1,} \quad (4.108)$$

$$\vec{q}_2 = q_2 \left( \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \right), \quad \text{solmussa 2,} \quad (4.109)$$

ja reunan 2 normaalivektori on

$$\vec{n}_2 = \frac{4}{\sqrt{17}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{j}. \quad (4.110)$$

Vuon normaalikomponentit reunan 2 alku ja loppupisteessä 1 ja 2 ovat

$$q_{1n} = \vec{q}_1 \cdot \vec{n}_2 = \frac{1}{5} \frac{19}{\sqrt{17}} q_1, \quad q_{2n} = \vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2 = \frac{1}{5} \frac{19}{\sqrt{17}} q_2. \quad (4.111)$$

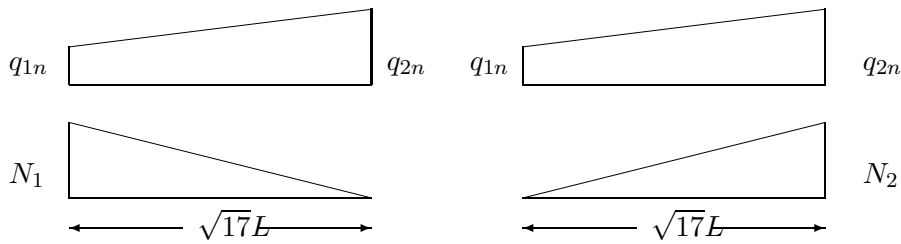
Elementin kuormitusvektorin komponentit ovat

$$f_i = - \int_{S_2} \vec{q} \cdot \vec{n}_2 N_i ds. \quad (4.112)$$

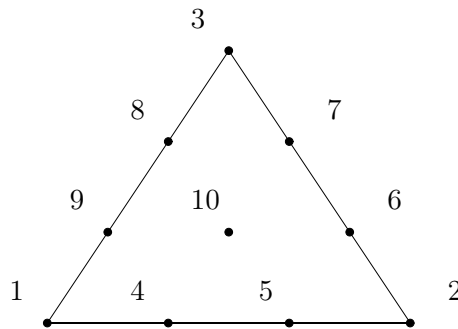
Solmua 1 vastaava termi on tietenkin nolla ja muut ovat (suoritetaan integrointi Simpsonin kaavalla):

$$f_2 = -\frac{1}{2} q_{1n} \sqrt{17} L - \frac{1}{6} (q_{2n} - q_{1n}) \sqrt{17} L = -\left( \frac{19}{30} q_2 + \frac{19}{15} q_1 \right) L, \quad (4.113)$$

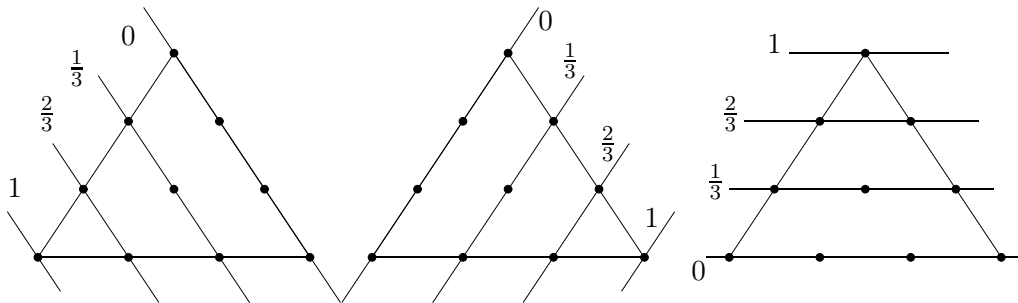
$$f_3 = -\frac{1}{2} q_{1n} \sqrt{17} L - \frac{1}{3} (q_{2n} - q_{1n}) \sqrt{17} L = -\left( \frac{16}{15} q_2 + \frac{8}{15} q_1 \right) L. \quad (4.114)$$



**Esimerkki 4.5** Määritä kuubisen elementin solmuihin sidotut interpolaatiofunktio  $N_1, N_4, N_5$  ja  $N_{10}$ .



Koordinaattien  $L_1, L_2$  ja  $L_3$  tasa-arvoviivat ovat seuraavanlaiset.



Interpolaatiofunktioilla on arvo  $N_i = 0$  kaikissa muissa salmuissa paitsi solmussa  $i$ .

Solmu 1: Etsitään kolme tasa-arvoviiva, jotka kulkevat kaikkien muiden, paitsi solmun 1, kautta.

$$\begin{aligned}
 L_1 &= 0, L_1 = \frac{1}{3}, L_1 = \frac{2}{3} \\
 \Rightarrow N_1 &= c_1 L_1 (L_1 - \frac{1}{3})(L_1 - \frac{2}{3}), \text{ ja sillä on arvo 1 solmussa 1, eli } N_1(1, 0, 0) = 1 \\
 \Rightarrow c_1 \cdot 1 \cdot (1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{2}{3}) &= 1 \Rightarrow c_1 = \frac{9}{2} \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_1 = \frac{9}{2} L_1 (L_1 - \frac{1}{3})(L_1 - \frac{2}{3}) \quad (4.16)$$

Solmu 4:

$$\begin{aligned}
 & L_1 = 0, L_1 = \frac{1}{3}, L_2 = 0 \\
 \Rightarrow & N_4 = c_4 L_1 (L_1 - \frac{1}{3}) L_2, N_4(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0) = 1 \Rightarrow c_4 = \frac{27}{2} \quad (4.117) \\
 \Rightarrow & N_4 = \frac{27}{2} L_1 (L_1 - \frac{1}{3}) L_2 \quad (4.118)
 \end{aligned}$$

Solmu 5:

$$\begin{aligned}
 & L_1 = 0, L_2 = 0, L_2 = \frac{1}{3} \\
 \Rightarrow & N_5 = c_5 L_1 L_2 (L_2 - \frac{1}{3}), N_5(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0) = 1 \Rightarrow c_5 = \frac{27}{2} \quad (4.119) \\
 \Rightarrow & N_5 = \frac{27}{2} L_1 L_2 (L_2 - \frac{1}{3}) \quad (4.120)
 \end{aligned}$$

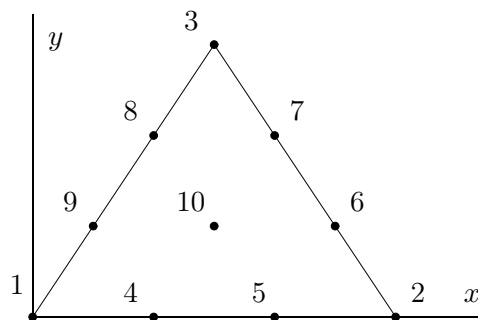
Solmu 10:

$$\begin{aligned}
 & L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = 0 \\
 \Rightarrow & N_{10} = c_{10} L_1 L_2 L_3, N_{10}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 1 \Rightarrow c_{10} = 27 \quad (4.121) \\
 \Rightarrow & N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3 \quad (4.122)
 \end{aligned}$$

#### Esimerkki 4.6 Ratkaisun stationäärinen lämmönsiirto-ongelma

$$-k(u_{,xx} + u_{,yy}) = f = \text{vakio}$$

tasasivuisessa kolmiossa homogeenisilla oleellisilla reunaehdoilla  $u = 0$ . Käytetään yhtä kuubista elementtiä ja määritetään myös lämpövuon lauseke reunalla 1-2. Kolmion sivun pituus on  $L$ .



Käyttämällä yhtä kuubista elementtiä on ratkaistavana vain yksi tuntematon,  $u_{10}$ , joka voidaan ratkaista yhtälöstä

$$K_{10,10} u_{10} = f_{10}, \quad (4.123)$$



jossa

$$K_{10,10} = k \int_A (N_{10,x}N_{10,x} + N_{10,y}N_{10,y}) dA, \quad (4.124)$$

ja edellisen esimerkin mukaan on solmuun 10 liittyvä interpolaatiofunktio:  $N_{10} = 27L_1L_2L_3$ . Lasketaan tarvittavat derivaatat:

$$\begin{aligned} N_{10,x} &= 27 \left( \frac{\partial L_1}{\partial x} L_2L_3 + \frac{\partial L_2}{\partial x} L_1L_3 + \frac{\partial L_3}{\partial x} L_1L_2 \right) \\ &= \frac{27}{2A} (b_1L_2L_3 + b_2L_1L_3 + b_3L_1L_2) \\ N_{10,y} &= \frac{27}{2A} (c_1L_2L_3 + c_2L_1L_3 + c_3L_1L_2). \end{aligned} \quad (4.125)$$

Kerroinmatriisin alkioille saadaan lauseke

$$\begin{aligned} K_{10,10} &= \left( \frac{27}{2A} \right)^2 k \int_A [(b_1L_2L_3 + b_2L_1L_3 + b_3L_1L_2)^2 \\ &\quad + (c_1L_2L_3 + c_2L_1L_3 + c_3L_1L_2)^2] dA \\ &= \left( \frac{27}{2A} \right)^2 k \int_A (b_1^2L_2^2L_3^2 + b_2^2L_1^2L_3^2 + b_3^2L_1^2L_2^2 + 2b_1b_2L_1L_2L_3^2 \\ &\quad + 2b_1b_3L_1L_2^2L_3 + 2b_2b_3L_1^2L_2L_3 + \text{c-termit}) dA, \end{aligned} \quad (4.126)$$

$$\begin{aligned} &\text{käytetään kaavaa } \int_A L_1^i L_2^j L_3^k dA = \frac{2A^{(e)} i!j!k!}{(2+i+j+k)!}, \quad 0! = 1 \\ &= k \frac{27^2}{2A} \left( b_1^2 \frac{2!2!}{6!} + b_2^2 \frac{4}{6!} + b_3^2 \frac{4}{6!} + 2b_1b_2 \frac{2}{6!} + \dots \right) \\ &= k \frac{27^2}{2A} [(b_1^2 + c_1^2) + (b_2^2 + c_2^2) + (b_3^2 + c_3^2) \\ &\quad + b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 + c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3] \frac{4}{6!} \\ &= \frac{81}{40} \frac{k}{A} (b_1^2 + c_1^2 + b_2^2 + c_2^2 + b_3^2 + c_3^2 + b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 + c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3). \end{aligned} \quad (4.127)$$

Kuormatermiksi saadaan

$$f_{10} = \int_A f 27L_1L_2L_3 dA = 54Af \frac{1}{5!} = \frac{9}{20} fA. \quad (4.128)$$

Lasketaan kertoimet ja elementin pinta-ala:

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}L & c_1 &= x_3 - x_2 = -\frac{L}{2} \\ b_2 &= y_3 - y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}L & c_2 &= x_1 - x_3 = -\frac{L}{2} \\ b_3 &= y_1 - y_2 = 0 & c_3 &= x_2 - x_1 = L \\ A &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} L^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 \end{aligned} \quad (4.129)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow K_{10,10} &= \frac{81}{40} \frac{4}{\sqrt{3}} \left[ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] k \\ &= \frac{243}{20\sqrt{3}} k\end{aligned}\quad (4.130)$$

Ratkaisu yhtälö on siten

$$\Rightarrow \frac{243}{20\sqrt{3}} k u_{10} = \frac{9\sqrt{3}}{80} L^2 f, \quad \text{jonka ratkaisu on } u_{10} = \frac{1}{36} \frac{f L^2}{k}. \quad (4.131)$$

Lämpötilajakauma elementin alueella on siten:  $u = N_{10} u_{10} = 27 L_1 L_2 L_3 u_{10}$ . Lämpövuon lauseke on  $\vec{q} = -k \nabla u = -k(u_{,x} \vec{i} + u_{,y} \vec{j})$ . Lämpövuon normaali-komponentti on  $q_n = \vec{q} \cdot \vec{n}$ . Reunalla 1-2 on  $\vec{n} = -\vec{j}$  ja  $L_3 = 0$ , siten

$$\begin{aligned}q_n &= k u_{,y} = k u_{10} 27 \left( \frac{\partial L_1}{\partial y} L_2 L_3 + \frac{\partial L_2}{\partial y} L_1 L_3 + \frac{\partial L_3}{\partial y} L_1 L_2 \right) \\ &= k u_{10} 27 L_1 L_2 \frac{\partial L_3}{\partial y} = 27 k u_{10} \frac{c_3}{2A} L_1 L_2 = \frac{3}{2\sqrt{3}} f L L_1 L_2.\end{aligned}\quad (4.132)$$

Koska  $L_1 = 1 - x/L$  ja  $L_2 = x/L$  lämpövuon normaalikomponentin lausekkeeksi saadaan

$$q_n = \frac{3}{2\sqrt{3}} \bar{f} L \frac{x}{L} \left( 1 - \frac{x}{L} \right). \quad (4.133)$$

**Esimerkki 4.7** *Ratkaise massiivipoikkileikkauksisen sauvan vääntöjäyhyys siirtymämenetelmällä De Saint-Venantin vapaan väännön teorian mukaisesti.*

De Saint-Venant otaksui siirtymätilan olevan muotoa

$$\begin{aligned}u &= -y\phi = -yz\theta, \\ v &= x\phi = xz\theta, \\ w &= \theta\psi(x, y),\end{aligned}\quad (4.134)$$

missä  $\phi$  on vääntökulma,  $\theta = d\phi/dz$  vääntymä ja  $\psi(x, y)$  poikkileikkauksen käyritymäfunktio. Sauvan akselin  $z$  suuntaisen tasapainoehdon

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \quad (4.135)$$

perusteella saadaan soveltamalla Hooken lakia

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = G\theta(\psi_{,x} - y), \quad (4.136)$$

$$\tau_{zy} = G\gamma_{zy} = G\theta(\psi_{,y} + x). \quad (4.137)$$

Täten saadaan Laplacen yhtälö käyritymäfunktiolle:

$$\psi_{,xx} + \psi_{,yy} = 0. \quad (4.138)$$

Jos sauvan reunalla ei ole kuormitusta, niin reunaehto on

$$\tau_n = \tau_{zn}n_x + \tau_{zy}n_y = 0, \quad (4.139)$$

missä  $n_x$  ja  $n_y$  ovat reunan normaalivektorin komponentit. Lausumalla jännityskomponentit siirtymien avulla reunaehto saadaan muotoon

$$(\psi_{,x} - y)n_x + (\psi_{,y} + x)n_y = 0. \quad (4.140)$$

Suoritetaan vääntöprobleeman likiratkaisu Galerkinin keinolla minimoimalla potentiaalienergian funktionaali

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A G(\gamma_{zx}^2 + \gamma_{zy}^2) dA = \frac{1}{2} \int_A G[(\psi_{,x} - y)^2 + (\psi_{,y} + x)^2] dA. \quad (4.141)$$

Minimin välttämätön ehto on

$$\delta\Pi = \int_A G[(\psi_{,x} - y)\delta\psi_{,x} + (\psi_{,y} + x)\delta\psi_{,y}] dA = 0, \quad (4.142)$$

eli

$$\int_A G(\psi_{,x}\delta\psi_{,x} + \psi_{,y}\delta\psi_{,y}) dA + \int_A G(-y\delta\psi_{,x} + x\delta\psi_{,y}) dA = 0, \quad (4.143)$$

missä toinen termi saadaan osittaisintegroimalla muotoon

$$\begin{aligned} \int_A G(-y\delta\psi_{,x} + x\delta\psi_{,y}) dA &= \int_A G[(-y\delta\psi)_{,x} + (x\delta\psi)_{,y}] dA \\ &= \int_{\partial A} G(-yn_x + xn_y) \delta\psi ds. \end{aligned} \quad (4.144)$$

Sijoittamalla interpolaatio  $\psi(x, y) = \sum N_i(x, y)\psi_i$  saadaan elementin jäykkymatriisiin alkioksi lauseke

$$K_{ij} = \int_A G(N_{i,x}N_{j,x} + N_{i,y}N_{j,y}) dA. \quad (4.145)$$

Vastaavasti kuormavektorin lauseke on

$$f_i = \int_{\partial A} G(yn_x - xn_y) N_i ds. \quad (4.146)$$

Huomaa, että yhtälön (4.138) reunaehdot (4.139) ovat luonnolliset. Mikäli käyristymäfunktion arvoa ei sidota, on globaali jäykkymatriisi singulaarinen ja käyristymäfunktion arvo on vakiota vaille yksikäsitteisesti määrätty. Singulaarisen systeemin käsittelyltä välttytään, mikäli käyristymäfunktion arvo sidotaan jossain poikkileikkauksen pisteessä.

Vääntöjäyhyys  $I_t$  voidaan laskea yhtälöstä

$$\begin{aligned} I_t &= \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} + x \right)^2 \right] dA \\ &= \int_{\Omega} \left( x^2 + y^2 + x \frac{\partial\psi}{\partial y} - y \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) dA = I_p - \sum_i \psi_i f_i. \end{aligned} \quad (4.147)$$

## 4.6 Nelikulmioelementtejä

### 4.6.1 Elementtiperheet

Nelikulmioelementit tarjoavat vielä kolmioelementtejäkin yksinkertaisemman tavan konstruoida interpolaatiofunktioita. Tarkastellaan vain  $C_0$ -jatkuvia elementtejä. Tässä luvussa käsitellään myös geometrian parametrissa kuvaamista interpolaatiofunktioiden avulla. Näin voidaan helposti mallintaa geometrisesti monimutkaisia alueita. Tällaisten elementtien jäykkyysmatriisiin ja kuormavektorin analyttinen muodostaminen ei aina ole mahdollista, vaan joudutaan käyttämään numeerista integrointia, joten myös yleisimmät käytössä olevat numeeriset integrointimenetelmät esitellään.

Tarkastellaan interpolaatiopolynomeja ns. perusneliössä, joka määritellään luonnollisten koordinaattien  $\xi$  ja  $\eta$  avulla seuraavasti:  $(\xi, \eta) \in (-1, 1) \times (-1, 1)$ . Yksinkertaisin tapa konstruoida kaksidimensioisia interpolaatiofunktioita on käyttää suoraan yksidimensioisia Lagrangen polynomeja tulomuodossa eli

$$N_i(\xi, \eta) = l_a^{p_1}(\xi)l_b^{p_2}(\eta), \quad (4.148)$$

jossa  $p_1$  ja  $p_2$  ovat interpolaation asteet  $\xi$  ja  $\eta$  suunnissa. Mikäli interpolaation aste on sama kummassakin suunnassa ( $p_1 = p_2 = p$ ), pitää Lagrangen tyyppinen elementti sisällään kaikki termit, joissa toisen tekijän asteluku on pienempi tai yhtäsuuri kuin  $p$ . Kaksidimensioiseen Lagrangen interpolaatioon tulevat termit on piirretty Pascalin<sup>2</sup> kolmioon kuvassa 4.7, ja elementin solmukonfiguraatioita on esitetty kuvassa 4.9.

Havaitaan, että interpolaation asteen kasvaessa elementtien sisäisten solmujen määrä kasvaa merkittävästi. Tätä on usein pidetty Lagrangen elementtien haittana, koska tällöin myös vapausastemäärä tarpeettomasti kasvaa, sillä approksimaatio-teoreettiselta kannalta Lagrangen elementissä on ‘turhia’ vapausasteita. Elementin tarkkuusominaisuudet pysyvät kertaluokalleen samoina, kun mukana ovat kaikki astetta  $p$  olevat polynomit. Lisätermit, jotka ovat esimerkiksi astetta  $p$  kummankin koordinaatin suhteen, eivät siten vaikuta ratkaisevasti elementin approksimaatioominaisuuksiin. Näillä termeillä on kuitenkin suuri merkitys elementin käyttäytymiseen, kun tarkastellaan ns. isoparametrisia elementtejä, joten ei ole syytä unohtaa Lagrangen elementtejä kahdessa (tai kolmessa) dimensiossa.

On mahdollista konstruoida elementtiperhe, jossa on vähemmän vapausasteita kuin vastaavissa Lagrangen elementeissä ja jonka interpolaatiofunktioit sisältävät täydellisen astetta  $p$  olevan polynomin kahdessa dimensiossa. Tämä elementtiperhe kulkee nimellä Serendipity. Siinä kanta konstruoidaan polynomeista, jotka ovat vähintään astetta  $p$  ja jota täydennetään polynomeilla, jotka ovat muotoa  $\xi^p\eta$  ja  $\xi\eta^p$ . Tällainen kanta on piirretty kuvaan 4.8 ja elementtien solmukonfiguraatioita kuvaan 4.10.

<sup>2</sup> Blaise Pascal (1632–1662): ranskalainen filosofi, fyysikko, matemaatikko ja kirjailija. 1654 Pascal kävi läpi vaikean henkisen kriisin jonka jälkeen hän keskittyi uskonnollisiin kysymyksiin.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & \xi & & \eta \\
 & & & \xi^2 & \xi\eta & & \eta^2 \\
 & & \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & & \eta^3 \\
 \xi^4 & & \xi^3\eta & \xi^2\eta^2 & \xi\eta^3 & & \eta^4 \\
 & \xi^4\eta & \xi^3\eta^2 & \xi^2\eta^3 & \xi\eta^4 & & \\
 & & \xi^4\eta^2 & \xi^3\eta^3 & \xi^2\eta^4 & & \\
 & & & \xi^4\eta^3 & \xi^3\eta^4 & & \\
 & & & & \xi^4\eta^4 & & 
 \end{array}$$

**Kuva 4.7** Lagrangen interpolaatio asteeseen neljä saakka.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & \xi & & \eta \\
 & & & \xi^2 & \xi\eta & & \eta^2 \\
 & & \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & & \eta^3 \\
 \xi^4 & & \xi^3\eta & \xi^2\eta^2 & \xi\eta^3 & & \eta^4 \\
 & \xi^4\eta & & & & & \xi\eta^4
 \end{array}$$

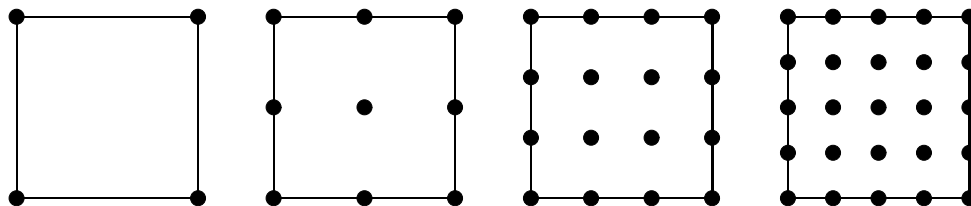
**Kuva 4.8** Serendipity interpolaatio asteeseen neljä saakka.

#### 4.6.2 Parametrinen kuvaus

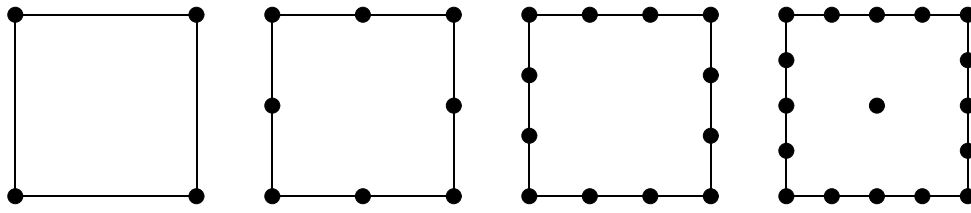
Tähän asti on elementtien geometria otaksuttu joko suorista sivuista koostuviksi kolmioksi tai nelikulmioksi. Geometriaa voidaan myös interpoloida kuten itse ratkaistavaa funktiota. Mikäli elementissä on  $m$  solmua, voidaan yksinkertaisesti kirjoittaa kaksidimensioisessa alueessa

$$x = \sum_{i=1}^m N_i^*(\xi, \eta)x_i, \quad y = \sum_{i=1}^m N_i^*(\xi, \eta)y_i, \quad (4.149)$$

jossa  $x_i$  ja  $y_i$  ovat elementin solmujen koordinaatit. Interpolaatiofunktioita  $N_i^*$  voidaan hyvällä syyllä kutsua muotofunktioiksi. Mikäli muotofunktiot  $N_i^*$  ovat identtiset ratkaistavan funktion (tai funktioiden) interpolaatiossa käytettyjen funktioiden kanssa, käytetään elementistä nimitystä *isoparametrinen*. Mikäli elementin geometriaa kuvataan muotofunktioilla, jotka ovat matalampaa astetta kuin itse ratkaista-



**Kuva 4.9** Lagrangen nelikulmioelementtien solmukonfiguraatioita.



**Kuva 4.10** Serendipity-nelikulmioelementtien solmukonfiguraatioita.

van suureen interpolaatiopolynomit, on elementti *aliparametrinen* (engl. subparametric). Vastaavasti käytetään nimitystä *yliparametrinen* (engl. superparametric), mikäli geometriaa kuvataan tarkemmin kuin itse ratkaistavia suureita.

Isoparametrinen elementtien käyttökelpoisuudesta ja suosioista johtuen käytetään termiä muotofunktio yleisesti myös itse ratkaistavana olevan funktion interpolaatiofunktioista.

Tarkastellaan ensin asian havainnollistamiseksi yksinkertaista parabolista janaelementtiä. Peruselementti on jana  $\xi$ -koordinaatistossa välillä  $(-1, 1)$ . Merkitään elementin koordinaatteja globaalissa  $x$ -koordinaatistossa  $x_1, x_2$  ja  $x_3$  (3=keskisolmu). Elementin geometrian kuvaus on siten

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi)x_i = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)x_1 + \frac{1}{2}\xi(1+\xi)x_2 + (1-\xi^2)x_3. \quad (4.150)$$

Elementin jäykkymatriisiin ja kuormavektorin integrointia varten tarvitaan derivaatan lausekkeita  $x$ -koordinaatin suhteen:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-1} \frac{d}{d\xi} = J^{-1} \frac{d}{d\xi}, \quad (4.151)$$

jossa  $J$  on kuvauksen (4.150) mittakaavatekijä. Jotta kuvaus olisi yksikäsitteinen ja säilyttäisi suuntaisuuden, on mittakaavatekijän oltava aina positiivinen

$$J > 0. \quad (4.152)$$

Tämä ehto asettaa rajoituksia elementin solmujen sijoitteluun eli siis keskisolmun sijaintiin päätesolmuihin nähden.

**Esimerkki 4.8** Tutki parabolisen isoparametrisen janaelementin keskisolmun sijainnin sallittua aluetta.



Yleisyyttä menettämättä voidaan tutkia tilannetta, jossa elementin päätesolmuilla on arvot  $x_1 = 0$  ja  $x_2 = L$ . Geometrian kuvaus on siten lausuttavissa kaavalla

$$x = N_2 L + N_3 x_3, \quad (4.153)$$

ja ehto kuvauksen yksikäsitteisyydelle on

$$J = \frac{dx}{d\xi} = N_{2,\xi}L + N_{3,\xi}x_3 = \left(\frac{1}{2} + \xi\right)L - 2\xi x_3 > 0, \quad (4.154)$$

josta seuraa

$$2\xi x_3 < \left(\frac{1}{2} + \xi\right)L. \quad (4.155)$$

Tutkitaan erikseen tapaukset  $\xi > 0$  ja  $\xi < 0$ , jolloin saadaan epäyhtälöt

$$x_3 < \frac{\frac{1}{2} + \xi}{2\xi}L = f(\xi)L, \quad (4.156)$$

$$x_3 > \frac{\frac{1}{2} + \xi}{2\xi}L = f(\xi)L. \quad (4.157)$$

Funktion  $f(\xi)$  derivaatta on aina negatiivinen, joten  $f$  on monotonisesti laskeva funktio. Täten pätee

$$x_3 < f(1)L < f(\xi)L, \quad f(1)L = \frac{3}{4}L, \quad (4.158)$$

$$x_3 > f(-1)L > f(\xi)L, \quad f(-1)L = \frac{1}{4}L. \quad (4.159)$$

Elementin keskisolmu ei siten saa sijaita elementin reunaneljännesten alueella.

### 4.6.3 Bilineaarinen interpolaatio

Lagrangen ja Serendipity-tyyppisten elementtiperheiden alimman asteen jäsen on bilineaarisesti interpoloitu elementti. Siinä kantafunktioina ovat  $1, \xi, \eta$  ja  $\xi\eta$ . Interpolaatiofunktiot ovat siten

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad (4.160a)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \quad (4.160b)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad (4.160c)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta), \quad (4.160d)$$

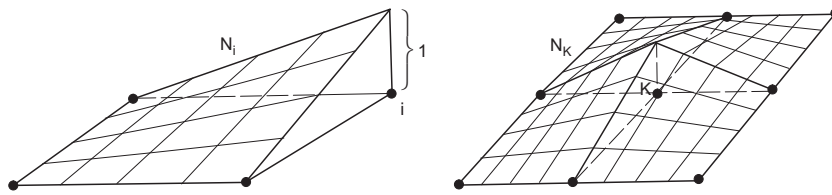
jotka voidaan kirjoittaa lyhyesti yleisessä muodossa

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta), \quad (4.161)$$

jossa  $\xi_i$  ja  $\eta_i$  ovat peruselementin solmun  $i$  koordinaatit. Elementin interpolaatiofunktio  $N_1$  on esitetty kuvassa 4.11.

Mikäli myös elementin geometriaa interpoloidaan funktioilla (4.161), on tuloksena isoparametrinen bilineaarinen elementti. Kuvauksen munnosmatriisi saadaan, kun tarkastellaan funktion

$$u(x, y) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \quad (4.162)$$



**Kuva 4.11** Lineaarinen interpolaatio tasoalueessa.

derivaattojen lausekkeita peruselementin koordinaattien  $\xi$  ja  $\eta$  suhteen:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (4.163)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad (4.164)$$

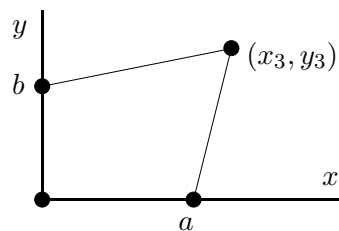
joka voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} \quad \text{eli} \quad \mathbf{u}_{,\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J}^T \mathbf{u}_{,x}, \quad (4.165)$$

jossa  $\mathbf{J}$  on geometriakuvauksen Jacobin matriisi.<sup>3</sup> Jotta kuvaus olisi yksikäsitteinen, on Jacobin matriisin determinantin oltava nollasta eroava ja jotta kuvaus säilyttäisi suuntaisuutensa on sen oltava positiivinen, eli vaaditaan

$$\det \mathbf{J} = J > 0. \quad (4.166)$$

**Esimerkki 4.9** Tutki oheisen bilineaarisen isoparametrisen elementin solmun 3 sijainnin sallittua aluetta.



Elementin geometrian kuvaus kaavoja (4.160a) käyttäen on

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i = N_2 a + N_3 x_3 \\ &= \frac{1}{4}(1 + \xi) [(1 - \eta)a + (1 + \eta)x_3], \end{aligned} \quad (4.167)$$

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i = N_3 y_3 + N_4 b \\ &= \frac{1}{4}(1 + \eta) [(1 + \xi)y_3 + (1 - \xi)b]. \end{aligned} \quad (4.168)$$

<sup>3</sup>Monissa elementimenetelmää käsittelevissä kirjoissa kutsutaan  $\mathbf{J}$ :n transpoosia parametrisen kuvauksen Jacobin matriisiksi. Tässä esityksessä noudatetaan kuitenkin yleisempää käytäntöä, missä kuvauksen  $x_i = f_i(y_j)$  Jacobin matriisi määritellään  $J_{ij} = \partial f_i / \partial y_j$ .



Mittakaavatekijän muodostamista varten tarvitaan derivaattojen lausekkeet, jotka ovat

$$x_{,\xi} = \frac{1}{4}[(1 - \eta)a + (1 + \eta)x_3], \quad (4.169a)$$

$$y_{,\xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta)(y_3 - b), \quad (4.169b)$$

$$x_{,\eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(x_3 - a), \quad (4.169c)$$

$$y_{,\eta} = \frac{1}{4}[(1 + \xi)y_3 + (1 - \xi)b], \quad (4.169d)$$

Ehto kuvauksen yksikäsitteisyydelle on

$$\det \mathbf{J} = x_{,\xi}y_{,\eta} - y_{,\xi}x_{,\eta} > 0, \quad (4.170)$$

josta seuraa epäyhtälö

$$(1 + \xi)ay_3 + (1 + \eta)bx_3 - (\xi + \eta)ab > 0. \quad (4.171)$$

Yhtälö

$$(1 + \xi)ay_3 + (1 + \eta)bx_3 - (\xi + \eta)ab = 0 \quad (4.172)$$

esittää laskevaa suoraa, joka leikkaa koordinaattiakselit pisteissä

$$x_3 = 0, \quad y_3 = \frac{\xi + \eta}{1 + \xi}b = f_1(\xi, \eta)b, \quad (4.173)$$

$$y_3 = 0, \quad x_3 = \frac{\xi + \eta}{1 + \eta}a = f_2(\xi, \eta)a. \quad (4.174)$$

Ehdon (4.171) nojalla on oltava voimassa

$$y_3 > f_1(\xi, \eta)b \quad \text{kun} \quad x_3 = 0, \quad (4.175)$$

$$x_3 > f_2(\xi, \eta)a \quad \text{kun} \quad y_3 = 0. \quad (4.176)$$

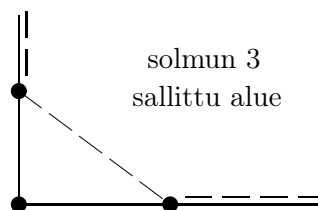
Funktioiden  $f_1$  ja  $f_2$  maksimiarvot ovat 1, kun  $(\xi, \eta) \in (-1, 1) \times (-1, 1)$ , ja koska ehto (4.171) määrittelee suoran, on solmun 3 sallittu alue määriteltävissä epäyhtälöillä

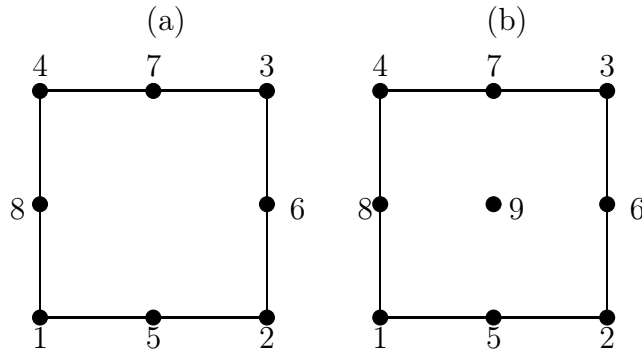
$$y_3 > b \quad \text{kun} \quad x_3 = 0, \quad (4.177)$$

$$x_3 > a \quad \text{kun} \quad y_3 = 0, \quad (4.178)$$

$$y_3 > b - \frac{b}{a}x_3 \quad \text{kun} \quad 0 < x_3 < a. \quad (4.179)$$

Solmun 3 on sijaittava siten, että kuvanelikulmio on konvekksi, ts. siinä ei ole sisäänpistäviä kulmia. Sallittu alue on piirretty alla olevaan kuvaan.





**Kuva 4.12** Kvadraattisten elementtien solmunumerointi: (a) Serendipity, (b) Lagrange.

#### 4.6.4 Bikvadraattinen ja korkeamman asteen interpolaatio

Kvadraattisia elementtejä ovat bikvadraattinen 9-solmuinen Lagrangen elementti ja 8-solmuinen Serendipity eli ns. supistettu bikvadraattinen elementti. Numeroidaan elementin solmut kuvan 4.12 mukaisesti. Lagrangen elementin interpolaatiofunktiot ovat siten

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi - 1)\eta(\eta - 1), \quad (4.180a)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi + 1)\eta(\eta - 1), \quad (4.180b)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi + 1)\eta(\eta + 1), \quad (4.180c)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi - 1)\eta(\eta + 1), \quad (4.180d)$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)\eta(\eta - 1), \quad (4.180e)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)(1 - \eta^2), \quad (4.180f)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)\eta(\eta + 1), \quad (4.180g)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)(1 - \eta^2), \quad (4.180h)$$

$$N_9(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2), \quad (4.180i)$$

joista muutamia on esitetty kuvassa 4.13.

Supistettu bikvadraattinen eli 8-solmuinen elementti muodostetaan helpoimmin seuraavasti. Lähtökohtana on havainto, että sivusolmuille 5-8 voidaan ottaa Lagrangen tyyppinen interpolaatio, joka on solmun sivun suunnassa kvadraattinen ja sivua vastaan kohtisuorassa suunnassa lineaarinen

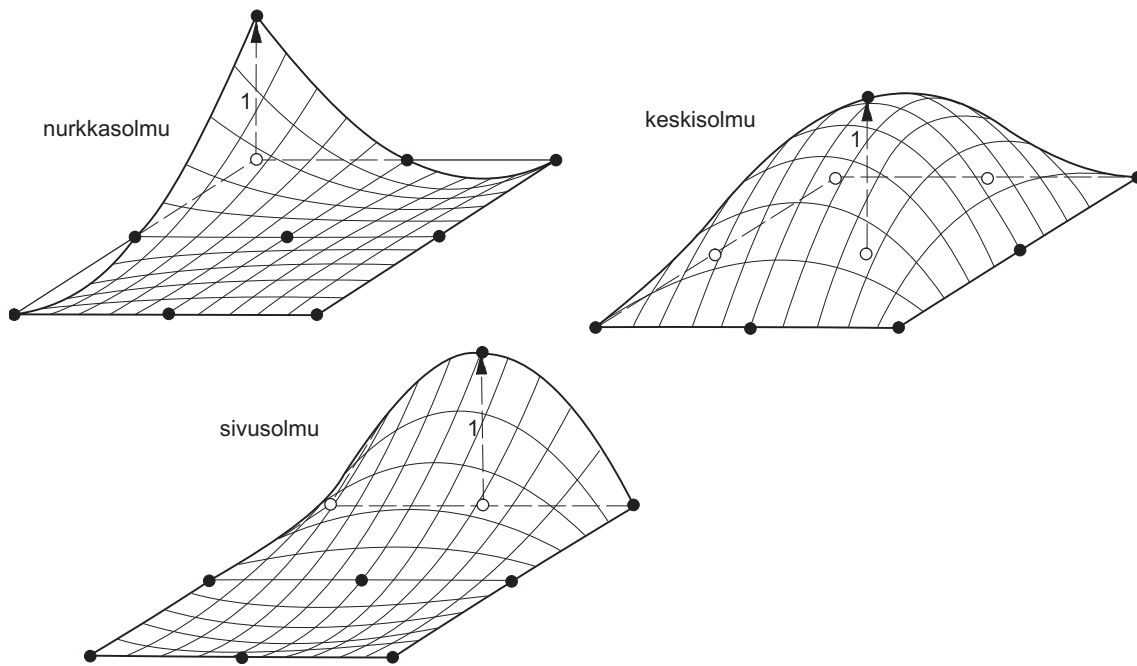
$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta), \quad (4.181)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2), \quad (4.182)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta), \quad (4.183)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2). \quad (4.184)$$

Nurkkasolmuja 1-4 vastaavat interpolaatiofunktiot voidaan konstruoida bilineaarisista  $\hat{N}_i$  ja edellä esitetyistä interpolaatiofunktioista. Tutkitaan esimerkkinä solmun



**Kuva 4.13** Lagrangen bikvadraattisia interpolaatiofunktioita.

1 interpolaatiota. Bilineaarinen interpolaatio  $\hat{N}_1$  saa arvon  $\frac{1}{2}$  solmuissa 5 ja 8, joi-  
ta vastaavat funktiot (4.181a) ja (4.181d) saavat arvot 1. Mikäli nyt bilineaarisesta  
funktioista  $\hat{N}_1$  vähennetään sopivasti  $N_5$ :n ja  $N_8$ :n osuus, saadaan haluttu solmujen  
5 ja 8 interpolaation arvo:

$$N_1 = \hat{N}_1 - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8. \quad (4.185)$$

Näin saatu interpolaatiofunktio on piirretty kuvaan 4.14. Kvadraattisen Serendipity-  
elementin nurkkasolmuihin liittyviksi interpolaatiofunktioiksi saadaan yleisesti

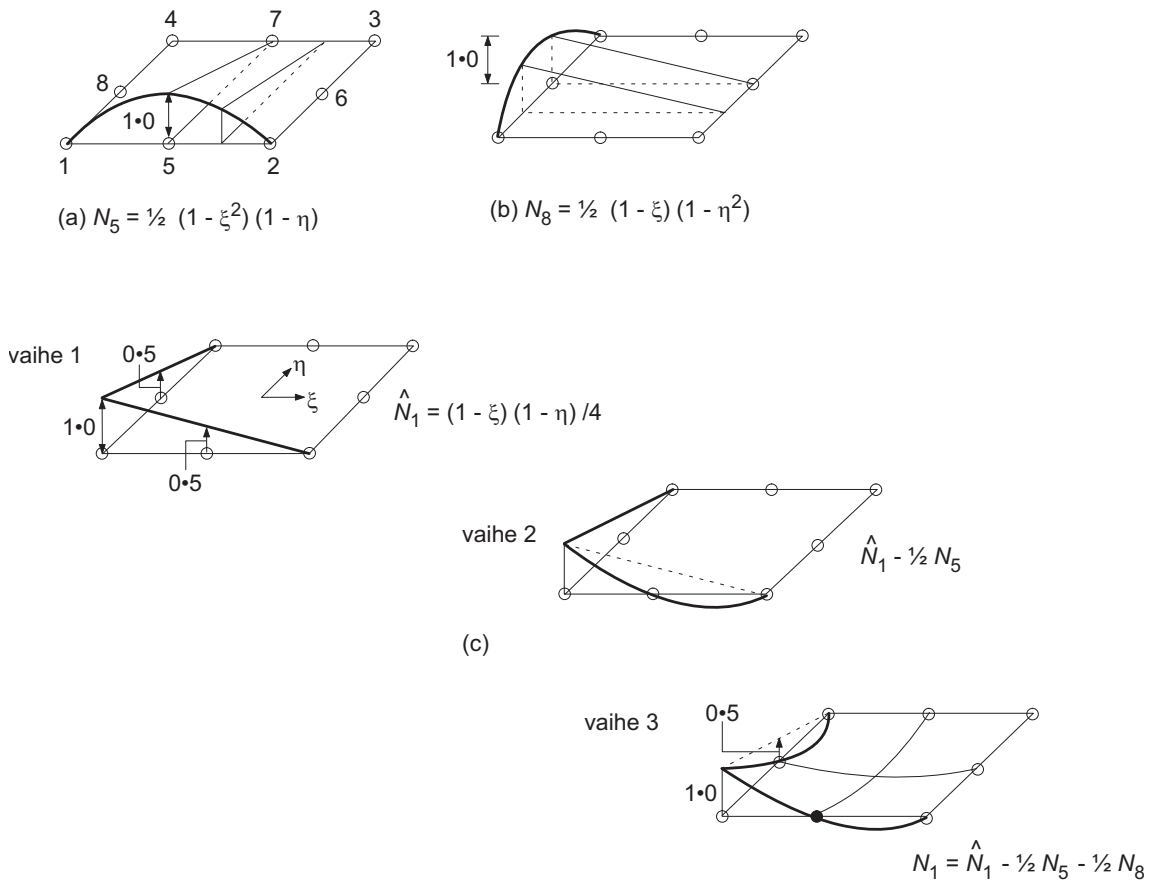
$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(\xi_i\xi + \eta_i\eta - 1), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (4.186)$$

Aivan vastaavalla tekniikalla voidaan muodostaa korkeamman asteen Serendipity-  
tyyppisiä interpolaatioita, esimerkiksi kuubiset interpolaatiofunktioita ovat:

$$N_i = \frac{1}{32}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta) [9(\xi^2 + \eta^2) - 10], \quad \text{kulmasolmuille,} \quad (4.187)$$

$$N_i = \frac{9}{32}(1 + \xi_i\xi)(1 - \eta^2)(1 + 9\eta_i\eta), \quad \text{sivusolmuille } \xi_i \pm 1 \text{ ja } \eta_i = \pm \frac{1}{3}, \quad (4.188)$$

ja muita sivusolmuja vastaavat interpolaatiot saadaan vaihtamalla muuttujia. Nel-  
jännen asteen Serendipity-interpolaatioon tulee polynomin täydellisyysvaatimuksen  
takia mukaan yksi keskisolmu. Tähän keskisolmuun liittyvä interpolaatioksi voidaan  
asettaa  $(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$ , joka on nolla elementin reunoilla.



**Kuva 4.14** Serendipity-tyyppisen elementin interpolaatiofunktion  $N_1$  muodostaminen.

## 4.7 Elementtimatriisien muodostaminen

Elementin jäykkymatriisi on yleisessä muodossa kirjoitettuna

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega. \quad (4.189)$$

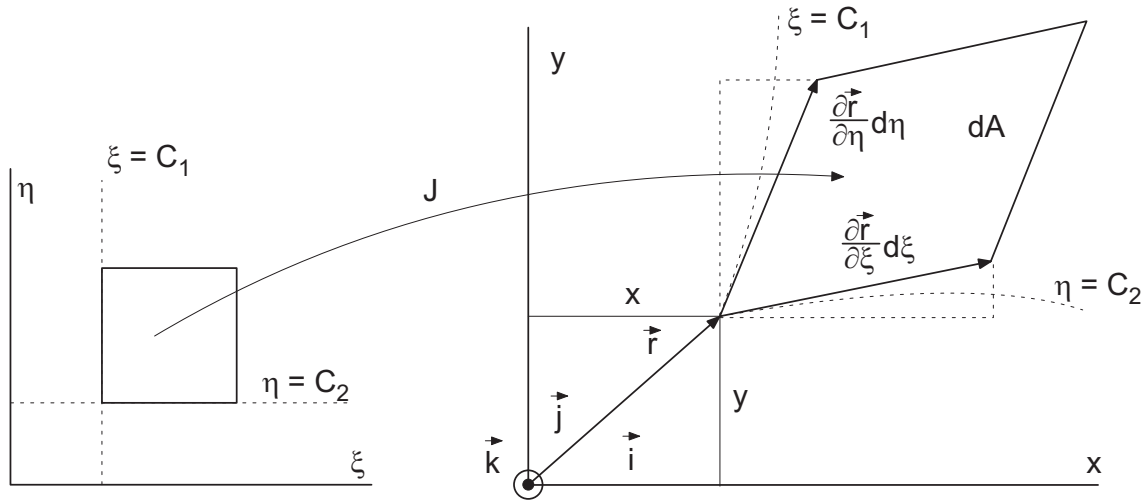
Kahdessa dimensiossa integrointi suoritetaan alan yli, joten  $d\Omega = dA$ . Parametrisen kuvauksen välityksellä integrointi elementin alan  $\Omega^{(e)}$  yli suoritetaan perusneliössä  $(\xi, \eta) \in (-1, 1) \times (-1, 1)$ , jolloin (4.189) muuntuu muotoon

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} J d\xi d\eta, \quad (4.190)$$

jossa  $J$  on geometriakuvauksen Jacobin matriisin determinantti eli mittakaavatekijä.

Johdetaan seuraavaksi  $(\xi, \eta)$ -tason alkion  $d\xi d\eta$  ja  $(x, y)$ -tason alkion  $dA$  välinen muunnoskaava

$$dA = \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta = J d\xi d\eta. \quad (4.191)$$



**Kuva 4.15** Parametrinen kuvaus.

Tarkastellaan kuvan 4.15 kuvausta  $(\xi, \eta)$ -tasosta  $(x, y)$ -tasoon. Suora  $\xi = C_1 = \text{vakio}$  kuvautuu  $(x, y)$ -tason käyräksi  $\xi = C_1$  ja vastaavasti suora  $\eta = C_2$  kuvautuu käyräksi. Alkioiden  $dx, dy$  ja  $d\xi, d\eta$  välinen yhteys on ketjusäännön nojalla

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad (4.192)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta, \quad (4.193)$$

eli

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad (4.194)$$

Merkitään  $(x, y)$ -tason paikkavektoria OP

$$\mathbf{r} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad (4.195)$$

missä  $\vec{i}$  ja  $\vec{j}$  ovat koordinaattiakselien suuntaiset yksikkövektorit. Käyrien  $\xi = C_1$  ja  $\eta = C_2$  tangenttivektorit ovat

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} d\xi = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{j} \right) d\xi \quad (4.196)$$

$$\vec{b} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} d\eta = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{j} \right) d\eta \quad (4.197)$$

Pinta-ala-alkio  $dA$  muodostetaan vektoritulona

$$dA = |\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{k}, \quad (4.198)$$

missä  $\vec{k}$  on  $(x, y)$ -tasoa vastaan kohtisuora yksikkövektori. Kaavasta (4.198) seuraa

$$dA = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_{,\xi} & y_{,\xi} & 0 \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & 0 \end{vmatrix} d\xi d\eta = (x_{,\xi} y_{,\eta} - x_{,\eta} y_{,\xi}) d\xi d\eta, \quad (4.199)$$

eli

$$dA = \det \mathbf{J} d\xi d\eta = J d\xi d\eta. \quad (4.200)$$

**Esimerkki 4.10** Muodosta suorakaiteen muotoisen isoparametrisen bilineaarisen elementin jäykkymatriisi kvasiharmoniselle yhtälölle.

Geometrian interpolaatio on

$$x = (N_2 + N_3)a = \frac{1}{2}(1 + \xi)a, \quad y = (N_3 + N_4)b = \frac{1}{2}(1 + \eta)b. \quad (4.201)$$

Kuvauksen Jacobin matriisin transpoosi supistuu diagonaalimatriisiksi

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}b \end{bmatrix}, \quad (4.202)$$

jonka käänteismatriisi on yksinkertaisesti

$$(\mathbf{J}^T)^{-1} = \mathbf{J}^{-T} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b} \end{bmatrix}, \quad (4.203)$$

ja determinantti

$$J = \det \mathbf{J} = \frac{1}{4}ab. \quad (4.204)$$

Kvasiharmonisen yhtälön jäykkymatriisille on johdettu lauseke

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} (k_{xx} \mathbf{N}_{,x}^T \mathbf{N}_{,x} + k_{yy} \mathbf{N}_{,y}^T \mathbf{N}_{,y}) dA, \quad (4.205)$$

joka tässä tapauksessa muuntuu muotoon

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( k_{xx} \frac{4}{a^2} \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi} + k_{yy} \frac{4}{b^2} \mathbf{N}_{,\eta}^T \mathbf{N}_{,\eta} \right) \frac{1}{4} ab d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( k_{xx} \frac{b}{a} \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi} + k_{yy} \frac{a}{b} \mathbf{N}_{,\eta}^T \mathbf{N}_{,\eta} \right) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (4.206)$$

Elementtimatriisin yksittäinen alkio on siis

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( k_{xx} \frac{b}{a} N_{i,\xi} N_{j,\xi} + k_{yy} \frac{a}{b} N_{i,\eta} N_{j,\eta} \right) d\xi d\eta. \quad (4.207)$$

Suorittamalla integroinnit, päädytään lopputulokseen

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k_{xx}b}{6a} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{k_{yy}a}{6b} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.208)$$

**Esimerkki 4.11** Muodosta kvasiharmonisen yhtälön bilineaarisen isoparametrisen elementin alkion  $K_{11}^{(e)}$  lauseke yleisessä tapauksessa.

Elementin alkion 11 lauseke on

$$K_{11}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} (k_{xx} N_{1,x}^2 + k_{yy} N_{1,y}^2) dA. \quad (4.209)$$

Siirrytään peruselementin  $(\xi, \eta)$  koordinaatistoon, jolloin tarvitaan globaalien koordinaattiakselien suhteen ilmoitettujen derivaattojen lausekkeet ilmaistuna luonnollisten koordinaattien avulla, eli joudutaan kääntämään yhteys (4.165)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{x_{,\xi}y_{,\eta} - y_{,\xi}x_{,\eta}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.210)$$

jossa  $J_{ij}$ :t ovat Jacobin matriisin komponentit. Lauseke (4.209) saa siten muodon

$$K_{11}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ k_{xx} \left( \frac{J_{22}N_{1,\xi} - J_{21}N_{1,\eta}}{J} \right)^2 + k_{yy} \left( \frac{-J_{12}N_{1,\xi} + J_{11}N_{1,\eta}}{J} \right)^2 \right] J d\xi d\eta, \quad (4.211)$$

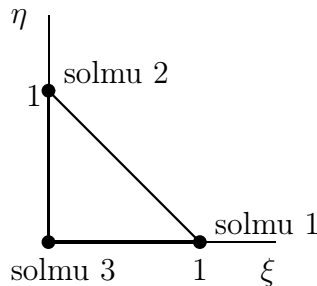
jossa  $J = \det \mathbf{J}$ . Yllä olevan kaltaiset isoparametrisen elementin jäykkyyssmatriisin alkiot integroidaan yleensä numeerisesti. Tähän seikkaan palataan myöhemmissä luvuissa.

## 4.8 Parametriset kolmioelementit

Aivan vastaavaan tapaan kuin nelikulmioelementtien tapauksessa voidaan kolmioelementtien geometria kuvata parametrisesti. Mikäli interpolaatiopolynomit lausutaan alakoordinaattien suhteen, on muistettava että vain kaksi kolmesta alakoordinaatista ovat riippumattomia. Toisaalta alakoordinaatit  $L_1$  ja  $L_2$  voidaan assosoida alla olevan kuvan 4.16 mukaisen peruskolmion luonnollisiin koordinaatteihin  $\xi$  ja  $\eta$ . Lineaariset interpolaatiofunktiot ovat siten

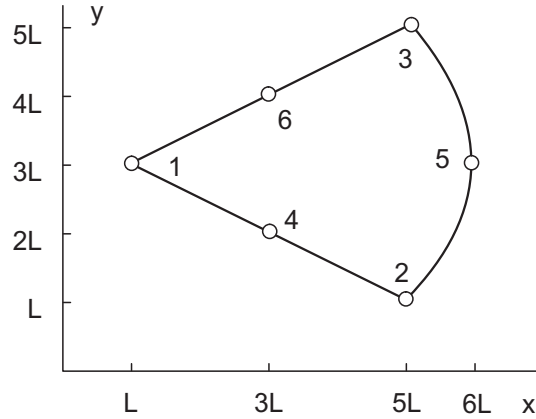
$$N_1 = L_1 = \xi, \quad N_2 = L_2 = \eta, \quad N_3 = L_3 = 1 - \xi - \eta. \quad (4.212)$$

Parametrisen kolmioelementin käsittely selvinnee seuraavasta esimerkistä.



**Kuva 4.16** Peruskolmio.

**Esimerkki 4.12** Määritä oheisen kvadraattisen isoparametrisen kolmioelementin lämpötilan gradientti kaarevalla reunalla, kun elementin solmulämpötilat ovat  $u_1 = 0, u_2 = u_3 = 4\Delta, u_4 = u_6 = 2\Delta, u_5 = 5\Delta$ .



Koska elementti on isoparametrinen interpoloidaan geometriaa samoilla funktioilla kuin lämpötilaakin, eli

$$x = \sum_{i=1}^6 N_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^6 N_i y_i, \quad u = \sum_{i=1}^6 N_i u_i,$$

missä  $x_i$  ja  $y_i$  ovat solmun  $i$  koordinaatit,  $u_i$  solmupistelämpötilat. Kvadraattiset interpolaatiofunktiot  $N_i, i = 1, \dots, 6$  ovat:

$$N_i = L_i(2L_i - 1), \quad N_{3+i} = 4L_i L_{i+} \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.213)$$

Korjoittamalla  $(\xi, \eta)$ -koordinaattien avulla ne ovat

$$N_1 = \xi(2\xi - 1), \quad (4.214a)$$

$$N_2 = \eta(2\eta - 1), \quad (4.214b)$$

$$N_3 = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta), \quad (4.214c)$$

$$N_4 = 4\xi\eta, \quad (4.214d)$$

$$N_5 = 4\eta(1 - \xi - \eta), \quad (4.214e)$$

$$N_6 = 4\xi(1 - \xi - \eta). \quad (4.214f)$$

Aivan vastaavalla tavalla kuin isoparametristen nelikulmioelementtien yhteydessä, saadaan tarvittavat derivaatat rakennekoordinaatiston koordinaattien  $(x, y)$  suhteen ketjuderivoimalla. Geometriakuvauksen Jacobin matriisin transpoosi on

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.215)$$



Intepolaatiofunktioiden derivaatat reunalla 2, jolla  $\xi \equiv 0$ , ovat:

$$\begin{aligned}
 N_{1,\xi} &= -1, & N_{1,\eta} &= 0, \\
 N_{2,\xi} &= 0, & N_{2,\eta} &= 4\eta - 1, \\
 N_{3,\xi} &= -3 + 4\eta, & N_{3,\eta} &= 4\eta - 3, \\
 N_{4,\xi} &= 4\eta, & N_{4,\eta} &= 0, \\
 N_{5,\xi} &= -4\eta, & N_{5,\eta} &= 4 - 8\eta, \\
 N_{6,\xi} &= 4 - 4\eta, & N_{6,\eta} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.216}$$

Jacobin matriisin muodostamisessa tarvittavien geometriainterpolaatioden derivaatat reunalla 2 ovat:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i = -4(1 + \eta)L, \tag{4.217a}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i = 4(1 - 2\eta)L, \tag{4.217b}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i = -2L, \tag{4.217c}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i = -4L. \tag{4.217d}$$

Jacobin matriisi laskettuna reunalla 2 on

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} -4(1 + \eta) & -2 \\ 4(1 - 2\eta) & -4 \end{bmatrix} L, \quad \det \mathbf{J} = 24L^2, \tag{4.218}$$

ja sen käänteismatriisi on

$$(\mathbf{J}^T)^{-1} = \frac{1}{24L} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4(2\eta - 1) & -4(1 + \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (J^{-1})_{11} & (J^{-1})_{21} \\ (J^{-1})_{12} & (J^{-1})_{22} \end{bmatrix} \tag{4.219}$$

Nyt voidaan laskea gradientin termit

$$\begin{aligned}
 u_{,x} &= \frac{\partial u}{\partial x} = (J^{-1})_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + (J^{-1})_{21} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\
 &= (J^{-1})_{11} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} u_i + (J^{-1})_{21} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} u_i \\
 &= \sum_{i=1}^6 \left[ (J^{-1})_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + (J^{-1})_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] u_i \\
 &= \frac{\Delta}{24L} \{ 2(4\eta - 1)4 + [-4(4\eta - 3) + 2(4\eta - 3)]4 + \\
 &\quad + (-4 \cdot 4\eta)2 + [-4(-4\eta) + 2(4 - 8\eta)]5 + [-4(4 - 4\eta)]2 \} \\
 &= \frac{\Delta}{L}.
 \end{aligned} \tag{4.220}$$

Gradientin  $x$ -komponentti on vakio koko reunalla 2. Tämä on oikein, sillä annettu lämpötilakenttä on  $u(x, y) = \Delta x/L$ , joten gradientti on vakio koko

alueessa. Totea, että gradientin  $y$ -komponentti häviää identtisesti laskemalla tehtävä loppuun.

## 4.9 Hierarkinen interpolaatio kahdessa dimensiossa

### 4.9.1 Nelikulmioelementit

Hierarkisia interpolaatiofunktioita voidaan muodostaa useilla tavoilla. Seuraavassa esitetään kuitenkin vain yksi mahdollinen järjestelmä, jonka peruselementtinä on bilineaarinen nelikulmioelementti. Interpolaatiofunktioita voidaan luokitella kolmeen kategoriaan: solmuinterpolaatiofunktioita, sivumuodot ja sisäiset muodot. Seuraavassa esitetään yksi tapa konstruoida Serendipity-tyyppinen hierarkinen kantajärjestelmä.

1. *Solmumuotofunktiot* ovat tavanomaiset bilineaariset interpolaatiofunktioita:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (4.221)$$

2. *Sivumuotoja* on astetta  $p$  olevalla elementillä  $4(p-1)$  kappaletta ( $p \geq 2$ ), jotka liittyvät elementin sivujanoihin. Sivuuun 1, katso kuva 4.16, liittyvät sivumuodot ovat

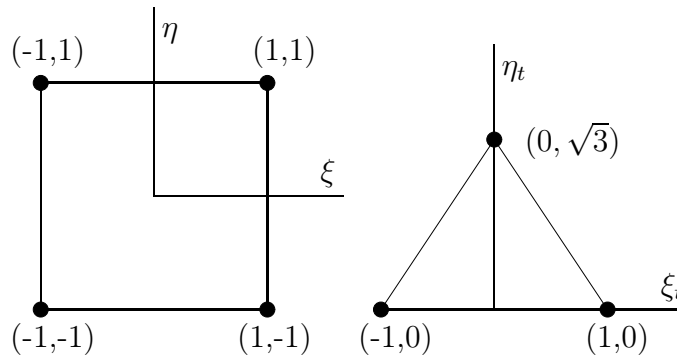
$$N_i^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)\psi_i(\xi), \quad i = 2, \dots, p, \quad (4.222)$$

missä funktio  $\psi_i(\xi)$  on määritelty yhtälöillä (3.21). Vastaavasti muut sivumuodot ovat

$$\begin{aligned} N_i^{(2)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \xi)\psi_i(\eta), \\ N_i^{(3)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \eta)\psi_i(\xi), \\ N_i^{(4)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi)\psi_i(\eta), \quad i = 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (4.223)$$

3. *Sisäisiä muotoja* on  $p$ -asteisessa Serendipity-tyyppisessä hierarkisessa interpolaatiossa  $(p-2)(p-3)/2$  kappaletta ( $p \geq 4$ ). Nämä voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\begin{aligned} N_1^{(0)} &= \psi_2(\xi)\psi_2(\eta), \\ N_2^{(0)} &= \psi_3(\xi)\psi_2(\eta), \\ N_3^{(0)} &= \psi_2(\xi)\psi_3(\eta), \\ N_4^{(0)} &= \psi_4(\xi)\psi_2(\eta), \\ N_5^{(0)} &= \psi_3(\xi)\psi_3(\eta), \\ N_6^{(0)} &= \psi_2(\xi)\psi_4(\eta), \quad \text{jne.} \end{aligned} \quad (4.224)$$



**Kuva 4.17** Perusneliö ja peruskolmio.

### 4.9.2 Kolmioelementit

Hierarkiset interpolaatiofunktiot kolmiolle on kätevä lausua alakoordinaattien avulla. Kolmion hierarkiset interpolaatiofunktiot on myös hyvä konstruoida siten, että ne sopivat yhteen vastaavan nelikulmioelementin hierarkisten muotojen kanssa. Määritellään tasasivuinen ns. peruskolmio ja lineaariset alakoordinaatit kolmion luonnollisten koordinaattien  $\xi_t$  ja  $\eta_t$  avulla, katso kuva 4.17:

$$L_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \xi_t - \frac{1}{\sqrt{3}} \eta_t \right), \quad (4.225a)$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \xi_t - \frac{1}{\sqrt{3}} \eta_t \right), \quad (4.225b)$$

$$L_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \eta_t. \quad (4.225c)$$

1. *Solmuinterpolaatiofunktiot* ovat samat kuin jo aikaisemmin esitetyt lineaarisen kolmioelementin interpolaatiofunktiot (4.225a).
2. *Sivumuotoja* on  $3(p-1)$  kappaletta, ja ne on konstruoitu siten, että ne sopivat yhteen nelikulmioelementin hierarkisten interpolaatiofunktioiden kanssa. Nelikulmioelementin sivumuodot laskettuna sivuilla ovat funktiot  $\psi_i$  (3.21). Koska  $\psi_i$ :t ovat funktioita, jotka häviävät sivun päätepisteissä  $\xi = \pm 1$ , termi  $1 - \xi^2$  voidaan jakaa pois. Määritellään uudet funktiot

$$\frac{1}{4}(1 - \xi^2)\phi_i(\xi) = \psi_i(\xi), \quad i = 2, 3, \dots, p. \quad (4.226)$$

Esimerkiksi

$$\phi_2(\xi) = -\sqrt{6}, \quad \phi_3(\xi) = -\sqrt{10}\xi, \quad \phi_4(\xi) = -\sqrt{\frac{7}{8}}(5\xi^2 - 1). \quad (4.227)$$

Sivuihin 1,2,3 liittyvät interpolaatiomuodot voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} N_i^{(1)} &= L_1 L_2 \phi_i(L_2 - L_1), \\ N_i^{(2)} &= L_2 L_3 \phi_i(L_3 - L_2), \\ N_i^{(3)} &= L_1 L_3 \phi_i(L_1 - L_3), \quad i = 2, 3, \dots, p. \end{aligned} \quad (4.228)$$

3. *Sisäiset muodot* voidaan määrittellä alakoordinaattien ja Legendren polynomien  $P_i$  tuloina. Astetta  $p$  olevalla elementillä (sisältäen kaikki astetta  $p$  olevat monomit) on  $(p-1)(p-2)/2$  sisäistä muotoa, jotka saadaan seuraavaan tapaan:

$$\begin{aligned} N_1^{(0)} &= L_1 L_2 L_3, \\ N_2^{(0)} &= L_1 L_2 L_3 P_1(L_2 - L_1), \\ N_3^{(0)} &= L_1 L_2 L_3 P_1(2L_3 - 1). \end{aligned} \quad (4.229)$$

## 4.10 Yhteenveto

Luvussa esitettiin kolmio- ja nelikulmioelementtien interpolaatiofunktioiden muodostamisperiaatteet. Parametrinen kuvaus mahdollistaa kaarevareunaiset elementit. Isoparametrisessä elementissä sekä geometriaa että ratkaistavia funktioita kuvataan samoilla interpolaatiofunktioilla, ja ne ovatkin kaikkein yleisimmin käytettyjä elementtejä.

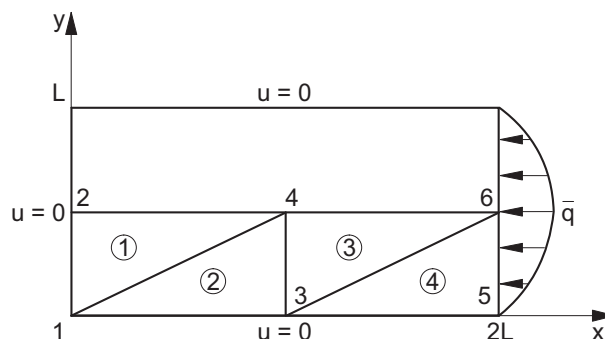
## 4.11 Harjoitustehtäviä

1. Johda heikko muoto (4.9):

$$\int_{\Omega} (\nabla \hat{u})^T \mathbf{D} \nabla u dA = \int_{\Omega} \hat{u} \bar{f} dA - \int_{S_q} \hat{u} \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} ds$$

komponenttimuodossa.

2. Ratkaise kuvan kaksidimensioinen lämmönjohtumistehtävä käyttäen lineaarisia kolmioelementtejä kuvan mukaisesti ottaen huomioon tehtävän symmetria. Materiaalin otaksutaan olevan isotrooppista ja sen lämmönjohtavuus on  $k$ . Kuormituksenä on parabolisesti jakautunut lämpövuoto  $\vec{q} = -4\bar{q}_c(y/L)(1-y/L)\vec{i}$  reunalla  $x = L$ .



3. Määritä homogeenisesta isotrooppisesta aineesta valmistetun neliöpoikkileikkauksisen (sivun pituus  $L$ ) sauvan vääntöjäykkyys käyttäen lineaarisia kolmioelementtejä

ja sivulla 89 olevan esimerkin kaltaista neljän elementin verkkoa. Prandtin voimamenetelmän mukainen vääntötehtävä palautuu probleemaksi

$$-\Phi_{,xx} - \Phi_{,yy} = 2G\theta, \quad (4.230)$$

jossa  $\Phi(x, y)$  on jännitysfunktio, joka saa reunalla arvon  $\Phi = 0$ . Vääntöjäyhyys saadaan yhtälöstä

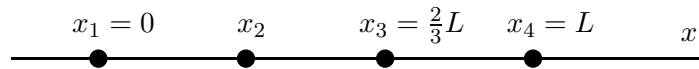
$$I_t = \frac{2}{G\theta} \int_{\Omega} \Phi(x, y) dA. \quad (4.231)$$

Määritä myös leikkausjännitysten jakaantuminen alueessa kun kuormitus on vääntymä  $\theta = 1/L$ . Leikkausjännitysten lausekkeet ovat

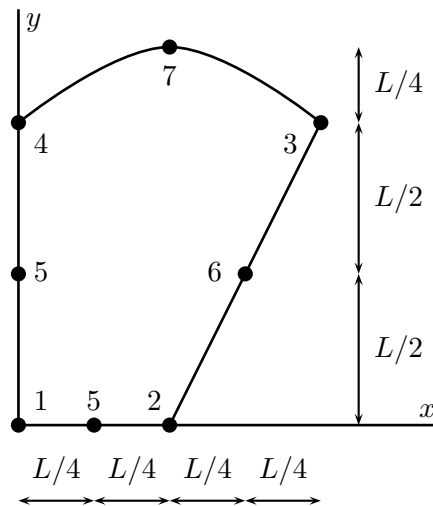
$$\tau_{zx} = \Phi_{,y}, \quad \tau_{zy} = -\Phi_{,x}. \quad (4.232)$$

Voit käyttää hyväksesi sivulla 89 lasketun esimerkin tietoja soveltuvin osin.

4. Ratkaise edellinen tehtävä esimerkin 4.7 mukaisesti siirtymämenetelmällä. Käytä lineaarisia kolmioelementtejä ja sivulla 89 olevan esimerkin kaltaista neljän elementin verkkoa. Vertaa tulosta edellisen tehtävän ratkaisuun.
5. Määritä kuubisen isoparametrisen janaelementin solmun 2 sallittu alue kun muut solmut ovat kohdissa  $x_1 = 0, x_3 = 2L/3, x_4 = L$ .



6. Määritä kvadraattisen isoparametrisen janaelementin derivaatan lauseke globaalin koordinaatin  $x$  funktiona. Elementin solmupisteiden koordinaatit ovat  $x_1 = 0, x_2 = \alpha L, x_3 = L$  ( $\alpha > 0$ ). Missä rajoissa parametri  $\alpha$  voi vaihdella? Interpoloitavan funktion lauseke on  $u(x) = u_3(x/L)^2 = \alpha^2 u_3 N_2 + u_3 N_3$ , missä  $N_2 = 1 - \xi^2, N_3 = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)$ . Piirrä isoparametrisen elementin derivaatan lauseke koordinaatin  $x$  funktiona  $\alpha$ :n arvoilla  $\alpha = 1/4$  ja  $\alpha = 1/3$ . Mitä voit sanoa tarkkuudesta?
7. Totea, että luvussa 4.9.1 esitetty kanta on Serendipity-tyyppinen.
8. Miten luvussa 4.9.1 esitettyä kantaa olisi muutettava, jotta saataisiin Lagrangen tyyppinen hierarkinen interpolaatio.
9. Oheisen redusoidun bikvadraattisen elementin solmupistelämpötilat ovat:  $u_1 = u_2 = u_5 = 0, u_3 = 2\bar{u}, u_4 = \bar{u}, u_6 = 5/8\bar{u}, u_7 = 35/16\bar{u}, u_8 = 1/2\bar{u}$ . Materiaali otaksutaan isotrooppiseksi ja sen lämmönjohtavuus on  $k$ . Määritä lämpövektori  $\vec{q} = -k\nabla u$  solmussa 4.

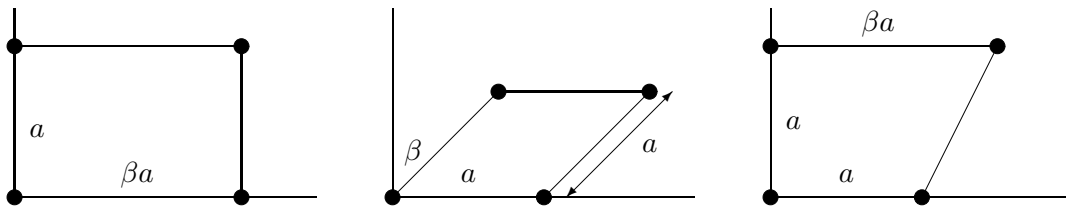


10. Nelikulmioelementin interpolaatio voidaan lausua muodossa

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 \quad (4.233)$$

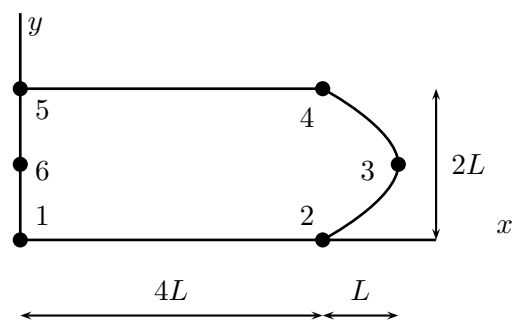
Muodosta nelikulmioelementin interpolaatiofunktioiden  $N_1 \dots N_4$  lausekkeet opetusmonisteen luvun 4.2 tyyliin. Elementin solmutkoordinaatit ovat  $(0, 0); (a, 0); (2a, a); (a, 0)$ . Onko näin konstuoitu elementti yhteensopiva. Tarkastele  $u$ :n lauseketta  $y$ :n funktiona oikealla reunalla.

11. Muodosta oheisten isoparametrisen bilineaarisesti interpoloitujen nelikulmioelementtien geometriakuvauksen Jacobin matriisit. Määritä myös Jacobin matriisin ominaisarvot ja häiriöalttius (spektraalinormissa) parametrin  $\beta$  funktiona. Laske myös elementtien pinta-alat.



12. Muodosta isoparametrisen *nelisolmuisen* kolmioelementin solmuihin sidottujen interpolaatiofunktioiden lausekkeet  $N_1 \dots N_4$ . Muodosta geometriakuvauksen Jacobin matriisi kolmiolle jonka solmujen koordinaatit ovat  $(0, 0); (a, -\frac{1}{2}a); (\beta a, 0); (a, \frac{1}{2}a)$ . Laske myös Jacobin matriisin ominaisarvot ja häiriöalttius (spektraalinormissa)  $\beta$ :n funktiona sekä elementin pinta-ala. Mitkä ovat  $\beta$ :n sallitut arvot?
13. Muodosta Lagrangen tyyppiset kuusisolmuisen suorakaide-elementin interpolaatiofunktio  $N_1, \dots, N_6$  perusneliössä,  $(\xi, \eta) \in (-1, 1)$ , kun interpolaatio on lineaarinen  $\xi$ -koordinaation suhteen ja kvadraattinen  $\eta$ -koordinaatin suhteen.

Laske muodonmuutokset oheisen isoparametrisen tasomuodonmuutostilan elementin linjalla  $y = L$  kun solmupistesiiirtymät ovat:  $u_1 = u_2 = u_5 = u_6 = v_1 = v_5 = v_6 = 0$  ja  $u_3 = -5\Delta, u_4 = -8\Delta, v_2 = 8\Delta, v_3 = \frac{25}{2}\Delta, v_4 = 8\Delta$ .



# Luku 5

## Mekaniikan variaatioperiaatteita

Luvussa tarkastellaan virtuaalisien työn ja potentiaalienergian minimin periaatetta kiinteän aineen mekaniikassa. Näytetään, että virtuaalisen työn ja potentiaalienergian minimin periaate ovat ekvivalentteja, mikäli materiaalia voidaan kuvata tilafunktiolla, muodonmuutosenergialla, ja mikäli ulkoiset voimat voidaan johtaa potentiaalista. Virtuaalisen työn periaate on siten yleis-pätevämpi ja sitä voidaan käyttää elementtimenetelmän perustana olevana heikona muotona. Lisäksi näytetään, että virtuaalisen työn periaate on ekvivalentti tasapainoehtojen ja mekaanisten eli jännitysreunaehtojen kanssa.

### 5.1 Johdanto

Tarkastellaan seuraavassa eräitä mekaniikan keskeisiä variaatioperiaatteita, kuten virtuaalisen työn ja potentiaalienergian minimin periaatteita sekä niistä johdettuja modifioituja menetelmiä. Käsittely on tavoitehakuista, eli variaatioperiaatteet esitetään siten, että ne soveltuvat suoraan nykyisin käytössä olevien yleisten elementtimenetelmäformulaatioiden perustaksi, ja tämän vuoksi m.m. komplementaarisen virtuaalisen työn ja komplementaarienergian minimin periaatteet jätetään vaille huomiota. Johdatus esitettäviin variaatioperiaatteisiin suoritetaan yleisen kolmiulotteisen pienten siirtymien elastisuusteorian yhtälöiden avulla, jonka lisäksi rajoitutaan staattisiin tapauksiin. Mikäli lukija haluaa syventää tietojansa mekaniikan variaatioperiaatteista, on K. Washizun *Variational Methods in Elasticity and Plasticity* [35] ja C. Lanczosin *The Variational Principles of Mechanics* [20] teokset mitä suositeltavimpia.

Kerrataan aluksi kolmiulotteisen elastostatiikan perusyhtälöt. Tarkastellaan kappaletta  $\mathcal{B}$ , jonka rajoittamaa aluetta merkitään  $\Omega$ :llä ja sen reunapintaa  $\Gamma$ :llä ( $\Gamma = \partial\Omega$ ). Jaetaan reunapinta vielä kahteen toisistaan erilliseen osaan  $\Gamma_u$  ja  $\Gamma_t$  siten, että  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ . Lineaarisen elastisuusteorian perusyhtälösystemi muodostuu täten seuraavista relaatioista.

1. *Tasapainoyhtälöt*: Kappaleeseen  $\mathcal{B}$  vaikuttavat pinnalle jakautuneet traktiovoimat  $\mathbf{t}$  ja tilavuusvoimat  $\mathbf{f}$ . Jotta kappale olisi tasapainossa on resultoivan



voiman hävittävä, eli

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} dV = \mathbf{0}. \quad (5.1)$$

Traktiovektori  $\mathbf{t}$  määritellään jännitysmatriisin  $\boldsymbol{\sigma}$  ja pinnan yksikkönormaalien  $\mathbf{n}$  avulla seuraavasti

$$\mathbf{t} = \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}, \quad (5.2)$$

missä jännitysmatriisi komponenteittain kirjoitettuna on

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Huomaa, että määritelmä (5.2) kiinnittää jännitysmatriisin indeksien merkityksen: ensimmäinen indeksi kertoo pinnan normaalin- ja toinen jännityskomponentin suunnan.<sup>1</sup> Sijoitetaan tämä resultanttimuotoiseen tasapainoyhtälöön (5.1), saadaan

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} dV = \mathbf{0}. \quad (5.4)$$

Sovelletaan Gaussin lauseen, eli divergenssiteoreeman yleistystä, jolloin päädytään yhtälöön

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{f}) dV = \mathbf{0}, \quad (5.5)$$

mistä saadaan tasapainoyhtälön (5.1) paikallinen muoto

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T = \mathbf{f}. \quad (5.6)$$

Komponenttimuodossa kirjoitettuna tasapainoyhtälöt ovat

$$\begin{cases} -\sigma_{x,x} - \tau_{yx,y} - \tau_{zx,z} = f_x, \\ -\tau_{xy,x} - \sigma_{y,y} - \tau_{zy,z} = f_y, \\ -\tau_{xz,x} - \tau_{yz,y} - \sigma_{z,z} = f_z. \end{cases} \quad (5.7)$$

Matriisiin  $\mathbf{A}$  kohdistuva divergenssioperaattori määritellään siten

$$(\operatorname{div} \mathbf{A})_i = \sum_j \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}, \quad (5.8)$$

missä on määritelty  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ . Liikemäärän momentin taseen periaatteesta seuraa Cauchyn kontinuumimallin jännitysmatriisin symmetrisyys, täten siis  $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$  ja  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ .

<sup>1</sup>Jännitysmatriisin komponenttien järjestys voitaisiin määritellä myös toisinpäin: ensimmäinen indeksi kertoisi komponentin suunnan ja toinen pinnan normaalin suunnan. Tällöin traktiovektori voidaan kirjoittaa muodossa  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ . Itse asiassa tämä määrittely on yleisempi alan modernissa kirjallisuudessa.

## 2. Muodonmuutos-siirtymä yhteydet:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym grad } \mathbf{u}, \quad (5.9)$$

missä siirtymävektorin  $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$  gradientti ja matriisin symmetrinen osa määritellään yhtälöillä

$$\text{grad } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{,x} & u_{,y} & u_{,z} \\ v_{,x} & v_{,y} & v_{,z} \\ w_{,x} & w_{,y} & w_{,z} \end{bmatrix}, \quad \text{sym } \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \quad (5.10)$$

josta seuraa

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} & \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) & \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,x}) \\ \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) & v_{,y} & \frac{1}{2}(v_{,z} + w_{,y}) \\ \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,x}) & \frac{1}{2}(v_{,z} + w_{,y}) & w_{,z} \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

## 3. Jännitys-muodonmuutos yhteydet:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{tai kääntäen} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.12)$$

Mikäli materiaalin otaksutaan noudattavan isotrooppista, lineaarikimmoista mallia, on voidaan materiaalioperaattorit lausua muodossa

$$\mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.13)$$

tai kääntäen

$$\mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} + \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{\sigma}, \quad (5.14)$$

missä  $\lambda$  ja  $\mu$  ovat Lamén vakiot joiden suhde kimmokertoimeen  $E$ , leikkausmoduuliin  $G$  ja Poissonin vakioon  $\nu$  on seuraava

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (5.15)$$

## 4. Mekaaniset reunaehtot:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_S \quad \text{reunalla} \quad \Gamma_t. \quad (5.16)$$

## 5. Kinemaattiset (geometriset) reunaehtot:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S \quad \text{reunalla} \quad \Gamma_u. \quad (5.17)$$

Edellä esitetty merkintatapa on varsin kompakti, erityisesti mikäli käytetään indeksinotaatiota ja Einsteinin summaussääntöä, jossa lausekkeessa kahdesti esiintyvien indeksien suhteen suoritetaan summaus. Tämän esityksen tarpeita silmälläpitäen se ei kuitenkaan ole tarpeen.

Mikäli jännitys- ja muodonmuutosmatriisiin alkiot kootaan vektoreiksi

$$\mathbf{s} = \left[ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \right]^T \quad (5.18)$$

ja

$$\mathbf{e} = \left[ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right]^T, \quad (5.19)$$

voidaan edellä esitetyt tasapainoyhtälöt, kinemaattiset relaatiot ja konstitutiivinen yhteys (materiaalimalli) esittää seuraavalla tavalla.

1. *Tasapainoyhtälöt:*

$$-\mathbf{G}^T \mathbf{s} = \mathbf{f}. \quad (5.20)$$

2. *Muodonmuutos-siirtymä yhteydet:*

$$\mathbf{e} = \mathbf{G}\mathbf{u}. \quad (5.21)$$

Tasapaino-operaattori on

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

ja jonka transpoosi välittää kuvauksen siirtymiltä muodonmuutoksille.

3. *Konstitutiivinen malli:*

$$\mathbf{s} = \mathbf{D}\mathbf{e} \quad (5.23)$$

Lineaarielastisen, isotrooppisen ainemallin jäykkyydsmatriisi (kimmomatriisi) on muotoa

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

## 5.2 Virtuaalisen työn periaate

Aloitetaan sovellutusten kannalta ehkä tärkeimmästä ja samalla vanhimmasta <sup>2</sup> mekaniikan variaatioperiaatteesta, eli virtuaalisen työn periaatteesta, jota kutsutaan myös nimellä virtuaalisten siirtymien periaate. Oletetaan kappaleen  $\mathcal{B}$  olevan tasapainossa ulkoisten tilavuusvoimien ja reunaehtojen suhteen. Tällöin jännityskomponentit  $\sigma_x, \sigma_y, \dots$ , ja  $\tau_{zx}$  toteuttavat tasapainoehdot (5.6) kappaleen jokaisessa kohdassa, eli

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T = \mathbf{f}, \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad (5.25)$$

ja mekaaniset reunaehdot reunapinnan osalla  $\Gamma_t$

$$\mathbf{t} - \mathbf{t}_S = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma_t. \quad (5.26)$$

Otaksutaan nyt, että kappale kokee mielivaltaisen kuvitteellisen eli *virtuaalisen* muutoksen  $\delta \mathbf{u} = [\delta u, \delta v, \delta w]^T$  tasapainossa olevaan siirtymätilaan  $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$  nähden.

Tällöin on tasapainoehtojen perusteella voimassa

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot (-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T - \mathbf{f}) dV + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{t}_S) dS = 0, \quad (5.27)$$

jossa  $dV$  ja  $dS$  ovat kappaleen  $\mathcal{B}$  differentiaalinen tilavuusalkio ja pinta-ala-alkio.

Valitaan nyt virtuaalinen siirtymäkenttä mielivaltaisesti mutta kuitenkin siten, että geometriset eli kinemaattiset reunaehdot toteutuvat reunan osalla  $\Gamma_u$ , eli

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (x, y, z) \in \Gamma_u. \quad (5.28)$$

Käyttämällä identiteettiä ( $\mathbf{v}$  on vektori ja  $\mathbf{A}$  matriisi)

$$\operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = \operatorname{grad}(\mathbf{v}) : \mathbf{A} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{A}, \quad (5.29)$$

missä kaksoispistetulo määritellään

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_i \sum_j A_{ij} B_{ij}, \quad (5.30)$$

saadaan lausekkeen (??) ensimmäistä termiä muokattua

$$\int_{\Omega} [\operatorname{grad} \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma}^T - \operatorname{div}(\delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T) - \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}] dV + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{t}_S) dS = 0. \quad (5.31)$$

Käyttämällä divergenssiteoreemaa saadaan

$$\int_{\Omega} (\operatorname{grad} \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma}^T - \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) dV - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{t}_S) dS = 0. \quad (5.32)$$

<sup>2</sup>Virtuaalisen työn periaatteen lienee ensimmäisenä formuloinut Jean Bernoulli (1667-1748) vuonna 1725. Menettelyä, jota voitaisiin kutsua virtuaalisten siirtymien periaatteeksi, käytti kuitenkin jo Leonardo da Vinci (1452-1519) analysoidessaan taljojen ja vipuvarsiensa muodostamaa systeemiä.

Ottamalla huomioon jännitysmatriisiin symmetrisyys ja virtuaalisen siirtymän häviäminen reunan  $\Gamma_u$  osalla, saadaan

$$\int_{\Omega} \text{sym grad } \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_S dS = 0. \quad (5.33)$$

Ottamalla huomioon muodonmuutoksen määritelmä (5.9) saadaan virtuaalisen työn yhtälö muotoon

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_S dS = 0, \quad (5.34)$$

missä symmetrinen virtuaalinen muodonmuutosmatriisi  $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym grad } \delta \mathbf{u}$  sisältää komponentit

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_x &= \delta u_{,x}, & \delta \varepsilon_y &= \delta v_{,y}, & \delta \varepsilon_z &= \delta w_{,z}, \\ \delta \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(\delta u_{,y} + \delta v_{,x}), & \delta \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}(\delta w_{,y} + \delta v_{,z}), & \delta \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2}(\delta u_{,z} + \delta w_{,x}). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Komponenttimuodossa virtuaalisen työn yhtälö (5.34) on pitkäkö lauseke

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV \\ & - \int_{\Omega} (f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w) dV - \int_{\Gamma_t} (t_{Sx} \delta u + t_{Sy} \delta v + t_{Sz} \delta w) dS = 0, \end{aligned} \quad (5.36)$$

missä liukumamat  $\gamma_{ij}$  määritellään

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}. \quad (5.37)$$

Yhtälöt (5.28), (5.34) ja (5.35) ovat virtuaalisen työn periaatteen matemaattinen asu. Periaate pätee mielivaltaisille infinitesimaalisille virtuaalisille siirtymille, jotka toteuttavat kinemaattiset reunaehdot. Edellä esitetty päättelyketju voidaan myös kääntää. Siten virtuaalisen työn periaate on ekvivalentti *tasapainoyhtälöiden ja mekaanisten reunaehtoien muodostaman systeemin kanssa*. Lisäksi on syytä huomauttaa että periaate pätee *riippumatta* siitä millaisia ovat materiaalia kuvaavat lait eli jännitysten ja venymien väliset yhteydet.

Sanallisesti virtuaalisen työn yhtälö (VTY) voidaan esittää seuraavasti: *Otak-sutaan että mekaaninen systeemi on tasapainossa siihen vaikuttavien ulkoisten voimien ja geometrysten rajoitteiden alaisena. Siten systeemiin vaikuttavien ulkoisten ja sisäisten voimien virtuaalisten töiden summa kaikkien geometrisset rajoitteet toteuttavien infinitesimaalisten siirtymien suhteen häviää.*

### 5.3 Potentiaalienergian minimin periaate

Johdetaan potentiaalienergian minimin periaate juuri esitetystä virtuaalisen työn periaatteesta. Materiaalilaista (5.12) voidaan johtaa tilafunktio  $U(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{zx})$  siten, että

$$\delta U = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \dots + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}, \quad (5.38)$$

jossa muodonmuutosenergiafunktio  $U$ <sup>3</sup> on lineaarisen isotrooppisesti kimmoisan aineen tapauksessa

$$U = \frac{1}{2}\lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \mu(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2}\mu(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2). \quad (5.39)$$

Voidaan todeta, että muodonmuutosenergiafunktio on aina positiivinen, mikäli venymät ovat nolosta eroavia, eli

$$U(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} > 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}, \quad (5.40)$$

joten materiaalin jäykkyydsmatriisilta  $\mathbf{D}$  vaaditaan aidosti positiivista definiittisyyttä. Huomaa, että tämä asettaa rajoituksia materiaalivakioiden välille. Myöhempää tarvetta silmälläpitäen kirjoitetaan  $U = U(u, v, w)$ , sillä venymät  $\boldsymbol{\varepsilon}$  voidaan lausua siirtymien  $u, v$  ja  $w$  funktioina kinemaattisten yhteyksien (5.9) avulla.

Kun muodonmuutosenergiafunktion olemassaolo on taattu, voidaan virtuaalisen työn yhtälön (5.34) ensimmäisen termin integrandi kirjoittaa muotoon

$$\sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \cdots + \tau_{zx} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) = \delta U(u, v, w) \quad (5.41)$$

muistaen, että  $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$  ovat todellisen ratkaisun jännityskomponentit ja  $\delta u, \delta v$  ja  $\delta w$  ovat virtuaaliset muutokset todellisiin siirtymäkomponentteihin nähden. Täten virtuaalisen työn periaate (5.34) voidaan nyt muuntaa muotoon

$$\begin{aligned} \delta \int_{\Omega} U(u, v, w) dV - \int_V (f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w) dV \\ - \int_{\Gamma_t} (t_{Sx} \delta u + t_{Sy} \delta v + t_{Sz} \delta w) dS = 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Tämä lauseke on hyödyllinen niissä kimmoteorian tehtävissä, joissa ulkoiset kuorimitukset eivät ole johdettavissa potentiaalifunktiosta.

Seuraavaksi otaksutaan, että tilavuusvoimat  $\mathbf{f}$  ja pintavoimat  $\mathbf{t}_S$  ovat johdettavissa potentiaalifunktioista  $V_f$  ja  $V_t$  siten, että

$$-\delta V_f = -\frac{\partial V_f}{\partial u} \delta u - \frac{\partial V_f}{\partial v} \delta v - \frac{\partial V_f}{\partial w} \delta w = f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w, \quad (5.43a)$$

$$-\delta V_t = -\frac{\partial V_t}{\partial u} \delta u - \frac{\partial V_t}{\partial v} \delta v - \frac{\partial V_t}{\partial w} \delta w = t_{Sx} \delta u + t_{Sy} \delta v + t_{Sz} \delta w. \quad (5.43b)$$

Tällöin voidaan variaatioperiaate (5.42) muuntaa muotoon

$$\delta \Pi = 0, \quad (5.44)$$

<sup>3</sup>Tarkkaan ottaen pitäisi puhua muodonmuutosenergiatiheydestä, tai muodonmuutosenergiasta tilavuusyksikköä kohden.

jossa

$$\Pi = \int_{\Omega} [U(u, v, w) + V_f(u, v, w)] dV + \int_{\Gamma_t} V_t(u, v, w) dS \quad (5.45)$$

on kokonaispotentiaalienergia. Periaate (5.44) ilmoittaa, että kaikkien kinemaattisesti luvallisten siirtymien  $u$ ,  $v$  ja  $w$  joukossa todelliset siirtymät antavat kokonaispotentiaalienergialle stationäärisen arvon.<sup>4</sup>

Otaksutaan, että tilavuusvoimat  $(f_x, f_y, f_z)$ , pintavoimat  $(t_{Sx}, t_{Sy}, t_{Sz})$  ja annetut siirtymät  $(u_S, v_S, w_S)$  ovat määrättyjä ja säilyttävät suuntansa sekä suuruutensa variaation tapahtuessa. Siten potentiaalit (5.43a) voidaan kirjoittaa muodossa

$$-V_f = f_x u + f_y v + f_z w, \quad (5.46a)$$

$$-V_t = t_{Sx} u + t_{Sy} v + t_{Sz} w, \quad (5.46b)$$

jolloin päädytään systeemin (5.6), ... , (5.17) variaatioperiaatteeseen, jota kutsutaan potentiaalienergian minimin periaatteeksi: Kaikkien mahdollisten kinemaattisesti luvallisten siirtymätilojen joukosta todelliset siirtymät antavat kokonaispotentiaalienergialle

$$\Pi = \int_{\Omega} U(u, v, w) dV - \int_{\Omega} (f_x u + f_y v + f_z w) dV - \int_{\Gamma_t} (t_{Sx} u + t_{Sy} v + t_{Sz} w) dS \quad (5.47)$$

absoluuttisen minimin.

Näytetään nyt, että potentiaalienergia (5.47) todella saavuttaa minimin luvallisten siirtymäkenttien joukossa. Olkoon todellinen siirtymätila  $u, v, w$  ja siitä varioimalla saatu mielivaltainen kinemaattiset reunaehdot toteuttava siirtymätila  $u^*, v^*, w^*$ , eli  $u^* = u + \delta u, v^* = v + \delta v, w^* = w + \delta w$ . Tarkastellaan potentiaalienergian lauseketta

$$\Pi(u^*, v^*, w^*) = \Pi(u, v, w) + \delta\Pi + \delta^2\Pi, \quad (5.48)$$

jossa  $\delta\Pi$  on potentiaalienergian siirtymien suhteen lineaarinen ensimmäinen variaatio ja  $\delta^2\Pi$  on siirtymien suhteen kvadraattinen toinen variaatio. Koska todellinen siirtymätila antaa funktionaalille stationääriarvon yhtälön (5.44) mukaan, häviää potentiaalienergian ensimmäinen variaatio ja koska muodonmuutosenergiafunktio  $U$  on positiivinen, katso epäyhtälöä (5.40), toteuttaa toinen variaatio epäyhtälön

$$\delta^2\Pi = \int_V U(\delta u, \delta v, \delta w) dV \geq 0, \quad (5.49)$$

jossa yhtäsuuruus tulee kyseeseen ainoastaan, kun virtuaalisista siirtymistä derivaoidut muodonmuutoskomponentit ovat identtisesti nollia. Tämä taas on mahdollista vain, mikäli virtuaalinen siirtymätila kuvaa jäykän kappaleen liikettä, eli reunaehdot ovat riittämättömiä yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolon takaamiseen. Täten

<sup>4</sup>Sana "kokonais" jätetään usein jatkossa pois ja käytetään vain termiä potentiaalienergia kokonaispotentiaalienergian sijasta.

mikäli jäykän kappaleen liike on siirtymäreunaehdoin estetty, pätee potentiaalienergielle epäyhtälö

$$\Pi_{\text{luvallinen}} \geq \Pi_{\text{todellinen}}, \quad (5.50)$$

jossa alaindeksit viittaavat siirtymätiloihin. Koska virtuaalisen siirtymän suuruudelle ei ole asetettu mitään vaatimuksia, voidaan todeta, että potentiaalienergian absoluuttinen minimi saavutetaan todellisten siirtymien arvoilla.

## 5.4 Muunnoksia potentiaalienergian minimin periaatteesta

Potentiaalienergian minimin periaatteen (5.45) soveltaminen vaatii siirtymäfunktioilta tietynasteista säännöllisyyttä sekä kinemaattisten reunaehtojen toteuttamista. Numeerisia menetelmiä silmälläpitäen on joissakin tapauksissa edullista lieventää näitä vaatimuksia. Kertauksena voidaan kirjoittaa potentiaalienergian minimin periaate seuraavasti: etsitään minimi potentiaalienergielle

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} [U(\mathbf{u}) - \mathbf{f}^T \mathbf{u}] dV - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_S^T \mathbf{u} dS \quad (5.51)$$

side-ehdoilla

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S, \quad \text{reunalla } \Gamma_u. \quad (5.52)$$

Mikäli halutaan päästä eroon side-ehdoista, jotka siis rajaavat kinemaattisesti luvallisten siirtymäfunktioiden joukkoa, voidaan ne ottaa mukaan potentiaalienergian funktionaaliin (5.51) Lagrangen kertojien avulla, jolloin saadaan muunnettu funktionaali

$$\Pi^{m1}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = \int_{\Omega} [U(\mathbf{u}) - \mathbf{f}^T \mathbf{u}] dV - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_S^T \mathbf{u} dS - \int_{\Gamma_u} \mathbf{p}^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S) dS, \quad (5.53)$$

jossa  $\mathbf{p}$  on Lagrangen kertojista koostuva vektori. Nyt funktionaalin (5.53) varioitavina muuttujina ovat riippumattomat suureet  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{p}$  ilman mitään side-ehdoja.

Funktionaalin (5.53) stationaarisuusehdosta seuraa, että Lagrangen kertojat ovatkin traktiokomponentit pinnalla  $\Gamma_u$ , eli

$$\mathbf{p} = \mathbf{t}(\mathbf{u}) \quad \text{reunalla } \Gamma_u. \quad (5.54)$$

Kaavan (5.54) perusteella Lagrangen kertojat voidaan eliminoida funktionaalista (5.53) ja uusi modifioitu funktionaali voidaan kirjoittaa muodossa

$$\Pi^{m2}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} [U(\mathbf{u}) - \mathbf{f}^T \mathbf{u}] dV - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_S^T \mathbf{u} dS - \int_{\Gamma_u} \mathbf{t}(\mathbf{u})^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S) dS, \quad (5.55)$$

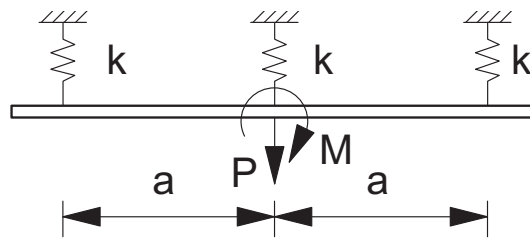
jossa varioitavana suureena on vain siirtymävektori  $\mathbf{u}$  ilman mitään side-ehdoja.



Elementtimenetelmässä approksimoidaan tuntemattomia siirtymäfunktioita paikallisesti kunkin elementin alueella tietynasteisilla polynomeilla. Jotta funktionaalien, esimerkiksi (5.45), (5.47), (5.53) tai (5.55) integraalilausekkeet olisivat määriteltyjä, on jatkuvuusominaisuuksien oltava voimassa elementin rajapintojen yli. Tämä saattaa joissain tapauksissa johtaa monimutkaisiin ja hankaliin ehtoihin, joita pitäisi pystyä lieventämään. Eräs mahdollinen tapa on konstruoida modifioituja funktionaaleja, joissa jatkuvuusvaatimukset ovat lievemät. Tähän asiaan palataan vielä lyhyesti laattaelementtien yhteydessä, mutta asiasta kiinnostuneet voivat tutustua muunnettuihin variaatioperiaatteisiin esimerkiksi Washizun teoksen luvuista 13.4-13.5 [35].

## 5.5 Harjoitustehtäviä

1. Kuvan massatonta, jäykkää sauvaa kuormittavat pistemomentti  $M$  ja pistekuorma  $P$ . Jousien jäykkyyksivakio on  $k$ . Ratkaise tasapainotilaa vastaavat jousivoimat soveltamalla
  - (a) virtuaalisen työn periaatetta ja
  - (b) potentiaalienergian minimin periaatetta.



2. Johda muodonmuutosenergian lausekkeet
  - (a) tasoristikkosauvalle,
  - (b) Eulerin-Bernoullin tasopalkille,
  - (c) tasojännitystilassa olevalle levyalkiolle ja
  - (d) Kirchhoffin laatta-alkiolle.

Materiaalin otaksutaan noudattavan lineaarisesti kimmoisan isotrooppisen aineen mallia eli Hooken lakia.

3. Näytä, että Lagrangen kertojen  $\mathbf{p}$  fysikaalinen tulkinta funktionaalissa (5.53) on traktiovektori.

# Luku 6

## Kontinuumielementtejä

Kontinuumielementtien muodostaminen on melko suoraviivainen yleistys kaksidimensioisen lämmönjohtumisyhtälön tapauksesta. Elastisuusprobleeman ratkaisu elementtimenetelmällä tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilassa on samankaltainen, ainoa ero on materiaalin jäykkyyismatriisissa. Elementtimenetelmän perustana oleva heikko muoto on virtuaalisen työn yhtälö.

### 6.1 Tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilan elementit

Tarkastellaan nyt kimmoteorian yhtälöitä  $(x, y)$ -tasossa. Kaksi erilaista tapausta voidaan erotella:

1. *tasojännitystilä*, jossa tason pinnan normaalin suuntainen jännityskomponentti häviää, eli  $\sigma_z \equiv 0$ , (myös  $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ ) sekä
2. *tasomuodonmuutostila*, jossa vastaavasti tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa muodonmuutoskomponentti häviää:  $\epsilon_z \equiv 0$  (myös  $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$ ).

Aloitetaan tasomuodonmuutostilan käsittelyllä. Nollasta eroavat muodonmuutos- ja jännityskomponentit karteesisessä suorakulmaisessa koordinaatistossa ovat

$$\mathbf{e} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T, \quad \mathbf{s} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy}]^T. \quad (6.1)$$

Tasomuodonmuutostilan konstitutiivinen yhteys saadaan suoraan yleisestä kolmi-dimensioisesta materiaalista, katso luku 5.1, jättämällä nollamuodonmuutoksia ja -jännityksiä vastaavat sarakkeet kirjoittamatta. Kimmoisan isotrooppisen aineen tapauksessa on tasomuodonmuutostilan konstitutiivinen yhtälö seuraavanlainen:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (6.2)$$

Yllä oleva materiaalilaki kirjoitetaan usein muodossa jossa jännityskomponentti  $\sigma_z$  jätetään merkitsemättä jännitysvektoriin  $\mathbf{s}$ , eli tällöin

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (6.3)$$

Tasomuodonmuutostilaa vastaava virtuaalisen työn yhtälö on (yksikön paksuista levyä kohden)

$$\int_{\Omega} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dA = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} dA + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}_S ds, \quad (6.4)$$

missä siirtymävektori  $\mathbf{u}$  pitää sisällään  $x$  ja  $y$ -akselin suuntaiset siirtymäkomponentit  $u$ :n ja  $v$ :n. Muodonmuutoskomponenttien virtuaaliset muutokset ovat

$$\delta \epsilon_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x}, \quad \delta \epsilon_y = \frac{\partial \delta v}{\partial y}, \quad \delta \gamma_{xy} = \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x}. \quad (6.5)$$

Kinemaattinen yhteys voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \text{eli} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{G}\mathbf{u}. \quad (6.6)$$

Virtuaalisille siirtymille ja virtuaalisille muodonmuutoksille pätee tietenkin yhtälö  $\delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{G}\delta \mathbf{u}$ . Ottamalla huomioon kinemaattinen yhteys (6.6) ja materiaalilaki (6.3) saadaan virtuaalisen työn yhtälö muotoon

$$\int_{\Omega} (\mathbf{G}\delta \mathbf{u})^T \mathbf{D}\mathbf{G}\mathbf{u} dA = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} dA + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}_S ds. \quad (6.7a)$$

Virtuaalisen työn yhtälö sisältää siirtymien ensimmäisiä derivaattoja. Täten elementtimenetelmän interpolaatiofunktioiksi kelpaavat  $C_0$ -jatkuvat polynomit. Olkoon käytössä elementti, jossa on  $m$  solmua ja interpoloidaan molempia siirtymäkomponentteja samanlaisilla funktioilla, eli

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^m N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_m & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{N}\mathbf{u}^{(e)}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Sijoittamalla tämä siirtymäotaksuma virtuaalisen työn yhtälöön saadaan elementti-kohtaisiksi lausekkeiksi

- sisäisten jännitysten tekemälle virtuaaliselle työlle

$$\delta \mathbf{u}^{(e)T} \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{GN})^T \mathbf{DGN} dA \mathbf{u}^{(e)} = \delta \mathbf{u}^{(e)T} \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{DB} dA \mathbf{u}^{(e)} = \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \quad (6.9)$$

- ja ulkoisten voimien tekemälle virtuaaliselle työlle

$$\delta \mathbf{u}^{(e)T} \left( \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dA + \int_{\Gamma_t^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t}_S ds \right) = \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)}, \quad (6.10)$$

missä elementin kuormavektoriin tulee termi reunakuormituksesta mikäli elementin jokin reuna on reunan osalla  $\Gamma_t$ .

Siirtymä-muodonmuutosmatriisi  $\mathbf{B}$  voidaan lohkoa solmukohtaisiin osiin seuraavasti:

$$\mathbf{B} = [ \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_m ] \quad (6.11)$$

missä

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

Derivaatat globaalien  $x, y$ -koordinaattien suhteen saadaan derivaattoina peruselementin luonnollisten koordinaattien suhteen kuten on aiemmin esitetty.

Tasojännitystilän elementti on täysin tasomuodonmuutostilan elementin kaltainen. Ainoa ero on se, että materiaalin jäykkyysmatriisi on erilainen. Tasojännitystilän ehtosta  $\sigma_z = 0$  voidaan muodonmuutoskomponentti  $\epsilon_z$  ratkaista

$$\lambda \epsilon_x + \lambda \epsilon_y + (\lambda + 2\mu) \epsilon_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_z = -\frac{\lambda(\epsilon_x + \epsilon_y)}{\lambda + 2\mu}. \quad (6.13)$$

Sijoittamalla tämä takaisin kolmidimensioiseen konstitutiiviseen yhtälöön, saadaan

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} + 2\mu & \bar{\lambda} & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (6.14)$$

missä on merkitty

$$\bar{\lambda} = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu}. \quad (6.15)$$

Siirtymä-muodonmuutosmatriisi  $\mathbf{B}$  on identtinen tasomuodonmuutostilan elementin kanssa.

## 6.2 Pyörähdyssymmetrisen tilan elementti

Pyörähdyssymmetrisesti kuormitetun pyörähdyssymmetrisen kappaleen ratkaisu muistuttaa tasomuodonmuutostilan ratkaisua. Pyörähdyskappale muodostuu, kun  $rz$ -tason alue pyörähtää  $z$ -akselin ympäri. Pyörähdyssymmetristä kappaletta voidaan tutkia vain tarkastelemalla halkileikkauksen puolikasta.

Merkitään  $rz$ -tason siirtymiä symboleilla  $u$  ja  $w$  aivan vastaten tasojännitys- ja tasomuodonmuutostehtävissä tason  $xy$  siirtymiä  $u$  ja  $v$ . Muodonmuutoskomponenttien lausekkeet sylinterikoordinaatistossa ovat

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,r} \\ w_{,z} \\ r^{-1}u \\ u_{,z} + w_{,r} \end{Bmatrix}. \quad (6.16)$$

Konstitutiivinen laki saadaan suoraan kolmiulotteisen tilan materiaalilaista ja on muotoa

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix}. \quad (6.17)$$

Otaksumalla siirtymille samanlainen interpolaatio kuin tasotehtävissäkin (6.8) saadaan siirtymä-muodonmuutosmatriisiksi

$$\mathbf{B} = [ \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_m ], \quad (6.18)$$

missä

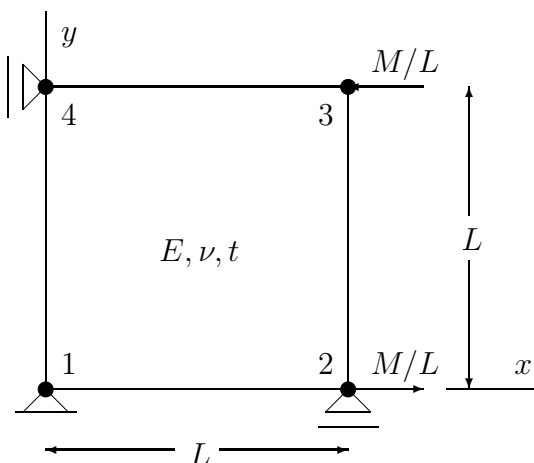
$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,r} & 0 \\ 0 & N_{i,z} \\ r^{-1}N_i & 0 \\ N_{i,z} & N_{i,r} \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

## 6.3 Esimerkkejä

**Esimerkki 6.1** Määritä oheisen yhdestä bilineaarisesti interpoloidusta tasojännitystilän elementistä muodostetun rakennemallin siirtymät ja jännitystila. Rakenne on kuormitettu momenttikuormalla  $M$  joka voidaan aikaansaada kahdella pistekuormalla solmuissa 2 ja 3. Rakenteen materiaalin kimmokerroin ja suppeamaluku olkoot  $E$  ja  $\nu$ . Ota huomioon symmetria ja antimetria aktiivien vapausasteiden  $(u_2, u_3, v_3, v_4)$  välillä, jolloin tehtävään jää ainoastaan kaksi tuntematonta solmupistesiertymää. Reunaehdothan ovat  $u_1 = v_1 = v_2 = u_4 = 0$ .

Havaitaan, että solmujen 2 ja 3 vaakasiirtymät ovat toistensa vastalukuja samaten kuin solmujen 3 ja 4 pystysiirtymät, eli

$$u_3 = -u_2, \quad v_4 = -v_3. \quad (6.20)$$



Ryhmitetään nyt elementin vapausasteet seuraavasti:

$$\mathbf{u}^{(e)} = \left[ u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \right]^T. \quad (6.21)$$

Vapausasteita  $u_2, u_3, v_3$  ja  $v_4$  vastaava yhtälösystemi on

$$\begin{bmatrix} K_{33} & K_{35} & K_{36} & K_{38} \\ K_{53} & K_{55} & K_{56} & K_{58} \\ K_{63} & K_{65} & K_{66} & K_{68} \\ K_{83} & K_{85} & K_{86} & K_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_{x2} \\ \bar{f}_{x3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

Ottamalla nyt huomioon vapausasteita sitovat yhteydet, saadaan ratkaistavaksi kahden tuntemattoman systeemi

$$\begin{bmatrix} K_{33} - K_{35} & K_{36} - K_{38} \\ K_{63} - K_{65} & K_{66} - K_{68} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_{x2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

Oletetaan materiaalin jäykkyyismatriisin olevan muotoa

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Jäykkyyismatriisin solmuihin  $i$  ja  $j$  liittyvä lohko on siten

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j t dA, \quad (6.25)$$

jossa solmuun  $i$  liittyvä muodonmuutos-siirtymämatriisi  $\mathbf{B}$  on

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}, \quad (6.26)$$

joten

$$\mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} D_{11}N_{i,x}N_{j,x} + D_{33}N_{i,y}N_{j,y} & D_{12}N_{i,x}N_{j,y} + D_{33}N_{i,y}N_{j,x} \\ D_{12}N_{i,y}N_{j,x} + D_{33}N_{i,x}N_{j,y} & D_{22}N_{i,y}N_{j,y} + D_{33}N_{i,x}N_{j,x} \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

Nyt geometrian kuvaus on yksinkertainen

$$x = (N_2 + N_3)L = \frac{1}{2}(1 + \xi)L, \quad y = (N_3 + N_4)L = \frac{1}{2}(1 + \eta)L, \quad (6.28)$$

josta kuvauksen Jacobiaani ja sen käänteismatriisi ovat

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}L \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{J} = \frac{1}{4}L^2, \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

josta seuraa derivaattojen muunnoksille yhtälöt

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (6.30)$$

Tarvitaan interpolaatiofunktioiden derivaattoja paikallisten koordinaattien suhteen

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), & N_{1,\xi} &= -\frac{1}{4}(1 - \eta), & N_{1,\eta} &= -\frac{1}{4}(1 - \xi), \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), & N_{2,\xi} &= \frac{1}{4}(1 - \eta), & N_{2,\eta} &= -\frac{1}{4}(1 + \xi), \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), & N_{3,\xi} &= \frac{1}{4}(1 + \eta), & N_{3,\eta} &= \frac{1}{4}(1 + \xi), \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta), & N_{4,\xi} &= -\frac{1}{4}(1 + \eta), & N_{4,\eta} &= \frac{1}{4}(1 - \xi). \end{aligned}$$

Tarvittavat jäykkymatriisin alkiot saadaan nyt

$$\begin{aligned} K_{33} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{11}N_{2,x}^2 + D_{33}N_{2,y}^2) J d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{3}t(D_{11} + D_{33}), \end{aligned} \quad (6.31a)$$

$$\begin{aligned} K_{35} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{11}N_{2,x}N_{3,x} + D_{33}N_{2,y}N_{3,y}) J d\xi d\eta \\ &= \left(\frac{1}{6}D_{11} - \frac{1}{3}D_{33}\right)t, \end{aligned} \quad (6.31b)$$

$$\begin{aligned} K_{36} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{12}N_{2,x}N_{3,y} + D_{33}N_{2,y}N_{3,x}) J d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{4}t(D_{12} - D_{33}), \end{aligned} \quad (6.31c)$$

$$\begin{aligned} K_{38} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{12}N_{2,x}N_{4,y} + D_{33}N_{2,y}N_{4,x}) J d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{4}t(D_{12} + D_{33}), \end{aligned} \quad (6.31d)$$

$$\begin{aligned} K_{65} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{12}N_{3,x}N_{3,y} + D_{33}N_{3,y}N_{3,x}) J d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{4}t(D_{12} + D_{33}), \end{aligned} \quad (6.31e)$$

$$\begin{aligned} K_{66} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{22}N_{3,y}^2 + D_{33}N_{3,x}^2) J d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{3}t(D_{22} + D_{33}), \end{aligned} \quad (6.31f)$$

$$\begin{aligned} K_{68} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_{22}N_{3,y}N_{4,y} + D_{33}N_{3,x}N_{4,x}) J d\xi d\eta \\ &= \left(\frac{1}{6}D_{22} + \frac{1}{3}D_{33}\right)t. \end{aligned} \quad (6.31g)$$

Tarvittavat matriisi-alkiot ovat siten

$$\begin{aligned} K_{33} - K_{35} &= \frac{1}{3}t(D_{11} + D_{33}) - \frac{1}{6}tD_{11} + \frac{1}{3}tD_{33} \\ &= \left(\frac{1}{6}D_{11} + \frac{2}{3}D_{33}\right)t, \end{aligned} \quad (6.32a)$$

$$\begin{aligned} K_{36} - K_{38} &= \frac{1}{4}t(D_{12} - D_{33}) + D_{12} - D_{33} \\ &= -\frac{1}{2}tD_{33}. \end{aligned} \quad (6.32b)$$

Isotrooppisesti kimmoisan aineen tapauksessa materiaalivakiot ovat

$$D_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad D_{33} = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (6.33)$$

jolloin siirtymien  $u_2$  ja  $v_3$  ratkaisuyhtälöiksi saadaan

$$\frac{Et}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\nu & -\frac{1}{4}(1 - \nu) \\ -\frac{1}{4}(1 - \nu) & \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M/L \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6.34)$$

Ratkaisu on siten

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{M}{ELt} \frac{1 - \nu^2}{\left(\frac{3}{16} - \frac{5}{24}\nu + \frac{7}{144}\nu^2\right)} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\nu & \frac{1}{4}(1 - \nu) \\ \frac{1}{4}(1 - \nu) & \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.35)$$



Lasketaan muutamalla eri  $\nu$ :n arvolla

$$\nu = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{Bmatrix} \frac{M}{ELt} = \begin{Bmatrix} 2.6666 \\ 1.3333 \end{Bmatrix} \frac{M}{ELt}, \quad (6.36)$$

$$\nu = 0.25 \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.821 \\ 1.270 \end{Bmatrix} \frac{M}{ELt}. \quad (6.37)$$

Siirtymätila on siten

$$\begin{aligned} u &= N_2 u_2 - N_3 u_2 = \frac{1}{4} [(1 + \xi)(1 - \eta) - (1 + \xi)(1 + \eta)] u_2 \\ &= -\frac{1}{2} (1 + \xi) \eta u_2, \end{aligned} \quad (6.38a)$$

$$\begin{aligned} v &= N_3 v_3 - N_4 v_3 = \frac{1}{4} [(1 + \xi)(1 + \eta) - (1 - \xi)(1 + \eta)] v_3 \\ &= \frac{1}{2} (1 + \eta) \xi v_3. \end{aligned} \quad (6.38b)$$

Venyvät saadaan määritelmän mukaan

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{L} \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\eta \frac{u_2}{L}, \quad (6.39a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2}{L} \frac{\partial v}{\partial \eta} = \xi \frac{v_3}{L}, \quad (6.39b)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2}{L} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \\ &= \left[ -(1 + \xi) \frac{u_2}{L} + (1 + \eta) \frac{v_3}{L} \right]. \end{aligned} \quad (6.39c)$$

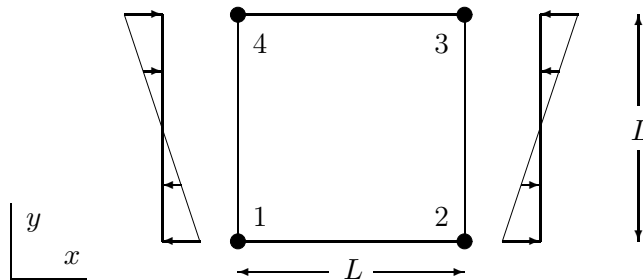
Havaitaan, että elementtiin syntyy liukumia vaikka kyseessä on puhdas taivutustila. Jännitykset saadaan konstitutiivisen lain kautta, ja ovat

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = \frac{E}{1 - \nu^2} \left( -\eta \frac{u_2}{L} + \nu \xi \frac{v_3}{L} \right), \quad (6.40a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) = \frac{E}{1 - \nu^2} \left( \xi \frac{v_3}{L} - \nu \eta \frac{u_2}{L} \right), \quad (6.40b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[ -(1 + \xi) \frac{u_2}{L} + (1 + \eta) \frac{v_3}{L} \right]. \quad (6.40c)$$

**Esimerkki 6.2** Määritä jännitykset kuvan bilineaarisessa tasojännitystilän elementissä, jota kuormittaa lineaarisesti jakautunut reunakuormitus joka on staattisesti samanarvoinen taivutusmomentin  $M$  kanssa. Ota huomioon symmetria ja antimetria vapausasteiden välillä. Kimmokerroin olkoon  $E$  ja suppeamaluku  $\nu = 0$ .



Koska suppeamaluku on nolla ei kappaleeseen synny siirtymiä  $y$ -akselin suunnassa, eli  $v \equiv 0$ . Symmetrian perusteella taas  $u_2 = u_4 = -u_1 = -u_3$ , joten siirtymätila kuvataan lausekkeella

$$u = (-N_1 + N_2 - N_3 + N_4)u_2. \quad (6.41)$$

Virtuaalisen työn yhtälö

$$t \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dA = \int_{\Gamma_t} t_{Sx} \delta u ds, \quad (6.42)$$

supistuu nyt muotoon ( $\epsilon_y = v_{,y} \equiv 0, \sigma_x = E\epsilon_x = Eu_{,x}, \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = Gu_{,y}$ ):

$$Et \int_{\Omega} (\epsilon_x \delta \epsilon_x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy}) dA = \int_{\Gamma_t} t_{Sx} \delta u ds. \quad (6.43)$$

Venymien lausekkeet ovat

$$\epsilon_x = \frac{2}{L} (-N_{1,\xi} + N_{2,\xi} - N_{3,\xi} + N_{4,\xi}) u_2, \quad (6.44)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{L} (-N_{1,\eta} + N_{2,\eta} - N_{3,\eta} + N_{4,\eta}) u_2. \quad (6.45)$$

Tarvittavat interpolaatiofunktioiden derivaatat lokaalien koordinaattien suhteen ovat

$$\begin{aligned} N_{1,\xi} &= -\frac{1}{4}(1-\eta), & N_{1,\eta} &= -\frac{1}{4}(1-\xi), \\ N_{2,\xi} &= \frac{1}{4}(1-\eta), & N_{2,\eta} &= -\frac{1}{4}(1+\xi), \\ N_{3,\xi} &= \frac{1}{4}(1+\eta), & N_{3,\eta} &= \frac{1}{4}(1+\xi), \\ N_{4,\xi} &= -\frac{1}{4}(1+\eta), & N_{4,\eta} &= \frac{1}{4}(1-\xi). \end{aligned} \quad (6.46)$$

Täten venymien lausekkeet ovat paikallisten koordinaattien avulla lausuttuna seuraavat

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{u_2}{2L} [(1-\eta) + (1-\eta) - (1+\eta) - (1+\eta)] u_2 \\ &= -2\eta \frac{u_2}{L}, \end{aligned} \quad (6.47a)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{u_2}{2L} [(1-\xi) - (1+\xi) - (1+\xi) + (1-\xi)] u_2 \\ &= -2\xi \frac{u_2}{L}. \end{aligned} \quad (6.47b)$$

Virtuaalisten venymien lausekkeet ovat vastaavasti

$$\delta \epsilon_x = -2\eta \frac{\delta u_2}{L}, \quad (6.48a)$$

$$\delta \gamma_{xy} = -2\xi \frac{\delta u_2}{L}. \quad (6.48b)$$

Lasketaan reunakuorman tekemä virtuaalinen työ. Reunakuormituksen maksimi-intensiteetti saadaan momentin  $M$  avulla

$$\bar{t}_m = 6 \frac{M}{L^2}. \quad (6.49)$$

Virtuaalinen siirtymä  $\delta u$  on reunalla 2:

$$\delta u(1, \eta) = (N_2 - N_3)\delta u_2 = -\eta\delta u_2. \quad (6.50)$$

Reunalla 2 virtuaalisen työn lauseke on

$$\int_{\Gamma_2} t_{Sx}\delta u ds = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 (-\eta t_m)(-\eta\delta u_2) d\eta = \frac{1}{3}t_m L\delta u_2. \quad (6.51)$$

Jännitysten tekemä virtuaalinen työ on

$$\begin{aligned} & Et \int_A (\epsilon_x \delta \epsilon_x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy}) dA \\ &= \delta u_2 \frac{1}{4} L^2 Et \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{4\eta^2}{L^2} + \frac{1}{2} \frac{4\xi^2}{L^2} \right) d\xi d\eta u_2 = \delta u_2 2Et u_2. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Siirtymä  $u_2$  voidaan siten ratkaista yhtälöstä

$$2Et u_2 = \frac{2}{3}t_m L \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{1}{3} \frac{t_m L}{Et} = 2 \frac{M}{EtL}. \quad (6.53)$$

Elementin jännitykset ovat

$$\begin{aligned} \sigma_y &\equiv 0, \\ \sigma_x &= E\epsilon_x = -E2\eta \frac{u_2}{L} = -4 \frac{M}{tL^2} \eta, \end{aligned} \quad (6.54)$$

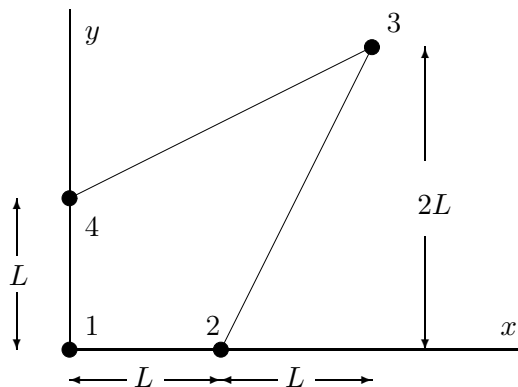
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = -E\xi \frac{u_2}{L} = -2 \frac{M}{tL^2} \xi. \quad (6.55)$$

Normaalijännityksille saatiin oikeat arvot, mutta elementtiin syntyy leikkausmuodonmuutosta ja siten leikkausjännityksiä puhtaan taivutuksen tapauksessa. Tämä johtuu bilineaarisesta interpolaatiosta, joka ei pysty kuvaamaan taivutustilaa korrektisti. Se vaatisi parabolisen siirtymätilan, tässä tapauksessa siis parabolisen  $v$ -komponentin.

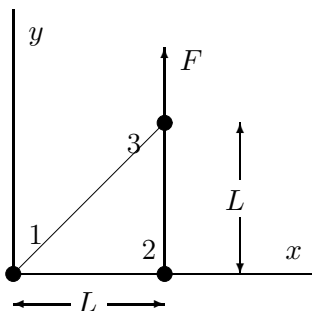
## 6.4 Harjoitustehtäviä

1. Kirjoita tasomuodonmuutos- ja tasojännitystilän kimmoisen isotrooppisen aineen materiaalin jäykkyysmatriisit kimmokertoimen  $E$  ja suppeamaluvin  $\nu$  avulla.
2. Muodosta tasojännitystilaa vastaavan lineaarisen kolmioelementin jäykkyysmatriisin eksplisiittinen lauseke.
3. Muodosta tasomuodonmuutostilaa vastaavan lineaarisen kolmioelementin jäykkyysmatriisin eksplisiittinen lauseke.
4. Muodosta tasojännitystilaa vastaavan bilineaarisesti interpoloidun elementin jäykkyysmatriisin eksplisiittinen lauseke.

5. Määritä oheisen tasojännitystilassa olevan levyelementin jännitykset elementin keskipisteessä ( $\xi = \eta = 0$ ), kun solmupistesiirtymät ovat:  $u_1 = u_4 = v_1 = v_2 = v_3 = 0, u_2 = v_4 = \Delta, u_3 = 2\Delta$ . Elementin paksuus olkoon  $t$  ja materiaalia kuvataan lineaarisesti kimmoisalla isotrooppisella mallilla, jonka parametrit ovat  $E$  ja  $\nu$ .



6. Oheista lineaarista *tasomuodonmuutostilan* kolmioelementtiä kuormittaa pystysuora pistevoima  $F$  solmussa 3. Solmujen 1 ja 2 vapausasteet ovat sidotut ( $\equiv 0$ ). Ratkaise tehtävä, eli määritä elementin siirtymä- ja jännitystila. Materiaalivakiot olkoon  $E$  ja  $\nu$ . Mitä tapahtuu kun  $\nu \rightarrow 0,5$  ja miksi?





# Luku 7

## Numeerinen integrointi

Luvussa esitetään elementtimenetelmässä yleisimmin käytössä olevat kvadratuurit, eli numeeriset integrointikaavat. Kvadratuurit muodostetaan korvaamalla integroitava funktio sen interpolaatiopolynomilla. Mikäli kvadratuuripisteet valitaan tasavälisesti saadaan Newtonin-Cotesin kvadratuuri, mitä elementtimenetelmässä käytetään vain dimensioreduktiomallien, eli palkkien, laattojen ja kuorien jäykkyysmatriisiin paksuussuuntaisessa integroinnissa.

Jäykkyysmatriisin kokoamiseen tarvittava laskentatyön määrä on suoraan verrannollinen integrointipisteiden lukumäärään. Täten on suotavaa, että elementtimatriisien ja voimavektoreiden integrointi suoritetaan mahdollisimman alhaisasteisella kvadratuurilla. Usein käytetään myös ali-integrointia. Ali-integrointi tai valikoiva ali-integrointi voi joissain tapauksissa johtaa parempiin tuloksiin kuin täysi integrointi. Valitettavasti näin ei aina ole, vaan ali-integrointi johtaa usein nollaenergiamuotojen syntymiseen ja ratkaisun epästabiiliuteen.

### 7.1 Johdanto

Isoparametrinen elementtien jäykkyysmatriisit ja kuormavektorit joudutaan yleensä muodostamaan numeerisella integroinnilla. Myös muissa tapauksissa numeerinen integrointi voi olla tarpeen. Materiaaliominaisuudet tai elementin paksuus voivat muuttua paikan mukana siten, että tarkka integrointi on hankalaa. Integrointikaavoista käytetään myös nimitystä kvadratuuri.

Yksiulotteisessa tapauksessa lausutaan integroitava funktio luonnollisen koordinaatin  $\xi$  avulla välillä  $[-1, 1]$ . Funktion  $f$  integraali

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad (7.1)$$

voidaan määrittää numeerisesti kaavalla

$$I \approx \sum w_i f(\xi_i), \quad (7.2)$$

missä  $\xi_i$ :t ovat integrointipisteet ja  $w_i$ :t ovat pisteisiin  $\xi_i$  liittyvät painokertoimet. Integraali  $I$  voidaan esittää tarkasti kaavalla

$$I = \sum w_i f(\xi_i) + R, \quad (7.3)$$

missä  $R$  on jäännös. Integraalin (7.1) laskemiseksi pyritään kehittämään kaavoja, joihin liittyvä jäännös on mahdollisimman pieni numeeriseen laskutyöhön nähden.

Kaava (7.2) voidaan yleistää välittömästi kaksiulotteiseen tapaukseen:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i w_j f(\xi_i, \eta_j). \quad (7.4)$$

## 7.2 Newton-Cotes menetelmä

Valitaan integrointipisteiden paikat  $\xi_i$  etukäteen ja integroitavaa funktiota approksimoidaan Lagrangen interpolaatiopolynomeilla, eli

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^n l_i^{n-1} f(\xi_i), \quad (7.5)$$

missä

$$l_i^{n-1}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \cdots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \cdots (\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \cdots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \cdots (\xi_i - \xi_n)}. \quad (7.6)$$

$l_i^{n-1}$  on  $n - 1$  asteinen polynomi, joka saa arvon 1 pisteessä  $\xi_i$  ja  $l_i^{n-1}(\xi_j) = 0$ , kun  $i \neq j$ .

Integraali  $I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$  on likimäärin

$$I \approx \int_{-1}^1 \left( \sum_{i=1}^n l_i^{n-1}(\xi) f(\xi_i) \right) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i), \quad (7.7)$$

missä

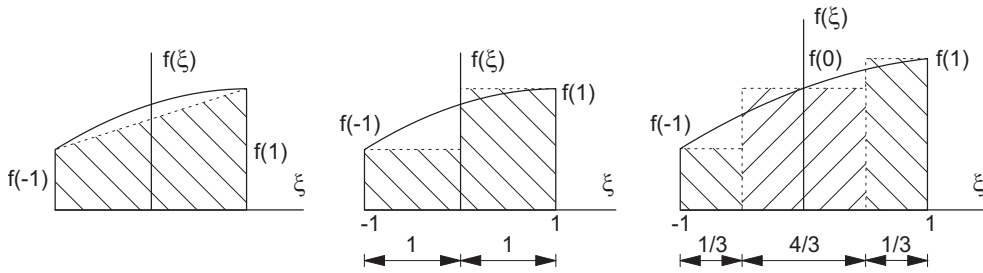
$$w_i = \int_{-1}^1 l_i^{n-1}(\xi) d\xi. \quad (7.8)$$

Newtonin-Cotesin kaava (7.7) integroi tarkasti  $(n - 1)$ -asteisen polynomin, mikäli  $n$  on parillinen ja  $n$ -asteisen polynomin mikäli  $n$  on pariton. Jäännöksen  $R$  lausekkeelle voidaan johtaa tulos

$$R = C \left( \frac{2}{n-1} \right)^{n+2} \frac{d^{n+1} f}{d\xi^{n+1}}, \quad n \text{ pariton}, \quad (7.9)$$

$$R = C \left( \frac{2}{n-1} \right)^{n+1} \frac{d^n f}{d\xi^n}, \quad n \text{ parillinen}, \quad (7.10)$$

missä  $C$  on funktiosta  $f$  riippumaton vakio. Virheen kaavoista havaitaan, että on syytä käyttää paritonta integrointipisteiden määrää. Huomaa myös, että virhe-estimaatin käyttö edellyttää integroitavalta funktiolta riittävää sileyttä.



**Kuva 7.1** Numeerinen integrointi kahden (a,b) ja kolmen pisteen Newton-Cotesin kaavoilla (c).

**Esimerkki 7.1** Kirjoitetaan eksplisiittisesti kahden ja kolmen pisteen Newton-Cotesin kaavat.

Valitaan kahden pisteen integrointikaavassa integrointipisteiden paikoiksi  $\xi_1 = -1$  ja  $\xi_2 = 1$ . Lagrangen interpolaatiopolynomit ovat

$$l_1^1 = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad l_2^1 = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (7.11)$$

Kaavasta (7.7) seuraa  $w_1 = w_2 = 1$ , joten

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) = f(-1) + f(1), \quad (7.12)$$

Lauseke voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = 2 \frac{1}{2} [f(-1) + f(1)], \quad (7.13)$$

joka on nimeltään trapetsikaava.

Kolmen pisteen tapauksessa valitaan integrointipisteiksi  $\xi_1 = -1, \xi_2 = 0$  ja  $\xi_3 = 1$ , ja vastaavat Lagrangen interpolaatiopolynomit ovat

$$l_1^2 = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)}, \quad (7.14a)$$

$$l_2^2 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)}, \quad (7.14b)$$

$$l_3^2 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}, \quad (7.14c)$$

Kaavan (7.7) perusteella painokertoimiksi saadaan  $w_1 = \frac{1}{3}, w_2 = \frac{4}{3}$  ja  $w_3 = \frac{1}{3}$ . Tällöin integraalin arvoksi saadaan

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \frac{1}{3} f(-1) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1), \quad (7.15)$$

mikä on kolmen pisteen Simpsonin kaava, katso kuvaa 7.1.



### 7.3 Gaussin-Legendren menetelmä

Gaussin-Legendren menetelmässä sekä integrointipisteet  $\xi_i$  että painokertoimet  $w_i$  pyritään valitsemaan optimaalisesti siten, että menetelmä integroisi tarkasti mahdollisimman korkea-asteisen polynomin.

Tarkastellaan  $(2n - 1)$ -asteista polynomia

$$p(\xi) = a_1 + a_2\xi + a_3\xi^2 + \cdots + a_{2n-1}\xi^{2n-2} + a_{2n}\xi^{2n-1}, \quad (7.16)$$

missä on  $2n$  termiä. Integroimalla polynomi tulee

$$I = \int_{-1}^1 p(\xi)d\xi = 2a_1 + \frac{2}{3}a_3 + \cdots + \frac{2}{2n-1}a_{2n-1}. \quad (7.17)$$

Sovellettaessa määritelmää (7.2), saadaan

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 p(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^n p(\xi_i)w_i \\ &= a_1 \sum_{i=1}^n w_i + a_2 \sum_{i=1}^n w_i\xi_i + a_3 \sum_{i=1}^n w_i\xi_i^2 + \cdots + a_{2n-1} \sum_{i=1}^n w_i\xi_i^{2n-2} + a_{2n} \sum_{i=1}^n \xi_i^{2n-1}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Vertaamalla kaavoja (7.17) ja (7.18) havaitaan, että

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i &= 2, & \sum_{i=1}^n w_i\xi_i &= 0, & \sum_{i=1}^n w_i\xi_i^2 &= \frac{2}{3}, \cdots \\ \sum_{i=1}^n w_i\xi_i^{2n-2} &= \frac{2}{2n-1}, & \sum_{i=1}^n w_i\xi_i^{2n-1} &= 0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Polynomissa (7.16) on  $2n$  termiä. Kaavoissa (7.19) on  $2n$  ehtoa, joiden avulla voidaan määrittää kaavan (7.18)  $2n$  tuntematonta:  $n$  painokerrointa  $w_i$  ja  $n$  integroimis pistettä (Gaussin pistettä)  $\xi_i$ .

Voidaan osoittaa, että  $n$ -pisteisen Gaussin-Legendren kvadratuurin integrointipisteiden paikka määräytyy astetta  $n$  olevan Legendren polynomin nollakohtien perusteella, ja painokertoimiksi saadaan yleisesti lauseke

$$w_i = \frac{2(1 - \xi_i^2)}{[nP_{n-1}(\xi_i)]^2}. \quad (7.20)$$

Gaussin-Legendren  $n:n$  pisteen menetelmä integroi tarkasti  $(2n - 1)$ -asteisen polynomin, joten menetelmä on tarkempi kuin Newton-Cotesin kvadratuuri. Jäännöksen  $R$  lausekkeeksi voidaan johtaa

$$R = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} \frac{d^{2n}f}{d\xi^{2n}}. \quad (7.21)$$

**Esimerkki 7.2** Määritetään Gaussin-Legendren menetelmän painokertoimet ja integroimispisteiden paikat kun  $n = 2, 3$ .

Kahden integrointipisteen tapauksessa yhtälöistä (7.19) seuraa

$$w_1 + w_2 = 2, \quad w_1\xi_1 + w_2\xi_2 = 0, \quad w_1\xi_1^2 + w_2\xi_2^2 = \frac{2}{3}, \quad w_1\xi_1^3 + w_2\xi_2^3 = 0. \quad (7.22)$$

Symmetrian perusteella  $w_1 = w_2$  ja  $\xi_1 = -\xi_2$ , jolloin ratkaisuksi saadaan

$$w_1 = w_2 = 1, \quad \xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (7.23)$$

Tapauksessa  $n = 3$  saadaan ehdot

$$w_1 + w_2 + w_3 = 2 \quad (7.24a)$$

$$w_1\xi_1 + w_2\xi_2 + w_3\xi_3 = 0 \quad (7.24b)$$

$$w_1\xi_1^2 + w_2\xi_2^2 + w_3\xi_3^2 = \frac{2}{3} \quad (7.24c)$$

$$w_1\xi_1^3 + w_2\xi_2^3 + w_3\xi_3^3 = 0 \quad (7.24d)$$

$$w_1\xi_1^4 + w_2\xi_2^4 + w_3\xi_3^4 = \frac{2}{5} \quad (7.24e)$$

$$w_1\xi_1^5 + w_2\xi_2^5 + w_3\xi_3^5 = 0 \quad (7.24f)$$

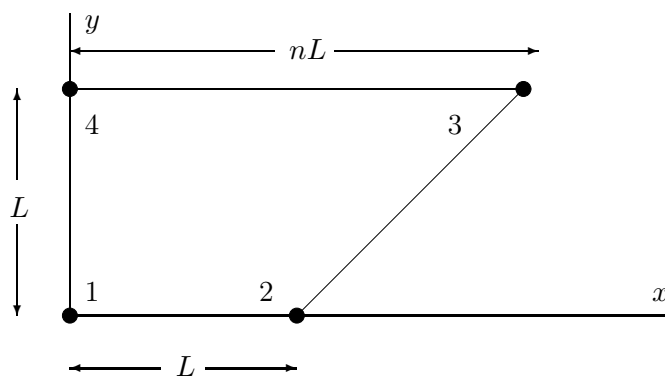
Symmetrian perusteella  $\xi_3 = -\xi_1, \xi_2 = 0$  ja  $w_1 = w_3$ , jolloin ratkaisuksi saadaan

$$\xi_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad w_1 = \frac{5}{9}, \quad w_2 = \frac{8}{9}, \quad w_3 = \frac{5}{9}. \quad (7.25)$$

**Esimerkki 7.3** Tutki virhettä suhteen  $n$  funktiona ( $n = 2, 3, 5, 10$ ) integraalissa

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{\det(\mathbf{J})} d\xi d\eta \quad (7.26)$$

kun se integroidaan numeerisesti yhden pisteen,  $2 \times 2$ -pisteen ja  $3 \times 3$ -pisteen Gaussin kaavoilla.



Määritetään geometriakuvauksen Jakobiaani, jota varten tarvitaan siirtymien interpolaatioiden lausekkeet:

$$x = (N_2 + nN_3)L = \frac{1}{4}(1 + \xi) [1 - \eta + n(1 + \eta)] L, \quad (7.27a)$$

$$y = (N_3 + N_4)L = \frac{1}{2}(1 + \eta)L \quad (7.27b)$$

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+n+(n-1)\eta & 0 \\ (1+\xi)(n-1) & 2 \end{bmatrix} L \quad (7.28)$$

$$\det \mathbf{J} = \frac{1}{8} L^2 [1+n+(n-1)\eta] = \frac{1}{8} L^2 (a_0 + a_1 \eta). \quad (7.29)$$

Lasketaan integraali ensin tarkasti

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{\det \mathbf{J}} d\xi d\eta = \frac{16}{L^2} \int_{-1}^1 \frac{d\eta}{a_0 + a_1 \eta} \\ &= \frac{16}{L^2} \Big|_{-1}^1 \frac{1}{a_1} \ln(a_0 + a_1 \eta) = \frac{16}{L^2} \Big|_{-1}^1 \frac{1}{n-1} \ln(1+n+(n-1)\eta) \\ &= \frac{16}{L^2} \frac{1}{n-1} \ln n \end{aligned} \quad (7.30)$$

Koska integrandi on vakio  $\xi$ -koordinaatin suunnassa, voidaan tarkastella vain numeerista integrointia  $\eta$ -koordinaatin suunnassa. Gaussin-Legendren kaavoilla laskettuna saadaan seuraavat tulokset:

1. Yhden pisteen kaavalla  $w_1 = 2, \eta_1 = 0$ :

$$I \approx L^{-2} \frac{32}{1+n} \quad (7.31)$$

2. Kahden pisteen kaavalla  $w_1 = w_2 = 1, \eta_1 = -1/\sqrt{3}, \eta_2 = 1/\sqrt{3}$ :

$$I \approx L^{-2} 16 \left[ \frac{1}{1+n-\frac{1}{\sqrt{3}}(n-1)} + \frac{1}{1+n+\frac{1}{\sqrt{3}}(n-1)} \right] \quad (7.32)$$

3. Kolmen pisteen kaavalla  $w_1 = w_3 = 5/9, w_2 = 8/9, \eta_1 = -\sqrt{3/5}, \eta_2 = 0, \eta_3 = \sqrt{3/5}$ :

$$I \approx L^{-2} 16 \frac{1}{9} \left[ \frac{5}{1+n-\sqrt{3/5}(n-1)} + \frac{8}{1+n} + \frac{5}{1+n+\sqrt{3/5}(n-1)} \right] \quad (7.33)$$

Kootaan tulokset taulukkoon:

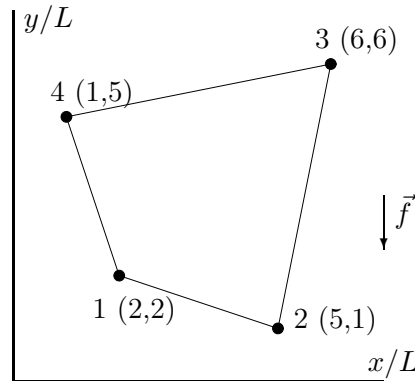
	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 10$
$1 \times 1$	10.666	8.0000	5.3333	2.9090
$2 \times 2$	11.077	8.7772	6.2608	3.7446
$3 \times 3$	11.0899	8.7890	6.4107	3.9939
tarkka	11.0904	8.7889	6.4378	4.0935

Havaitaan, että virhe integraalin numeerisen arvon määrittämisessä Gaussin-Legendren kvadratuurilla kasvaa elementin vääristymän lisääntyessä. Huomaa, että oheinen integraali on seurausta laskettaessa muodon

$$\int_{\Omega} N_{i,x} N_{j,x} dA \quad (7.34)$$

tyyppisiä lausekkeita. Täten on syytä välttää elementtien liiallista vääristämistä.

**Esimerkki 7.4** Määritetään oheisen kuvan mukaisen bilineaarisen elementin tilavuusvoimia vastaava vektori  $\bar{\mathbf{f}}^{(e)}$  käyttäen numeerista integrointia.



$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{f} t J d\xi d\eta, \quad (7.35)$$

kun

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{Bmatrix}, \quad (7.36)$$

missä  $\rho$  on materiaalin tiheys ja  $g$  maan vetovoiman kiihtyvyys.

Jacobin matriisi on kuvan elementille

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 4 + \eta & \eta \\ \xi & 4 + \xi \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

ja determinantti  $J = \det \mathbf{J} = (4 + \xi + \eta)L^2$ . Solmuun  $i$  liittyvä osuus,  $(2 \times 1)$ -vektori, on

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = t\rho g \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i J \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} d\xi d\eta, \quad (7.38)$$

missä  $N_i$  on määritelty kaavalla (4.161).

Sovelletaan nyt Gaussin-Legendren kvadratuurikaavoja ensin solmuun 1 liittyvään integraaliin

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_1 J d\xi d\eta &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(4 + \xi + \eta) d\xi d\eta L^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(4 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(4 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(4 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(4 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] L^2 \\ &= \frac{10}{3} L^2. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Samalla tavalla saadaan

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_2 J d\xi d\eta = 4L^2, \quad (7.40)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_3 J d\xi d\eta = \frac{14}{3}L^2, \quad (7.41)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_4 J d\xi d\eta = 4L^2. \quad (7.42)$$

Tilavuusvoimista  $f_x = 0$  ja  $f_y = \rho g$  aiheutuva voimavektori on siten

$$\mathbf{f}^{(e)} = -\frac{2\rho g t L^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 6 & 0 & 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}^T. \quad (7.43)$$

## 7.4 Gaussin-Lobatto menetelmä

Gaussin-Lobatto integroimiskaava eroaa Gaussin-Legendren kvadratuureista ai-noastaan siinä, että välin päätepisteet valitaan aina myös integroimispisteiksi. Muut kvadratuuripisteet samaten kuin integroimispisteisiin liittyvät painot määritetään vastaavaan tapaan kuin Gaussin-Legendren menettelyssä. Koska kahden integroimispisteen paikka on ennalta määrätty, tarvitaan Gaussin-Lobatto menettelyssä yksi integroimispiste enemmän kuin vastaavassa Gaussin-Legendren menetelmässä tietynasteisen polynomin tarkkaan integrointiin. Integroimispisteiden paikkoja kutsutaan myös Lobatto pisteiksi.

**Esimerkki 7.5** Määritetään sen Gaussin-Lobatto kvadratuurin integroimispisteiden paikat ja painojen arvot, joka integroi tarkasti viidennen asteen polynomin.

Integroimispisteitä tarvitaan siis neljä. Symmetrian perusteella on määritettävänä vain yhden pisteen paikka ja kaksi painokerrointa. Kaavaa (7.18) vastaava yhtälö on

$$I = w_1 p(-1) + w_2 p(-\xi_2) + w_2 p(\xi_2) + w_1 p(1). \quad (7.44)$$

Vertaamalla lauseketta yhtälöön (7.19) saadaan

$$2w_1 + 2w_2 = 2, \quad 2w_1 + 2w_2 \xi_2^2 = \frac{2}{3}, \quad 2w_1 + 2w_2 \xi_2^4 = \frac{2}{5}, \quad (7.45)$$

josta saadaan ratkaisuksi

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{1}{5}}, \quad w_1 = \frac{1}{6}, \quad w_2 = \frac{5}{6}. \quad (7.46)$$

## 7.5 Numeerinen integrointi kolmioelementissä

Alakoordinaateista riippuvat funktiot integroidaan kaavalla

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} f(L_1, L_2, L_3) dL_2 dL_1 = \sum_{i=1}^n 2w_i A f(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}) + R, \quad (7.47)$$

missä  $L_3 = 1 - L_1 - L_2$ ,  $w_i$ :t ovat integroimispisteisiin  $i$  liittyvät painokertoimet,  $n$  on integroimispisteiden lukumäärä,  $R$  on jäännöstermi ja  $A$  on elementin pinta-ala. Taulukkoon (7.1) on koottu joitakin kolmioalueen integroimiskaavoja.

**Taulukko 7.1** Kolmioalueen integroimispisteitä ja painokertoimia.

Kertaluku	virhetermi $R$	alakoordinaatit			paino $2w_i$
		$L_1$	$L_2$	$L_3$	
lineaarinen	$O(h^2)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
kvadraattinen	$O(h^3)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
		$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
kuubinen	$O(h^4)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{27}{48}$
		$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{25}{48}$
		$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{25}{48}$
		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{25}{48}$
		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{25}{48}$

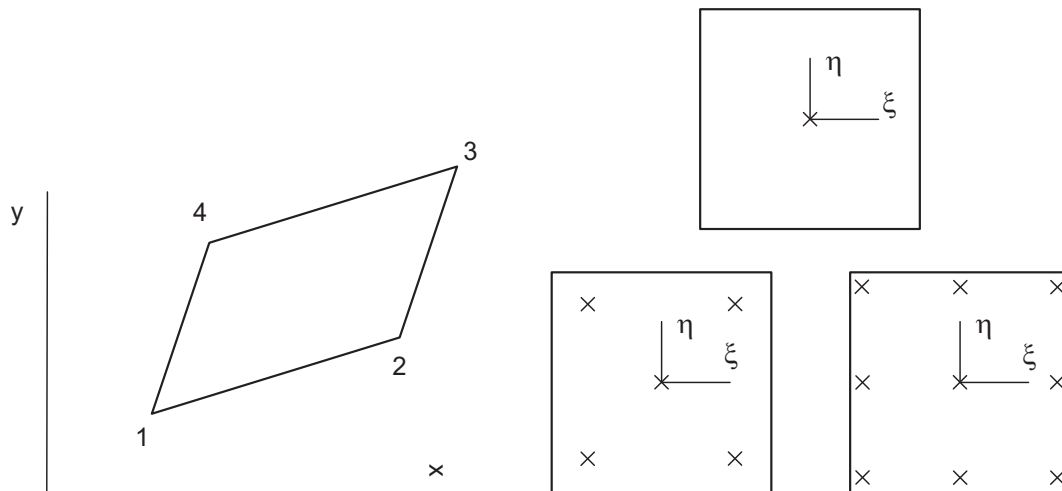
## 7.6 Isoparametrinen elementtien integrointi

### 7.6.1 Yleistä

Gaussin menetelmä soveltuu yhtä hyvin yksi-, kaksi- ja kolmiulotteisiin tehtäviin. Integroimispisteiden lukumäärä on tavallisesti sama eri suunnissa (2- ja 3-ulotteisissa tapauksissa). Sensijaan integroimispisteiden lukumäärän valinta on monitahoinen tehtävä.

Nelisolmuisen suorakaiteen tai myös kuvan 7.2 vinokaiteen tapauksessa Jacobin determinantti  $J$  on vakio, ja siirtymä-muodonmuutosmatriisiin  $\mathbf{B}$ -alkiot riippuvat lineaarisesti luonnollisista koordinaateista  $\xi$  ja  $\eta$ . Jos materiaalin jäykkyysmatriisiin  $\mathbf{D}$  alkiot ja paksuus  $t$  ovat vakioita, niin Gaussin  $2 \times 2$  pisteen integroimiskaava antaa tarkan tuloksen. Vastaavasti kahdeksansolmuisen suorakaiteen muotoisen elementin tapauksessa  $J$ =vakio, sisältää  $\mathbf{B}$ -matriisi kvadraattiset  $\xi$ :n ja  $\eta$ :n polynomit, ja jäykkyysmatriisin termien laskemisessa joudutaan integroimaan neljännen asteen polynomeja. Tällöin Gaussin  $3 \times 3$  pisteen kaava tuottaa tarkan tuloksen.

Nelisolmuisen elementin tapauksessa  $2 \times 2$  pisteen Gaussin menetelmää sanotaan *täydelliseksi* integroinniksi, koska se integroi tarkasti säännöllisen muotoisen



**Kuva 7.2** Bilineaarinen elementti sekä Gaussin pisteet  $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$  ja  $3 \times 3$  pisteen kaavoissa.

elementin jäykkyyismatriisiin termit. Samasta syystä  $3 \times 3$  pisteen kaava on täydellinen kvadraattisille elementeille.

Elementin muodon poiketessa suorakaiteesta ei  $J$  enää ole vakio ja  $\mathbf{B}$ -matriisiin alkiot sisältävät  $\xi$ :n ja  $\eta$ :n rationaalifunktioita. Täten elementin jäykkyyismatriisiin alkiot eivät enää ole polynomeja, eivätkä Gaussin kvadratuurit tuota tarkkoja tuloksia. Voidaan päätellä, että elementin muodon on oltava mahdollisimman lähellä suorakaidetta hyvän tarkkuuden saavuttamiseksi.

Integrointipisteiden lukumäärän kasvattaminen parantaa integroinnin tarkkuutta, mutta lisää samalla laskentakustannuksia. Numeerinen integrointi voi tuoda epätarkkuutta elementin muodostamiseen. Tarkka integrointi ei ole välttämättä edes edullista elementtimenetelmän tulosten tarkkuuden kannalta. Elementin otaksuttu siirtymätila sisältää vain rajoitetun määrän deformaatiomuotoja, joiden avulla ei voida yleensä esittää tehtävän tarkkaa siirtymätilaa. Otaksutut siirtymätilat merkitsevät sitä, että analysoitava rakenne on korvattu rakenteella, joka sisältää äärellisen määrän siirtymätiloja. Korvaava rakenne, eli elementtimalli on siten jäykempi kuin todellinen rakenne. Korvausrakenteen liiallista jäykkyyttä voidaan käytännössä pienentää soveltamalla täydellistä integrointia alhaisasteisempaa menetelmää eli redusoitua integrointia. Redusoitu integrointi on myös laskentakustannusten kannalta edullisempaa.

Redusoidun integroinnin seurauksena voi syntyä nollaenergiamuotoja eli deformaatiomuotoja, joihin liittyvä muodonmuutosenergia on nolla ja joiden seurauksena jäykkyyismatriisi on singulaarinen tai lähes singulaarinen.

Elementin muodonmuutosenergia on

$$U^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} U_0 dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} dV, \quad (7.48)$$

missä  $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}^{(e)}$ . Muodonmuutosenergia on täten

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(e)T} \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{u}^{(e)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}. \quad (7.49)$$

Elementtiverkkoa tihennettäessä elementin muodonmuutostila lähenee vakiotilaa eli  $U_0^{(e)}$  lähestyy vakiota elementin alueella. Jos  $U_0^{(e)}$  on vakio, niin  $U^{(e)}$ :n määrittämiseksi täytyy tilavuus integroida tarkasti. Täten esimerkiksi levytehtävissä on numeerisen kvadratuurin integroitava  $tJ$  tarkasti. Esimerkiksi bilineaarisen elementin tapauksessa, jos  $t$ =vakio,  $tJ$  riippuu lineaarisesti koordinaateista  $\xi$  ja  $\eta$ . Tällöin integrointipisteiden vähimmäismäärä on yksi. Kvadraattisen elementin tapauksessa  $J$  sisältää termit  $\xi^3$  ja  $\eta^3$ , joten tarvitaan  $2 \times 2$  Gaussin kaavaa tilavuuden tarkkaan integrointiin.

Isoparametristen elementtien tapauksessa paras integrointimenetelmä on tavallisesti alhaisasteisin menetelmä, joka integroi tilavuuden tarkasti ja joka tuottaa stabiilin jäykkyyismatriisin ja elementtimallin, johon ei sisälly nollaenergiamuotoja.

### 7.6.2 Redusoitu integrointi ja nollaenergiamuodot

Elementtimenetelmän tasapainoyhtälöryhmä on

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (7.50)$$

Mikäli siirtymävektori  $\mathbf{u}$  vastaa jäykän kappaleen liikettä, niin

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K}\mathbf{u} = 0. \quad (7.51)$$

Siirtymätilaa  $\mathbf{u}$ , johon liittyvä muodonmuutosenergia on nolla, voidaan nimittää nollaenergiamuodoksi. Koska jäykänkappaleen liike voidaan ja täytyykin eliminoida siirtymäreunaehtojen avulla, nollaenergiamuotoja ovat varsinaisesti muut kuin yhtälön (7.51) toteuttavat siirtymätilat, jotka eivät vastaa jäykänkappaleen liikettä. Nollaenergiamuotoja voi syntyä elementtiverkkoon ja elementtiin esimerkiksi redusoidun integroinnin seurauksena.

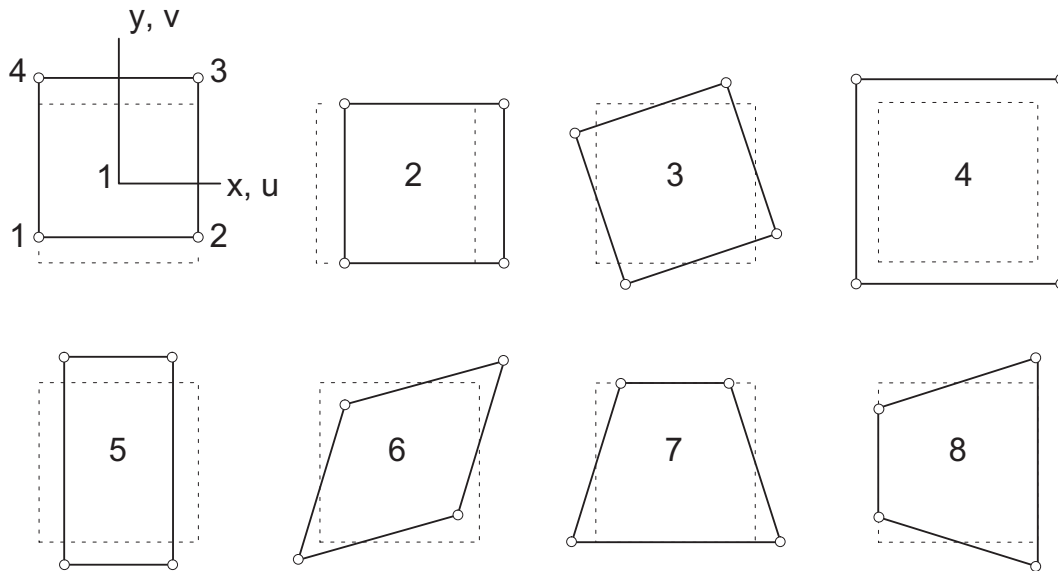
Kuvassa 7.3 on esitetty nelisolmuisen bilineaarisen elementin siirtymätilat eli ominaismuodot.

Kuvan 7.3 siirtymätilat 1,2 ja 3 ovat jäykän kappaleen liikkeitä. Tilat 4,5 ja 6 liittyvät vakiomuodonmuutostiloihin, joissa elementin muodonmuutosenergia  $U^{(e)} > 0$ . Tilat 7 ja 8 ovat taivutusmuotoja. Jos käytetään yhden pisteen Gaussin integrointia, niin tiloihin 7 ja 8 liittyvä muodonmuutosenergia on nolla ja tilat 7 ja 8 ovat tässä tapauksessa nollaenergiamuotoja.

Ominaismuotoon 7 liittyvä elementin siirtymävektori on

$$\mathbf{u}^{(e)T} = [ -c \ 0 \ c \ 0 \ -c \ 0 \ c \ 0 ], \quad (7.52)$$





**Kuva 7.3** Bilineaarisen elementin ominaismuodot.

ja siirtymäkenttä on

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) u_i = (-N_1(\xi, \eta) + N_2(\xi, \eta) - N_3(\xi, \eta) + N_4(\xi, \eta))c = (7.53a)$$

$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) v_i = 0. \quad (7.53b)$$

Jacobian matriisi on suorakaide-elementin tapauksessa

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_{21} & 0 \\ 0 & y_{31} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}^{-1} = \frac{2}{x_{21}y_{31}} \begin{bmatrix} y_{31} & 0 \\ 0 & x_{21} \end{bmatrix}, \quad x_{21} = x_2 - x_1, \quad y_{31} = y_3 - y_1. \quad (7.54)$$

Siirtymägradienttivektorin

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{Bmatrix} \quad (7.55)$$

komponentit ovat tässä tapauksessa

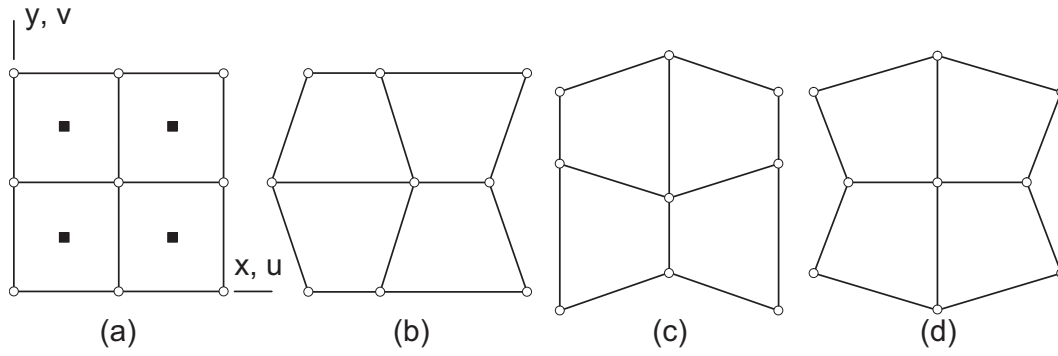
$$u_{,x} = -\frac{2c}{(x_2 - x_1)}\eta \quad \text{ja} \quad u_{,y} = -\frac{2c}{(y_3 - y_1)}\xi. \quad (7.56)$$

Koska  $v = 0$ , ovat muodonmuutoskomponentit nyt

$$\epsilon_x = -\frac{2c}{(x_2 - x_1)}\eta, \quad \epsilon_y = 0 \quad \text{ja} \quad \gamma_{xy} = -\frac{2c}{(y_3 - y_1)}\xi. \quad (7.57)$$

Elementin keskipisteessä eli Gaussin yhden pisteen kvadratuurin integrointipisteessä

$$\epsilon_x(0, 0) = \epsilon_y(0, 0) = \gamma_{xy}(0, 0) = 0 \quad (7.58)$$



**Kuva 7.4** Gaussin  $1 \times 1$ -integroinnin synnyttämät mekanismit neljän bilineaarisen elementin verkossa.

ja kyseisellä integrointimenettelyllä määritetty elementin jäykkyydsmatriisi

$$\mathbf{K}^{(e)} = (twJB^T DB) |_{\xi=\eta=0} \quad (7.59)$$

on epästabiili eli

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{0} \quad \text{ja} \quad U^{(e)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = 0. \quad (7.60)$$

Siirtymämuotoja 7 ja 8 voidaan nimittää mekanismeiksi  $1 \times 1$ -integroinnin yhteydessä. Mekanismeja voi syntyä paitsi elementtiin myös elementtiverkkoon. Kuvan 7.4 mekanismeja nimitetään muotonsa perusteella myös tiimalasimuodoiksi (hourglass modes). Kuvan mekanismit koostuvat siirtymätiloista 7 ja 8, joihin on yhdistetty jäykän kappaleen rotaatio.

Mekanismin synnyttämiseksi elementin ei tarvitse olla suorakaiteen muotoinen. Jos elementin siirtymätila on esimerkiksi

$$u = a_1 \xi \eta \quad \text{ja} \quad v = a_2 \xi \eta \quad (7.61)$$

missä  $a_1$  ja  $a_2$  ovat vakioita, niin Gaussin pisteessä  $\xi = \eta = 0$

$$u_{,\xi} = u_{,\eta} = v_{,\xi} = v_{,\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = 0 \quad (7.62)$$

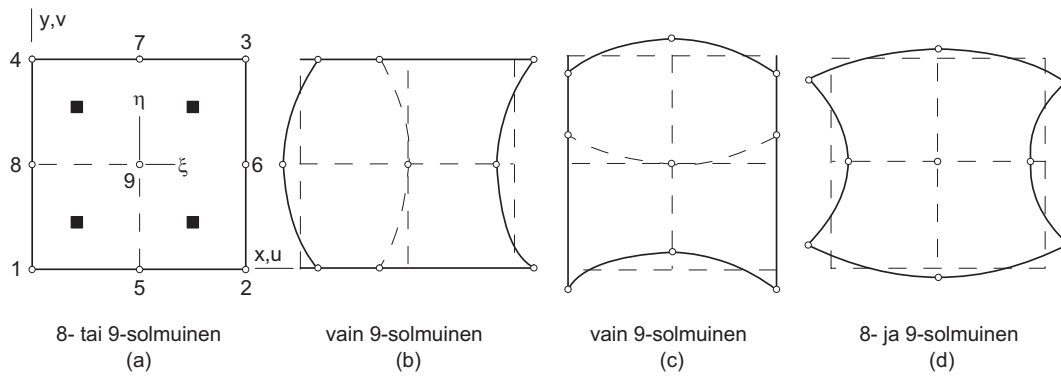
riippumatta elementin muodosta.

Tarkastellaan seuraavaksi kvadraattista elementtiä Gaussin  $2 \times 2$  integroinnin yhteydessä. Kuvan 7.5b yhdeksänsolmuisen elementin siirtymät ovat

$$u = 3\xi^2\eta^2 - \xi^2 - \eta^2 \quad \text{ja} \quad v = 0. \quad (7.63)$$

Gaussin menetelmän  $2 \times 2$ -pisteen kaavan integroimispisteissä  $\xi = \pm 1/\sqrt{3}$  ja  $\eta = \pm 1/\sqrt{3}$  siirtymistä (7.63) seuraa

$$u_{,\xi} = u_{,\eta} = v_{,\xi} = v_{,\eta} = 0 \quad (7.64)$$



**Kuva 7.5** Kvadraattisten elementtien tiimalasimuotoja.

ja muodonmuutokset ovat nollia kyseisissä integroimispisteissä. Kuvien 7.5b ja c muodot eivät ole mahdollisia 8-solmuisessa elementissä, koska sen interpolaatiofunktiot eivät sisällä termiä  $\xi^2\eta^2$ . Sensijaan kuvan 7.5d muoto on mahdollinen sekä 8-että 9-solmuisessa elementissä. Mekanismiin liittyvä siirtymäkenttä on

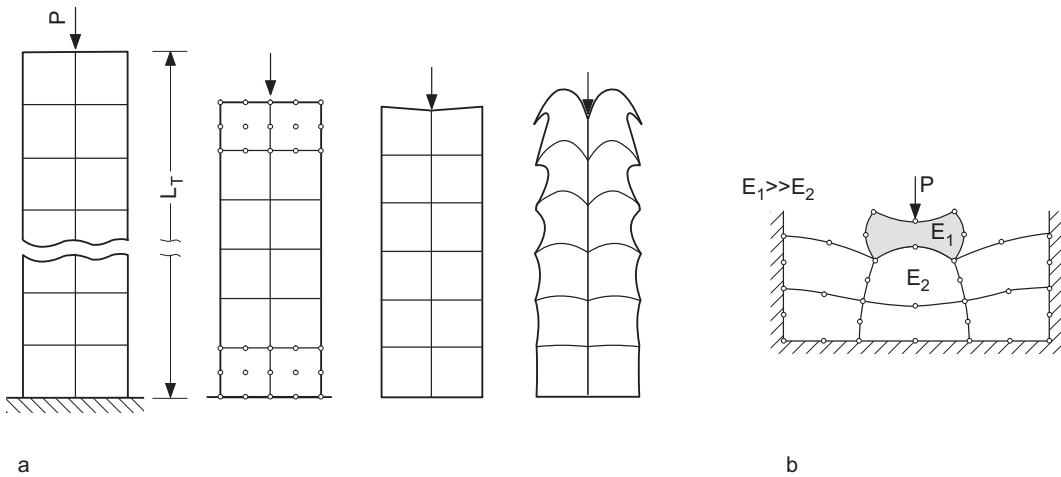
$$u = \xi(3\eta^2 - 1) \quad \text{ja} \quad v = \eta(1 - 3\xi^2) \quad (7.65)$$

ja näitä siirtymiä vastaavat muodonmuutokset ovat nollia Gaussin  $2 \times 2$ -kaavan pisteissä. Kuvan 7.5d mekaniismi ei ole mahdollinen vierekkäisissä elementeissä, koska näin deformatuvat vierekkäiset elementit eivät ole yhteensopivia.

Elementin jäykkyyismatriisin säännöllisyysaste eli rangi on vapausasteiden lukumäärä vähennettynä nollaenergiamuodoilla, joita ovat jäykän kappaleen siirtymämuodot ja mekanismit. Gaussin  $2 \times 2$ -kaavalla integroidun 9-solmuisen elementin rangi on  $2 \times 9 - 3 - 3 = 18 - 6 = 12$ . Vastaavasti 8-solmuisen elementin rangi on  $16 - 3 - 1 = 12$  eli sama kuin vastaavan 9-solmuisen elementin rangi. Elementin epästabiilius voidaan välttää käyttämällä  $3 \times 3$ -integrointia.

Vaikkei elementtiverkkoon sisältyisikään mekanismia, se voi silti käyttäytyä huonosti, jos mekanismin syntymistä estävä rajoite on heikko. Kuvan 7.6a verkko koostuu yhden pisteen kaavalla integroiduista nelisolmuisista elementeistä tai  $2 \times 2$ -kaavalla integroiduista 9 solmuisista elementeistä. Jäykkä kiinnitys estää mekanismin syntymisen keskeisen pistekuorman tapauksessa. Kiinnityksen antaman rajoitteen vaikutus pienenee, kun etäisyys tuelta kasvaa. Pistekuorman läheisyydessä siirtymätilaan ilmestyy kuvien 7.4 ja 7.5 esittämiä deformaatiokomponentteja. Esimerkiksi  $2 \times 24$  elementin verkolla laskettuna siirtymä on 500-kertainen 'tarkkaan tulokseen'  $u = PL/EA$  verrattuna.

Kuvan 7.6b tapauksessa vinoviivoitetun elementin, johon pistekuorma  $P$  kohdistuu, kimmokerroin  $E_1$  on paljon suurempi kuin viereisen osan kimmokerroin  $E_2$ . Jäykkään reunaan tuetut joustavat elementit tukevat heikosti jäykkää elementtiä, ja  $2 \times 2$ -kaavalla integroituihin kvadraattisiin elementteihin syntyy rajoitettu mekanismia muistuttava siirtymätila.



**Kuva 7.6** Tiimalasimuotoja elementtiverkossa.

Mekanismeista aiheutuvien vaikeuksien välttämiseksi, mahdollisen tarkkuuden menetyksen kustannuksella, varovainen analysoija tyytyy käyttämään vain elementtejä, jotka ovat stabiileja kaikissa olosuhteissa.

### 7.6.3 Mekanismin kontrollointi

Redusoidulla integroinnilla saadaan aikaiseksi tarkkoja ja luotettavia elementtejä, jos mekanismien syntyminen voidaan jollakin tavalla estää. Tarkastellaan esimerkiksi bilineaarista elementtiä ja yksinkertaisuuden vuoksi sen  $x$ -akselin suuntaisia solmuniirtymiä  $\mathbf{u}_x^{(e)}$ . Kuvan 7.3 siirtymämuodoissa 1 ja 8  $\mathbf{u}_x^{(e)} = \mathbf{0}$ . Muotojen 2, ..., 6 mielivaltainen yhdistelmä on

$$\mathbf{u}_x^{(e)} = a_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} + a_4 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + a_5 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_6 \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (7.66)$$

missä  $a_i$ :t ovat vakioita. Kuvan 7.3 ominaismuoto 7 on

$$\mathbf{u}_{x7}^{(e)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (7.67)$$

Muoto 7 on ortogonaalinen muiden muotojen kanssa eli

$$\mathbf{u}_{x7}^{(e)T} \mathbf{u}_{xi}^{(e)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8. \quad (7.68)$$

Muoto 7 voidaan stabiloida ja eliminoida lisäämällä yhden pisteen Gaussin menetelmällä muodostettuun jäykkymatriisiin 'stabiloiva' matriisi

$$\mathbf{K}_7^{(e)} = a_7^2 \mathbf{u}_{x7}^{(e)} \mathbf{u}_{x7}^{(e)T}. \quad (7.69)$$

Samalla tavalla estetään muodon 8 syntyminen. Kertoimet  $a_7$  ja  $a_8$  voidaan valita siten, että elementin muodonmuutosenergia saa tarkan arvon puhtaassa taivutuksessa. Koska muodot 7 ja 8 ovat ortogonaalisia muiden muotojen kanssa,  $\mathbf{K}_7^{(e)}$  ja  $\mathbf{K}_8^{(e)}$  eivät vaikuta jäykistävästi muihin siirtymämuotoihin. Esimerkiksi muotoon 7 ja matriisiin  $\mathbf{K}_7^{(e)}$  liittyvät solmuvoimat ovat

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = \mathbf{K}_7^{(e)} \mathbf{u}_{xi}^{(e)} = \mathbf{u}_{x7}^{(e)} \mathbf{u}_{x7}^{(e)T} \mathbf{u}_{xi}^{(e)} = \mathbf{u}_{x7}^{(e)} 0 = \mathbf{0}, \quad (7.70)$$

kun  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ .

Edellä kuvattu stabilointimenetelmä voidaan yleistää myös muille elementeille.

#### 7.6.4 Nollaenergiamuotojen määrä elementtiverkossa

Nollaenergiamuotojen *vähimmäismäärälle* elementtiverkossa voidaan johtaa lauseke seuraavalla tarkastelulla. Otaksutaan, että elementtiverkon integroimispisteiden lukumäärä on  $n_{int}$ . Rakenteen jäykkyysmatriisi voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n_{int}} \alpha_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i, \quad (7.71)$$

missä  $\alpha_i$  sisältää painokertoimen ja Jacobin determinantin sekä mahdollisesti elementin paksuuden integrointipisteessä  $i$ . Merkintä  $\mathbf{B}_i, \mathbf{D}_i$  tarkoittaa sitä, että matriisien termit on muodostettu integrointipisteessä  $i$ . Rakenteen muodonmuutosenergia on

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{int}} \alpha_i \mathbf{u}^T \mathbf{B}_i \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i \mathbf{u} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{int}} \alpha_i \boldsymbol{\epsilon}_i^T \mathbf{D}_i \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad (7.72)$$

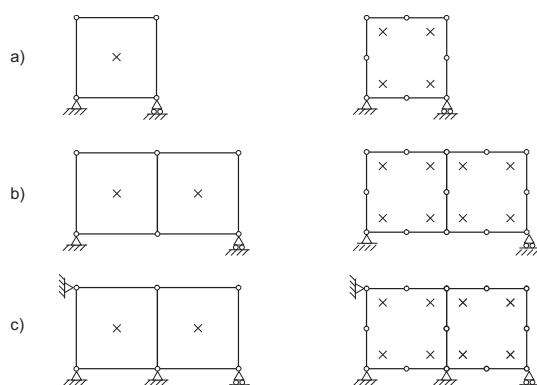
missä integroimispisteessä  $i$  muodostettu muodonmuutosvektori on

$$\boldsymbol{\epsilon}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{u}. \quad (7.73)$$

Määritelmän mukaan  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  on nollaenergiamuoto, jos siihen liittyvä muodonmuutosenergia  $U$  on nolla. Koska konstitutiivinen matriisi  $\mathbf{D}$  on positiivisesti definiitti, muodonmuutosenergia on nolla, jos ja vain jos muodonmuutosvektori on nollavektori integrointipisteissä  $i = 1, \dots, n_{int}$ , eli jos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{n_{int}} \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (7.74)$$

Levytehtävässä matriisin  $\mathbf{B}_i$  dimensiot ovat  $3 \times 2n$  ja vektorin  $\mathbf{u}$  dimensiot ovat  $2n \times 1$ , missä  $n$  on elementtiverkon solmujen lukumäärä. Tällöin kaavan (7.74) kerroinmatriisin dimensiot ovat  $3n_{int} \times 2n$  ja kertomisen tuloksena syntyvän vektorin



**Kuva 7.7** Elementtiverkkoja joissa esiintyy nollaenergiamuotoja.

**Taulukko 7.2** Kuvan 7.7 elementtimallien nollaenergiamuodot.

rakenne	4-solm. elem.	8-solm. elem.
a	2	1
b	3	0
c	0	0

dimensiot ovat  $3n_{int} \times 1$ . Homogeenisessa yhtälöryhmässä (7.74) on  $2n$  tuntematonta solmuniirtymää ja  $3n_{int}$  yhtälöä. Jos  $2n > 3n_{int}$ , niin tuntemattomia on enemmän kuin yhtälöitä ja ryhmällä (7.74) on vähintään  $2n - 3n_{int}$  ei-triviaalia ratkaisua siirtymävektoriksi  $\mathbf{u}$ . Verkossa on siten vähintään

$$2n - 3n_{int} = N_0 \quad (7.75)$$

nollaenergiamuotoa. Nelisolmuisen elementin ja yhden pisteen integroinnin tapauksessa  $n = 4$  ja  $n_{int} = 1$ . Kaavan (7.75) perusteella nollaenergiamuotojen lukumäärä on  $2 \times 4 - 3 \times 1 = 5$ , ja ne ovat kuvan 7.3 jäykänkappaleen siirtymät 1,2 ja 3 sekä muodot 7 ja 8. Jäykänkappaleen liikkeen estämiseksi rakenne tuetaan reunaehdoilla, joiden lukumäärä olkoon  $n_r$ . Tällöin kaavan (7.75) perusteella elementtimalliin jää vähintään

$$2n - n_r - 3n_{int} = N_0 \quad (7.76)$$

nollaenergiamuotoa. Kuvan 7.7 rakenteiden mahdollisten nollaenergiamuotojen lukumäärät on esitetty taulukossa 7.2 Esimerkiksi kuvan 7.7b nelisolmuisen elementin tapauksessa  $n = 6$ ,  $n_r = 3$ ,  $n_{int} = 2$ , ja kaavasta (7.76) seuraa  $N_0 = 2 \times 6 - 3 \times 2 - 3 = 3$ . Jos malliin jää reunaehtojen asettamisen jälkeen nollaenergiamuotoja, niin redusoidusta integroinnista on luovuttava.

Edellisen perusteella päätellään, että täydellinen integrointi tuottaa luotettavan mallin, redusoitu integrointi voi parantaa tulosten tarkkuutta, jos nollaenergiamuotoja ei synny ja elementin muodon on oltava mahdollisimman vähän vääristynyt eli

lähellä suorakaiteen muotoa.

### 7.6.5 Reunakuormitus

Tarkastellaan elementin reunaa, joka kuuluu levyn reunan osaan  $S_\sigma$ , jolla reunavoimat tunnetaan. Reunavoimavektori olkoon

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \end{bmatrix}, \quad (7.77)$$

ja elementin reunan viiva-alkio on

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad (7.78)$$

missä differentiaalit  $dx$  ja  $dy$  määritellään kaavoilla

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad (7.79a)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta, \quad (7.79b)$$

eli

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}. \quad (7.80)$$

Elementin reunalla  $\xi$  on vakio

$$dx^2 + dy^2 = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\eta^2 \quad \Rightarrow \quad ds = \sqrt{J_{12}^2 + J_{22}^2} d\eta. \quad (7.81)$$

Vastaavasti reunalla  $\eta =$  vakio, saadaan pituusalkion lausekkeeksi

$$ds = \sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2} d\xi. \quad (7.82)$$

Mikäli reunan  $S_\sigma$  jakautunut kuormitus on määritelty normaali- ja tangentialikomponenttien  $\bar{p}_n$  ja  $\bar{p}_t$  avulla, niin  $\bar{p}_x$  ja  $\bar{p}_y$  saadaan muunnoskaavoilla, katso kuvaa [7.8](#)

$$\bar{p}_x = \bar{p}_n \cos \alpha - \bar{p}_t \sin \alpha, \quad (7.83a)$$

$$\bar{p}_y = \bar{p}_n \sin \alpha + \bar{p}_t \cos \alpha. \quad (7.83b)$$

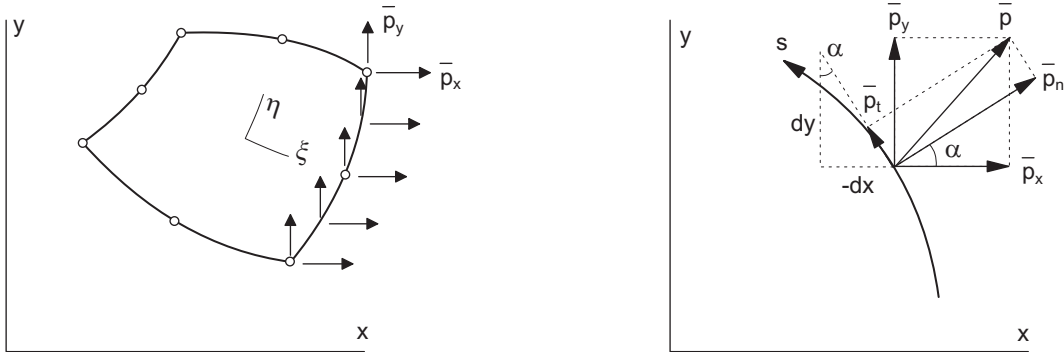
Sijoittamalla

$$\sin \alpha = -\frac{dx}{ds} \quad \text{ja} \quad \cos \alpha = \frac{dy}{ds}, \quad (7.84)$$

saadaan

$$\bar{p}_x = \bar{p}_n \frac{dy}{ds} + \bar{p}_t \frac{dx}{ds}, \quad (7.85a)$$

$$\bar{p}_y = -\bar{p}_n \frac{dx}{ds} + \bar{p}_t \frac{dy}{ds}. \quad (7.85b)$$



**Kuva 7.8** Levyelementin reunakuormitus.

Reunalla  $\xi = \text{vakio}$  saadaan lausekkeet

$$\bar{p}_x = \left( \bar{p}_n \frac{dy}{d\eta} + \bar{p}_t \frac{dx}{d\eta} \right) \frac{d\eta}{ds} = (J_{22}\bar{p}_n + J_{12}\bar{p}_t) \frac{d\eta}{ds}, \quad (7.86a)$$

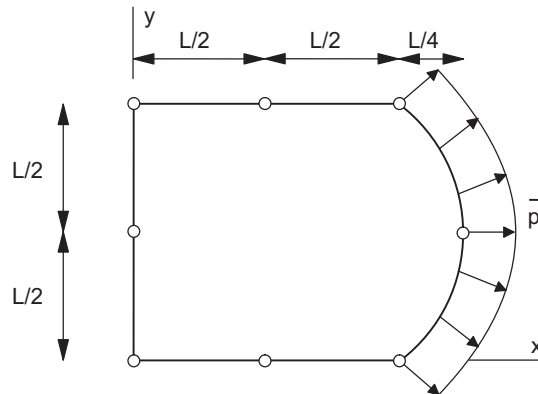
$$\bar{p}_y = \left( -\bar{p}_n \frac{dx}{d\eta} + \bar{p}_t \frac{dy}{d\eta} \right) \frac{d\eta}{ds} = (-J_{12}\bar{p}_n + J_{22}\bar{p}_t) \frac{d\eta}{ds}, \quad (7.86b)$$

ja vastaavasti reunalla  $\eta = \text{vakio}$

$$\bar{p}_x = \left( \bar{p}_n \frac{dy}{d\xi} + \bar{p}_t \frac{dx}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{ds} = (J_{21}\bar{p}_n + J_{11}\bar{p}_t) \frac{d\xi}{ds}, \quad (7.87a)$$

$$\bar{p}_y = \left( -\bar{p}_n \frac{dx}{d\xi} + \bar{p}_t \frac{dy}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{ds} = (-J_{11}\bar{p}_n + J_{21}\bar{p}_t) \frac{d\xi}{ds}. \quad (7.87b)$$

**Esimerkki 7.6** Määritä oheisen bikvadraattisen Serendip-tyyppisen elementin kuormavektorin lauseke reunalla 2 olevasta painekuormasta. Suorita integroinnit Gaussin kaavoilla.



Kuormitusvektorin komponentit saadaan lausekkeista

$$\bar{f}_{xi} = \int_s N_i \bar{p}_x ds = \int_{-1}^1 N_i J_{22} \bar{p}_n d\eta, \quad (7.88a)$$

$$\bar{f}_{yi} = \int_s N_i \bar{p}_y ds = - \int_{-1}^1 N_i J_{12} \bar{p}_n d\eta, \quad (7.88b)$$



missä  $J_{22}$  ja  $J_{12}$  ovat geometriakuvauksen Jacobin matriisin alkioita:

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21} \\ J_{12} & J_{22} \end{bmatrix}. \quad (7.89)$$

Elementin solmujen koordinaatit ovat

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (0, 0), & (x_5, y_5) &= \left(\frac{1}{2}L, 0\right), \\ (x_2, y_2) &= (L, 0), & (x_6, y_6) &= \left(\frac{5}{4}L, \frac{1}{2}L\right), \\ (x_3, y_3) &= (L, L), & (x_7, y_7) &= \left(\frac{1}{2}L, L\right), \\ (x_4, y_4) &= (0, L), & (x_8, y_8) &= \left(0, \frac{1}{2}L\right), \end{aligned} \quad (7.90)$$

ja interpolaatiofunktiot ovat

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1), \quad (7.91a)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1), \quad (7.91b)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1), \quad (7.91c)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta), \quad (7.91d)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2), \quad (7.91e)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta), \quad (7.91f)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2). \quad (7.91g)$$

Tarvittavat Jacobin matriisin alkiot ovat:

$$\begin{aligned} J_{22} &= y_{,\eta} = \sum_{i=1}^8 N_{i,\eta} y_i \\ &= (N_{3,\eta} + N_{4,\eta} + \frac{1}{2}N_{6,\eta} + N_{7,\eta} + \frac{1}{2}N_{8,\eta})L, \end{aligned} \quad (7.92a)$$

$$\begin{aligned} J_{12} &= x_{,\eta} = \sum_{i=1}^8 N_{i,\eta} x_i \\ &= (N_{2,\eta} + N_{3,\eta} + \frac{1}{2}N_{5,\eta} + \frac{5}{4}N_{6,\eta} + \frac{1}{2}N_{7,\eta})L. \end{aligned} \quad (7.92b)$$

Määritetään interpolaatiofunktioiden  $\eta$ -derivaatat

$$\begin{aligned} N_{2,\eta} &= -\frac{1}{4}(1 + \xi)(\xi - 2\eta), & N_{6,\eta} &= -\eta(1 + \xi), \\ N_{3,\eta} &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(\xi + 2\eta), & N_{7,\eta} &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2), \\ N_{4,\eta} &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(-\xi + 2\eta), & N_{8,\eta} &= -\eta(1 - \xi), \\ N_{5,\eta} &= -\frac{1}{2}(1 - \xi^2), \end{aligned} \quad (7.93)$$

jotka reunalla  $\xi = 1$  saavat arvot

$$\begin{aligned} N_{2,\eta} &= -\frac{1}{2}(1 - 2\eta), \\ N_{3,\eta} &= \frac{1}{2}(1 + 2\eta), \\ N_{6,\eta} &= -2\eta, \\ N_{4,\eta} &= N_{5,\eta} = N_{7,\eta} = N_{8,\eta} = 0. \end{aligned} \quad (7.94)$$

Alkioiden  $J_{22}$  ja  $J_{12}$  lausekkeet tarkasteltavalla reunalla ovat

$$J_{22} = \frac{1}{2}L, \quad J_{12} = -\frac{1}{2}\eta L. \quad (7.95)$$

Viimein kysytyt kuormitusvektorin komponentit voidaan laskea

$$\begin{aligned} f_{x2} &= \int_{-1}^1 N_2(1, \eta) J_{22} \bar{p}_n d\eta = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1 - \eta)(-\eta) \frac{1}{2} L d\eta \bar{p}_n, \\ &= \frac{1}{4} \bar{p} L \int_{-1}^1 (\eta^2 - \eta) d\eta = \frac{1}{4} \bar{p} L 2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{6} \bar{p} L, \end{aligned} \quad (7.96a)$$

$$f_{x3} = \int_{-1}^1 N_3(1, \eta) J_{22} \bar{p}_n d\eta = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1 + \eta) \eta \frac{1}{2} L d\eta \bar{p}_n = \frac{1}{6} \bar{p} L, \quad (7.96b)$$

$$f_{x6} = \int_{-1}^1 N_6(1, \eta) J_{22} \bar{p}_n d\eta = \frac{1}{2} \bar{p} L \int_{-1}^1 (1 - \eta^2) d\eta = \frac{2}{3} \bar{p} L, \quad (7.96c)$$

$$f_{y2} = - \int_{-1}^1 N_2(1, \eta) J_{12} \bar{p}_n d\eta = \frac{1}{4} \bar{p} L \int_{-1}^1 (\eta^3 - \eta^2) d\eta = -\frac{1}{6} \bar{p} L, \quad (7.96d)$$

$$f_{y3} = - \int_{-1}^1 N_3(1, \eta) J_{12} \bar{p}_n d\eta = \frac{1}{6} \bar{p} L, \quad (7.96e)$$

$$f_{y6} = 0. \quad (7.96f)$$



# Luku 8

## Elementtiapproksimaation tarkkuus

### 8.1 Virheen mittaus

Elementtimenetelmän antaman likiratkaisun konvergoiminen, eli suppeneminen kohti ratkaistavana olevan matemaattisen mallin tarkkaa ratkaisua riippuu pääasiassa elementtiverkon koosta ja siitä minkä asteisia interpolaatiopolynomeja käytetään. Elementtimenetelmän kehityksen alkuvaiheessa käytettiin alhaista astetta olevia polynomeja ja ratkaisun tarkentaminen tapahtui verkkoa hienontamalla eli tihentämällä. Tätä strategiaa kutsutaan elementtimenetelmän  $h$ -versioksi ja se on nykyisinkin hallitseva elementtimenetelmäversio. Modernimpaa tapaa edustaa elementtimenetelmän  $p$ -versio, jossa elementtien lukumäärä pidetään vakiona, usein melko pienenä, ja korottamalla interpolaation astetta saavutetaan numeerisen ratkaisun tarkentuminen. Mikäli ongelman ratkaisufunktiot ovat sileitä, saavutetaan tällä menetelmällä optimaaliset suppenemisominaisuudet. Tämä on johtanut hierarkisten interpolaatiofunktioiden käyttöönottoon, joilta lisäksi vaaditaan kantajärjestelmän mahdollisimman suurta stabiiliutta.

Miten ratkaisun tarkkuuden paranemista mitataan? Tähän on olemassa joukko kriteerejä, joista yksinkertaisin on tutkia tietyn suuren arvon muuttumista kun elementtiverkkoa tihennetään ja/tai interpolaatiopolynomien kertalukua kasvatetaan. Yksinkertaisin mahdollinen tapa on käyttää halutun suuren tiettyä pistearvoa. Tämä on kuitenkin yleisesti ottaen kyseenalainen tapa tulkita numeerisen ratkaisun hyvyttä, ellei kyseessä ole suuren ratkaisualueessa esiintyvä maksimiarvo. Luotettavamman kuvan ratkaisun paranemisesta saadaan tutkimalla suppenemista tiettyjen normien avulla. Tällaisia voivat olla vaikkapa maksiminormi

$$\|u(x)\|_{\infty} = \max_x |u(x)|, \quad (8.1)$$

tai ns.  $L^2$ -normi, joka mittaa funktiota neliöintegraalin mielessä

$$\|u\|_{L_2} = \left( \int_{\Omega} u^2 d\Omega \right)^{1/2}. \quad (8.2)$$

Normi siis kuvaa tietyllä tavalla funktion suuruutta ja on vektorilaskennasta tutun käsitteen “vektorin pituus” laajennus.

Malliprobleeman (3.1) tapauksessa luontevia suureita olisivat lämpötilan (siirtymän) virhe

$$\|u - \tilde{u}\|_\infty, \quad \text{tai} \quad \|u - \tilde{u}\|_{L_2}, \quad (8.3)$$

tai ns. energiavirhe

$$\|u - \tilde{u}\|_E = \left( \int_\Omega k(u' - \tilde{u}')^2 d\Omega \right)^{1/2}. \quad (8.4)$$

Huomaa, että kyseisellä suureella ei kuitenkaan ole energian yksikköä. Edellä esitetyt approksimaatiovirheen lausekkeet ovat absoluuttisia lukuja. Virheen suuruus tulee monissa tapauksissa paremmin miellettyä kun käytetään suhteellisia virheen arvoja, esimerkiksi

$$e_r = \frac{\|u - \tilde{u}\|_E}{\|u\|_E}. \quad (8.5)$$

Elementtimenetelmän virhearvioanalyysi on monimutkainen ja matemaattisesti vaativa alue, joka nojautuu abstraktiin funktionaalianalyysiin. Asiasta kiinnostuneelle suositeltavia lähteitä ovat [33], [18], [27].

## 8.2 A priori virhearviot

Elementtimenetelmän yhteydessä puhutaan usein etukäteisvirhearvioista eli *a priori* virhearvioista. Nämä ovat asymptoottisia tuloksia ja usein muotoa (elementtimenetelmän  $h$ -versio)

$$\|e\| \leq Ch^k, \quad (8.6)$$

jossa  $e$  on numeerisen tuloksen virhe tarkkaan ratkaisuun verrattuna,  $h$  on elementtiverkon tiheyttä kuvaava lineaarinen mitta ns. verkkoparametri ja  $k$  on suppenemisnopeus. Mitä suurempi eksponentti  $k$  on sitä nopeammin likiratkaisu lähestyy kohti tarkkaa ratkaisua. Vakio  $C$  on tehtäväkohtainen, moninaisista seikoista (mm. elementtityypistä, tarkan ratkaisun sileydestä jne.) riippuva positiivinen verkkoparametrissa  $h$  riippumaton kerroin. Suppenemisnopeuseksponentti on puolestaan riippuvainen käytetyistä interpolaatiofunktioista ja myös siitä normista jossa virhettä mitataan, sekä itse ratkaisun sileydestä.

Funktion sileydellä tarkoitetaan sitä, kuinka monta derivointia siihen voidaan kohdistaa, jotta tulos olisi vielä neliöintegroituva, eli jos

$$\int_0^L \left( \frac{d^r u}{dx^r} \right)^2 dx < \infty \quad (8.7)$$

niin funktio  $u$  on  $r$  kertaa neliöintegroitivasti derivoituva. Funktio on sitä sileämpi mitä suurempi  $r$  on. Matemaattisesti ilmaistuna sanotaan funktion  $u$  kuuluvan *Hilbert-avaruuteen*  $H^r(0, L)$ , eli  $u \in H^r(0, L)$ . Hilbert-avaruus on normiavaruus ja

sen normia merkitään  $\|\cdot\|_{H^r}$  tai vain yksinkertaisesti  $\|\cdot\|_r$ . Reuna-arvotekävien ratkaisun sileyteen vaikuttaa oleellisesti ratkaisualueen muoto.

Edellä mainittua asymptoottisen *a priori* virhe-estimaatin lauseketta voidaan täsmentää muotoon

$$\|e\|_s \leq Ch^k \|u\|_r \quad k = \min(p+1-s, r-s+1). \quad (8.8)$$

Vakio  $C$  jää vielä riippumaan elementtityypistä, interpolaation asteesta  $p$  ja ratkaisun sileydestä (korkeimmasta mahdollisesta  $r$ :stä). Tasaiselle elementtiverkolle on kuitenkin onnistuttu johtamaan seuraavanlainen arvio

$$\|e\|_s \leq Cp^{1-r} h^k \|u\|_r \quad k = \min(p+1-s, r-s+1). \quad (8.9)$$

Arviosta nähdään, että mikäli ratkaisu  $u$  on hyvin sileä ( $r$  suuri), on interpolatiopolynomien asteen kasvattaminen ( $p$ :n kasvattaminen) nopeampi tapa pienentää virhettä kuin elementtien koon pienentäminen ( $h$ :n pienentäminen) pitämällä interpolaation aste kiinnitettynä. Mikäli ratkaisu on epäsäännöllinen ( $r$  pieni), vaikuttavat verkon tihentäminen ja polynomiavarauuden laajentaminen oleellisesti samalla tavalla, jolloin pelkästään *a priori* asymptoottisten virhetarkastelujen pohjalta ei voida päätellä, mikä olisi optimaalinen numeerinen menettelytapa.

### 8.3 Säännöllisyysluokat

Jotta voitaisiin valita optimaalinen elementtimenetelmäformulaatio, on tiedettävä ratkaisun luonne. Szabó ja Babūška [34] luokittelevat ongelmat tarkan ratkaisun  $u$  ja elementtimenetelmäratkaisun  $u_{FE}$  mukaan kolmeen luokkaan:

**Luokka A:** Tarkka ratkaisu  $u$  on analyyttinen koko ratkaisualueessa alueen reuna mukaanlukien tai alue voidaan jakaa osa-alueisiin, joissa tarkka ratkaisu on analyyttinen reunat mukaanlukien. Elementtiverkko on konstruoitu siten, että elementtien reunat yhtyvät osa-alueiden reunoihin.

**Luokka B:** Tarkka ratkaisu  $u$  on analyyttinen koko alueessa reunat mukaanlukien, lukuunottamatta äärellistä määrää alueen pisteitä (kolmessa dimensiossa viivoja). Elementtiverkko on siten konstruoitu, että pisteet joissa ratkaisu  $u$  ei ole analyyttinen ovat solmupisteitä. Kolmessa dimensiossa viivat, joissa  $u$  ei ole analyyttinen yhtyvät elementin reunaviivoihin. Singulaarisen pisteen läheisyydessä ratkaisu  $u$  voidaan tyypillisesti kirjoittaa kahden tekijän summana  $u = u_1 + u_2$ , missä  $u_1$  on sileä (analyyttinen) komponentti ja  $u_2$  on muotoa

$$u_2 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i r^{\lambda_i} \Phi_i(\theta), \quad (8.10)$$

missä  $r, \theta$  ovat singulaariseen pisteeseen keskitetyt polaarikoordinaatit,  $\lambda_i$ :t positiivisia lukuja,  $A_i$ :t reunaehdoista ja kuormituksesta riippuvia kertoimia

ja  $\Phi_i$ :t ovat sileitä funktioita. Mikäli nyt  $\min(\lambda_i) < 1$  sanotaan ongelman olevan *vahvasti luokassa B*, muutoin se on *heikosti luokassa B*.

**Luokka C:** Elementtiverkkoa ei voida konstruoida siten, että solmupisteet (tai elementtien reunaviivat 3-D ongelmissa) yhtyisivät ei-analyttisiin pisteisiin. Ongelman sanotaan kuuluvan vahvasti luokkaan C, mikäli ratkaisun epäanalyttisten pisteiden asemalla ei ole ennalta määritettävissä olevaa muotoa. Jos epäanalyttiset pisteet jakautuvat alueeseen säännöllisen kaavan mukaisesti sanotaan tehtävän kuuluvan *heikosti luokkaan C*.

## 8.4 Elementtimenetelmän $h$ -, $p$ - ja $hp$ -versiot

Kuten jo kappaleessa 8.1 mainittiin, voidaan elementtimenetelmäratkaisun suppeneminen saavuttaa (a) hienontamalla verkkoa, eli pienentämällä elementtien kokoa ( $h \rightarrow 0$ ) tai (b) kohottamalla interpolaatiopolynomien astetta  $p \rightarrow \infty$ . Näitä tapoja kutsutaan elementtimenetelmän  $h$ - ja  $p$ -versioiksi. Mikäli suppeneminen saadaan aikaan sekä hienontamalla verkkoa että korottamalla interpolaatiopolynomien astetta puhutaan  $hp$ -versiosta.<sup>1</sup>

Tärkeä kysymys on eri versioiden suorituskyky ja miten sitä mitataan. Kuten *a priori* estimaateista (8.8) ja (8.9) voidaan todeta on yhteismitallisen argumentin löytäminen olla hankalaa. Sekä  $h$ - että  $p$ -laajennuksessa vapausasteiden määrä kasvaa, ja sitä voidaan pitää eräänlaisena työmäärään verrannollisena mittarina. Seuraavat tulokset ovat Szabón ja Babüskan kirjasta [34] ja pätevät kaksidimensioisille ongelmille.

**$h$ -versio:** Asymptoottinen virheestimaatti (8.8) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\|u - u_{FE}\|_E \leq CN^{-k}, \quad (8.11)$$

missä  $C$  ja  $k$  ovat positiivisia vakioita ja  $N$  on vapausasteiden lukumäärä. Erotellaan elementtiverkon tyypistä riippuen seuraavat kaksi tapausta:

1. Käytettäessä tasavälistä tai miltei tasavälistä elementtiverkkoa, eksponentti  $k$  on

$$k = \frac{1}{2} \min(p, \lambda), \quad (8.12)$$

missä  $\lambda = \min \lambda_i$  ja  $\lambda_i$  on määritelty yhtälöllä (8.10). Mikäli ratkaisu  $u$  on analyttinen koko ratkaisualueessa ja reunoilla määrittää suppenemisnopeuden pelkästään interpolaatiopolynomien aste  $p$ .

<sup>1</sup> Szabó ja Babüska [34] käyttävät termiä laajennusprosessi (extension) kuvaamaan tapahtumaa jossa diskretoinnin systemaattisilla muutoksilla vapausasteiden määrän kasvaessa saavutetaan asteittain parempi approksimaatio tarkasteltavana olevalle ongelmalle. Versio sanaa he käyttävät laajennusprosessien elementtimenetelmäimplementoinneista. Tässä esityksessä ei tehdä eroa termien laajennusprosessi ja versio välillä.

2. Mikäli elementtiverkko voidaan konstruoida siten, että virhe on tasan jakautunut elementtiverkossa, voidaan riippuvuus singulaarisuuden asteesta menetelmän konvergenssinopeuden rajoittimena eliminoida. Tällöin siis pätee

$$k = \frac{1}{2}p. \quad (8.13)$$

***p*-versio:**

1. Mikäli ratkaisualueessa tai sen reunalla ei ole singulariteettejä, on suppenemisnopeus *eksponentiaalinen*:

$$\|u - u_{FE}\|_E \leq C \exp(-k_1 N^{k_2}), \quad (8.14)$$

missä  $C, k_1$  ja  $k_2$  ovat positiivisia vakioita,  $k_2 \geq 1/2$ .

2. Mikäli ratkaisualueessa tai sen reunalla esiintyy singulaarisia pisteitä, on suppenemisnopeus *algebrallista*. Suppenemisnopeus on muotoa (8.11) ja  $k$  on riippuvainen singulaarisuuden asteesta  $\lambda$  seuraavasti:

- (a) Mikäli singulaarinen piste ei ole solmupiste,

$$k = \frac{1}{2}\lambda. \quad (8.15)$$

- (b) Mikäli singulaarinen piste yhtyy solmupisteeseen,

$$k = \lambda. \quad (8.16)$$

***hp*-versio:** Elementtimenetelmän *hp*-versio tarjoaa tehokkaimman tavan kontrolloida diskreetointivirhettä ja eksponentiaalinen suppenemisnopeus (muotoa (8.14) ja  $k_2 \geq 1/3$ ) voidaan saavuttaa sopivalla verkon ja polynomiasteiden valinnalla.

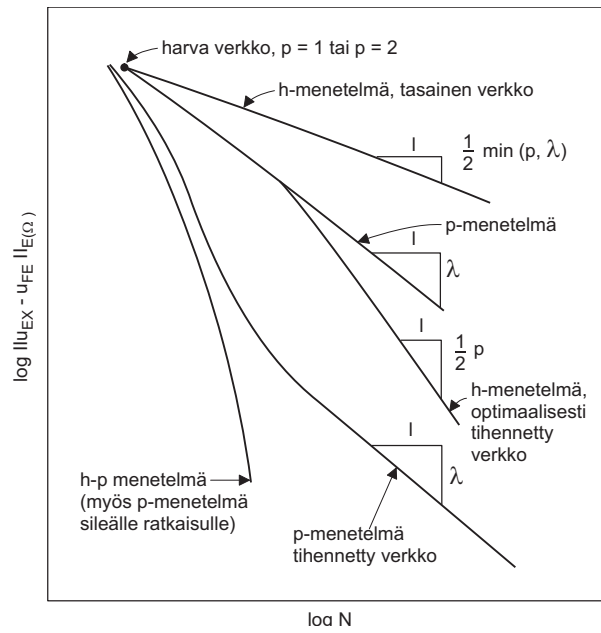
Optimaalinen elementtiverkko ja interpolaatiopolynomien astejakauma konstruoidaan siten, että elementit ovat pieniä singulaaristen pisteiden lähellä ja näissä elementeissä interpolaatiopolynomien aste on alhaisin. Etäännyttäessä singulaarisesta pisteestä elementtien koko kasvaa geometrisessa suhteessa ja interpolaatiopolynomien asteluku kasvaa. Kuvassa 8.1 on kaavamainen kuva eri menetelmien käyttäytymisestä.

## 8.5 Elementtimenetelmän geometrinen tulkinta

Tarkastellaan jälleen esimerkkinä malliprobleemaa (3.1), jonka virtuaalisen lämmön (tai siirtymän) periaatteen mukainen heikko muoto on

$$\int_0^L ku' \hat{u}' dx = \int_0^L f \hat{u} dx, \quad (8.17)$$





**Kuva 8.1** 2-D elementtimenetelmäversioiden suppeneminen mitattuna energianormissa [34].

missä virtuaalinen lämpötila  $\hat{u}$  (tai siirtymä) toteuttaa homogeeniset reunaehdot, eli kuuluu kinemaattisesti luvallisten funktioiden joukkoon. Matemaatikot kirjoittavat variaatiotehtävän muodossa: etsi funktio  $u$  siten, että

$$\int_0^L k u' \hat{u}' dx = \int_0^L f \hat{u} dx \quad \forall \hat{u} \in V(I), \quad (8.18)$$

missä funktioavaruus  $V$  (tuo kinemaattisesti luvallisten funktioiden joukko) tässä tapauksessa on välillä  $I = \{x | x \in [0, L]\}$  määriteltyjen jatkuvien funktioiden joukko, joiden ensimmäinen derivaatta on paloittain jatkuva ja funktio saa nolla-arvon välin päätepisteissä. Funktioavaruus  $V(I)$  voidaan määritellä seuraavasti:

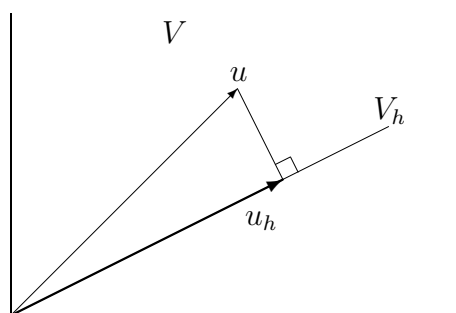
$$V(I) = \{v | v \in L^2(I), v' \in L^2(I), v(0) = 0, v(L) = 0\}, \quad (8.19)$$

missä neliöintegroituviin funktioiden joukko  $L^2(I)$  on

$$L^2(I) = \left\{ v \mid \int_I v^2 dx < \infty \right\}. \quad (8.20)$$

Skalaaritulolla varustettua täydellistä lineaariavaruutta kutsutaan *Hilbertin*<sup>2</sup> avaruudeksi.

<sup>2</sup>David Hilbert (1862-1943) saksalainen matemaatikko. Hilbertin oppilas Richard Courant (1888-1972) julkaisi 1943 artikkelin "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations" *Bull. Am. Math. Soc.*, **49**, 1-23, jota voidaan pitää elementtimenetelmään alkuna. Hilbert ja hänen aikalaisensa Felix Klein (1849-1925) loivat Göttingenin yliopistoon



**Kuva 8.2** Elementtimenetelmäratkaisu on tarkan ratkaisun ortogonaaliprojektio.

Elementtimenetelmässä variaatio-ongelman (8.18) ratkaisua etsitään funktioavaruuden  $V$  äärellisulotteisessa aliavaruudessa  $V_h$ . Täten elementtimenetelmään perustuva variaatioformulaatio voidaan lausua muodossa: etsi funktio  $u_h \in V_h(I)$  siten, että

$$\int_I k u'_h \hat{u}' dx = \int_I \bar{f} \hat{u} dx \quad \forall \hat{u} \in V_h(I). \quad (8.21)$$

Koska  $V_h$  on  $V$ :n aliavaruus ( $V_h \subset V$ ), voidaan yhtälössä (8.18) valita variaation  $\hat{u}$  kuuluvan funktioavaruuteen  $V_h$ , jolloin vähentämällä (8.21) yhtälöstä (8.18) saadaan

$$\int_I k (u' - u'_h) \hat{u}' dx = 0, \quad \forall \hat{u} \in V_h(I), \quad (8.22)$$

eli virhe  $u - u_h$  on ortogonaalinen kaikkien  $V_h$ :n alkioiden suhteen. Tämä voidaan tulkita myös seuraavasti: elementtimenetelmäratkaisu on tarkan ratkaisun ortogonaaliprojektio aliavaruuteen  $V_h$ . Tätä on havainnollistettu kuvassa 8.2, jossa avaruus  $V$  assosioidaan kaksidimensioiseen Euklidiseen vektoriavaruuteen, jonka yksidimensioinen aliavaruus kuvaa avaruutta  $V_h$ .

Elementtimenetelmäratkaisu antaa siten energianormin mielessä pienimmän mahdollisen virheen aliavaruudessa  $V_h$ , eli ortogonaalisuudesta (8.22) seuraa elementtimenetelmän ns. parasaproksimaatio-ominaisuus

$$\|u - u_h\|_E \leq \|u - \hat{u}\|_E \quad \forall \hat{u} \in V_h(I). \quad (8.23)$$

## 8.6 Elementtimenetelmän abstrakti formulaatio

Otetan käyttöön lyhenteitä joilla yhtälössä (8.21) tai (8.18) olevia integraaleja merkitään:

$$a(u, \hat{u}) = \int_I k u' \hat{u}' dx \quad \text{ja} \quad L(\hat{u}) = \int_I f \hat{u} dx. \quad (8.24)$$

kukoistavan matematiikan laitoksen, jossa yhdistyivät oivallisesti matematiikka ja sitä soveltavat luonnontieteet. Vuosisadan vaihteen Göttingenissä vaikuttivat sellaiset kuuluisuudet kuten Herman Minkowski (1864-1909), Theodore von Kármán (1881-1963), Herman Weyl (1885-1955) ja filosofian laitoksella fenomenalisti Edmund Husserl (1859-1938). Courantin ristiriitoja herättävästä elämästä kiinnostuneille suositellaan Constance Reidin kirjoittamaa elämäkertaa [62].

Nyt voidaan malliprobleeman elementtimenetelmän mukainen variaatiomuoto kirjoittaa muodossa: etsi  $u_h \in V_h$  siten, että

$$a(u, \hat{u}) = L(\hat{u}) \quad \forall \hat{u} \in V_h(I). \quad (8.25)$$

Samanlaiseen muotoon voidaan kirjoittaa muidenkin stationaaristen ongelmien virtuaalisen työn yhtälöt, tällöin vain bilineaarimuodon  $a(u, \hat{u})$ , lineaarisen funktionaalil  $L(\hat{u})$  ja avaruuden  $V_h$  merkitys on erilainen. Toisin sanoen abstraktin variaatioformulaation (8.25) voidaan ajatella kattavan suuren joukon erilaisten fysikaalisten ongelmien matemaattisia malleja.

Elementtimentelmäprobleemin (8.25) *a priori* virhearvio on suoraviivaisesti johdettavissa, mikäli seuraavat kaksi ehtoa ovat voimassa

$$\alpha \|v\|_V^2 \leq a(v, v) \quad \forall v \in V, \quad (8.26)$$

$$a(v, w) \leq M \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V, \quad (8.27)$$

ja vakiot  $\alpha$  ja  $M$  löydettävissä siten, että  $\alpha > 0$  ja  $0 < M \leq \infty$ . Mikäli (8.26) toteutuu sanotaan bilineaarimuodon  $a(v, w)$  olevan  $V$ -elliptinen. Ehto (8.27) ilmaisee bilineaarimuodon jatkuvuusominaisuuden. Näiden avulla voidaan osoittaa parasapproksimaatio-ominaisuus (8.23), nyt kirjoitettuna muodossa

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (8.28)$$

Standardi elementtimenetelmäformulaatiota voidaan menestyksellisesti soveltaa mikäli kerroin  $M/\alpha \approx 1$ . Edellisissä luvuista liemee käynyt ilmi, että standardi elementtimenetelmää voidaan hyvin soveltaa isotrooppiseen lämmönjohtumis- ja elastisuusongelmaan ja että vaikeuksia on odotettavissa kun mallinamme esim. diffuusio-konvektioyhtälöä. Ongelmia esiintyy myös kokoonpuristumattoman, tai lähes kokoonpuristumattoman aineen tapauksessa, hyvin anisotrooppisten materiaalien mallinnuksessa sekä ohuiden kappaleiden (palkkien, laattojen, kuorien) analysoinnissa.

# Luku 9

## Palkkielementtejä

Tämä luku toimii johdatuksena laattaelementteihin, sillä ne ongelmat joihin laattaelementtien kehittämisessä on törmätty esiintyvät yksinkertaistetussa muodossa usein myös palkkielementtien yhteydessä. Yksidimensioisen rakenteen käsittelyn helppoudesta johtuen, ilmiöiden luonteen ymmärtäminen onnistuu täten joutuisammin. On kuitenkin syytä huomauttaa, että kaikkia laattatehtäville ominaisia ongelmakohtia ei palkkimallissa voi luonnollisestikaan esiintyä.

### 9.1 Eulerin-Bernoullin palkkimalli

Yksinkertaisin palkin käyttäytymistä kuvaava malli on ns. ohuen palkin malli. Sitä kutsutaan myös kehittäjööidensä mukaan Eulerin-Bernoullin palkkimalliksi<sup>1</sup> ja sen perusotaksumat ovat:

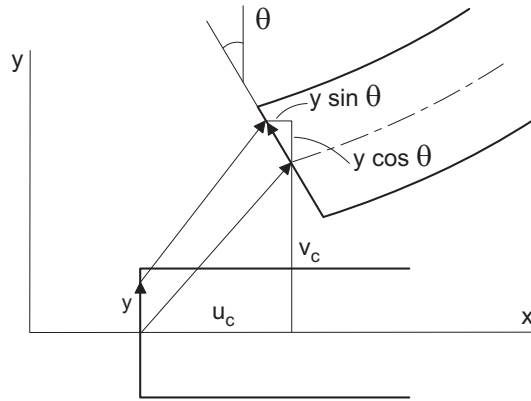
1. palkin akselin normaalit säilyvät suorina,
2. palkin akselin normaalit eivät veny ja
3. poikittainen leikkausmuodonmuutos on merkityksetön.

Kaksi ensimmäistä otaksumaa voidaan toteuttaa valitsemalla siirtymille  $u$  ja  $v$  lausekkeet (ks. kuva 9.1)

$$u(x, y) = u_c(x) - y \sin \theta(x), \quad (9.1a)$$

$$v(x, y) = v_c(x) - y(1 - \cos \theta(x)), \quad (9.1b)$$

<sup>1</sup>Ohuen palkin mallista olisi oikeutettua käyttää nimeä Bernoulli-Euler-Parent, sillä vasta Parent (1666-1716) määrittäi oikein palkin neutraaliakselin paikan (julkaisu 1713) ja sitä kautta palkin taivutusjäykkyydelle saadaan oikea arvo. Jacob Bernoulli (1654-1705) tutki palkin taipumaviivan määrittämisestä. Hän päätteli taivutusmomentin olevan suoraan verrannollinen taipumaviivan kaarevuuteen, mikä on oikein, mutta ei saanut oikeaa arvoa palkin taivutusjäykkyydelle. Daniel Bernoulli (1700-1782) esitti ensimmäisenä prismaattisen palkin poikittaisten värähtelyjen differentiaaliyhtälön. Leonard Euler (1707-1783) julkaisi 1744 kirjan variaatiolaskennasta ja joka sisälsi myös ensimmäisen systemaattisen esityksen elastisten palkkien analyysistä.



**Kuva 9.1** Palkin deformaatio.

missä  $u_c$  ja  $v_c$  ovat keskipisteakselin pisteen  $x$  siirtymäkomponentit ja  $\theta$  on palkin akselin normaalin kiertymäkulma. Rajoittamalla pieniin siirtymiin,  $u/L, v/L, \theta \ll 1$ , saadaan likilausekkeet

$$u(x, y) = u_c(x) - y\theta(x), \quad (9.2a)$$

$$v(x, y) = v_c(x). \quad (9.2b)$$

Otaksutaan palkin akseli kokoonpuristumattomaksi, jolloin aksiaalisen siirtymän lauseke voidaan yksinkertaistaa muotoon

$$u(x, y) = -y\theta(x). \quad (9.3)$$

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi jätetään keskiakselia kuvaava alaindeksi  $c$  pois taipuman  $v$  lausekkeesta, joten siirtymien lausekkeet ovat:

$$u(x, y) = -y\theta(x), \quad (9.4a)$$

$$v(x, y) = v(x). \quad (9.4b)$$

Edellä oleviin siirtymäotaksumiin perustuvat muodonmuutoskomponenttien lausekkeet ovat:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{d\theta}{dx}, \quad (9.5a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{dx} - \theta. \quad (9.5b)$$

Eulerin-Bernoullin palkkimallin otaksumasta 3 seuraa siten

$$\gamma_{xy} = \frac{dv}{dx} - \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{dv}{dx}, \quad (9.6)$$

jolloin siirtymäotaksumat (9.4a) saavat muodon

$$u(x, y) = -yv'(x), \quad (9.7a)$$

$$v(x, y) = v(x). \quad (9.7b)$$

Eulerin-Bernoullin palkkimallin virtuaalisen työn yhtälö on

$$\int_0^L \int_A \sigma_x \delta \epsilon_x dA dx = \int_0^L f \delta v dx, \quad (9.8)$$

jossa virtuaalinen venymä  $\delta \epsilon_x$  on

$$\delta \epsilon_x = -y \delta \theta' = -y \delta v''. \quad (9.9)$$

Otaksumalla lineaarinen materiaalilaki ( $\sigma_x = E \epsilon_x$ ), saadaan

$$\int_0^L \int_A E y^2 \delta v'' v'' dA dx = \int_0^L f \delta v dx, \quad (9.10)$$

josta suorittamalla integrointi palkin poikkileikkauksen yli seuraa

$$\int_0^L EI \delta v'' v'' dx = \int_0^L f \delta v dx, \quad (9.11)$$

jossa  $I$  on palkin poikkileikkauksen jäyhyysmomentti. Tämä variaatiomuoto toimii perustana elementtimenetelmän yhtälöiden muodostamiselle. Heikko muoto (9.11) voidaan kirjoittaa myös taivutusmomentin  $M = EI \kappa = -EI v''$  ja virtuaalisen käyritymän  $\delta \kappa = -\delta v''$  avulla muodossa

$$\int_0^L M \delta \kappa dx = \int_0^L f \delta v dx. \quad (9.12)$$

Variaatiomuodosta (9.11) nähdään, että taipuman  $v$  elementti-interpolaation on oltava vähintään  $C_1$ -jatkuva, jotta lausekkeen ensimmäinen integraali olisi äärellinen. Konstruoidaan yksinkertaisin mahdollinen  $C_1$ -jatkuva interpolaatio. On ilmeistä, että kaksisolmuissa elementissä tuntemattomina solmusuureina olisi oltava funktion ja sen derivaatan arvot. Täten interpolaatio elementin alueella on muotoa

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x) \left. \frac{dv}{dx} \right|_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x) \left. \frac{dv}{dx} \right|_2. \quad (9.13)$$

Interpolaatiofunktioiden  $N_i, i = 1, \dots, 4$  muodostamiseksi siirretään tarkastelu luonnolliseen  $\xi$ -koordinaatistoon, joka määritellään tavanomaiseen tapaan välillä  $(-1, 1)$ . Kirjoitetaan interpolaatio muodossa

$$\tilde{v}(x) = H_{01}^1(\xi)v_1 + H_{11}^1(\xi) \left. \frac{dv}{d\xi} \right|_1 + H_{02}^1(\xi)v_2 + H_{12}^1(\xi) \left. \frac{dv}{d\xi} \right|_2. \quad (9.14)$$

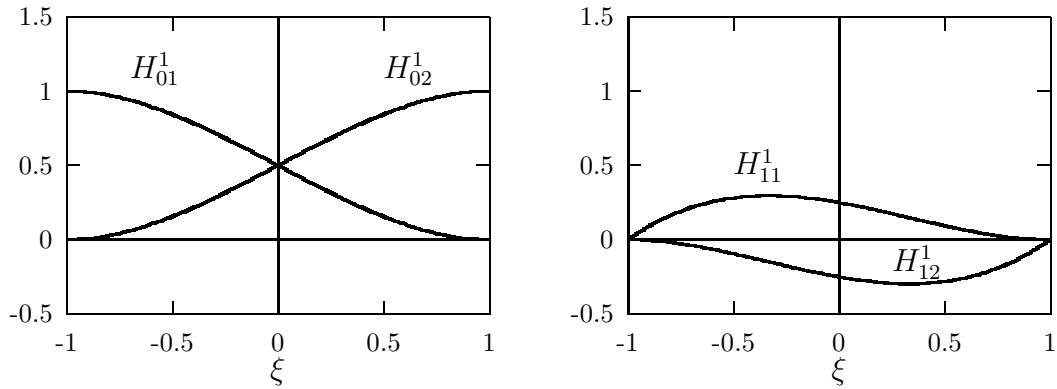
Vaaditaan funktioilta  $H_{kj}^1, k = 0, 1; j = 1, 2$  seuraavat ominaisuudet:

$$H_{01}^1(-1) = 1, \quad \frac{dH_{01}^1}{d\xi}(-1) = 0, \quad H_{01}^1(1) = 0, \quad \frac{dH_{01}^1}{d\xi}(1) = 0, \quad (9.15a)$$

$$H_{11}^1(-1) = 0, \quad \frac{dH_{11}^1}{d\xi}(-1) = 1, \quad H_{11}^1(1) = 0, \quad \frac{dH_{11}^1}{d\xi}(1) = 0, \quad (9.15b)$$

$$H_{02}^1(-1) = 0, \quad \frac{dH_{02}^1}{d\xi}(-1) = 0, \quad H_{02}^1(1) = 1, \quad \frac{dH_{02}^1}{d\xi}(1) = 0, \quad (9.15c)$$

$$H_{12}^1(-1) = 0, \quad \frac{dH_{12}^1}{d\xi}(-1) = 0, \quad H_{12}^1(1) = 0, \quad \frac{dH_{12}^1}{d\xi}(1) = 1, \quad (9.15d)$$



**Kuva 9.2** Hermiten kuubiset  $C_1$ -interpolaatiopolynomit.

Jokainen funktioista  $H_{01}^1, \dots, H_{12}^1$  on siten kolmannen asteen polynomi, joka määräytyy yksikäsitteisesti neljästä ehdosta.

Funktioille  $H_{kj}^1, k = 0, 1; j = 1, 2$  saadaan lausekkeet

$$H_{01}^1(\xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi) = (H_{01}^0)^2(1 + 2H_{02}^0), \quad (9.16a)$$

$$H_{11}^1(\xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(1 + \xi) = 2(H_{01}^0)^2H_{02}^0, \quad (9.16b)$$

$$H_{02}^1(\xi) = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi) = (H_{02}^0)^2(1 + 2H_{01}^0), \quad (9.16c)$$

$$H_{12}^1(\xi) = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(\xi - 1) = -2H_{01}^0(H_{02}^0)^2, \quad (9.16d)$$

jossa lineaarisia perusinterpolaatiofunktioita on merkitty  $H_{01}^0 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$  ja  $H_{02}^0 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$ . Funktiot  $H_{kj}^1$  on piirretty kuvaan 9.2. Interpolaatiofunktioiksi (9.13) saadaan

$$\begin{aligned} N_1(x) &= H_{01}^1(\xi(x)), & N_2(x) &= \frac{1}{2}h^{(e)}H_{11}^1(\xi(x)), \\ N_3(x) &= H_{02}^1(\xi(x)), & N_4(x) &= \frac{1}{2}h^{(e)}H_{12}^1(\xi(x)), \end{aligned} \quad (9.17)$$

Edellä esitettyjä polynomeja kutsutaan ensimmäisen asteen Hermiten interpolaatiopolynomeiksi (ks. liite A).

Eulerin-Bernoullin palkkielementin jäykkymatriisiin ja kuormavektorin alkioiksi saadaan siten

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} EI \frac{d^2 N_i}{dx^2} \frac{d^2 N_j}{dx^2} dx = \frac{8}{h^{(e)3}} \int_{-1}^1 EI \frac{d^2 N_i}{d\xi^2} \frac{d^2 N_j}{d\xi^2} d\xi, \quad (9.18)$$

$$f_i^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_i(x) dx = \frac{1}{2}h^{(e)} \int_{-1}^1 f(\xi) N_i(\xi) d\xi. \quad (9.19)$$

## 9.2 Timoshenkon palkkimalli

### 9.2.1 Virtuaalisen työn yhtälö

Palkin kinemaattisista otaksumista

$$u(x, y) = -y\theta(x), \quad (9.20a)$$

$$v(x, y) = v(x) \quad (9.20b)$$

voidaan päätyä malliin, jossa palkin poikittainen leikkausmuodonmuutos tulee keskimääräisesti huomioonotetuksi. Timoshenkon palkkimallissa muodonmuutokset ovat

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{d\theta}{dx}, \quad (9.21a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{dx} - \theta, \quad (9.21b)$$

ja virtuaalisen työn yhtälö on muotoa

$$\int_0^L \int_A (\sigma \delta \epsilon + \tau \delta \gamma) dA dx = \int_0^L f \delta v dx, \quad (9.22)$$

josta alaindeksit  $x$  ja  $xy$  on merkintöjen yksinkertaistamiseksi jätetty pois. Sijoittamalla tähän muodonmuutosten lausekkeet (9.21a) sekä lineaarisesti kimmoisa materiaalilaki  $\sigma = E\epsilon$ ,  $\tau = G\gamma$  ( $G = E/2(1 + \nu) =$  leikkausmoduuli), saadaan lauseke

$$\int_0^L [EI\theta' \delta \theta' + GA(v' - \theta)(\delta v' - \delta \theta)] dx = \int_0^L f \delta v dx. \quad (9.23)$$

Muodonmuutoksen lausekkeesta (9.21ab) havaitaan, että liukuma on vakio koko poikkileikkauksessa. Tämä ei tietenkään pidä paikkaansa, vaan liukumalla on jokin poikkileikkauksen muodosta riippuva jakauma. Leikkausmuodonmuutoksen poikittainen jakauma voidaan kuitenkin keskimääräisesti ottaa huomioon modifioimalla leikkausjäykkyyden lauseketta muotoon  $GA_s$ , missä  $A_s$  on leikkauspinta-ala (suorakaiteelle  $A_s = \frac{5}{6}A$  ja I-profilille  $A_s = A_{uuma}$ ). Virtuaalisen työn lauseke saadaan siten muotoon

$$\int_0^L [EI\theta' \delta \theta' + GA_s \theta \delta \theta - GA_s (v' \delta \theta + \theta \delta v') + GA_s v' \delta v'] dx = \int_0^L f \delta v dx. \quad (9.24)$$

### 9.2.2 Yksinkertainen elementti

Variaatioyhtälön likiratkaisussa on nyt kaksi toisistaan riippumatonta suuretta: taipuma  $v$  ja palkin akselin normaalin kiertymäkulma  $\theta$ . Havaitaan myös, että kummallekin suurelle riittää  $C_0$ -jatkuva elementti-interpolaatio. Yksinkertaisin mahdollinen Timoshenkon palkkimallin elementti saadaan valitsemalla sekä taipumalle



että kiertymälle lineaarinen interpolaatio:

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)v_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)v_2 = \mathbf{N}_v \mathbf{v}^{(e)}, \quad (9.25a)$$

$$\theta = N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2 = \mathbf{N}_\theta \boldsymbol{\theta}^{(e)}. \quad (9.25b)$$

Variaatioyhtälön termien elementtiosuudet ovat, nyt  $\mathbf{N}_v = \mathbf{N}_\theta = [N_1, N_2]$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} (EI\theta'\delta\theta' + GA_s\theta\delta\theta) dx = \boldsymbol{\delta\theta}^{(e)T} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} \boldsymbol{\theta}^{(e)}, \quad (9.26a)$$

$$- \int_{x_1}^{x_2} GA_s v' \delta\theta dx = \boldsymbol{\delta\theta}^{(e)T} \mathbf{K}_{\theta v}^{(e)} \mathbf{v}^{(e)}, \quad (9.26b)$$

$$- \int_{x_1}^{x_2} GA_s \theta \delta v' dx = \boldsymbol{\delta v}^{(e)T} \mathbf{K}_{v\theta}^{(e)} \boldsymbol{\theta}^{(e)}, \quad (9.26c)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} GA_s v' \delta v' dx = \boldsymbol{\delta v}^{(e)T} \mathbf{K}_{vv}^{(e)} \mathbf{v}^{(e)}, \quad (9.26d)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f \delta v dx = \boldsymbol{\delta v}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)}. \quad (9.26e)$$

Osamatriisien  $\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(e)}$  lausekkeet ovat:

$$\mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} = \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 EIN_\theta'^T N_\theta' d\xi + \frac{h^{(e)}}{2} \int_{-1}^1 GA_s \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{N}_\theta d\xi, \quad (9.27a)$$

$$\mathbf{K}_{\theta v}^{(e)} = - \int_{-1}^1 GA_s \mathbf{N}_\theta^T N_v' d\xi, \quad (9.27b)$$

$$\mathbf{K}_{v\theta}^{(e)} = - \int_{-1}^1 GA_s N_v'^T \mathbf{N}_\theta d\xi, \quad (9.27c)$$

$$\mathbf{K}_{vv}^{(e)} = \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 GA_s N_v'^T N_v' d\xi. \quad (9.27d)$$

Elementin jäykkymatriisi on koottu edellä esitetystä lohkoista seuraavasti:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} & \mathbf{K}_{\theta v}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{v\theta}^{(e)} & \mathbf{K}_{vv}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

Otaksumalla taivutusjäykkyys  $EI$  ja leikkausjäykkyys  $GA_s$  vakioiksi saadaan lineaarista interpolaatiota käytettäessä matriisit:

$$\mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} = \frac{EI}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{GA_s h^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (9.29a)$$

$$\mathbf{K}_{\theta v}^{(e)} = \frac{GA_s}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{v\theta}^{(e)} = \mathbf{K}_{\theta v}^{(e)T}, \quad (9.29b)$$

$$\mathbf{K}_{vv}^{(e)} = \frac{GA_s}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.29c)$$

Mikäli vapausasteet ryhmitellään elementin siirtymävektoriin  $\mathbf{u}^{(e)}$  seuraavasti

$$\mathbf{u}^{(e)T} = [ v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2 ], \quad (9.30)$$

saadaan elementin jäykkyyismatriisi muotoon

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} GA_s h^{(e)-1} & \frac{1}{2}GA_s & -GA_s h^{(e)-1} & \frac{1}{2}GA_s \\ & E Ih^{(e)-1} + \frac{1}{3}GA_s h^{(e)} & -\frac{1}{2}GA_s & -E Ih^{(e)-1} + \frac{1}{6}GA_s h^{(e)} \\ & & GA_s h^{(e)-1} & -\frac{1}{2}GA_s \\ & \text{symm.} & & E Ih^{(e)-1} + \frac{1}{3}GA_s h^{(e)} \end{bmatrix} \quad (9.31)$$

Tutkitaan nyt tämän yksinkertaisen elementin toimivuutta. Valitaan testitapaukseksi ulokepalkki, jonka poikkileikkaus on suorakaide  $b \times t$  ( $b$ =leveys,  $t$ =korkeus) ja jota kuormittaa pistemomentti  $M_L$  palkin vapaassa päässä.

Käytetään vain yhtä elementtiä, jolloin yhtälösystemiksi saadaan

$$\begin{bmatrix} GA_s L^{-1} & -\frac{1}{2}GA_s \\ -\frac{1}{2}GA_s & E IL^{-1} + \frac{1}{3}GA_s L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_L \end{Bmatrix}. \quad (9.32)$$

Otaksetaan suppeamaluku  $\nu$  nolaksi, jolloin  $G = E/2$  ja lisäksi otaksetaan  $A_s = A = bt$ , jolloin yhtälösystemi muuntuu muotoon

$$\frac{Ebt}{4} \begin{bmatrix} 2L^{-1} & -1 \\ -1 & \frac{2}{3}L + \frac{1}{3}t^2L^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_L \end{Bmatrix}. \quad (9.33)$$

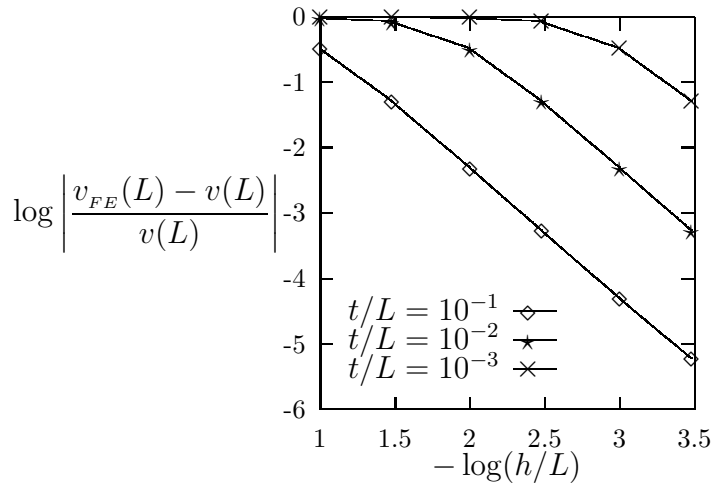
Ottamalla käyttöön dimensioton siirtymä  $v_2/L$  ja jakamalla alempi yhtälöistä  $L$ :llä, saadaan

$$\frac{Ebt}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{3}(2 + a^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2/L \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_L/L \end{Bmatrix}, \quad (9.34)$$

missä on merkitty  $a = t/L$ . Ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} v_2/L \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 24 \end{Bmatrix} \frac{M_L}{EbtL(1 + 2a^2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{a^2}{1 + 2a^2} \frac{M_L L}{EI}. \quad (9.35)$$

Ulokkeen pään taipuman palkkimallin mukainen tarkka ratkaisu on  $v/L = M_L L / (2EI)$ , joten likiratkaisun virhe on huomattava paksulla palkilla ja suorastaan pöyristyttävä ohuella palkilla. Elementtiratkaisu lähestyy nolaa kun  $a = t/L \rightarrow 0$ . Ilmiötä kutsutaan *lukkiutumiseksi*. Elementtiratkaisun kukkiutuminen johtaa kelvottomiin ratkaisuihin ohuissa palkeissa, vaikka elementtijakoa kohtuullisesti tihennettäisiin. Verkkoa tihennettäessä ratkaisu lähestyy hyvin hitaasti kohti palkkimallin tarkkaa ratkaisua. Lukkiutumisesta päästään eroon vasta kun palkin korkeus on likimain elementin pituuden luokkaa (katso kuva 9.3), jolloin virheen pienenemisnopeus lähestyy elementin teoreettista asymptoottista suppenemisnopeutta.



**Kuva 9.3** Suhteellinen virhe ulokepalkin pään taipuman arvossa verkontiheyden funktiona käytettäessä lineaarista Timoshenkon elementtiä erilaisilla suhteellisen paksuuden arvoilla.

Lukkiutumisen syy on leikkausmuodonmuutoksessa, joita muodostuu vaikka kyseessä on puhdas taivutus, sillä

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= v'(x) - \theta(x) = \frac{v_2}{L} - \theta_2 \frac{x}{L} \\ &= \left(1 - 2\frac{x}{L}\right) \frac{a^2}{1 + 2a^2} \frac{M_L L}{EI}. \end{aligned} \quad (9.36a)$$

Havaitaan, että leikkausmuodonmuutos häviää elementin keskipisteessä, joten se pystyy kuvaamaan ohuen palkin Eulerin-Bernoullin otaksunmaa keskimääräisesti oikein. Yleisesti, elementin leikkausmuodonmuutoksen lauseke on

$$\begin{aligned} \gamma(\xi) &= \frac{v_2 - v_1}{h^{(e)}} - \left[\frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2\right] \\ &= \frac{v_2 - v_1}{h^{(e)}} - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) - \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)\xi, \end{aligned} \quad (9.37)$$

josta heti havaitaan, että liukuma voi olla identtisesti nolla vain, kun  $v_1 = v_2 = \theta_1 = \theta_2 = 0$  tai kun  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$  ja  $v_2 = v_1 + h^{(e)}\theta$ . Jälkimmäinen siirtymätila ei kuitenkaan kuvaa taivutustilaa vaan jäykän kappaleen liikettä, joten ratkaisun lukkiutuminen on ilmeistä.

Tarkastellaan vielä lukkiutumista tutkimalla muodonmuutosenergian lauseketta. Variaatioyhtälöstä (9.24) voidaan muodostaa Timoshenkon palkin potentiaalienergian lauseke, joka on

$$\Pi(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(\theta')^2 + GA_s(v' - \theta)^2] dx - \int_0^L f v dx. \quad (9.38)$$

Otetaan käyttöön merkinnät  $I = Ar^2$ , jossa  $r$  on poikkileikkauksen jäyhyys säde ja  $A_s = kA$ , jossa  $k$  on poikkileikkauksen leikkauskorjauskerroin. Potentiaalienergian

lauseke voidaan täten saattaa muotoon

$$\Pi(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[ (\theta')^2 + \frac{k}{2(1+\nu)} \frac{1}{r^2} (v' - \theta)^2 \right] dx - \int_0^L f v dx. \quad (9.39)$$

Siirtymällä dimensiottomiin suureisiin  $\vartheta = v/L$  ja  $\xi = x/L$ , saadaan

$$\begin{aligned} \Pi(\vartheta, \theta) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{EI}{L} \left[ \left( \frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 + \frac{k}{2(1+\nu)} \left( \frac{L}{r} \right)^2 \left( \frac{d\vartheta}{d\xi} - \theta \right)^2 \right] d\xi - \int_0^1 f L^2 \vartheta d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{EI}{L} \left[ \kappa^2 + \frac{k}{2(1+\nu)} \left( \frac{L}{r} \right)^2 \gamma^2 \right] d\xi - \int_0^1 f L^2 \vartheta d\xi. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Potentiaalienergian lausekkeesta havaitaan, että leikkausenergiassa oleva kerroin  $(L/r)^2$  suurenee kun palkki hoikkenee. Täten pienikin virhe leikkausmuodonmuutoksen laskennassa aiheuttaa suuren virheen muodonmuutosenergiassa.

### 9.2.3 Parannettu elementti

Yhteenvetona (sekä hieman yleistäen) voidaan todeta, että samanasteinen approksimaatio sekä taipumalle  $v$  että kiertymälle  $\theta$  ei voi koskaan mahdollistaa leikkausmuodonmuutoksen häviämistä koko elementin alueella muutoin kuin tapauksessa  $v \equiv \theta \equiv 0$ . Yksinkertainen parannusehdotus on käyttää taipumalle astetta korkeampaa interpolaatiota kuin kiertymälle. Lisätään taipuman lineaariseen perusinterpolointiin kvadraattinen kuplamuoto, jolloin siirtymäkentän interpolaatio voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} v(\xi) &= N_1(\xi)v_1 + N_2(\xi)v_2 + N_3(\xi)\Delta v \\ &= \frac{1}{2}(1-\xi)v_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)v_2 + (\xi^2-1)\Delta v, \end{aligned} \quad (9.41a)$$

$$\theta(\xi) = N_1(\xi)\theta_1 + N_2(\xi)\theta_2 = \frac{1}{2}(1-\xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)\theta_2 \quad (9.41b)$$

Elementin jäykkyysmatriisia johdettaessa voidaan käyttää hyväksi jo johdettuja lineaarisen elementin jäykkyysmatriisin lohkoja. Tarkastellaan koko rakenteen globaaleja tasapainoyhtälöitä, jotka on koottu elementtikohtaisista osista. Näin saadaan lohkotussa muodossa seuraava yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vv} & \mathbf{K}_{v\Delta} & \mathbf{K}_{v\theta} \\ \mathbf{K}_{\Delta v} & \mathbf{K}_{\Delta\Delta} & \mathbf{K}_{\Delta\theta} \\ \mathbf{K}_{\theta v} & \mathbf{K}_{\theta\Delta} & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \Delta \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_v \\ \mathbf{f}_\Delta \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (9.42)$$

Uusia osia ovat vain  $\mathbf{K}_{\Delta v}$ ,  $\mathbf{K}_{\Delta\theta}$ ,  $\mathbf{K}_{\Delta\Delta}$  ja  $\mathbf{f}_\Delta$ . Ratkaistaan hierarkisten vapausasteiden arvot yllä olevasta yhtälöryhmästä, jolloin saadaan

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1} (\mathbf{f}_\Delta - \mathbf{K}_{\Delta v} \mathbf{v} - \mathbf{K}_{\Delta\theta} \boldsymbol{\theta}). \quad (9.43)$$

Sijoitetaan kondensoidut hierarkiset vapausasteet takaisin yhtälösystemiin, jolloin saadaan kondensoitu yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vv} - \mathbf{K}_{v\Delta} \mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1} \mathbf{K}_{\Delta v} & \mathbf{K}_{v\theta} - \mathbf{K}_{v\Delta} \mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1} \mathbf{K}_{\Delta\theta} \\ \mathbf{K}_{\theta v} - \mathbf{K}_{\theta\Delta} \mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1} \mathbf{K}_{\Delta v} & \mathbf{K}_{\theta\theta} - \mathbf{K}_{\theta\Delta} \mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1} \mathbf{K}_{\Delta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_v - \mathbf{K}_{v\Delta} \mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1} \mathbf{f}_\Delta \\ -\mathbf{K}_{\theta\Delta} \mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{-1} \mathbf{f}_\Delta \end{Bmatrix} \quad (9.44)$$

Koska hierarkiset vapausasteet ovat vain kunkin elementin sisäisiä vapausasteita, voidaan ne kondensoida jo elementtitasolla. Yksittäisen elementin kondensoiduksi jäykkyysmatriisiksi saadaan globaalissa tasapainoyhtälössä (9.44) esiintyvän kerroinmatriisin kaltainen elementtimatriisi kuten myös vastaavasti elementin voimavektorillekin. Elementtiosuudet, jotka muodostavat matriisit  $\mathbf{K}_{\Delta v}$ ,  $\mathbf{K}_{\Delta\theta}$ ,  $\mathbf{K}_{\Delta\Delta}$  ovat  $\mathbf{K}_{\Delta v}^{(e)}$ ,  $\mathbf{K}_{\Delta\theta}^{(e)}$ ,  $\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{(e)}$ . Mikäli käytetään hierarkista kantaa, joka on derivaattojen suhteen ortogonaalinen, kuten taipuman interpolaatiossa (9.41a), on matriisi  $\mathbf{K}_{v\Delta}^{(e)}$  nollamatriisi, joten kondensoidun elementin jäykkyysmatriisiksi ja kuormavektoriksi saadaan

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vv}^{(e)} & \mathbf{K}_{v\theta}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{\theta v}^{(e)} & \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} - \mathbf{K}_{\theta\Delta}^{(e)} \mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{(e)-1} \mathbf{K}_{\Delta\theta}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_v^{(e)} \\ -\mathbf{K}_{\theta\Delta}^{(e)} \mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{(e)-1} \mathbf{f}_\Delta \end{Bmatrix} \quad (9.45)$$

Osuudet  $\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{(e)}$  ja  $\mathbf{K}_{\theta\Delta}^{(e)}$  ovat (mikäli leikkausjäykkyys on vakio) seuraavanlaiset:

$$\mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{(e)} = K_{\Delta\Delta}^{(e)} = \frac{2GA_s}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \left[ \frac{d}{d\xi} (\xi^2 - 1) \right]^2 d\xi = \frac{16GA_s}{3h^{(e)}}, \quad (9.46a)$$

$$\mathbf{K}_{\theta\Delta}^{(e)} = -GA_s \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{bmatrix} 2\xi d\xi = \frac{2}{3}GA_s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (9.46b)$$

Elementin jäykkyysmatriisiin uudeksi  $\theta\theta$ -lohkoksi saadaan

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} - \mathbf{K}_{\theta\Delta}^{(e)} \mathbf{K}_{\Delta\Delta}^{(e)-1} \mathbf{K}_{\Delta\theta}^{(e)} \\ &= \frac{EI}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{GA_s h^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{GA_s h^{(e)}}{12} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{EI}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{GA_s h^{(e)}}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9.47)$$

Leikkausmuodonmuutoksen lauseke on tällä elementillä muotoa

$$\gamma(\xi) = \frac{v_2 - v_1}{h^{(e)}} - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) + \left[ \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) + 4 \frac{\Delta v}{h^{(e)}} \right] \xi, \quad (9.48)$$

josta nähdään, että leikkausmuodonmuutos voi hävitä identtisesti, mikäli

$$v_2 = v_1 + \frac{1}{2}h^{(e)}(\theta_1 + \theta_2), \quad (9.49a)$$

$$\Delta v = \frac{1}{8}h^{(e)}(\theta_2 - \theta_1). \quad (9.49b)$$

Yllä esitetty elementti toimii hyvin. Yhden elementin taivutusesimerkissä se antaa tarkan ratkaisun, sillä ratkaisuyhtälö on

$$\begin{bmatrix} GA_s L^{-1} & -\frac{1}{2}GA_s \\ -\frac{1}{2}GA_s & EIL^{-1} + \frac{1}{4}GA_s L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_L \end{Bmatrix}, \quad (9.50)$$

joka saadaan muotoon

$$\frac{Ebt}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{3}a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2/L \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_L/L \end{Bmatrix}, \quad (9.51)$$

missä on merkitty  $a = t/L$ . Havaitaan, että kerroinmatriisin determinantti on  $\frac{2}{3}a^2$  ja ratkaisu

$$\begin{Bmatrix} v_2/L \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 12 \end{Bmatrix} \frac{M_L}{EbtL} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{M_L L}{EI}. \quad (9.52)$$

Elementissä on vielä eräs pieni kauneusvirhe. Käyrityksen approksimaatio on elementin alueella vakio, kun taas leikkausmuodonmuutos on lineaarisesti muuttuva. Tämä on kuitenkin yksinkertaisesti korjattavissa asettamalla rajoite (9.49ab) leikkausmuodonmuutosta laskettaessa, eli asettamalla pysyvästi

$$\Delta v = \frac{1}{8}h^{(e)}(\theta_2 - \theta_1). \quad (9.53)$$

Tämä ei tietenkään vaikuta elementin jäykkyysmatriisiin lausekkeisiin.

Edellä esitetty konstruktio tuottaa mahdollisimman yksinkertaisen hyvin toimivan palkkielementin. Elementin käyttäytymistä voidaan vielä parantaa tempulla, joka selitetään luvussa 9.2.5.

#### 9.2.4 Numeerinen ali-integrointi

Edellisen perusteella on lineaarisesti interpoloidun Timoshenkon palkkielementin harmia tuottava osa identifioitavissa  $\theta\theta$ -lohkon leikkausmuodonmuutososaan

$$\mathbf{K}_{s\theta\theta}^{(e)} = \frac{1}{2}GA_s h^{(e)} \int_{-1}^1 \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{N}_\theta d\xi = \frac{GA_s h^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (9.54)$$

joka parabolisen hierarkisen taipumamuodon kondensoinnin jälkeen muuttuu muotoon

$$\frac{GA_s h^{(e)}}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.55)$$

Lineaarisen interpolaation tapauksessa lohkon  $\mathbf{K}_{s\theta\theta}^{(e)}$  tarkka integrointi edellyttää kahden pisteen Gaussin-Legendren kaavaa. Mikäli elementin jäykkyysmatriisi, ja eri-

tyisesti sen osa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}GA_s h^{(e)} \int_{-1}^1 \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{N}_\theta d\xi \\
&= \frac{1}{2}GA_s h^{(e)} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{1}{2}GA_s h^{(e)} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\xi)^2 & \frac{1}{4}(1-\xi^2) \\ \frac{1}{4}(1-\xi^2) & \frac{1}{4}(1+\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi \tag{9.56}
\end{aligned}$$

integroidaan vain yhden pisteen kvadratuurilla, saadaan tulokseksi täsmälleen matriisi (9.55). Muut jäykkyysmatriisin integroitavat osat ovat vakioita tai lineaarisesti muuttuvia lausekkeita, joten yhden pisteen kaava integroi ne tarkasti. Näin on saatu hyvin käyttäytyvä elementti, joka on vielä numeerisesti edullinen muodostaa.

## 9.2.5 Leikkausjäykkyyden redusointi

### 9.2.5.1 MacNealin menettely

Kahdessa edellisessä luvussa esitetyn yksinkertaisen elementin käyttäytymistä voidaan vielä entisestäänkin parantaa pienentämällä leikkausjäykkyyden  $GA_s$  arvoa. Potentiaalienergian lausekkeesta (9.40) nähdään, että ohuilla palkeilla ( $L \gg r$ ) leikkausenergiassa esiintyvä kerroin on suhteettoman suuri verrattuna vastaavaan taivutusenergian lausekkeeseen. Tarkastellaan seuraavassa MacNealin [51] esittämää tapaa tasapainottaa taivutus- ja leikkausenergioiden suhdetta. Tarkastelun idea on muodostaa sellainen leikkausjäykkyyden korjattu arvo, jolla lineaarisesti interpoloidun ja ali-integroidun elementin muodonmuutosenergia on yhtäsuuri vakioliukuma- ja lineaarista käyrästä vastaavan tarkan ratkaisun muodonmuutosenergian kanssa.

Elementin muodonmuutosenergian lauseke on

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} (EI\kappa^2 + GA_s\gamma^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (EI\kappa^2 + GA_s\gamma^2) \frac{1}{2} h^{(e)} d\xi. \tag{9.57}$$

Mikäli leikkausmuodonmuutos on vakio elementin alueella, on taipuman tarkka lauseke esitettävissä kolmannen asteen polynomina ja kiertymän lauseke kvadraattisena polynomina muodoissa<sup>2</sup>

$$v = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \frac{1}{2}h\gamma_0\xi \tag{9.58a}$$

$$\theta = \frac{2}{h}(a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2). \tag{9.58b}$$

<sup>2</sup> Elementtiä osoittava yläindeksi (e) on mukavuussyistä jätetty merkitsemättä.

Nämä lausekkeet johtavat lineaarisesti muuttuvaan käyristymään  $\kappa$  ja vakioleikkausmuodonmuutokseen  $\gamma$ :

$$\kappa = -\theta' = -\frac{4}{h^2}(2a_2 + 6a_3\xi), \quad (9.59a)$$

$$\gamma = v' - \theta = \gamma_0. \quad (9.59b)$$

Interpoloidaan taipuman ja kiertymän tarkkoja lausekkeita (9.58a) lineaarisilla polynomeilla  $\tilde{v}$  ja  $\tilde{\theta}$ :

$$\tilde{v} = N_1(\xi)v_1 + N_2(\xi)v_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)v_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)v_2, \quad (9.60a)$$

$$\tilde{\theta} = N_1(\xi)\theta_1 + N_2(\xi)\theta_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2. \quad (9.60b)$$

Asetetaan interpolaatio yhtäsuureksi solmupisteissä tarkan ratkaisun kanssa, jolloin solmupistevapausasteet  $v_1, v_2, \theta_1$  ja  $\theta_2$  voidaan ratkaista

$$v_1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 - \frac{1}{2}h\gamma_0, \quad (9.61a)$$

$$v_2 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \frac{1}{2}h\gamma_0, \quad (9.61b)$$

$$\theta_1 = \frac{2}{h}(a_1 - 2a_2 + 3a_3), \quad (9.61c)$$

$$\theta_2 = \frac{2}{h}(a_1 + 2a_2 + 3a_3). \quad (9.61d)$$

Täten taipuman ja kiertymän interpolaatiot ovat

$$\tilde{v} = a_0 + a_2 + (a_1 + a_3 + \frac{1}{2}h\gamma_0)\xi, \quad (9.62a)$$

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{h}(2a_1 + 6a_3 + 4a_2\xi), \quad (9.62b)$$

mistä voidaan derivoida käyristymän ja leikkausmuodonmuutosten lausekkeet<sup>3</sup>

$$\tilde{\kappa} = -\tilde{\theta}' = -\frac{1}{h^2}8a_2, \quad (9.63a)$$

$$\tilde{\gamma} = \tilde{v}' - \tilde{\theta} = \gamma_0 - \frac{1}{h}(4a_3 + 4a_2\xi). \quad (9.63b)$$

Lasketaan nyt elementin muodonmuutosenergia interpolaatiosta saaduilla arvoilla ja verrataan sitä tarkan ratkaisun antamaan arvoon. Muodonmuutosenergian tarkka arvo on

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (EI\kappa^2 + GA_s\gamma^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{EI}{h^3} (32a_2^2 + 192a_3^2) + GA_s h \gamma_0^2 \right]. \end{aligned} \quad (9.64)$$

<sup>3</sup>Pilkku suureen oikeassa yläkulmassa merkitsee nyt derivointia  $x$ -koordinaatin suhteen.



Vastaavasti lineaaristen interpolaatiofunktioiden tapauksessa muodonmuutosenergian arvo on

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (EI\tilde{\kappa}^2 + GA_s\tilde{\gamma}^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ 32 \frac{EI}{h^3} a_2^2 + GA_s h \left( \gamma_0 - \frac{4}{h} a_3 \right)^2 \right],\end{aligned}\quad (9.65)$$

missä leikkausmuodonmuutos on otettu vakiona elementin keskipisteessä, vastaten siten jäykkyyismatriisin ali-integrointia yhden pisteen Gaussin kaavalla.

Tavoitteena on saada interpolaatioiden avulla laskettu muodonmuutosenergian arvo yhtäsuureksi tarkan arvon kanssa kaikilla parametrien  $\gamma_0$ :n ja  $a_3$ :n arvoilla. Nyt on huomattava, että tarkassa ratkaisussa (9.58a) parametrit  $\gamma_0$  ja  $a_3$  eivät voi olla riippumattomia, vaan niitä sitoo leikkausvoiman  $Q$  ja taivutusmomentin  $M$  välinen tasapainoyhtälö

$$Q = M' \quad \text{eli} \quad GA_s \gamma = -EI\theta'' \quad \Rightarrow \quad GA_s \gamma_0 = -48 \frac{EI}{h^3} a_3, \quad (9.66)$$

josta saadaan

$$a_3 = -\frac{GA_s h^3}{48EI} \gamma_0. \quad (9.67)$$

Sijoittamalla tämä yhtäsuuruus tarkan muodonmuutosenergian lausekkeeseen (9.64) saadaan

$$U_{ex} = \frac{1}{2} \left[ 32 \frac{EI}{h^3} a_2^2 + \left( 1 + \frac{GA_s h^2}{12EI} \right) GA_s h \gamma_0^2 \right]. \quad (9.68)$$

Merkitään interpolaatiosta lasketun muodonmuutosenergian lausekkeessa (9.65) leikkausjäykkyyden arvoa  $GA_s$  symbolilla  $(GA_s)^*$  ja otetaan huomioon yhteys (9.67), jolloin saadaan

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \left[ 32 \frac{EI}{h^3} a_2^2 + (GA_s)^* h \left( 1 + \frac{GA_s h^2}{12EI} \right)^2 \gamma_0^2 \right]. \quad (9.69)$$

Havaitaan, että muodonmuutosenergiat (9.68) ja (9.69) ovat yhtäsuuret mikäli valitaan

$$GA_s^* = \frac{GA_s}{1 + \frac{GA_s h^2}{12EI}}. \quad (9.70)$$

Leikkausjäykkyyden redusoidun lausekkeen (9.70) ovat esittäneet W.T. Russell ja R.H. MacNeal jo 1953 palkkirakenteiden analogia-analyyseissä [54]. Elementtimenetelmän yhteydessä MacNeal on johtanut lausekkeen (9.70) vuonna 1978 lähteessä [51]. Idean leikkausjäykkyyden pienentämiseen on esittänyt myös I. Fried 1973 [45], ja hän tarkastelee jäykkyyismatriisia muodossa

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{h^3} \left[ \mathbf{K}_b + \frac{2G}{E} \left( \frac{h}{t} \right)^2 \mathbf{K}_s \right], \quad (9.71)$$

jossa  $\mathbf{K}_b$  ja  $\mathbf{K}_s$  ovat jäykkyydsmatriisin taivutuksesta ja leikkauksesta syntyvät osat. Fried esitti asian korjaamiseksi leikkaustermissä esiintyvän palkin korkeuden muuttamista, eli korvaamista tekijällä  $h/c$ , jossa  $c$  on määräämätön positiivinen vakio (esimerkissämme arvo  $c = \sqrt{2}$  vastaa lauseketta 9.70). Menettely pienentää myös yhtälösystemin häiriöalttiutta, mikä on tärkeää ratkaistaessa tehtäviä tietokoneella äärellisellä laskentatarkkuudella. Sittemmin tämä strategia on saavuttanut suosion matemaatikkojen keskuudessa formuloitaessa hyvin toimivia Reissnerin-Mindlinin laattamalliin perustuvia elementtejä. Usein tämä esitetään korvaamalla leikkausjäykkyyden termissä  $t$  lausekkeella  $t + \alpha h$  kaavassa (9.71) ja jossa  $\alpha$  on ns. stabilointivakio ja  $h$  tuttuun tapaan elementin karakteristinen mitta, joka palkkielementin tapauksessa on elementin pituus.

Menettelyn matemaattinen pohja nojaa huonosti asetettujen tehtävien regularisointiteoriaan ja virheanalyysi sekaelementtimenetelmien teoriaan.

**Esimerkki 9.1** Ratkaistaan jo tutuksi tullut ulokepalkki kuormitettuna nyt vain poikittaisella pistekuormalla  $F$  palkin vapaassa päässä. Otaksutaan nyt kuitenkin hieman yleisempi tapaus, jossa palkin poikkileikkaussuureet on annettu vain yleisessä muodossa  $I$  ja  $A_s$ .

Käytetään edelleen yhtä elementtiä, jolloin ratkaisuyhtälö on luvun 9.2.4 elementin tapauksessa (siis lineaarinen interpolaatio ja leikkausjäykkyyden ali-integrointi)

$$\begin{bmatrix} GA_s L^{-1} & -\frac{1}{2}GA_s \\ -\frac{1}{2}GA_s & EIL^{-1} + \frac{1}{4}GA_s L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (9.72)$$

joka saadaan dimensiottomaan muotoon

$$\frac{EA_s}{4(1+\nu)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} + 4\frac{a^2}{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2/L \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (9.73)$$

missä on merkitty

$$\beta = \frac{A_s r^2}{I(1+\nu)} \quad \text{ja} \quad a = \frac{r}{L}. \quad (9.74)$$

Palkin pään taipumaksi saadaan siten

$$\frac{v_2}{L} = \left( \frac{1}{4} + 2\frac{a^2}{\beta} \right) \frac{FL^2}{EI}. \quad (9.75)$$

Timoshenkon palkkimallin mukainen taipuman tarkka ratkaisu on

$$\frac{v_{2,\text{tarkka}}}{L} = \frac{1}{3} \frac{FL^2}{EI} + \frac{F}{GA_s} = \left( \frac{1}{3} + 2\frac{a^2}{\beta} \right) \frac{FL^2}{EI}. \quad (9.76)$$

Virhe ulokkeen pään taipumassa on siten -25%.

Mikäli elementissä käytetään leikkausjäykkyyden redusointia (9.70) saadaan yhdellä elementillä tarkka taipuman arvo.

Myös muille kuormitustapauksille saadaan solmupisteissä tarkat siirtymän arvot mikäli kuormitusvektoria integroitaessa käytetään taipumalle rajoitteen (9.49a) mukaista kvadraattista interpolaatiota

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 \Delta v = N_1 v_1 + N_2 v_2 - \frac{1}{8} h^{(e)} (\theta_2 - \theta_1) N_3. \quad (9.77)$$

### 9.2.5.2 Redusoidun leikkausjäykkyyden vaihtoehtoinen johtotapa

Leikkausjäykkyyden korjauskertoimen lauseke (9.70) voidaan saada myös ilman energiataarkastelua, operoiden pelkästään interpolaatiofunktioilla. Lähtökohdانا on tasapainoyhtälön

$$Q - M' = GA_s(v' - \theta) + EI\theta'' = 0 \quad (9.78)$$

keskimääräinen toteutuminen elementin alueella. Jotta tasapainoyhtälön testaaminen onnistuu on kiertymän interpolaatio oltava vähintään kvadraattinen. Yksinkertaisin mahdollinen interpolaatio on siten lineaarinen taipuma ja kvadraattinen kiertymä:

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)v_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)v_2, \quad (9.79a)$$

$$\begin{aligned} \theta &= N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + N_3 \Delta \theta \\ &= \frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2 + (\xi^2 - 1)\Delta \theta. \end{aligned} \quad (9.79b)$$

Tasapainoyhtälön (9.78) toteutuminen keskimääräisesti

$$\frac{h}{2} \int_{-1}^1 [GA_s(v' - \theta) + EI\theta''] d\xi = 0, \quad (9.80)$$

mahdollistaa kiertymän hierarkista kuplamuotoa vastaavan parametrin eliminoimisen, josta saadaan

$$\begin{aligned} \Delta \theta &= \frac{3GA_s h^2}{24EI + 2GA_s h} \left[ \frac{1}{h}(v_1 - v_2) + \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \\ &= \frac{GA_s h^2}{8EI} \frac{1}{1 + \frac{GA_s h^2}{12EI}} \left[ \frac{1}{h}(v_1 - v_2) + \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right]. \end{aligned} \quad (9.81)$$

Elementin virtuaalisen työn yhtälön termissä

$$\int Q \delta \gamma dx \quad (9.82)$$

leikkausvoima lasketaan tasapainoyhtälön (9.78) avulla:

$$Q = -EI\theta'' = -\frac{8EI}{h^2} \Delta \theta = \frac{GA_s}{1 + \frac{GA_s h^2}{12EI}} \left[ \frac{1}{h}(v_2 - v_1) - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right]. \quad (9.83)$$

Virtuaalinen muodonmuutos on tavalliseen tapaan

$$\delta\gamma = \delta v' - \delta\theta \quad (9.84)$$

laskettuna elementin keskipisteessä, eli

$$\delta\gamma = \frac{1}{h}(\delta v_2 - \delta v_1) - \frac{1}{2}(\delta\theta_1 + \delta\theta_2). \quad (9.85)$$

Näin konstruoitu elementti on identtinen lineaarisen Timoshenkon palkkielementin kanssa, joka integroidaan yhden pisteen kaavalla ja johon sovelletaan leikkausjäykkyyden redusointia (9.70). Tätä ideaa voidaan soveltaa myös stabiloitujen Reissnerin-Mindlinin laattaelementtien yhteydessä (ks. luku 10.8), mikäli stabilointiparametrille  $\alpha$  halutaan fysikaalisesti mielekäs arvo.

### 9.2.6 Viisivapausasteinen elementti

Tarkastellaan vielä lopuksi yhtä Timoshenkon palkkimallin elementtiä. Mikäli taivutusmomentille halutaan lineaarinen lauseke, on kiertymän oltava parabolinen. Tällöin, jotta elementillä olisi mahdollisuus toteuttaa Bernoullin otaksuma, on taipuman oltava kolmatta astetta oleva polynomi. Käytetään hierarkisia muotoja nyt kaikille 'lisävapausasteille', joten interpolaatioiksi valitaan lausekkeet

$$\begin{aligned} v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 \Delta v_1 + N_4 \Delta v_2, \\ &= \frac{1}{2}(1 - \xi)v_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)v_2 + (\xi^2 - 1)\Delta v_1 + (\xi^3 - \xi)\Delta v_2, \end{aligned} \quad (9.86a)$$

$$\begin{aligned} \theta &= N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + N_3 \Delta \theta \\ &= \frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2 + (\xi^2 - 1)\Delta \theta. \end{aligned} \quad (9.86b)$$

Leikkausmuodonmuutoksen lausekkeeksi saadaan nyt

$$\gamma = g_0 + g_1 \xi + g_2 \xi^2, \quad (9.87)$$

jossa

$$g_0 = \frac{1}{h}(v_2 - v_1 - 2\Delta v_2) - \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_1) + \Delta\theta, \quad (9.88a)$$

$$g_1 = \frac{4}{h}\Delta v_1 + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2), \quad (9.88b)$$

$$g_2 = \frac{6\Delta v_2}{h} - \Delta\theta, \quad (9.88c)$$

jossa elementin pituuden  $h$  symbolista on elementtiä indikoiva merkintä ( $e$ ) jätetty yksinkertaisuuden vuoksi pois. Kun taivutusmomentti on lineaarisesti muuttuva, on leikkausvoima momentin derivaattana vakio. Täten tuntuu luonnolliselta asettaa

vaatimus leikkausmuodonmuutoksen vakioisuudesta elementin alueella. Näin kolmesta lisävapausasteesta  $\Delta v_1, \Delta v_2$  ja  $\Delta\theta$  voidaan kaksi eliminoida rajoitteilla

$$g_1 = \frac{4}{h}\Delta v_1 + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) = 0, \quad (9.89a)$$

$$g_2 = \frac{6\Delta v_2}{h} - \Delta\theta = 0. \quad (9.89b)$$

Eliminoidaan taipuman hierarkiset muodot:

$$\Delta v_1 = \frac{1}{8}h(\theta_2 - \theta_1), \quad (9.90a)$$

$$\Delta v_2 = \frac{1}{6}h\Delta\theta. \quad (9.90b)$$

Elementin jää nyt viisi vapausastetta  $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2, \Delta\theta$ . Kiertymän hierarkinen vapausaste voidaan toki kondensoida elementtitasolla, joten elementin vapausasteiden määrä saadaan redusoitua neljään.

## 9.3 Diskreetti EB-palkkimallin elementti

### 9.3.1 Tapa 1: kuubinen taipuma, kvadraattinen kiertymä

Rajoittamalla leikkausmuodonmuutos kokonaan häviämään, saadaan Timoshenkon palkkimallin avulla muodostettu Eulerin-Bernoullin palkkimallin elementti. Otaksuamalla taipumalle ja kiertymälle interpolaatio (9.86a) ja rajoittamalla leikkausmuodonmuutoksen lauseke (9.87) nolaksi saadaan ehtojen (9.89a) lisäksi myös rajoite

$$g_0 = \frac{1}{h}(v_2 - v_1 - 2\Delta v_2) - \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_1) + \Delta\theta = 0, \quad (9.91)$$

josta seuraa kiertymän hierarkiselle vapausasteelle arvo

$$\Delta\theta = \frac{3}{2}\frac{v_1 - v_2}{h} + \frac{3}{4}(\theta_1 + \theta_2). \quad (9.92)$$

Taipuman interpolaatiolle saadaan nyt lauseke

$$\begin{aligned} v &= N_1v_1 + N_2v_2 + N_3\frac{h}{8}(\theta_2 - \theta_1) + N_4\frac{1}{6}h\Delta\theta \\ &= (N_1 + \frac{1}{4}N_4)v_1 + \frac{1}{8}h(N_4 - N_3)\theta_1 + (N_2 - \frac{1}{4}N_4)v_2 + \frac{1}{8}h(N_3 + N_4)\theta_2. \end{aligned} \quad (9.93)$$

Kiertymän interpolaatio on

$$\begin{aligned} \theta &= N_1\theta_1 + N_2\theta_2 + N_3\Delta\theta \\ &= (N_1 + \frac{3}{4}N_3)\theta_1 + (N_2 + \frac{3}{4}N_3)\theta_2 + \frac{3}{2}N_3\frac{v_1 - v_2}{h}. \end{aligned} \quad (9.94)$$

Koska leikkausmuodonmuutos häviää, voidaan Timoshenkon palkkimallin virtuaalisen työn yhtälöstä jättää leikkausmuodonmuutosta vastaava termi pois, jolloin saadaan yhtälö

$$\int_0^L EI\theta'\delta\theta' dx = \int_0^L f v dx, \quad (9.95)$$

jonka perusteella elementin jäykkyyismatriisi ja kuormitusvektori voidaan johtaa.

Leikkausmuodonmuutosrajoitteet  $g_0 = g_1 = g_2 = 0$  voidaan toteuttaa myös pisteittäisesti eli diskreetisti. Kolmen ehdon toteutumiseen vaaditaan tietenkin rajoitteen asettaminen kolmessa eri pisteessä. Valitaan näiksi pisteiksi Gaussin pisteet  $\xi = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}, 0$ . Rajoiteyhtälöt ovat siten

$$\gamma(-\sqrt{\frac{3}{5}}) = g_0 - \sqrt{\frac{3}{5}}g_1 + \frac{3}{5}g_2 = 0, \quad (9.96a)$$

$$\gamma(0) = g_0 = 0, \quad (9.96b)$$

$$\gamma(+\sqrt{\frac{3}{5}}) = g_0 + \sqrt{\frac{3}{5}}g_1 + \frac{3}{5}g_2 = 0. \quad (9.96c)$$

Rajoitteiden asettaminen voidaan ohjelmointiteknisesti toteuttaa suoraan siirtymämuodonmuutosmatriisiin  $\mathbf{B}$ .

### 9.3.2 Tapa 2: sekä taipuma että kiertymä kvadraattinen

Periaatteeseen (9.95) perustuvan elementin käyristymä on interpolaation (9.94) tapauksessa lineaarinen lauseke. Täten elementin jäykkyyismatriisia muodostettaessa joudutaan integroimaan toisen asteen polynomi, joka integroituisi tarkasti jo kahden pisteen Gaussin kvadratuurilla. Otaksumalla taipumalle kvadraattinen interpolaatio

$$v = N_1v_1 + N_2v_2 + N_3\Delta v \quad (9.97)$$

kuubisen lausekkeen (9.86aa) sijaan, on eliminotavana ainoastaan kaksi hierarkista lisävapausastetta  $\Delta v$  ja  $\Delta\theta$ . Siitä huolimatta leikkausmuodonmuutoksen lauseke on kvadraattinen, eli

$$\gamma = g_0 + g_1\xi + g_2\xi^2, \quad (9.98)$$

missä

$$g_0 = \frac{1}{h}(v_2 - v_1) - \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_1) + \Delta\theta, \quad (9.99a)$$

$$g_1 = \frac{4}{h}\Delta v + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2), \quad (9.99b)$$

$$g_2 = -\Delta\theta. \quad (9.99c)$$

Mikäli leikkausmuodonmuutos (9.98) vaaditaan häviämään Gaussin kahden pisteen kaavan integroimispisteissä  $\xi = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ , on lineaarisen termin kertoimen  $g_1$  hävitävä, eli

$$g_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta v = \frac{1}{8}h(\theta_2 - \theta_1), \quad (9.100)$$

joten  $\Delta v$  saatiin eliminotua. Jäljelle jäänyt ainoa eliminotava vapausaste  $\Delta\theta$ , voidaan ratkaista ehdosta

$$\gamma(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}) = g_0 + \frac{1}{3}g_2 = 0, \quad (9.101)$$

josta seuraa kiertymän hierarkiselle vapausasteelle arvo

$$\Delta\theta = \frac{3}{2}\frac{v_1 - v_2}{h} + \frac{3}{4}(\theta_1 + \theta_2), \quad (9.102)$$

mikä on identtinen ensimmäisellä tavalla saadun arvon (9.92) kanssa. Täten myös kiertymän interpolaatio on sama kummallakin tavalla muodostettaessa ja vastaavat elementtien jäykkymatriisit ovat identtiset.

Kun elementtimatriisin alkiot integroidaan kahden pisteen Gaussin kvadratuurilla häviävät leikkausmuodonmuutokseen liittyvät termit elementtimenetelmän kannalta ‘identtisesti’, sillä kaikki informaatio tulee integroimis pisteistä.

**Esimerkki 9.2** Määritä ns. diskreetin Eulerin-Bernoullin palkkielementin jäykkymatriisi otaksamalla taipumalle ja kiertymälle kvadraattinen lauseke. Ota Bernoullin otaksuma huomioon diskreetisti kahdessa Gaussin pisteessä ja suorita elementtimatriisin integrointi numeerisesti kahden pisteen Gaussin kaavalla. Elementtimatriisin lauseke on

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} E I \mathbf{N}_{\theta,x}^T \mathbf{N}_{\theta,x} dx, \quad (9.103)$$

jossa  $\mathbf{N}_{\theta}$  on kiertymän  $\theta$  interpolaatiofunktioit sisältävä matriisi.

Kiertymän interpolaatio on siten

$$\begin{aligned} \theta &= (N_1 + \frac{3}{4}N_3)\theta_1 + (N_2 + \frac{3}{4}N_3)\theta_2 + \frac{3}{2}N_3\frac{v_1 - v_2}{h} \\ &= \frac{3}{2}(\xi^2 - 1)\frac{v_1}{h} + \frac{3}{2}(1 - \xi^2)\frac{v_2}{h} + (\frac{3}{4}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{4})\theta_1 + (\frac{3}{4}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{4})\theta_2 \\ &= \tilde{N}_1 v_1 + \tilde{N}_2 v_2 + \tilde{N}_3 \theta_1 + \tilde{N}_4 \theta_2 \end{aligned} \quad (9.104)$$

Jäykkymatriisin muodostamista varten tarvitaan kiertymän derivaattaa

$$\theta_{,\xi} = \tilde{N}_{1,\xi} v_1 + \tilde{N}_{2,\xi} v_2 + \tilde{N}_{3,\xi} \theta_1 + \tilde{N}_{4,\xi} \theta_2, \quad (9.105)$$

jossa siis

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{1,\xi} &= \frac{3\xi}{h}, & \tilde{N}_{2,\xi} &= \frac{1}{2}(3\xi - 1), \\ \tilde{N}_{3,\xi} &= -\frac{3\xi}{h}, & \tilde{N}_{4,\xi} &= \frac{1}{2}(1 + 3\xi). \end{aligned} \quad (9.106)$$

Jäykkymatriisin alkio on muotoa

$$K_{ij}^{(e)} = \int E I \tilde{N}_{i,x} \tilde{N}_{j,x} dx = \frac{2}{h} \int_{-1}^1 E I \tilde{N}_{i,\xi} \tilde{N}_{j,\xi} d\xi, \quad (9.107)$$

joten alkioiden lausekkeet ovat (otaksutaan taivutusjäykkyys vakioksi)

$$\begin{aligned} K_{11}^{(e)} &= \frac{2}{h} E I \int_{-1}^1 \left(\frac{3\xi}{h}\right)^2 d\xi = \frac{18 E I}{h^3} \int_{-1}^1 \xi^2 d\xi = \frac{18 E I}{h^3} \left[ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \right] \\ &= \frac{12 E I}{h^3}, \end{aligned} \quad (9.108a)$$

$$K_{12}^{(e)} = \frac{2 E I}{h} \int_{-1}^1 \frac{3\xi}{h} \frac{1}{2}(3\xi - 1) d\xi = \frac{3 E I}{h^2} \int_{-1}^1 (3\xi^2 - \xi) d\xi = \frac{6 E I}{h^2}, \quad (9.108b)$$

$$K_{13}^{(e)} = \frac{2 E I}{h} \int_{-1}^1 \left(\frac{3\xi}{h}\right) \left(-\frac{3\xi}{h}\right) d\xi = -K_{11}^{(e)} \quad (9.108c)$$

jne.. Havaitaan, että saatiin sama standardi Eulerin-Bernoullin palkkimallin jäykkyysmatriisi jossa taipumalle käytetään Hermiten kuubisia polynomeja.

## 9.4 Harjoitustehtäviä

1. Tutki ratkaisuyhtälön häiriöalttiutta lineaarisesti interpoloidun Timoshenkon palkkielementin tapauksessa esimerkin ulokepalkille yhden elementin verkolla. Tutki tapaukset: (a) ali-integroitu elementti ja (b) stabiloitu eli leikkausjäykkyydeltään redusoitu ali-integroitu elementti. Symmetrisen positiivisesti definiitin matriisin  $\mathbf{K}$  häiriöalttiuus  $C_2(\mathbf{K})$  voidaan laskea suhteena

$$C_2 = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}, \quad (9.109)$$

missä  $\lambda_{max}$  ja  $\lambda_{min}$  ovat matriisin  $\mathbf{K}$  suurin ja pienin ominaisarvo. Piirrä kuvaajat suhteen  $a = t/L$  funktiona välillä  $10^{-3} < a < 1$  logaritmisella asteikolla. Tällöin (a) kohdan kuvaaja on suora, ja häiriöalttiuden paksuusriippuvuus on siten muotoa

$$C_2(\mathbf{K}) \sim ct^p, \quad (9.110)$$

missä  $c$  on jokin positiivinen vakio ja  $p$  on kokonaisluku, mikä? Entä stabiloidun elementin tapaus (c)? Mitä johtopäätelmiä elementtien käyttökelpoisuudesta voidaan tehdä?

Oleta suorakaidepoikkileikkaus ja että  $A_s = A$ , sekä  $\nu = 0$ .

2. Näytä, että interpolaatiofunktioit lausekkeessa (9.93) ovat samat kuin Hermiten kuubiset interpolaatiofunktioit (9.17).
3. Muodosta Eulerin-Bernoullin palkkimalliin perustuvan nelivapausasteisen elementin kiertymän  $\theta$  interpolaatiofunktioit lähtien Timoshenkon palkkimallista, jossa taipumalla  $v$  ja kiertymällä  $\theta$  on erilliset  $C_0$ -interpolaatioit:

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)v_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)v_2, \quad (9.111a)$$

$$\begin{aligned} \theta &= N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + N_3 \Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2 + (\xi^2 - 1)\Delta\theta. \end{aligned} \quad (9.111b)$$

Kiertymän interpolaation  $\Delta\theta$  vapausaste eliminoidaan soveltamalla Bernoullin rajoitetta diskreetisti palkin keskipisteessä  $\xi = 0$ . Lopulliset vapausasteet ovat tietenkin  $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$ . Mikäli vapausasteet numeroidaan edellä kirjoitetussa järjestyksessä, laske elementin jäykkyysmatriisin alkiot  $K_{ij}$ .

4. Kuten edellisessä tehtävässä muodosta Eulerin-Bernoullin palkkimalliin perustuvan nelivapausasteisen elementin kiertymän  $\theta$  interpolaatiofunktioit lähtien Timoshenkon palkkimallista. Taipumalle ja kiertymälle käytetään samoja interpolaatioita kuin



edellisessä tehtävässä. Kiertymän interpolaation  $\Delta\theta$  vapausaste eliminoidaan soveltamalla Bernoullin rajoitetta *keskimääräisesti elementin alueella*

$$\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \gamma dx = 0. \quad (9.112)$$

Lopulliset vapausasteet ovat tietenkin  $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$ . Mikäli vapausasteet numeroidaan edellä kirjoitetussa järjestyksessä, laske elementin jäykkyyismatriisin alkiot  $K_{ij}$ . Vertaa tulosta edellisen tehtävän ratkaisuun.

5. Timoshenkon palkkimallin tasapainoyhtälöt ovat:

$$M' - Q = 0, \quad (9.113a)$$

$$-Q' = f, \quad (9.113b)$$

jotka voidaan kirjoittaa konstitutiivisen lain ja kinemaattisten relaatioiden avulla muotoon (oletetaan  $EI$  ja  $GA_s$  vakioiksi)

$$-EI\theta'' - GA_s(v' - \theta) = 0, \quad (9.114a)$$

$$-GA_s(v'' - \theta') = f. \quad (9.114b)$$

Systeemissä on siten kaksi tuntematonta funktiota: taipuma  $v$  ja poikkileikkaustason kiertymä  $\theta$ . Timoshenkon palkkiprobleema voidaan myös formuloida kolmen tuntemattoman avulla, lisäämällä leikkausvoima primaarisesti ratkaistavien suureiden joukkoon seuraavasti:

$$-EI\theta'' - Q = 0, \quad (9.115a)$$

$$-Q' = f, \quad (9.115b)$$

$$GA_s(v' - \theta) - Q = 0, \quad (9.115c)$$

Näytä, että kertomalla yllä olevat yhtälöt painofunktioilla  $\hat{\theta}, \hat{v}$  ja  $\hat{Q}$  ja integroimalla palkin pituuden yli, päädytään lopulta seuraavanlaiseen variaatioyhtälöön (oletetaan jäykästi tuetut reunaehdot):

$$EI \int_0^L \theta' \hat{\theta}' dx + \int_0^L Q(\hat{v} - \hat{\theta}) dx = \int_0^L f \hat{v} dx, \quad (9.116a)$$

$$GA_s \int_0^L (v' - \theta) \hat{Q} dx - \int_0^L Q \hat{Q} dx = 0. \quad (9.116b)$$

Yllä oleva systeemi voidaan stabiloida lisäämällä elementtikohtaisesti määritellyt termit

$$\sum_{e=1}^N \alpha h^2 \int_{I^{(e)}} (EI\theta'' + Q) \hat{\theta}'' dx, \quad (9.117a)$$

$$\sum_{e=1}^N \alpha h^2 \frac{GA_s}{EI} \int_{I^{(e)}} (EI\theta'' + Q) \hat{Q} dx \quad (9.117b)$$

yhtälöiden (9.116a) oikealle puolelle. Näin päädytään seuraavanlaiseen systeemiin:

$$EI \int_0^L \theta' \hat{\theta}' dx + \int_0^L Q(\hat{v}' - \hat{\theta}) dx = \int_0^L f \hat{v} dx + \sum_{e=1}^N \alpha h^2 \int_{I^{(e)}} (EI\theta'' + Q) \hat{\theta}'' dx,$$

$$GA_s \int_0^L (v' - \theta) \hat{Q} dx - \int_0^L Q \hat{Q} dx = \sum_{e=1}^N \alpha h^2 \frac{GA_s}{EI} \int_{I^{(e)}} (EI\theta'' + Q) \hat{Q} dx.$$

Yhtälöissä esiintyvä stabilointiparametri  $\alpha$  on positiivinen vakio. Miksi stabilointitermit (9.117a) voidaan lisätä variaatiomuotoon (9.116a)? Näytä, että stabiloitu systeemi voidaan termien uudelleenjärjestelyllä muuntaa symmetriseen muotoon. Näytä lisäksi, että olettamalla leikkausvoiman elementtiapproksimaatio elementtirajojen yli epäjatkovaksi, saadusta symmetristä muodosta voidaan leikkausvoima  $Q$  elementtikohtaisesti eliminoida, ja jolloin päädytään siirtymämenetelmään perustuvan elementtimenetelmän perustaksi kelpaavaan heikkoon muotoon:

$$EI \int_0^L \theta' \hat{\theta}' dx - \sum_{e=1}^N \alpha h^2 EI \int_{I^{(e)}} \theta'' \hat{\theta}'' dx +$$

$$+ \sum_{e=1}^N \frac{GA_s}{1 + \alpha h^2 GA_s / EI} \int_{I^{(e)}} (v' - \theta - \alpha h^2 \theta'') (\hat{v}' - \hat{\theta} - \alpha h^2 \hat{\theta}'') dx$$

$$= \int_0^L f \hat{v} dx. \quad (9.118)$$

6. Ratkaise molemmista päistään vapaasti tuettu palkki elementtimenetelmällä, joka perustuu edellisen tehtävän stabiloituun formulaatioon (9.118). Käytä yhtä elementtiä ja kvadraattista interpolaatiota sekä  $v$ :lle että  $\theta$ :lle. Ota huomioon symmetria. Kuormituksena on vakiokuorma  $f$ .

Tehtävän jäykkyysmatriisiin jää riippuvuus stabilointiparametrin  $\alpha$ . Koska taivutusenergiaan liittyvä termi

$$EI \int_0^L \theta' \hat{\theta}' dx - \sum_{e=1}^N \alpha h^2 EI \int_{I^{(e)}} \theta'' \hat{\theta}'' dx \quad (9.119)$$

on oltava positiivisesti definiitti, rajoittaa se stabilointiparametrin sallitut arvot välille:

$$0 < \alpha < C. \quad (9.120)$$

Määritä  $C$  ja käytä tehtävän ratkaisussa jotain positiivisuusehdon (9.120) toteuttavaa arvoa. Määritä ja piirrä myös elementtiratkaisun leikkausvoimajakauma.



# Luku 10

## Laattaelementtejä

Tämä luku noudattaa edellisen luvun, eli palkkimalleihin perustuvien elementtien esittelyn, kaltaista jaottelua. Ensin selvitetään ohuen laatan mallia, jota kutsutaan myös Kirchhoffin laattamalliksi,<sup>1</sup> jonka jälkeen esitellään keskimääräiset poikittaiset leikkausmuodonmuutokset huomioonottavaa laattamallia, jota kutsutaan kehittelijöidensä mukaan myös Reissnerin-Mindlinin laattamalliksi. Lopuksi esitellään diskreetti-Kirchhoff-tyyppisiä elementtejä, joiden lähtökohta on Reissnerin-Mindlinin malli<sup>2</sup> ja joista saadaan Kirchhoffin mallin mukaisia sopivien rajoitteiden asettamisella.

### 10.1 Kirchhoffin laattamalli

#### 10.1.1 Kinemaattiset otaksumat

Aivan vastaavasti kuin ohuen palkin tapauksessa, ohuen laatan mallin perusotaksumat ovat:

1. laatan keskipinnan normaalit säilyvät suorina deformaation aikana,
2. laatan keskipinnan normaalit eivät veny ja
3. poikittaiset leikkausmuodonmuutokset ovat merkityksettömiä.

Otaksumaan nyt laatan keskipinnan tasoksi  $xy$ -taso. Kaksi ensimmäistä otaksumaa voidaan toteuttaa valitsemalla siirtymille  $u, v$  ja  $w$  seuraavat lausekkeet:

$$u(x, y, z) = z\theta_y(x, y), \quad (10.1a)$$

$$v(x, y, z) = -z\theta_x(x, y), \quad (10.1b)$$

$$w(x, y, z) = w_c(x, y), \quad (10.1c)$$

jossa akselien  $x$  ja  $y$  ympäri kiertävät rotaatiot ovat  $\theta_x$  ja  $\theta_y$ , ks. kuva 10.1. Huomaa, että oheiset linearisoidut lausekkeet voidaan kirjoittaa vain, jos kiertymät  $\theta_x$

<sup>1</sup> Gustave Robert Kirchhoff (1824-1887) julkaisi 1850 artikkelin, jossa ohuen laatan ongelma esitettiin ensimmäistä kertaa täydellisesti formuloituna.

<sup>2</sup> E. Reissner 1945 ja R.D. Mindlin 1951

ja  $\theta_y$  ovat pieniä. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi jätetään jatkossa keskipintaa osoittava alaindeksi  $c$  pois laatan taipuman  $w$  lausekkeesta.

Laattateoriassa käytetään usein kiertymille toisenlaista merkintätapaa. Määritellään kiertymät, katso kuva 10.1, <sup>3</sup>

$$\beta_x = -\theta_y, \quad \beta_y = \theta_x. \quad (10.2)$$

Tällöin kinemaattiset otaksumat (10.1a) voidaan kirjoittaa muodossa

$$u(x, y, z) = -z\beta_x(x, y), \quad (10.3a)$$

$$v(x, y, z) = -z\beta_y(x, y), \quad (10.3b)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y). \quad (10.3c)$$

Edellä esitettyihin siirtymäotaksumiin perustuvat muodonmuutoskomponentit ovat

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\beta_{x,x}, \quad (10.4a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\beta_{y,y}, \quad (10.4b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}), \quad (10.4c)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = w_{,x} - \beta_x, \quad (10.4d)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = w_{,y} - \beta_y. \quad (10.4e)$$

Kirchhoffin laattamallin otaksuman 3 perusteella poikittaiset leikkausmuodonmuutokset  $\gamma_{zx}$  ja  $\gamma_{zy}$  häviävät, joten

$$w_{,x} = \beta_x, \quad w_{,y} = \beta_y, \quad (10.5)$$

ja lopulliset kinemaattiset yhtälöt ovat muotoa

$$u(x, y, z) = -zw_{,x}, \quad (10.6a)$$

$$v(x, y, z) = -zw_{,y}, \quad (10.6b)$$

$$w(x, y, z) = w. \quad (10.6c)$$

Ainoat nolasta eroavat muodonmuutoskomponentit ovat

$$\epsilon_x = -zw_{,xx} = z\kappa_x, \quad (10.7a)$$

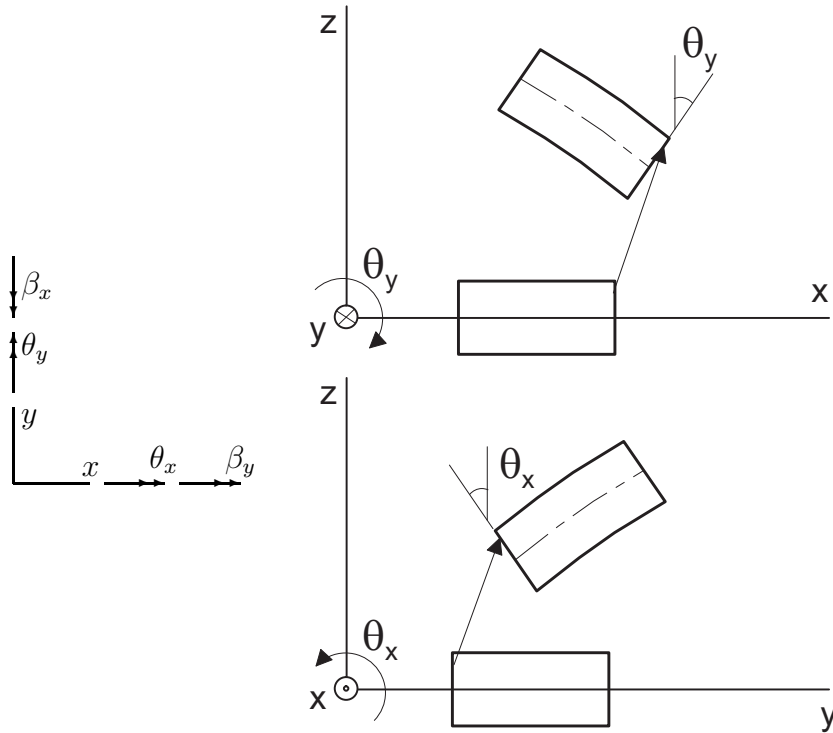
$$\epsilon_y = -zw_{,yy} = z\kappa_y, \quad (10.7b)$$

$$\gamma_{xy} = -2zw_{,xy} = z\kappa_{xy}, \quad (10.7c)$$

missä  $\kappa_x$  ja  $\kappa_y$  ovat keskipinnan käyrityksiä ja  $\kappa_{xy}$  on vääntymä.<sup>4</sup>

<sup>3</sup> Joissain lähteissä määritellään  $\beta_x = \theta_y$  ja  $\beta_y = -\theta_x$ .

<sup>4</sup> Tässä esityksessä käytetään "vääntymälle" määritelmää  $\kappa_{xy} = -2w_{,xy}$ .



**Kuva 10.1** Laatan deformaatio ja kiertymäsuureiden määritelmät.

### 10.1.2 Virtuaalisen työn yhtälö

Kirchhoffin laattamallin virtuaalisen työn yhtälö on

$$\begin{aligned} & \int_A \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dz dA \\ &= \int_A f \delta w dA + \int_{\Gamma_t} (\bar{V}_n \delta w - \bar{M}_n \delta w_{,n}) ds, \end{aligned} \quad (10.8)$$

missä  $\Gamma_t$  on tasoalueen  $A$  reunakäyrän osa, jolla on annettu reunakuormituksena korvikeleikkausvoima  $\bar{V}_n$  ja momentti  $\bar{M}_n$ . Korvikeleikkausvoiman lauseke on  $V_n = Q_n + M_{ns,s}$ . Laatan reunan osalla  $S_w$  tunnetaan siirtymät, eli

$$w = \bar{w}, \quad w_{,n} = \bar{w}_{,n}. \quad (10.9)$$

Integroimalla laatan paksuuden yli, muuntuu virtuaalisen työn yhtälö muotoon

$$\begin{aligned} & \int_A (M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + M_{xy} \delta \kappa_{xy}) dA \\ &= \int_A f \delta w dA + \int_{\Gamma_\sigma} (\bar{V}_n \delta w - \bar{M}_n \delta w_{,n}) ds, \end{aligned} \quad (10.10)$$

jossa taivutusmomentit  $M_x$ ,  $M_y$  ja vääntömomentti  $M_{xy}$  määritellään kaavoilla

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_x dz, \quad M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_y dz, \quad M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \tau_{xy} dz. \quad (10.11)$$

Otaksutaan laatussa vallitsevan tasojäännitystilän, joten jännitykset saadaan lineaarisesti kimmoisan isotrooppisen materiaalin tapauksessa yhtälöistä

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (10.12)$$

Huomaa, että tasojäännitystilaotaksuma on ristiriidassa otaksuman 2 kanssa, joka edellyttäisi tasomuodonmuutostilaa. Mikäli näin valittaisiin, tulisi laattamallista liian jäykkä. Voidaan kuitenkin osoittaa, että kyseinen laattamalli on oikea redusointi yleisestä kolmidimensioisesta jännitys- ja muodonmuutostilasta, ja laattamalli konvergoi tätä kohti, kun laatan paksuus pienenee.

Sijoittamalla tasomuodonmuutostilan yhtälöt ja kinemaattiset otaksumat momenttien määrittely-yhtälöihin saadaan niille lausekkeet

$$M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_y), \quad (10.13a)$$

$$M_y = D(\kappa_y + \nu\kappa_x), \quad (10.13b)$$

$$M_{xy} = \frac{1}{2}D(1-\nu)\kappa_{xy}, \quad (10.13c)$$

missä  $D$  on laatan taivutusjäykkyys

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (10.14)$$

Otetaan käyttöön käyritymien ja momenttien vektorit  $\boldsymbol{\kappa}$  ja  $\boldsymbol{m}$ :

$$\boldsymbol{\kappa} = [\kappa_x \quad \kappa_y \quad \kappa_{xy}]^T, \quad \boldsymbol{m} = [M_x \quad M_y \quad M_{xy}]^T. \quad (10.15)$$

Laatan jännitysresultanttien ja käyritymien välinen yhteys on

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{D}_b \boldsymbol{\kappa}, \quad (10.16)$$

missä

$$\boldsymbol{D}_b = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}. \quad (10.17)$$

Virtuaalisen työn lauseke (10.10) saadaan kompaktiin muotoon

$$\int_A \boldsymbol{\delta\kappa}^T \boldsymbol{m} dA = \int_A \boldsymbol{\delta\kappa}^T \boldsymbol{D}_b \boldsymbol{\kappa} dA = \int_A f \delta w dA + \int_{S_\sigma} (\bar{V}_n \delta w - \bar{M}_n \delta w_{,n}) ds. \quad (10.18)$$

Tämä voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\begin{aligned} & \int_A \begin{Bmatrix} -\delta w_{,xx} \\ -\delta w_{,yy} \\ -2\delta w_{,xy} \end{Bmatrix}^T D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{Bmatrix} dA \\ &= \int_A f \delta w dA + \int_{S_\sigma} (\bar{V}_n \delta w - \bar{M}_n \delta w_{,n}) ds. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Otaksumalla elementtimenetelmän mukainen interpolaatio taipumafunktiolle

$$w = \mathbf{N} \mathbf{w}^{(e)}, \quad (10.20)$$

missä  $\mathbf{w}^{(e)}$  pitää sisällään elementin vapausasteet, saadaan elementin jäykkyyismatriisiksi tutunnäköinen lauseke

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B} dA, \quad (10.21)$$

missä siirtymä-käyritysmatriisi  $\mathbf{B}$  on

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{N}_{,xx} \\ -\mathbf{N}_{,yy} \\ -2\mathbf{N}_{,xy} \end{bmatrix}, \quad (10.22)$$

jonka avulla voidaan lausua käyritysmävektori

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B} \mathbf{w}^{(e)}. \quad (10.23)$$

### 10.1.3 Ohuen laatan elementin yhteensopivuus- ja täydellisyysvaatimukset

Elementin koon pienentyessä verkkoa tihennettäessä lähestyy taipuma elementin alueella tilaa, joka koostuu jäykänkappaleen liikkeestä ja vakiokaarevuustilasta. Vakiokaarevuustila on yksinkertaisin taipumamuoto, joka aiheuttaa laattaan muodonmuutoksia. Päättelään, että elementin taipumainterpolaation on toteutettava seuraavat *täydellisyysvaatimukset*:

- $w$ :n täytyy sisältää jäykänkappaleen liikettä kuvaavat termit,
- ja taipuman approksimaation tulee pystyä esittämään vakiokaarevuustilat.

Ensimmäisen vaatimuksen perusteella  $w$ :n lausekkeen tulee sisältää termit

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \quad (10.24)$$

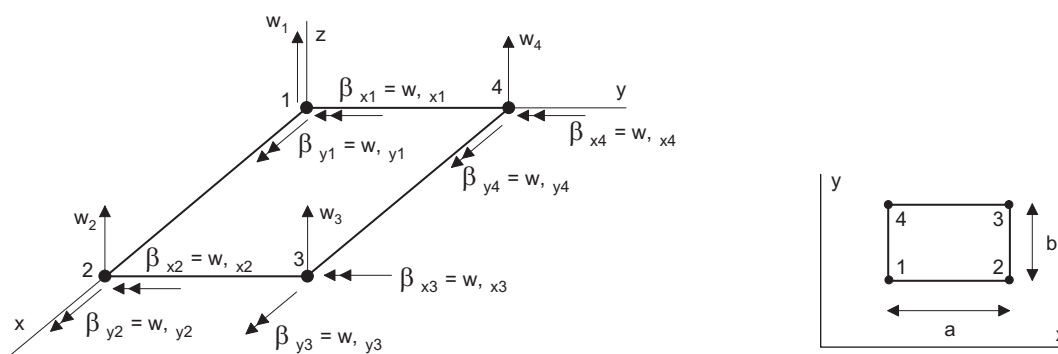
Toisen ehdon toteuttamiseksi tarvitaan lisäksi vähintään toisen asteen termit, eli yhteensä

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2. \quad (10.25)$$

Kuten Eulerin-Bernoullin palkkimallin tapauksessakin, on virtuaalisen työn lausekkeessa taipuman toisia derivaattoja. *Yhteensopivuusvaatimus* johtaa siihen, että interpolaatiofunktioiden on oltava  $C_1$ -jatkuvia, eli itse funktion ja sen derivaattojen tulee olla jatkuvia elementistä toiseen.

Täydellisyysvaatimukset ovat ehdottomia. Sensijaan jatkuvuusvaatimuksia voidaan lieventää, jolloin elementistä tulee ei-yhteensopiva eli ei-konforminen. Elementin on oltava kuitenkin numeerisesti stabiili ja konsistentti, jotta tulokset suppenisivat kohti oikeita arvoja. Alhaisasteisiin polynomeihin perustuvien laattaelementtien





**Kuva 10.2** 12 vapausasteinen suorakaide-elementti (ACM).

kehittäminen on osoittautunut hyvin hankalaksi tehtäväksi. Useimmat ohuen laatan, eli Kirchhoffin laattamallin, elementit ovat ei-konformisia.

Ei-konformisten elementtien suppeneuusominaisuuksien todistaminen on hankalaa ja se sivuutetaan tässä esityksessä.

## 10.2 Laattaelementtejä historian lehdiltä

### 10.2.1 Suorakaide-elementti

Eräs ensimmäisiä laattaelementtejä on 12 vapausasteinen suorakaidelattaelementti, jota kutsutaan myös ACM-elementiksi kehittelijöidensä A. Adini, R. Clough (1961) ja R.J. Melosh (1963) mukaan. Vapausasteina solmuissa ovat taipuma ja sen derivaatat  $w_i, w_{i,x}, w_{i,y}$  tai taipuma ja kiertymät koordinaattiakseleiden ympäri eli  $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$ , katso kuva 10.2. Täten taipuman interpolaatiossa on 12 termiä, ja se voidaan esittää seuraavasti

$$w = [ 1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3 ] \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}, \quad (10.26)$$

missä vektori  $\boldsymbol{\alpha}$  sisältää 12 yleistettyä vapausastetta  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, 12$ . Lauseke toteuttaa täydellisyysvaatimukset, mutta elementti ei ole yhteensopiva.

Esimerkiksi reunalla  $x = vakio$  taipuma on muotoa

$$w = A_1 + A_2y + A_3y^2 + A_4y^3, \quad (10.27)$$

ja

$$w_{,y} = A_2 + 2A_3y + 3A_4y^2, \quad (10.28)$$

missä  $A_1, \dots, A_4$  ovat vakioita, jotka voidaan määrittää kiinnittämällä taipuman  $w$  ja sen derivaatan  $w_{,y}$  arvot sivun päätepisteissä. Taipuma on siten jatkuva elementin reunan yli. Sensijaan derivaatta  $w_{,x}$  on epäjatkuva reunan  $x = vakio$  yli. Derivaatta  $w_{,x}$  on

$$w_{,x} = B_1 + B_2y + B_3y^2 + B_4y^3, \quad (10.29)$$

missä  $B_1, \dots, B_4$  ovat vakioita. Neljän vakion  $B_i$  määrittämiseksi on käytettävissä vain kaksi ehtoa eli derivaatan  $w_{,x}$  arvot sivun päätepisteissä.

Muodostamalla kaavan (10.26) avulla  $w, w_{,x}$  ja  $w_{,y}$  solmuissa  $1, \dots, 4$  saadaan yhteys

$$\mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{w}^{(e)}, \quad (10.30)$$

josta saadaan

$$w = \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{N}\mathbf{w}^{(e)}. \quad (10.31)$$

Interpolaatiofunktio matriisi  $\mathbf{N}$  on muotoa

$$\mathbf{N} = [ N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad \cdots \quad N_{12} ], \quad (10.32)$$

missä solmuun  $i$  liittyvät interpolaatiopolynomit ovat

$$N_{3i-2} = \frac{1}{8}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(2 + \xi_i\xi + \eta_i\eta - \xi^2 - \eta^2), \quad (10.33a)$$

$$N_{3i-1} = -\frac{1}{16}a\xi_i(1 + \xi_i\xi)^2(1 - \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta), \quad (10.33b)$$

$$N_{3i} = -\frac{1}{16}b\eta_i(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)^2(1 - \eta_i\eta). \quad (10.33c)$$

Interpolaatiomatriisia vastaava vapausastejärjestely on

$$\mathbf{w}^{(e)} = [ w_1 \quad w_{1,x} \quad w_{1,y} \quad w_2 \quad w_{2,x} \quad w_{2,y} \quad \cdots \quad w_4 \quad w_{4,x} \quad w_{4,y} ]^T. \quad (10.34)$$

### 10.2.2 Bikuubinen suorakaide-elementti

Eräs yksinkertaisimmista hyvin toimivista laattaelementeistä on bikuubinen, eli BFS-elementti (F.K. Bogner, R.L. Fox, L.A. Schmit 1965), jossa on 16 vapausastetta, neljä vapausastetta  $w_i, w_{i,x}, w_{i,y}$  ja  $w_{i,xy}$  jokaisessa neljässä nurkkasolmussa. Interpolaatiofunktioina käytetään ensimmäisen asteen Hermiten polynomeja kummassakin suunnassa tulomuodossa. BFS-elementin taipuma on

$$w(x, y) = [ N_1 \quad N_2 \quad \cdots \quad N_{16} ] \mathbf{w}^{(e)}, \quad (10.35)$$

missä solmuun 1 liittyvät interpolaatiopolynomit ovat

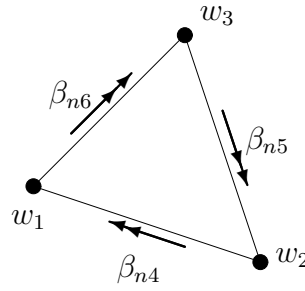
$$\begin{aligned} N_1 &= H_{01}(\xi)H_{01}(\eta), & N_2 &= \frac{1}{2}aH_{11}(\xi)H_{01}(\eta), \\ N_3 &= \frac{1}{2}bH_{01}(\xi)H_{11}(\eta), & N_4 &= \frac{1}{4}abH_{11}(\xi)H_{11}(\eta), \end{aligned} \quad (10.36)$$

ja vastaavasti solmuun 2 liittyvät interpolaatiopolynomit ovat

$$\begin{aligned} N_5 &= H_{02}(\xi)H_{01}(\eta), & N_6 &= \frac{1}{2}aH_{12}(\xi)H_{01}(\eta), \\ N_7 &= \frac{1}{2}bH_{02}(\xi)H_{11}(\eta), & N_8 &= \frac{1}{4}abH_{12}(\xi)H_{11}(\eta), \end{aligned} \quad (10.37)$$

jne.. Ensimmäisen asteen Hermiten interpolaatiofunktioit ovat (määriteltynä luonnollisten koordinaattien  $\xi$  ja  $\eta$  avulla välillä  $(-1, 1)$ ) yhtälöillä (9.16a).

Elementti toteuttaa vaadittavat yhteensopivuusvaatimukset ja hieman enemmänkin, sillä myös sekaderivaatat  $w_{,xy}$  ovat solmupisteissä jatkuvat, jonka perusteella elementtiä joissain lähteissä luonnehditaan  $C_{1,1}$ -jatkuvaksi.



**Kuva 10.3** Morleyn vakiokaarevuuselementti.

### 10.2.3 Morleyn vakiokaarevuuselementti

L.S.D. Morley on esittänyt 1971 kuvan 10.3 kolmiolaattaelementin, jonka taipumaa interpoloidaan funktiolla

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2. \quad (10.38)$$

Lauseke (10.38) on yksinkertaisin taipuman muoto, joka toteuttaa täydellisyysvaatimukset. Taipuman toiset derivaatat ovat vakioita, mistä johtuen myös momentit ovat vakioita elementin alueella.

Elementin vapausasteet ovat taipumat  $w_1, w_2$  ja  $w_3$  sekä kiertymät  $\beta_{n4}, \beta_{n5}$  ja  $\beta_{n6}$ , missä

$$\beta_{ni} = \frac{\partial w}{\partial n_i} \quad (10.39)$$

ja  $n$  on reunan normaalin suuntainen koordinaatti.

Ketjusäännön mukaan

$$w_{,n} = w_{,x} \frac{\partial x}{\partial n} + w_{,y} \frac{\partial y}{\partial n}, \quad (10.40)$$

eli

$$w_{,n} = w_{,x} n_x + w_{,y} n_y = (\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y) n_x + (\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y) n_y. \quad (10.41)$$

Elementin reunasuoran yhtälö on

$$y = C_1 x + C_2 \quad (10.42)$$

ja reunalla taipuma on

$$w = A_1 + A_2 x + A_3 x^2, \quad (10.43)$$

sekä

$$\frac{\partial w}{\partial n} = B_1 + B_2 x, \quad (10.44)$$

missä  $A_1, A_2, A_3, B_1$  ja  $B_2$  ovat vakioita.

Tietyllä reunalla voidaan kiinnittää pääty pisteiden taipumien arvot ja reunan keskipisteen kiertymän arvo, eli saadaan kolme ehtoa, jotka eivät kuitenkaan riitä

viiden vakion määrittämiseen yksikäsitteisellä tavalla. Päättellään, että sekä taipuma  $w$  että derivaatta  $w_{,n}$  eli  $\theta$  muuttuvat yleensä epäjatkuvasti elementistä toiseen.

Morleyn elementti voidaan johtaa monella tavalla, ehkä elegantein tapa on käyttää diskreetti-Kirchhoff kondensaatiota, katso harjoitustehtäviä luvun lopussa.

#### 10.2.4 Muita kolmioelementtejä

Täydellinen kolmannen asteen polynomi sisältää 10 termiä, joten 9-vapausasteisessa kolmiolaattaelementissä (taipuma ja kiertymät solmuissa) on jokin kolmannen asteen termeistä jätettävä pois.

Varhaisessa laattaelementtien kehitysvaiheessa käytettiin mm. seuraavia lausekkeita:

$$w = [ 1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 ] \boldsymbol{\alpha}, \quad (10.45)$$

ja

$$w = [ 1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y + xy^2 \quad y^3 ] \boldsymbol{\alpha}. \quad (10.46)$$

Ylemmstä kaavasta puuttuu termi  $xy$  ja elementti ei pysty esittämään vakiovääntötilaa kunnollisesti. Alempi yrittelmä ei ole koordinaattien suhteen isotrooppinen, ja elementin konvegenssiominaisuudet ovat huonot. Myös tietyille elementin muodoille yhtälöryhmä

$$\boldsymbol{w}^{(e)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} \quad (10.47)$$

tulee singulaariseksi.

Geometrisesti isotrooppisia interpolaatioita saadaan alakoordinaattien avulla. Zienkiewicz on esittänyt seuraavanlaiset interpolaatiofunktiot (liittyen solmuun 1):

$$N_1 = L_1 + L_1^2L_2 + L_1^2L_3 - L_1L_2^2 - L_1L_3^2, \quad (10.48a)$$

$$N_2 = -y_{12}(L_1^2L_2 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3) + y_{31}(L_3L_1^2 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3), \quad (10.48b)$$

$$N_3 = -x_{21}(L_1^2L_2 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3) + x_{13}(L_3L_1^2 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3), \quad (10.48c)$$

missä

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j. \quad (10.49)$$

Solmuihin 2 ja 3 liittyvät interpolaatiofunktiot muodostetaan samalla tavalla. Taipuman interpolaatio ei ole  $C_1$ -jatkuva sillä normaaliderivaatta  $w_{,n}$  ei ole jatkuva, joten elementti on epäkonforminen.

Mikäli solmupisteparametreiksi sallitaan korkeampia derivaattoja kuin ensimmäiset, on kiertymäyhteensopivuuden aikaansaaminen helpompaa. Mikäli kolmion kärkisolmujen vapausasteiksi valitaan

$$w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (10.50)$$

saadaan elementti, jossa olisi 18 vapausastetta. Mikäli elementtiin lisättäisiin kolme vapausastetta, esimerkiksi sivujen keskipisteiden normaaliderivaatat, saataisiin

interpolaaatioksi täydellinen viidennen asteen polynomi, joka sisältää 21 termiä. Tällaiseen elementtiin päätyivät vuoden 1968 tienoilla seuraavat elementtitutkijat: J.H. Argyris, I. Fried, D.W. Scharpf (1968), K. Bell (1969), W. Bosshard (1968), B.M. Irons (1969) ja W. Wisser (1968).

Mikäli elementin taipuman normaaliderivaatan lauseke (neljättä astetta) rajoitetaan kuubiseksi saadaan kolme rajoitetta, jolloin elementtiin jää 18 vapausastetta, eli kuusi jokaiseen solmuun.

Useita muita samankaltaisia konformisia elementtejä on esitetty, joiden vapausasteina on taipuman korkeampia derivaattoja kuin ensimmäiset. Tällaiset elementit ovat kuitenkin 'epämukavia', sillä reunaehtojen antaminen mutkistuu ja materiaaliominaisuuksien ja/tai paksuuden epäjatkuvuuden huomioonotto on hankalampaa.

## 10.3 Reissnerin-Mindlinin laattamalli

### 10.3.1 Elementin formulointi

Poikittaisilla leikkausmuodonmuutoksilla on merkitystä paitsi paksun homogeenisen laatan tapauksessa myös esimerkiksi kerroslaatan tai sandwich-laatan tapauksissa. Yksinkertaisin poikittaiset leikkausmuodonmuutokset huomioonottava laattamalli saadaan, kun otaksutaan laatan keskipinnan normaalien pysyvän suorina mutta ei välttämättä kohtisuorassa deformatiivista laatan keskipintaa vastaan. Tämäns. Reissnerin-Mindlinin laattamalli on yksidimensioisen Timoshenkon palkkimallin vastine laatoilla. Kinemaattisesta otaksumasta seuraa siirtymäkomponenteille lausekkeet (10.3a)

$$u(x, y, z) = -z\beta_x(x, y), \quad (10.51a)$$

$$v(x, y, z) = -z\beta_y(x, y), \quad (10.51b)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y). \quad (10.51c)$$

Reissnerin-Mindlinin laattamallin nollassa eroavat muodonmuutoskomponentit ovat

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\beta_{x,x}, \quad (10.52a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\beta_{y,y}, \quad (10.52b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}), \quad (10.52c)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = w_{,x} - \beta_x, \quad (10.52d)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = w_{,y} - \beta_y. \quad (10.52e)$$

Käyritysmävektori  $\boldsymbol{\kappa}$  määritellään kuten Kirchhoffin laattamallin tapauksessa

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_x & \kappa_y & \kappa_{xy} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\beta_{x,x} & -\beta_{y,y} & -(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \end{bmatrix}^T. \quad (10.53)$$

Tämän lisäksi tarvitaan myös keskimääräisten poikittaisten leikkaumuodonmuutosten vektori

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix}^T. \quad (10.54)$$

Momenttien ja käyritysten välillä pätee yhteys

$$\mathbf{m} = \mathbf{D}_b \boldsymbol{\kappa}, \quad (10.55)$$

ja leikkausvoimien sekä keskimääräisten liukumien välinen yhteys on

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}_s \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D}_s = kGt \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (10.56)$$

missä  $k$  on leikkauskorjauskerroin. Leikkausjännitysresultantit määritellään kaavoilla

$$Q_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz. \quad (10.57)$$

Reissnerin-Mindlinin laattamallin virtuaalisen työn yhtälö on

$$\begin{aligned} & \int_A \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dz dA \\ &= \int_A f \delta w dA + \int_{S_\sigma} (\bar{Q}_n \delta w - \bar{M}_n \delta \beta_n - \bar{M}_{ns} \delta \beta_s) ds. \end{aligned} \quad (10.58)$$

Integroimalla laatan paksuuden yli muuntuu se muotoon

$$\begin{aligned} & \int_A (M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + M_{xy} \delta \kappa_{xy} + Q_x \delta \gamma_{xz} + Q_y \delta \gamma_{yz}) dA \\ &= \int_A f \delta w dA + \int_{S_\sigma} (\bar{Q}_n \delta w - \bar{M}_n \delta \beta_n - \bar{M}_{ns} \delta \beta_s) ds. \end{aligned} \quad (10.59)$$

Toisin kuin Kirchhoffin laattamallissa, on virtuaalisen työn yhtälössä (10.59) vain ensimmäisiä derivaattoja. Täten funktioille  $w$ ,  $\beta_x$  ja  $\beta_y$  riittää vain  $C_0$ -jatkuva interpolatio, jotta yhteensopivuusvaatimukset toteutuisivat. Otaksutaan nyt, että sekä taipumaa että kiertymiä interpoloidaan samanasteisilla polynomeilla, eli  $n$ -solmuisen elementin tapauksessa voidaan kirjoittaa

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i, \quad \beta_x = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{xi}, \quad \beta_y = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{yi}. \quad (10.60)$$

Elementin mielivaltaisen pisteen käyritysmävektori on

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} -\beta_{x,x} \\ -\beta_{y,y} \\ -\beta_{x,y} - \beta_{y,x} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & -N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{i,y} \\ 0 & -N_{i,y} & -N_{i,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{Bmatrix}, \quad (10.61)$$

eli

$$\boldsymbol{\kappa} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{bi} \mathbf{w}_i^{(e)} \quad (10.62)$$

missä

$$\mathbf{w}_i^{(e)} = [ w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi} ]^T. \quad (10.63)$$

Poikittaiset leikkausmuodonmuutokset voidaan kirjoittaa muotoon

$$\boldsymbol{\gamma} = \left\{ \begin{array}{l} w_{,x} - \beta_x \\ w_{,y} - \beta_y \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^n \left[ \begin{array}{ccc} N_{i,x} & -N_i & 0 \\ N_{i,y} & 0 & -N_i \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} w_i \\ \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{array} \right\}, \quad (10.64)$$

eli

$$\boldsymbol{\gamma} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{si} \mathbf{w}_i^{(e)}. \quad (10.65)$$

Elementin osuus sisäisen virtuaalisen työn lausekkeessa voidaan kirjoittaa siten muodossa

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\delta} \mathbf{w}_i^{(e)T} \left( \mathbf{K}_{bij}^{(e)} + \mathbf{K}_{sij}^{(e)} \right) \mathbf{w}_j^{(e)}, \quad (10.66)$$

missä elementin jäykkyyismatriisin taivutuksesta ja leikkauksesta solmuihin  $i$  ja  $j$  aiheutuvat termit ovat

$$\mathbf{K}_{bij}^{(e)} = \int_A \mathbf{B}_{bi}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_{bj} dA, \quad \mathbf{K}_{sij}^{(e)} = \int_A \mathbf{B}_{si}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{sj} dA. \quad (10.67)$$

Paksun laatan mallin tapauksessa on helppo muodostaa isoparametrinen elementti. Geometriaa voidaan interpoloida samoilla funktioilla kuin siirtymäsuureita-kin aivan vastaavaan tapaan kuin jo esitetyissä kaksidimensioisissa tehtävissä (lämmönjohtuminen, levytehtävä). Osuudet (10.67) ovat siten laskettavissa kaavoilla

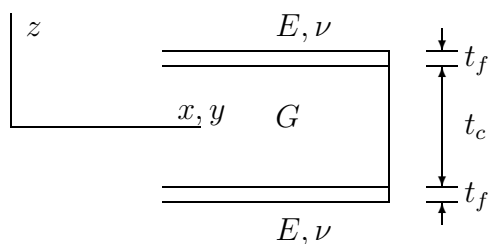
$$\mathbf{K}_{bij}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{bi}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_{bj} J d\xi d\eta, \quad \mathbf{K}_{sij}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{si}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{sj} J d\xi d\eta, \quad (10.68)$$

joissa siirtymä-muodonmuutosmatriiseissa olevat derivaatat globaalien suuntien suhteen lasketaan kaavoilla (4.165).

Sandwich-laattoja voidaan analysoida Reissnerin-Mindlinin laattamallilla. Lineaarisesti kimmoisalle ohutkuoriselle isotrooppiselle sandwich-laatalle voidaan johtaa matriisit:

$$\mathbf{D}_b = \frac{Et_f(t_c + t_f)^2}{2(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_s = \frac{G(t_c + t_f)^2}{t_c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (10.69)$$

missä  $E, \nu$  ovat pintakerroksen kimmovakiot,  $G$  on ytimen leikkausmoduuli ja  $t_f, t_c$  ovat pinta- ja ydinkerroksen paksuudet, katso kuva 10.4.



**Kuva 10.4** Ohutkuorinen sandwich-laatta.

### 10.3.2 Numeerinen integrointi

Integraalit kaavoissa (10.68) lasketaan numeerisesti Gaussin menetelmällä. Alhaisasteisia interpolaatiofunktioita käytettäessä tarkka integointi tuottaa elementin, joka on liian jäykkä ohuen laatan tapauksessa. Ilmiötä nimitetään leikkauslukkiutumiseksi ja se on aivan analoginen Timoshenkon palkkielementin lukkiutumisen kanssa. Laatan ohentuessa jäykkyyismatriisin leikkaustermi toimii sakkofunktion tapaan ja pakottaa poikittaiset leikkausmuodonmuutokset nolnaan, jolloin taipuman ja kiertymätermien samanasteisesta interpolaatiosta johtuen taipuman on myös hävittävä.

Täydellä integroinnilla, joka määritelmänsä mukaan tuottaa tarkan tuloksen suorakaiteen muotoisille säännöllisille elementeille, rajoitusehtoja poikittaiselle liukumalle tulee liian paljon ja elementtiverkko lukkiutuu. Tämän välttämiseksi sovelletaan elementin leikkaustermiin redusoitua integrointia. Elementin käyttäytymistä voidaan myös parantaa käyttämällä uudelleen määriteltyjä, korvaavia interpolaatiofunktioita poikittaisille liukumille.

Redusoidun integroinnin ongelma on, että se tuottaa elementtiin nollaenergia-muotoja, jotka voivat levitä elementistä toiseen ja tuhota ratkaisun. Tämän vuoksi sovelletaan ns. selektiivistä eli valikoivaa ali-integrointia, jossa taivutuksen osuus jäykkyyismatriisissa integroidaan tarkasti ja vain leikkaukseen liittyvät termit ali-integroidaan. Selektiivinen menettely tuottaa stabiilimman jäykkyyismatriisin, jonka rangi on suurempi kuin täysin ali-integroidun elementin.

Eräitä Lagrangen ja Serendip-tyyppisiin interpolaatiofunktioihin perustuvia elementtejä on esitetty taulukossa 10.1. T.J.R. Hughes ja M. Cohen ovat esittäneet vuonna 1978 Heterosis-elementin, jossa taipumaa interpoloidaan 8-solmuisen elementin Serendip-muoto/-funk/-ti/-oilla ja kiertymille käytetään toisen asteen Lagrangen polynomeja, eli 9-solmuista interpolaatiota.

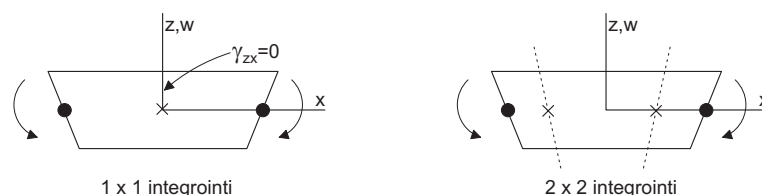
Bilineaarinen nelisolmuinen elementti toimii kunnollisesti puhtaassa taivutuksessa sekä redusoidulla, että selektiivisellä integroinnilla. Täydellä  $2 \times 2$ -integroinnilla poikittaiset liukumukset eivät mene nolliksi Gaussin pisteissä puhtaassa taivutuksessa. Paksuuden  $t$  pientyessä lähes kaikki muodonmuutosenergia on virheellistä leikkausenergiaa, taivutusmuodonmuutos lähestyy nolaa ja elementti lukkiutuu, katso kuva 10.5.

Yhdeksänsolmuinen elementti toimii oikein puhtaassa taivutuksessa integroimis-



**Taulukko 10.1** Reissnerin-Mindlinin laattamallin elementtejä.

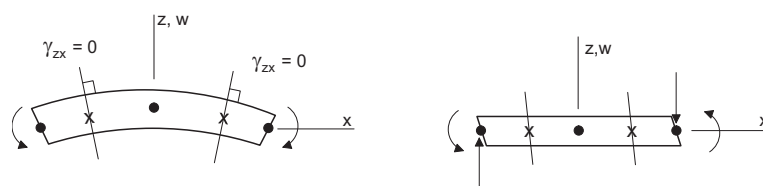
Elementti	integrointi tyyppi	integrointi		liukuman raj. ehdot	mekanismien lukumäärä
		$\mathbf{K}_b$	$\mathbf{K}_s$		
bilineaarinen 4 solmua 12 vap. ast.	redu.	$1 \times 1$	$1 \times 1$	2	4
	selekt.	$2 \times 2$	$1 \times 1$	2	2
	täysi	$2 \times 2$	$2 \times 2$	4	0
bikvadraatt. 9 solmua 27 vap. ast.	redu.	$2 \times 2$	$2 \times 2$	8	4
	selekt.	$3 \times 3$	$2 \times 2$	8	1
	täysi	$3 \times 3$	$3 \times 3$	18	0
Serendip 8 solmua 24 vap. ast.	redu.	$2 \times 2$	$2 \times 2$	8	1
	selekt.	$3 \times 3$	$2 \times 2$	8	0
	täysi	$3 \times 3$	$3 \times 3$	18	0
Heterosis					
9 solmua 26 vap. ast.	selekt.	$3 \times 3$	$2 \times 2$	8	0

**Kuva 10.5** Bilineaarinen elementti puhtaassa taivutuksessa.

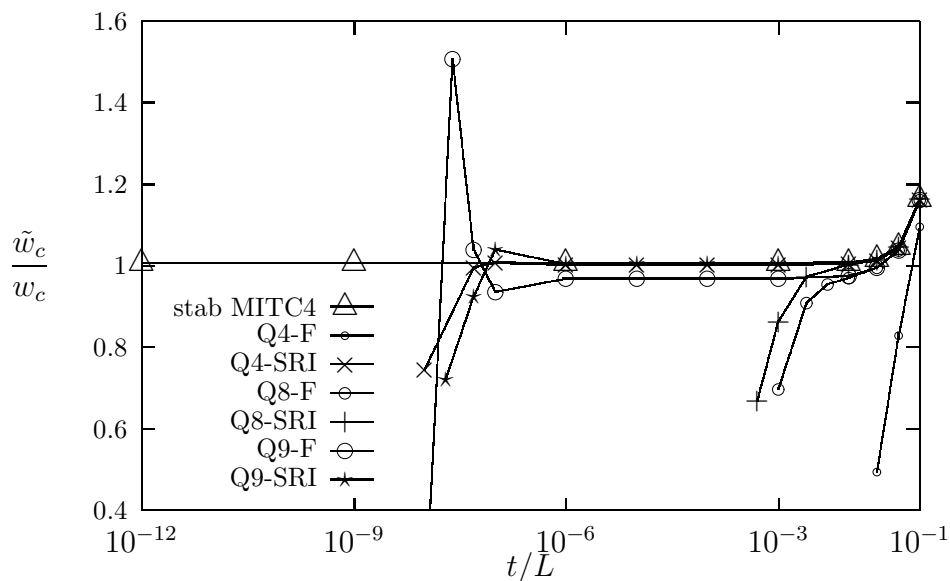
menetelmästä riippumatta. Koska taipuma  $w$  on toisen asteen polynomi, liukuman  $\gamma_{xz}$  asettaminen nolaksi pakottaa elementtiin puhtaan taivutuksen, kuva 10.6a. Kuvan 10.6b elementissä taivutusmomentti muuttuu lineaarisesti  $x$ :n funktiona. Lineaarisesti muuttuvaa momenttia vastaa ohuen palkin tai sylinterimäisesti taivutetun ohuen laatan tapauksissa kolmannen asteen polynomin mukainen taipuma, jota kvadraattinen elementti ei pysty esittämään, vaan kuvan 10.6b tapauksessa  $w = 0$  ja  $\beta_x$  muuttuu parabolisesti. Yhdeksänsolmuinen Lagrangen elementti pystyy esittämään tämän tilan kunnollisesti vain, jos jäykkymatriisin osa  $\mathbf{K}_s$  integroidaan redusoidusti  $2 \times 2$  Gaussin kaavalla.

Kahdeksansolmuinen elementti toimii luotettavasti vain pienillä laatan tukivälin ja paksuuden suhteen  $L/t$  arvoilla.

Kuvassa 10.7 on esitetty tasaisesti kuormitetun ja jäykästi tuetun neliölaatan keskipisteen taipuman arvoja Kirchhoffin laattamallin antamaan arvoon verrattuna suhteellisen paksuuden  $t/L$  funktiona. Tulokset on laskettu  $10 \times 10$  verkolla käytettäessä bilineaarista interpolaatiota ja  $5 \times 5$  verkolla bikvadraattisilla elementeillä



**Kuva 10.6** Kvadraattinen elementti: (a) puhdas taivutus ja (b) lineaarisesti muuttuva taivutusmomentti.

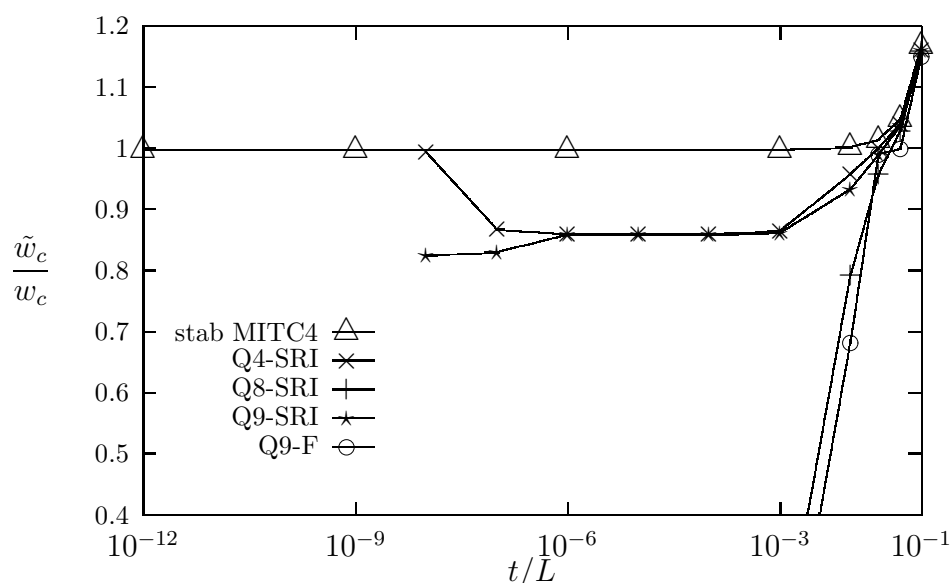


**Kuva 10.7** Tasaisesti kuormitettu jäykästi tuettu laatta: tasajakoinen  $10 \times 10$  (bilineaariset elementit) tai  $5 \times 5$  verkko (bikvadraattiset elementit). Elementtimenetelmän antama keskipisteen taipuma  $\tilde{w}_c$  verrattuna Kirchhoffin laattamallin keskipisteen taipumaan  $w_c$ . SRI= selektiivinen ali-integrointi ja F on täysi integrointi.

analysoituna.

Jotkut ratkaisut kuvassa (10.7) hajaantuvat pienillä suhteen  $t/L$  arvoilla. Ilmiö aiheutuu siitä, että matriisin  $\mathbf{K}_s$  termit tulevat numerollisesti paljon suuremmiksi kuin matriisin  $\mathbf{K}_b$  alkiot suhteen  $t/L$  pienentyessä, jolloin luvun esitystarkkuudesta riippuen  $\mathbf{K}_b$ :n alkioiden merkitys  $\mathbf{K}_s$ :n alkioiden rinnalla katoaa. Hajaantuminen voidaan välttää käyttämällä stabiloituja elementtejä kuten Timoshenkon palkkimallin yhteydessä. Tällöin poikittainen liukuma tulee väärin lasketuksi, mutta sillä ei ole muutoinkaan merkitystä ohuiden laattojen tapauksessa.

Vääristyneen elementtiverkon vaikutus on esitetty kuvassa 10.8. Sisäsolmupisteiden koordinaatit on siirretty  $0.01L$ :n etäisyydelle ideaalista paikasta satunnaiseen suuntaan. Standardi isoparametristen elementtien huono käyttäytyminen on veiläkin dramaattisempaa kuin kuvassa 10.7.



**Kuva 10.8** Tasaisesti kuormitettu jäykästi tuettu laatta: vääristetty  $10 \times 10$  (bilineaariset elementit) tai  $5 \times 5$  verkko (bikvadraattiset elementit). Elementtimenetelmän antama keskipisteen taipuma  $\tilde{w}_c$  verrattuna Kirchhoffin laattamallin keskipisteen taipumaan  $w_c$ . SRI= selektiivinen ali-integrointi ja F on täysi integrointi.

### 10.3.3 Reissnerin-Mindlinin laattaelementtien mekanismit

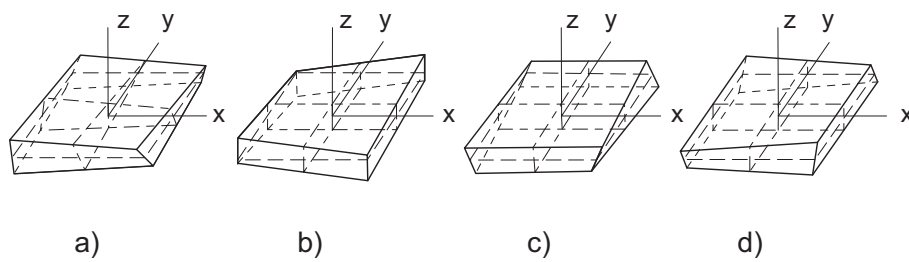
Siirtymätilan kuvaamiseen on käytetty samoja interpolaatiofunktioita kuin levyelementissä ja redusoidun integroinnin tuottamat nollaenergiamuodot ovat samantapaisia kuin isoparametrisilla vastaavanlaisiin interpolaatiofunktioihin perustuvilla levyelementeillä. Laatan tapauksessa voidaan nähdä vastaavuus

$$u = -z\beta_x \quad \text{ja} \quad v = -z\beta_y. \quad (10.70)$$

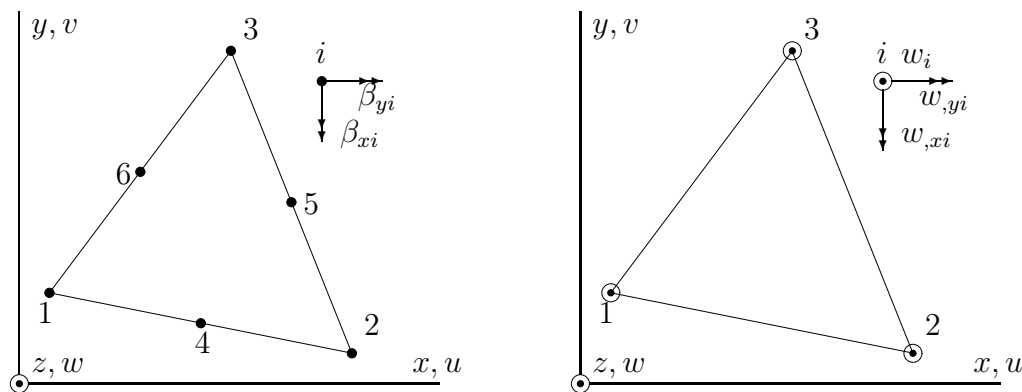
Bilineaarisen laattaelementin redusoidun  $1 \times 1$ -integroinnin nollaenergiamuodot on esitetty kuvassa 10.9. Selektiivisen integroinnin tapauksessa nollaenergiamuotoja ovat kuvan 10.9 muodot (a) ja (b). Vääntöön liittyvä muoto (a) ei ole yhteensopiva naapurielementtien vastaavan muodon kanssa, joten se ei esiinny kahdesta tai useammasta elementistä koostuvassa verkossa. Mekanismeja voidaan kontrolloida numeerisesti samaan tapaan kuin levyelementeissä.

Kvadraattisten laattaelementtien redusoidun ja selektiivisen integroinnin tuottamat mekanismit ovat samanlaisia kuin vastaavien levyelementtien nollaenergiamuodot. Yhdeksänsolmuisella elementillä on redusoidun integroinnin tapauksessa kolme muuta mahdollista mekanismia, joista kaksi ovat samoja kuin levyelementin mekanismit ja kolmas on määritelty yhtälöllä

$$u = v = 0 \quad \text{ja} \quad w = 3\xi^2\eta^2 - \xi^2 - \eta^2. \quad (10.71)$$



**Kuva 10.9** Nelisolmuisen laattaelementin  $1 \times 1$ -integroinnin mekanismit.



**Kuva 10.10** Klassisen DKT-elementtikonstruktion alkuperäiset vapausasteet.

Tämä mekanismi ei ole mahdollinen Heterosis-elementissä, koska termiä  $\xi^2 \eta^2$  ei ole taipuman  $w$  interpolaatiossa.

## 10.4 DK otaksumaan perustuvat elementit

Ohuen laatan elementin konstruoinnissa kohdattuja vaikeuksia voidaan kiertää, jos Kirchhoffin laattateorian otaksumista seuraavat rajoitusyhtälöt

$$\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0, \quad (10.72)$$

eli

$$w_{,x} = \beta_x \quad \text{ja} \quad w_{,y} = \beta_y \quad (10.73)$$

vaaditaan toteutumaan tietyissä pisteissä eli diskreetisti elementissä. Muodonmuutokset määritellään Reissnerin-Mindlinin laattamallin kaavoilla, jossa taipuma  $w$  ja kiertymät  $\beta_x$  ja  $\beta_y$  ovat toisistaan riippumattomia. Diskreettien rajoitusyhtälöiden huomioonottamisen jälkeen ne tulevat toisistaan riippuviksi.

Idean Kirchhoffin rajoitteiden pisteittäisestä soveltamisesta ovat esittäneet G.A. Wempner (1968), G.A. Wempner, J.T. Oden, D.K. Cross (1968), J.H. Stricklin, W. Haisler, P. Tisdale, K. Gunderson (1969), G.S. Dhatt (1969).

Yhdeksänvapausasteista diskreettiin Kirchhoffin otaksumaan perustuvaa elementtiä nimitetään DKT-elementiksi (Discrete-Kirchhoff-Triangle).

DKT-elementin muodostamisvaiheet esitetään lyhyesti seuraavassa. Olennainen vaihe on *poikittaisten leikkausmuodonmuutosten asettaminen nollassa tietyissä pisteissä*. Samalla periaattella muodostetaan muut diskreettiin Kirchhoffin otaksumaan perustuvat elementit.

Kiertymiä  $\beta_x$  ja  $\beta_y$  (kuva 10.10) interpoloidaan kuten Reissnerin-Mindlinin teoriaan perustuvissa elementeissä taipumasta  $w$  riippumattomasti kaavoilla

$$\beta_x = \sum_{i=1}^6 N_i \beta_{xi}, \quad \beta_y = \sum_{i=1}^6 N_i \beta_{yi}, \quad (10.74)$$

missä

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1(2L_1 - 1) & N_4 &= 4L_1L_2 \\ N_2 &= L_2(2L_2 - 1) & N_5 &= 4L_2L_3, \\ N_3 &= L_3(2L_3 - 1) & N_6 &= 4L_3L_1 \end{aligned} \quad (10.75)$$

ovat alakoordinaattien  $L_i$  avulla lausutut kvadraattiset interpolaatiofunktiot. Kiertymävapausasteita on siten yhteensä 12. Taipuman  $w$  otaksutaan muuttuvan sivua pitkin koordinaatin  $s$  suunnassa kolmannen asteen polynomin mukaisesti. Tämän perusteella voidaan laskea derivaatta  $w_{,s}$ . Esimerkiksi sivulla 2-3

$$w|_{s_{23}} = H_{01}(s)w_2 + H_{11}(s)w_{,s2} + H_{02}(s)w_3 + H_{12}(s)w_{,s3}, \quad (10.76)$$

missä  $H_{ij}$ :t ovat Hermiten kuubiset interpolaatiopolynomit. Derivaatta  $w_{,s}$  solmussa 5 ( $s = 0$ ) on

$$w_{,s5} = -\frac{3}{2l_{23}}w_2 - \frac{1}{4}w_{,s2} + \frac{3}{2l_{23}}w_3 - \frac{1}{4}w_{,s3}. \quad (10.77)$$

Samoin voidaan määrittää  $w_{,s4}$  ja  $w_{,s6}$ .

Muunnoskaavoilla

$$\begin{Bmatrix} w_{,n} \\ w_{,s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix}, \quad (10.78)$$

missä  $\phi$  on reunan normaalin ja  $x$ -akselin välinen kulma (kuva 10.10), voidaan määrittää  $w_{,s}$  derivaattojen  $w_{,x}$  ja  $w_{,y}$  avulla solmuissa 1,2 ja 3. Tällöin derivaattojen  $w_{,s4}$ ,  $w_{,s5}$  ja  $w_{,s6}$  määrittelykaavojen oikeat puolet saadaan lausutuiksi solmujen 1,2 ja 3 vapausasteiden  $w$ ,  $w_{,x}$  ja  $w_{,y}$  avulla. Rotaatioiden  $\beta_x, \beta_y$  interpolaatiokaavoissa ja derivaattojen  $w_{,s4}$ ,  $w_{,s5}$ ,  $w_{,s6}$  kaavoissa on yhteensä  $12+9 = 21$  vapausastetta:  $(\beta_x, \beta_y)$  solmuissa 1,...,6 ja  $(w, w_{,x}, w_{,y})$  solmuissa 1,2 ja 3. Elementin vapausasteiksi halutaan taipuma  $w$  ja derivaatat  $w_{,x}, w_{,y}$  nurkkasolmuissa. Kaksitoista vapausastetta  $(\beta_x, \beta_y)$  solmuissa 1,...,6 on sen tähden lausuttava vapausasteiden  $(w, w_{,x}, w_{,y})_i, i = 1, 2, 3$  avulla. Tällöin sovelletaan seuraavia rajoitusyhtälöitä:

1. Poikittaiset leikkausmuodonmuutokset  $\gamma_{xz}$  ja  $\gamma_{yz}$  ovat nollia solmuissa 1,2, ja 3, eli

$$\beta_{xi} = w_{,xi}, \quad \beta_{yi} = w_{,yi}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10.79)$$

2. Poikittainen leikkausmuodonmuutos  $\gamma_{sz}$  on nolla solmuissa 4,5 ja 6, eli

$$\beta_{si} = w_{,si}, \quad i = 4, 5, 6. \quad (10.80)$$

Sovellettaessa kaavoja (10.80) tarvitaan muunnoskaavoja (10.78).

3. Kiertymä  $\beta_n$  muuttuu lineaarisesti elementin sivua pitkin  $s$ :n funktiona, eli

$$\beta_{n4} = \frac{1}{2}(w_{,n1} + w_{,n2}), \quad \beta_{n5} = \frac{1}{2}(w_{,n2} + w_{,n3}), \quad \beta_{n6} = \frac{1}{2}(w_{,n3} + w_{,n1}). \quad (10.81)$$

Soveltamalla rajoitusehtoja (10.79), (10.80) ja (10.81) saadaan yhtälöryhmä

$$[\beta_{x1} \ \beta_{y1} \ \beta_{x2} \ \cdots \ \beta_{y6}]^T = \mathbf{T} [w_1 \ w_{,x1} \ w_{,y1} \ w_2 \ \cdots \ w_{,y3}]^T \quad (10.82)$$

jonka avulla solmujen 1,...,6 kiertymät  $\beta_x$  ja  $\beta_y$  saadaan lausutuksi nurkkasolmujen vapausasteiden  $w_i, w_{,xi}$  ja  $w_{,yi}$  avulla.

Elementin jäykkyysmatriisin muodostamiseksi sovelletaan ensin Reissnerin-Mindlinin laattamallin kaavoja

$$u = -z\beta_x \quad \text{ja} \quad v = -z\beta_y \quad (10.83)$$

ja

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (10.84)$$

josta

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & \cdots & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & \cdots & 0 & N_{6,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & \cdots & N_{6,y} & N_{6,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{x1} \\ \beta_{y1} \\ \beta_{x2} \\ \vdots \\ \beta_{y6} \end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = -z \mathbf{B}_\beta \mathbf{w}_\beta^{(e)}. \quad (10.85)$$

Matriisin  $\mathbf{B}_\beta$  muodostamisessa tarvitaan alakoordinaattien derivoimiskaavoja.

Virtuaalisen työn yhtälön perusteella saadaan muodonmuutosenergian variaatioksi (oletetaan kimmoinen materiaalilaki) elementille  $e$ :

$$\delta U^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \boldsymbol{\delta \epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} dV. \quad (10.86)$$

Suorittamalla integrointi laatan paksuuden yli saadaan

$$\delta U^{(e)} = \delta \mathbf{w}_\beta^{(e)T} \mathbf{K}_\beta^{(e)} \mathbf{w}_\beta^{(e)}, \quad (10.87)$$

missä

$$\mathbf{K}_\beta^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_\beta^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_\beta dA. \quad (10.88)$$

Laatan kimmomatriisi  $\mathbf{D}_b$  on jo aiemmin määritelty kaavassa (10.17). Muunnoskaavan (10.82) perusteella saadaan DKT-elementin jäykkyyismatriisiksi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_\beta^{(e)} \mathbf{T}. \quad (10.89)$$

Tällainen menettely on suoraviivainen ja helppo ohjelmoida. Laskentatyön kannalta on suotavaa suorittaa muunnos (10.82) jo muodonmuutos-siirtymä-matriisiin  $\mathbf{B}$ , jolloin

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_\beta \mathbf{T}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = -z \mathbf{B} \mathbf{w}^{(e)}, \quad (10.90)$$

ja jäykkyyismatriisi muodostetaan operoimalla suoraan  $3 \times 9$ -matriisilla  $\mathbf{B}$  eikä  $3 \times 12$ -matriisilla  $\mathbf{B}_\beta$ .

DKT-elementti voidaan ajatella koostuvan päällekkäin pinotuista kvadraattisista kolmioleveytelementeistä, joita sitovat toisiinsa jäykät laatan paksuussuuntaiset sauvat nurkissa ja lisäksi sidosehdot (10.80) ja (10.81).

Homogeenisen vakiopaksuuksisen laatan tapauksessa kolmen pisteen integroimis-kaava antaa tarkan tuloksen jäykkyyismatriisiin laskennassa. Jäykkyyismatriisin termien eksplisiittinen muodostaminen analyttisellä integroinnilla on myös mahdollista. Kun siirtymäsuureet on laskettu saadaan muodonmuutokset kaavasta (10.90) ja jännitykset kimmomatriisin välityksellä kaavasta  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}$ .

Koska taipuma on määritelty ainoastaan reunaviivoilla, aiheuttaa tämä epäselvyyden konsistentin kuormavektorin muodostamisessa, kun elementin alueella on jakautunut painekuorma. Käytännössä riittäväksi on kuitenkin osoittautunut kuorman jako taipumavapausasteille lineaaristen interpolaatiefunktioiden avulla.

Samalla idealla voidaan muodostaa myös nelisolmuinen elementti DKQ (Discrete Kirchhoff Quadrilateral). Sen käyttäytyminen ei ole kuitenkaan osoittautunut yhtä hyväksi kuin DKT-elementin. DK-elementteihin voidaan lukea myös sellaiset elementit, joissa on integraalirajoitteita, esimerkiksi vaaditaan liukumien häviäminen keskimääräisesti elementin alueelta. Maininnan arvoisia ovat B.M. Ironsin ja P. Lyonsin kehittämät elementit, joista kiinnostunut löytää seikkaperäiset kuvaukset lähteestä [6]

## 10.5 Toinen DK-elementtien johtotapa

DKT-elementin ekvivalentti vastine voidaan konstruoida hieman helpommin käyttäen taipumalle  $w$  lineaarista interpolaatiota elementin alueella ja ottamalla leikkausmuodonmuutoksen rajoiteyhtälö huomioon keskimääräisesti elementin sivuilla.

Tällä tavoin voidaan käsitellä myös nelikulmioelementtiä, joten johdetaan seuraavassa analytyttiset lausekkeet kolmisolmuisen kolmioelementin ja nelisolmuisen nelikulmioelementin kiertymien interpolaatiofunktioiksi. Kutsutaan elementtejä DKT ja DKQ elementeiksi vaikka oikeammin ehkä pitäisi kirjoittaa IKT ja IKQ (Integral Kirchhoff Triangle/Quadrilateral).

Elementin taipumaa  $w$  interpoloidaan lineaarisilla (kolmio) tai bilineaarisilla (nelikulmio) funktioilla, kun taas kiertymille käytetään kvadraattista (kolmio) tai supistettua bikvadraattista (nelikulmio) interpolaatiota, joka mukavuussyistä valitaan hierarkiseksi. Interpolaatio voidaan siten kirjoittaa muodossa

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i, \quad (10.91a)$$

$$\beta_x = \sum_{i=1}^n (N_i \beta_{xi} + N_{n+i} \Delta \beta_{xi}), \quad (10.91b)$$

$$\beta_y = \sum_{i=1}^n (N_i \beta_{yi} + N_{n+i} \Delta \beta_{yi}), \quad (10.91c)$$

jossa  $n$  on elementin solmujen lukumäärä ( $3/4$ ) ja merkintä  $i+$  tarkoittaa solmua  $i$  seuraavaa solmua elementin reunaa pitkin positiiviseen kiertosuuntaan kierrettäessä. Kolmioelementin tapauksessa käytetään siis funktioita

$$N_i = L_i, \quad (10.92a)$$

$$N_{3+i} = 4L_i L_{i+}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10.92b)$$

kun taas nelikulmioelementille

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), \quad (10.93a)$$

$$N_{4+i} = \frac{1}{2}(1 - \eta_{4+i}^2 \xi^2 - \xi_{4+i}^2 \eta^2)(1 + \xi_{4+i} \xi + \eta_{4+i} \eta), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (10.93b)$$

Huomaa, että tällä tavoin määritellyille hierarkisille muodoille  $N_{3+i}$ ,  $N_{4+i}$  indeksin  $i$  voidaan ajatella viittaavan myös elementin sivun numeroon. Tällöin sivu  $i$  on solmusta  $i$  solmuun  $i+$  oleva elementin reunan osa. Kuvaan 10.11 on piirretty elementtien solmukonfiguraatiot ja solmujen sekä sivujen numerointi.

Otetaan käyttöön merkinnät  $\vec{n}_i$  ja  $\vec{s}_i$ , jotka tarkoittavat elementin sivun  $i$  normaalin ja tangentin suuntaisia yksikkövektoreita, jotka voidaan määrittellä lausekkeilla

$$\vec{n}_i = \cos \phi_i \vec{i} + \sin \phi_i \vec{j}, \quad \vec{s}_i = -\sin \phi_i \vec{i} + \cos \phi_i \vec{j}, \quad (10.94)$$

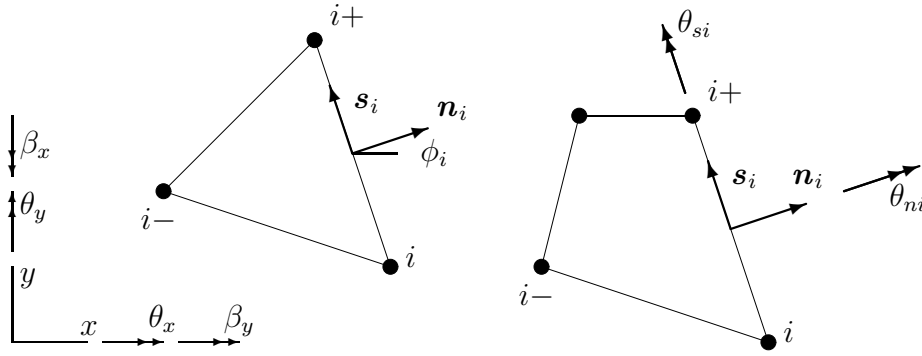
jossa  $\phi_i$  on  $x$ -akselin ja sivun normaalin  $\vec{n}_i$  välinen kulma. Kulman sini ja kosini määräytyvät solmujen aseman perusteella seuraavasti

$$\sin \phi_i = \frac{x_i - x_{i+}}{\ell_i}, \quad (10.95a)$$

$$\cos \phi_i = \frac{y_{i+} - y_i}{\ell_i}, \quad (10.95b)$$

$$(10.95c)$$





**Kuva 10.11** DK-elementtien solmukonfiguraatiot ja merkinnät.

jossa  $l_i = \sqrt{(x_{i+} - x_i)^2 + (y_{i+} - y_i)^2}$  on sivun  $i$  pituus. Sivun normaalin ja tangentin suuntaisille yksikkövektoreille käytetään myös merkintää

$$\mathbf{n}_i = \begin{Bmatrix} \cos \phi_i \\ \sin \phi_i \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{s}_i = \begin{Bmatrix} -\sin \phi_i \\ \cos \phi_i \end{Bmatrix}, \quad (10.96)$$

samaten kuin  $\beta$ -kiertymistä koostuvalle pystyvektorille

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\theta_y \\ \theta_x \end{Bmatrix}. \quad (10.97)$$

Huomaa, että  $\boldsymbol{\beta}$  ei ole fyysikaalinen vektori, joten sitä ei merkitä ylänuolella. Mikäli käyttäisimme todellisia kiertymiä  $\theta$  voitaisiin kirjoittaa

$$\vec{\theta} = \theta_x \vec{i} + \theta_y \vec{j}. \quad (10.98)$$

Elementissä on nyt  $5n$  vapausastetta, jotka pitää redusoida määrään  $3n$ , jolloin elementin jokaisessa kärkisolmussa on kolme vapausastetta ( $w_i, \beta_{xi}, \beta_{yi}$ ). Tarvitaan siten  $2n$  rajoiteyhtälöä, eli kaksi rajoitetta sivua kohden, jotka ovat:

- sivun  $i$  suuntainen leikkausmuodonmuutos  $\gamma_{si}$  häviää keskimääräisesti, eli

$$\int_{S_i^{(e)}} \gamma_{si} ds = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (10.99)$$

- kiertymä  $\beta_{ni} = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{n}_i$  muuttuu lineaarisesti elementin sivua pitkin  $s$ :n funktiona, joten

$$\Delta \boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{n}_i = \cos \phi_i \Delta \beta_{xi} + \sin \phi_i \Delta \beta_{yi} = 0. \quad (10.100)$$

Huomaa, että  $-\beta_{ni}$  kuvaa todellista kiertymää tangenttivektorin  $\vec{s}_i$  suunnassa, eli  $\beta_{ni} = -\theta_{si} = -\vec{\theta} \cdot \vec{s}_i$ .

Otetaan käyttöön lyhennysmerkinnät  $C_i = \cos \phi_i$  ja  $S_i = \sin \phi_i$ . Leikkausmuodonmuutoksen  $\gamma_{si}$  lauseke on

$$\gamma_{si} = w_{,si} - \beta_{si} = w_{,si} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{s}_i. \quad (10.101)$$

Sivun normaalin suuntainen kiertymä  $\beta_{si}$  on toisen asteen polynomi pitkin reuna-viivaa  $i$ , eli

$$\begin{aligned}\beta_{si} &= \frac{1}{2}(1 - \zeta)\beta_{si} + \frac{1}{2}(1 + \zeta)\beta_{si+} + (1 - \zeta^2)\Delta\beta_{si} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \zeta)\boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{s}_i + \frac{1}{2}(1 + \zeta)\boldsymbol{\beta}_{i+}^T \mathbf{s}_i + (1 - \zeta^2)\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{s}_i \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T(\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_{i+} + 2\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i) + \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T(\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\beta}_{i+})\zeta - \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i \zeta^2, \quad (10.102)\end{aligned}$$

jossa  $\zeta$  on sivua pitkin määritelty luonnollinen koordinaatti  $\zeta = 2s/\ell_i$ . Taipuman derivaatta sivun suunnassa on vakio

$$w_{,si} = \frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i}. \quad (10.103)$$

Leikkausmuodonmuutoksen  $\gamma_{si}$  lauseke on siten

$$\gamma_{si} = g_{0i} + g_{1i}\zeta + g_{2i}\zeta^2, \quad (10.104)$$

missä

$$g_{0i} = \frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i} - \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T(\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_{i+} + 2\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i), \quad (10.105a)$$

$$g_{1i} = -\frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T(\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\beta}_{i+}), \quad (10.105b)$$

$$g_{2i} = \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i. \quad (10.105c)$$

Rajoitteesta (10.99) seuraa

$$\int_{S_i^{(e)}} \gamma_{si} ds = \frac{1}{2}\ell_i \int_{-1}^1 (g_{0i} + g_{1i}\zeta + g_{2i}\zeta^2) d\zeta = 0 \quad (10.106a)$$

$$\Rightarrow g_{0i} + \frac{1}{3}g_{2i} = 0, \quad (10.106b)$$

$$\Rightarrow \frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i} - \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T(\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_{i+} + 2\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i) + \frac{1}{3}\mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i = 0, \quad (10.106c)$$

$$\Rightarrow \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i = \frac{3}{2}\frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i} - \frac{3}{4}\mathbf{s}_i^T(\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_{i+}). \quad (10.106d)$$

Rajoiteyhtälöt (10.99) ja (10.100) muodostavat täten yhtälöparin

$$\mathbf{n}_i^T \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i = 0, \quad (10.107a)$$

$$\mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}_i = \frac{3}{2}\frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i} - \frac{3}{4}\mathbf{s}_i^T(\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_{i+}) \quad (10.107b)$$

kutakin sivua kohden hierarkisten kiertymävapausasteiden eliminoimiseksi. Ratkaisemalla esimerkiksi  $\Delta\beta_{xi}$  yhtälöstä (10.107aa) ja sijoittamalla se yhtälöön (10.107ab) saadaan ratkaisuksi

$$\Delta\beta_{xi} = -\frac{3}{2}\frac{S_i}{\ell_i}(w_{i+} - w_i) + \frac{3}{4}S_i [C_i(\beta_{yi} + \beta_{yi+}) - S_i(\beta_{xi} + \beta_{xi+})], \quad (10.108a)$$

$$\Delta\beta_{yi} = \frac{3}{2}\frac{C_i}{\ell_i}(w_{i+} - w_i) - \frac{3}{4}S_i [C_i(\beta_{yi} + \beta_{yi+}) - S_i(\beta_{xi} + \beta_{xi+})], \quad (10.108b)$$

joka voidaan kirjoittaa lyhyesti vektorimuodossa

$$\Delta \boldsymbol{\beta}_i = \left[ \frac{3}{2} \frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i} - \frac{3}{4} \mathbf{s}_i^T (\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_{i+}) \right] \mathbf{s}_i. \quad (10.109)$$

Kiertymien interpolaatiofunktioiksi saadaan siten seuraavat lausekkeet:

$$\begin{aligned} \beta_x &= \sum_{i=1}^n \left\{ N_i \beta_{xi} + N_{n+i} \left\{ -\frac{3}{2} \frac{S_i}{\ell_i} (w_{i+} - w_i) + \frac{3}{4} S_i [C_i (\beta_{yi} + \beta_{yi+}) - S_i (\beta_{xi} + \beta_{xi+})] \right\} \right\} \\ &= \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{S_i}{\ell_i} N_{n+i} - \frac{S_{i-}}{\ell_{i-}} N_{n+i-} \right) w_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left[ N_i - \frac{3}{4} (S_i^2 N_{n+i} + S_{i-}^2 N_{n+i-}) \right] \beta_{xi} \\ &\quad + \frac{3}{4} \sum_{i=1}^n (S_i C_i N_{n+i} + S_{i-} C_{i-} N_{n+i-}) \beta_{yi} \end{aligned} \quad (10.110)$$

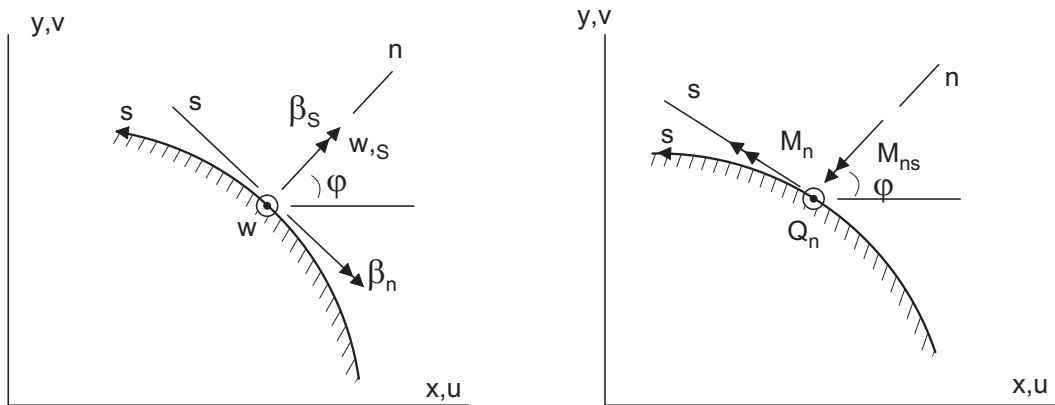
$$\begin{aligned} \beta_y &= \sum_{i=1}^n \left\{ N_i \beta_{yi} + N_{n+i} \left\{ \frac{3}{2} \frac{C_i}{\ell_i} (w_{i+} - w_i) + \frac{3}{4} S_i [C_i (\beta_{yi} + \beta_{yi+}) - S_i (\beta_{xi} + \beta_{xi+})] \right\} \right\} \\ &= \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{C_i}{\ell_i} N_{n+i} - \frac{C_{i-}}{\ell_{i-}} N_{n+i-} \right) w_i \\ &\quad + \frac{3}{4} \sum_{i=1}^n (S_i C_i N_{n+i} + S_{i-} C_{i-} N_{n+i-}) \beta_{xi} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left[ N_i - \frac{3}{4} (C_i^2 N_{n+i} + C_{i-}^2 N_{n+i-}) \right] \beta_{yi}, \end{aligned} \quad (10.111)$$

jossa on käytetty merkintää  $i-$  tarkoittamaan solmua  $i$  edeltävää solmua positiiviseen suuntaan kierrettäessä. Korostettakoon vielä, että kiertymille johdetut lausekkeet pätevät sekä kolmisolmuiselle kolmioelementille että nelisolmuiselle nelikulmioelementille kunhan interpolaatiofunktioina  $N_i$  ja  $N_{n+i}$  käytetään joko lausekkeitä (10.92a) tai (10.93a).

## 10.6 Laatan reunaehdot

Laatan reuna voi olla jäykästi kiinnitetty, vapaa tai vapaasti tuettu. Tavallisesti tuentatapa on erilainen laatan reunan eri osissa. On myös syytä huomata, että reunaehdot klassisen Kirchhoffin laattamallin ja keskimääräiset leikkausmuodonmuutokset huomioonottavan Reissnerin-Mindlinin laattamallin välillä ovat erilaiset. Kirchhoffin laattamallissa laatan jokaisella reunanosalla voidaan antaa täsmälleen kaksi reunaehto, kun taas Reissnerin-Mindlinin mallissa niitä on kolme.

Laattamallien reunaehtotapaukset on koottu taulukkoon 10.2.



**Kuva 10.12** Laatan reuna: (a) siirtymäsuureet, (b) voimasuureet.

**Taulukko 10.2** Laatan reunaehdot. Korvikeleikkausvoima  $V_n = Q_n + M_{ns,s}$ .

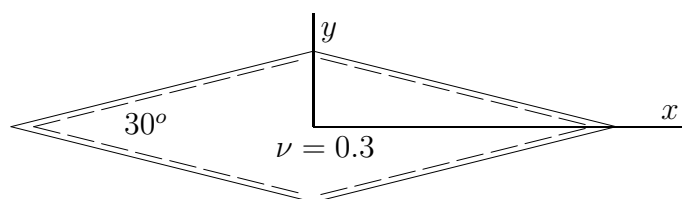
	jäykkä kiinnitys	vapaa reuna	vapaasti tuettu (1)	vapaasti tuettu (2)
Kirchhoffin laattamalli	$w = 0$ $\beta_n = 0$	$M_n = 0$ $V_n = 0$		$w = 0$ $M_n = 0$
Reissnerin- Mindlinin laattamalli	$w = 0$ $\beta_n = 0$ $\beta_s = 0$	$M_n = 0$ $M_{ns} = 0$ $Q_n = 0$	$w = 0$ $M_n = 0$ $M_{ns} = 0$	$w = 0$ $M_n = 0$ $\beta_s = 0$

Taulukosta 10.2 havaitaan, että Reissnerin-Mindlinin mallilla on kaksi mahdollisuutta vapaasti tuetun reunanosan reunaehdoille. Ensimmäistä tapausta (1) kutsutaan pehmeäksi- ja jälkimmäistä (2) kovaksi reunaehdoksi.

Jäykkä kiinnitys estää kaiken liikkeen reunalla. Vapaalla reunalla solmuvapausasteet ovat määräämättömiä ja pysyvät osana tuntemattomia solmupistevapausasteita. Reunaehdot vapaasti tuetulla laatanosalla ovat osoittautuneet mutkikkaammiksi ja niitä selostetaan seuraavassa.

Klassisessa Kirchhoffin laattateoriassa ehto  $w = 0$  pitkin reunaa implikoi välttämättä ehdon  $\beta_s = 0$ , sillä  $\gamma_{zs} \equiv 0$ . Täten ohuelle vapaasti tuetulle laatalle voitaisiin olettaa saatavan hyviä tuloksia käytettäessä klassisen laattamallin reunaehtoja (2) riippumatta siitä onko elementin tyyppi Kirchhoff, diskreetti Kirchhoff tai Reissner-Mindlin. Näin onkin asianlaita, mikäli laatan reunat ovat suoria ja eri reunanosat kohtaavat toisensa suorassa kulmassa, kuten esimerkiksi suorakaidelaatassa.

Erityisesti, mikäli käyräviivaisia vapaasti tuettuja reunoja approksimoidaan suorasisuisilla elementeillä, johtaa klassisen teorian vapaasti tuettu reunaehtotototapaus 2 vaikeuksiin. Tällöin reunaehdon  $\beta_s = w_{,s} = 0$  asettaminen elementtien reunasolmuissa johtaa välttämättä myös ehtoon  $w_{,n} = 0$ . Täten elementtiverkkoa tihennet-



**Kuva 10.13** Vino laatta.

**Taulukko 10.3** Laatan reunaehdot elementtimenetelmässä.

jäykkä kiinnitys	vapaa reuna	vapaasti tuettu (pehmeä)
$w = 0$	$M_n = 0$	$w = 0$
$\beta_n = 0$	$M_{ns} = 0$	$M_n = 0$
$\beta_s = 0$	$Q_n = 0$	$M_{ns} = 0$

täessä saadaan aikaan jäykästi tuettu reunaehtotapaus. Toisin sanoen, ratkaisuna saadaan oikea tulos mutta väärälle ongelmalle.

Toisena esimerkkinä mainittakoon kuvan 10.13 vinon laatan tapaus. Mallinnettaessa laatta tasaisella  $14 \times 14$  elementtiverkolla saadaan keskipisteen taipumaksi noin 20 % liian pieni arvo, kun reunaehtona käytetään klassista vapaan reunan ehtoa (2). Mikäli reunaehdot muutetaan vastaamaan vapaasti tuetun reunan ehtoja (1), saadaan keskipisteen taipuma noin 3 % tarkkuudella.

Esimerkeistä voidaan siis päätellä, että klassisen laattamallin vapaasti tuetun reunan reunaehdot jäykistävät liikaa elementtimallia, kun mallin reunan sisäiset kulmat ylittävät arvon  $\pi/2$ . Onkin suositeltavaa, että elementtimenetelmän yhteydessä käytettäisiin taulukossa 10.3 esitetyjä reunaehtoja laattaelementin tyypistä riippumatta.

## 10.7 Esimerkkejä

**Esimerkki 10.1** *Reissnerin-Mindlinin laattamallin virtuaalisen työn yhtälö on (jäykästi tuettu laatta)*

$$\int_A (M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + M_{xy} \delta \kappa_{xy} + Q_x \delta \gamma_{zx} + Q_y \delta \gamma_{zy}) dA = \int_A f \delta w dA, \quad (10.112)$$

missä

$$\begin{aligned}
 \kappa_x &= -\beta_{x,x}, & M_x &= D(\kappa_x + \nu\kappa_y), \\
 \kappa_y &= -\beta_{y,y}, & M_y &= D(\kappa_y + \nu\kappa_x), \\
 \kappa_{xy} &= -\beta_{x,y} - \beta_{y,x}, & M_{xy} &= \frac{1}{2}(1-\nu)D\kappa_{xy}, \\
 \gamma_{zx} &= w_{,x} - \beta_x, & Q_x &= Gt\gamma_{zx}, \\
 \gamma_{zy} &= w_{,y} - \beta_y, & Q_y &= Gt\gamma_{zy},
 \end{aligned} \tag{10.113}$$

ja missä  $D$  on laatan taivutusjäykkyys ja  $t$  laatan paksuus. Johda mallin Eulerin yhtälöt.

Kirjoitetaan momenttien lausekkeet siirtymäsuureiden ja materiaalivakioiden avulla auki

$$\begin{aligned}
 &\int_A \left\{ D \left[ (\beta_{x,x} + \nu\beta_{y,y}) \delta\beta_{x,x} + (\beta_{y,y} + \nu\beta_{x,x}) \delta\beta_{y,y} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}(1-\nu)(\beta_{x,y} + \beta_{y,x})(\delta\beta_{x,y} + \delta\beta_{y,x}) \right] \right. \\
 &\quad \left. + Gt \left[ (w_{,x} - \beta_x)(\delta w_{,x} - \delta\beta_x) + (w_{,y} - \beta_y)(\delta w_{,y} - \delta\beta_y) \right] \right\} dA = \int_A f \delta w dA
 \end{aligned}$$

Koska virtuaaliset muutokset  $\delta w$ ,  $\delta\beta_x$  ja  $\delta\beta_y$  ovat mielivaltaisia, saadaan kolme yhtälöä

$$\int_A Gt [(w_{,x} - \beta_x) \delta w_{,x} + (w_{,y} - \beta_y) \delta w_{,y}] dA = \int_A f \delta w dA, \tag{10.115a}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_A \left\{ D [(\beta_{x,x} + \nu\beta_{y,y}) \delta\beta_{x,x} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}(1-\nu)(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \delta\beta_{x,y}] \right. \\
 &\quad \left. - Gt (w_{,x} - \beta_x) \delta\beta_x \right\} dA = 0, \tag{10.115b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_A \left\{ D [(\beta_{y,y} + \nu\beta_{x,x}) \delta\beta_{y,y} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}(1-\nu)(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \delta\beta_{y,x}] \right. \\
 &\quad \left. - Gt (w_{,y} - \beta_y) \delta\beta_y \right\} dA = 0. \tag{10.115c}
 \end{aligned}$$

Sovelletaan vasemman puolen integraaleihin osittaisintegrointia ja Gaussin lausetta

$$\begin{aligned}
 &\int_A Gt [(w_{,x} - \beta_x) \delta w_{,x} + (w_{,y} - \beta_y) \delta w_{,y}] dA \\
 &= \int_A Gt \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(w_{,x} - \beta_x) \delta w] + \frac{\partial}{\partial y} [(w_{,y} - \beta_y) \delta w] \right\} dA \\
 &\quad - \int_A Gt [(w_{,xx} - \beta_{x,x}) \delta w + (w_{,yy} - \beta_{y,y}) \delta w] dA \\
 &= \oint_S Gt [(w_{,x} - \beta_x) n_x + (w_{,y} - \beta_y) n_y] \delta w ds \\
 &\quad - \int_A Gt (w_{,xx} + w_{,yy} - \beta_{x,x} - \beta_{y,y}) \delta w dA. \tag{10.116}
 \end{aligned}$$

Koska taipuma on annettu koko reunalla on taipuman variaation oltava nolla reunakäyrällä, jolloin yhtälöstä (10.115aa) saadaan

$$\int_A [Gt(\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} - \Delta w) - f] \delta w dA = 0, \quad (10.117)$$

missä on merkitty

$$\boldsymbol{\beta} = \left\{ \begin{array}{c} \beta_x \\ \beta_y \end{array} \right\}, \quad (10.118)$$

ja  $\nabla \cdot$  on divergenssi- ja  $\Delta$  Laplacen operaattori. Koska virtuaalinen siirtymäkenttä on mielivaltainen, on oltava

$$Gt(\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} - \Delta w) = f. \quad (10.119)$$

Vastaavalla tavalla käsitellään myös toinen ja kolmas yhtälö. Näytetään malliksi vain variaatiosta  $\delta\beta_x$  seuraavan yhtälön johto:

$$\begin{aligned} & \int_A \left\{ D [(\beta_{x,x} + \nu\beta_{y,y})\delta\beta_{x,x} + \frac{1}{2}(1-\nu)(\beta_{x,y} + \beta_{y,x})\delta\beta_{x,y}] \right. \\ & \quad \left. - Gt(w_{,x} - \beta_x)\delta\beta_x \right\} dA \\ = & \int_A D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(\beta_{x,x} + \nu\beta_{y,y})\delta\beta_x] + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial}{\partial y} [(\beta_{x,y} + \nu\beta_{y,x})\delta\beta_x] \right\} dA \\ & - \int_A D [\beta_{x,xx} + \nu\beta_{y,xy} + \frac{1}{2}(1-\nu)(\beta_{x,yy} + \beta_{y,xy})] \delta\beta_x dA \\ & - \int_A Gt(w_{,x} - \beta_x)\delta\beta_x dA = 0 \\ \Rightarrow & - \int_A \left\{ D [\Delta\beta_x + \frac{1}{2}(1+\nu)(\beta_{y,xy} - \beta_{x,yy})] - Gt(w_{,x} - \beta_x) \right\} \delta\beta_x dA = 0 \end{aligned} \quad (10.120)$$

Kysytyn Reissnerin-Mindlinin laattaprobleeman Eulerin yhtälöt ovat siten

$$Gt(\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} - \Delta w) = f, \quad (10.121a)$$

$$D [\Delta\beta_x + \frac{1}{2}(1+\nu)(\beta_{y,xy} - \beta_{x,yy})] + Gt(w_{,x} - \beta_x) = 0, \quad (10.121b)$$

$$D [\Delta\beta_y + \frac{1}{2}(1+\nu)(\beta_{x,xy} - \beta_{y,xx})] + Gt(w_{,y} - \beta_y) = 0, \quad (10.121c)$$

reunaehdoilla  $w = \beta_x = \beta_y = 0$ .

Huomaa, että pyörittelyissä on otaksuttu laatan taivutusjäykkyyden vakioisuus.

**Esimerkki 10.2** Edellisen esimerkkitehtävän Eulerin yhtälöt muodostavat kolmen yhtälön systeemin kolmen tuntemattoman funktion  $w, \beta_x$  ja  $\beta_y$  ratkaisemiseksi. Eliminoi yhtälöistä rotaatioiden  $\beta_x$  ja  $\beta_y$  osuus, jolloin saadaan separoitua yhtälö jossa esiintyy ainoastaan taipuma  $w$ .

Derivoidaan puolittain yhtälö (10.121ab)  $x$ :n suhteen, ja vastaavasti yhtälö (10.121ac)  $y$ :n suhteen, josta seuraa

$$D \left[ \frac{\partial}{\partial x} \Delta \beta_x + \frac{1}{2}(1 + \nu)(\beta_{y,yxx} - \beta_{x,xyy}) \right] + Gt(w_{,xx} - \beta_{x,x}) = (10.122a)$$

$$D \left[ \frac{\partial}{\partial y} \Delta \beta_y + \frac{1}{2}(1 + \nu)(\beta_{x,xyy} - \beta_{y,yxx}) \right] + Gt(w_{,yy} - \beta_{y,y}) = (10.122b)$$

Lasketaan yllä olevat yhtälöt puolittain yhteen

$$D(\Delta \beta_{x,x} + \Delta \beta_{y,y}) + Gt(\Delta w - \nabla \cdot \boldsymbol{\beta}) = 0, \quad (10.123)$$

eli

$$D\Delta \nabla \cdot \boldsymbol{\beta} + Gt(\Delta w - \nabla \cdot \boldsymbol{\beta}) = 0. \quad (10.124)$$

Operoidaan yhtälö (10.121a) puolittain Laplace operaattorilla

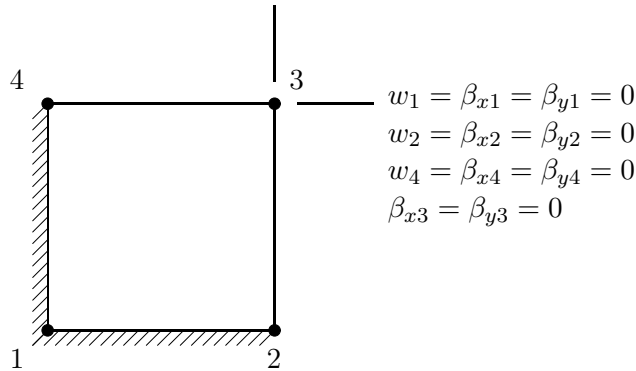
$$Gt(\Delta \nabla \cdot \boldsymbol{\beta} - \Delta \Delta w) = \Delta f, \quad (10.125)$$

josta ratkaisemalla  $\Delta \nabla \cdot \boldsymbol{\beta}$  ja sijoittamalla yhtälöön (10.124), samoin kuin ratkaisemalla  $\nabla \cdot \boldsymbol{\beta}$  yhtälöstä (10.121aa) ja sijoittamalla tämä myös yhtälöön (10.124) saadaan

$$D\Delta \Delta w = f - \frac{D}{Gt}\Delta f. \quad (10.126)$$

Huomaa, että yllä oleva yhtälö ei riitä ratkaisemaan Reissnerin-Mindlinin laattaproblemaa.

**Esimerkki 10.3** Ratkaise oheinen laattatehtävä käyttäen kuvan elementti-verkkoa ja Reissnerin-Mindlinin laattamalliin perustuvaa bilineaarisesti interpoloitua elementtiä (bilineaarinen interpolaatio sekä taipumalle että rotaatioille). Integroijäykkyysmatriisin taivutustermit  $2 \times 2$  pisteen Gaussin kaavalla ja leikkaustermit yhden pisteen Gaussin kaavalla. Käytä hyväksesi symmetriaa. Laatta on kaikilta sivuilta jäykästi tuettu ja kuormituspaine on vakio koko laatan alueella.





Elementtimenetelmä pohjana oleva virtuaalisen työn yhtälö on

$$\int_A (M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + M_{xy} \delta \kappa_{xy} + Q_x \delta \gamma_{zx} + Q_y \delta \gamma_{zy}) dA = \int_A f \delta w dA. \quad (10.127)$$

Nyt on tukemistavasta, symmetriasta ja käytetystä elementtijaosta aiheutuen keskipinnan normaalin kiertymät nolliä kaikkialla, eli

$$\beta_x \equiv \beta_y \equiv 0. \quad (10.128)$$

Täten virtuaalisen työn lauseke supistuu muotoon

$$Gt \int_A (w_{,x} \delta w_{,x} + w_{,y} \delta w_{,y}) dA = \int_A f \delta w dA. \quad (10.129)$$

Symmetrian nojalla riittää tarkastella vain yhtä elementtiä. Ottaen reunaehdot huomioon on taipuman interpolaation pelkästään

$$w = N_3 w_3, \quad (10.130)$$

missä

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta). \quad (10.131)$$

Derivaattojen muunoskaavat ovat

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad \text{ja} \quad dA = \frac{1}{4} L^2 d\xi d\eta, \quad (10.132)$$

jolloin ratkaistavaksi yhtälöksi saadaan

$$Gt \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N_{3,\xi}^2 + N_{3,\eta}^2) d\xi d\eta w_3 = \frac{1}{4} f L^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_3 d\xi d\eta, \quad (10.133)$$

eli

$$Gt \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{16} [(1 + \eta)^2 + (1 + \xi)^2] d\xi d\eta w_3 = \frac{1}{16} f L^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 + \xi)(1 + \eta) d\xi d\eta. \quad (10.134)$$

Suorittamalla ‘ali-integrointi’ eli käyttämällä Gaussin yhden pisteen kaavaa (paino  $w = 2 \cdot 2 = 4$ ,  $\xi = \eta = 0$ ), saadaan

$$\frac{1}{4} Gt w_3 = \frac{1}{4} f L^2 \quad (10.135)$$

Josta ratkaisu on

$$w_3 = \frac{f L^2}{Gt}. \quad (10.136)$$

Havaitaan, että kyseinen elementtiverkko on aivan liian harva kuvaamaan kyseisellä elementillä ja laattamallilla taivutustilaa. Momentit ovat tietenkin nolliä koko alueessa koska rotaatiot häviävät, leikkausvoimat saadaan nyt lausekkeista

$$Q_x = Gt w_{,x} = Gt \frac{2}{L} N_{3,\xi} = \frac{Gt}{2L} (1 + \eta) w_3 = \frac{1}{2} f L (1 + \eta), \quad (10.137)$$

ja vastaavasti

$$Q_y = Gtw_{,y} = Gt \frac{2}{L} N_{3,\eta} = \frac{Gt}{2L} (1 + \xi) w_3 = \frac{1}{2} fL (1 + \xi). \quad (10.138)$$

Elementtien keskipisteissä saadaan siten arvot

$$Q_x = Q_y = \frac{1}{2} fL. \quad (10.139)$$

## 10.8 Stabiileja Reissnerin-Mindlinin-laattamallin elementtejä

### 10.8.1 Johdanto

Luvussa 10.3 esitetyt elementit ovat enemmän tai vähemmän epäluotettavia. Valikoivasti ali-integroitu Lagrangen tyyppinen elementti on epäluotettava siinä esiintyvän nollaenergiamuodon takia, Serendip- ja Heterosis- tyyppiset elementit läpäisevät tämän minimiväitimuksen, mutta eivät ole stabiileja. Tämä stabiiliuden puute näkyy erityisen selvästi leikkausvoiman heilahteluina epäsäännöllisten elementtiverkkojen yhteydessä. Näille elementeille ei voida osoittaa leikkausvoiman virheen suppenemista.

Tarkastellaan seuraavassa 1980-luvun puolivälin jälkeen laattaelementtien formulaatiossa tapahtunutta kehitystä. Tällä hetkellä on käytävissä joukko Reissnerin-Mindlinin malliin perustuvia elementtejä, jotka eivät lukkiudu ohuen laatan rajatapauksessa, ja joille voidaan osoittaa optimaalinen konvergenssi kaikille siirtymä- ja jännitysresultanttisuureille.

### 10.8.2 Arnoldin ja Falkin epäkonformi elementti

D.N. Arnold ja R.S. Falk [37] ovat esittäneet yksinkertaisen epäkonformin kolmiolaattaelementin, jolle he myös osoittivat optimaaliset konvergenssiominaisuudet. Tässä elementissä taipumaa kuvataan epäkonformilla lineaarisella interpolaatiolla joka on jatkuva elementin sivujen keskipisteissä, eli

$$w = (L_1 + L_2 - L_3)w_4 + (L_2 + L_3 - L_1)w_5 + (L_3 + L_1 - L_2)w_6, \quad (10.140)$$

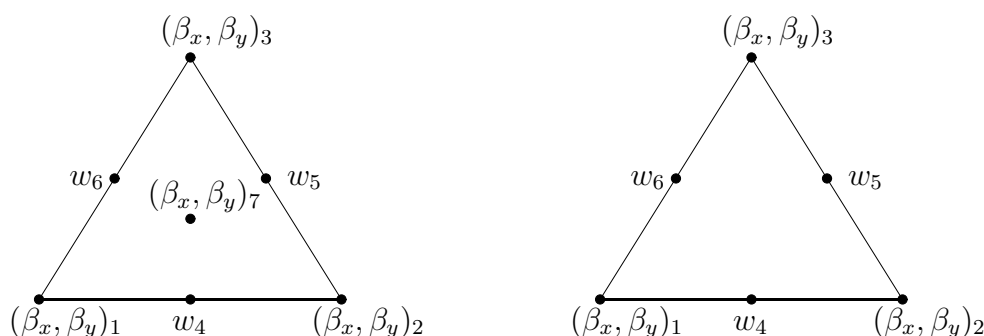
missä  $L_i$ :t ovat alakoordinaatit. Kiertymiä  $\beta_x, \beta_y$  interpoloidaan lineaarisilla interpolaatiofunktioilla joita on täydennetty kuubisella kuplamuodolla, joka tässä on otettu hierarkiseksi

$$\beta_i = L_1\beta_{i1} + L_2\beta_{i2} + L_3\beta_{i3} + 27L_1L_2L_3\Delta\beta_{i7}, \quad (10.141)$$

missä  $i = x$  tai  $y$ . Kiertymien interpolaatio on siten konformi. Elementin solmukonfiguraatio ja vapausasteet on esitetty kuvassa 10.14.

Leikkausmuodonmuutos lasketaan elementin keskimääräisten kiertymien avulla

$$\gamma_{iz} = w_{,i} - \bar{\beta}_i, \quad (10.142)$$



**Kuva 10.14** Stabiili RM-mallin epäkonformi laattaelementti ja sen modifikaatio.

missä

$$\bar{\beta}_i = \frac{1}{A^{(e)}} \int_{A^{(e)}} \beta_i dA. \quad (10.143)$$

L. Franca ja R. Stenberg [43] ovat esittäneet elementistä muunnoksen, jossa kiertymien interpolaatiossa ei tarvita kuubista kuplamuotoa. Sen sijaan leikkausvoima on laskettava stabilointitekijällä

$$\frac{1}{1 + \alpha (h/t)^2} \quad (10.144)$$

kerrottuna, missä  $\alpha$  on positiivinen vakio,  $h$  elementin karakteristinen mitta ja  $t$  laatan paksuus, siis

$$Q_i = \frac{kGt}{1 + \alpha (h/t)^2} (w_{,i} - \bar{\beta}_i). \quad (10.145)$$

Täten jäykkyysmatriisi voidaan integroida yhden pisteen kvadratuurilla, ja näin saavutetaan huomattava säästö jäykkyysmatriisiin kokoamistyössä. Tässä näkyy myös kiertymän kuplamuodon ja stabilointitekniikan tietynlainen ekvivalenttisuus, katso kappaletta 9.2.5.

Elementillä tehtyjä numeerisia laskelmia on esitetty lähteissä [42] (alkuperäinen formulaatio) ja [?] (modifioitu versio).

### 10.8.3 Stabiloidut MITC-elementit

Konformien taipuman ja kiertymien suhteen tasa-asteisesti interpoloitujen Reissnerin-Mindlinin laattaelementtien kehittäminen on osoittautunut hankalaksi. K.-J. Bathe on 1980-luvun puolivälissä esittänyt idean leikkausmuodonmuutosten laskemiseksi [39], [40]. Tämä kokonainen elementtiperhe tunnetaan lyhenteellä MITC, joka tulee sanoista: Mixed Interpolated Tensorial Components.<sup>5</sup> Alkuperäinen elementti toimii hyvin suorakaidegeometrioissa, mutta sen epästabiilius tulee esiin epäsäännöllisessä verkossa. Epästabiilius voidaan kuitenkin poistaa stabilointitekniikalla, jolloin saadaan optimaalisesti suppenevat elementit.

<sup>5</sup> Nimen muodostumiseen lienee vaikuttanut professori Bathen toimipaikka: Massachusetts Institute of Technology.

Tarkastellaan seuraavassa vain elementtiperheen kahta alhaisasteisinta elementtiä, eli lineaarista kolmio- ja bilineaarista nelikulmioelementtiä. Mikäli seurattaisiin elementtien alkuperäistä formulointia, tarvittaisiin tensorianalyysin tietoja; tämä ei ole kuitenkaan välttämätöntä, vaan seuraavassa esitetään tälle ekvivalentti tapa konstruoida alhaisasteisten elementtien modifioitua interpolatiofunktioita.

MITC elementtiformulaation idea on laskea leikkausmuodonmuutos modifioitua kiertymien interpolatiofunktioista siten, että leikkausmuodonmuutos  $\gamma_s$  elementin reunaviivalla on samanasteinen polynomi kuin taipuman gradientti tässä suunnassa. Lineaarille ja bilineaariselle elementille tämä merkitsee leikkausmuodonmuutoksen vakioisuutta. Tämä vakiokomponentti asetetaan yhtäsuureksi elementin reunan keskipisteessä alkuperäisistä interpolatioista lasketun leikkausmuodonmuutoksen arvon kanssa.

MITC elementti konstruoidaan seuraavasti. Taipumalle ja kiertymille käytetään tavanomaista interpolatiota

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i, \quad \beta_x = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{xi}, \quad \beta_y = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{yi}. \quad (10.146)$$

Lisäksi leikkausmuodonmuutoksen määrittämiseen tarvittaville kiertymille otaksutaan oma interpolatio ja merkitään sitä yläindeksillä  $S$  (Huomaa: tätä interpolatiota käytetään *vain leikkausmuodonmuutosta laskettaessa*):

$$\beta_x^S = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{xi}^S, \quad \beta_y^S = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{yi}^S. \quad (10.147)$$

Yhtälöissä (10.146) ja (10.147)  $N_i$ :t ovat lineaariset alakoordinaateissa lausutut tai bilineaariset interpolatiofunktioita ja  $n$  on elementin solmujen lukumäärä (3 tai 4). Uusi kiertymäsuureiden interpolatio (10.147) lisää elementin vapausasteita kuudella (kolmio) tai kahdeksalla (nelikulmio) eli kahdella vapausasteella sivua kohden. Nämä voidaan eliminoida kahdesta ehdosta:

- leikkausmuodonmuutos on vakio elementin reunalla  $i$ , eli

$$\gamma_{si} = w_{,s} - \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\beta}^S = \text{vakio}, \quad (10.148)$$

- ja yhtäsuuri alkuperäisistä interpolatioista lasketun leikkausmuodonmuutoksen kanssa elementin reunan keskipisteessä, eli

$$w_{,s} - \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\beta}^S = w_{,s} - \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\beta}(\zeta = 0). \quad (10.149)$$

Tämä ehto voidaan lausua myös integraalin avulla, eli

$$\begin{aligned} \int_{\text{sivu } i} (w_{,s} - \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\beta}^S) ds &= \int_{\text{sivu } i} (w_{,s} - \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\beta}) ds \\ \Rightarrow \int_{\text{sivu } i} \mathbf{s}_i^T (\boldsymbol{\beta}^S - \boldsymbol{\beta}) ds &= 0. \end{aligned} \quad (10.150)$$

Sivun  $i$  tangentin suuntaista yksikkövektoria merkitään  $\mathbf{s}_i$ :llä,  $\mathbf{s}_i^T = [-S_i \ C_i]$ , katso lukua 10.5.

Ehto (10.150) voidaan kirjoittaa yleisemmässä muodossa

$$\int_{\text{sivu } i} \mathbf{s}_i^T (\boldsymbol{\beta}^S - \boldsymbol{\beta}) w ds, \quad (10.151)$$

missä  $w$  on elementin reunalla määritelty painofunktio, joka on astetta alhaisempi kuin taipuman ja rotaatioiden interpolaatiopolynomit. Tätä ehtoa käytetään konstruoitaessa korkeampiasteisia MITC elementtejä. Koska tarkasteltavana on ollut vain lineaarinen/bilineaarinen elementti, painofunktio on vakio, eli  $w = 1$ .

Leikkausmuodonmuutoksen lauseke reunalla  $i$  on ennen rajoitteen (10.148) huomioonottoa lineaarinen lauseke sivun suuntaisen dimensiottoman koordinaatin  $\zeta$  suhteen:

$$\begin{aligned} \gamma_{si} = & w_{,s} - \frac{1}{2} \left\{ C_i(\beta_{yi}^S + \beta_{yi+}^S) - S_i(\beta_{xi}^S + \beta_{xi+}^S) \right. \\ & \left. + [C_i(\beta_{yi}^S - \beta_{yi+}^S) - S_i(\beta_{xi}^S - \beta_{xi+}^S)] \zeta \right\} \end{aligned} \quad (10.152)$$

Leikkausmuodonmuutosta koskevat ehdot (10.148) ja (10.149) elementin sivulla  $i$  ovat siten seuraavat:

$$-S_i(\beta_{xi+}^S - \beta_{xi}^S) + C_i(\beta_{yi+}^S - \beta_{yi}^S) = 0, \quad (10.153a)$$

$$-S_i(\beta_{xi+}^S + \beta_{xi}^S) + C_i(\beta_{yi+}^S + \beta_{yi}^S) = -S_i(\beta_{xi+} + \beta_{xi}) + C_i(\beta_{yi+} + \beta_{yi}). \quad (10.153b)$$

Yhtälöt (10.153a) muodostavat systeemin  $2n$  tuntemattoman  $\beta_{xi}^S$  ja  $\beta_{yi}^S$  ratkaisemiseksi. Vähennetään yhtälö (10.153aa) yhtälöstä (10.153ab), jolloin saadaan:

$$-S_i\beta_{xi}^S + C_i\beta_{yi}^S = \frac{1}{2} [C_i(\beta_{yi+} + \beta_{yi}) - S_i(\beta_{xi+} + \beta_{xi})]. \quad (10.154)$$

Yhtälön oikealla puolella on sivun  $i$  keskipisteen kiertymän  $\beta_{si}$  lauseke, joten voidaan kirjoittaa

$$-S_i\beta_{xi}^S + C_i\beta_{yi}^S = \beta_{si}(0), \quad (10.155)$$

missä

$$\beta_{si}(0) = \frac{1}{2} [C_i(\beta_{yi+} + \beta_{yi}) - S_i(\beta_{xi+} + \beta_{xi})]. \quad (10.156)$$

Vastaavasti laskemalla yhtälöt (10.153aa) ja (10.153ab) puolittain yhteen saadaan:

$$-S_i\beta_{xi+}^S + C_i\beta_{yi+}^S = \beta_{si}(0). \quad (10.157)$$

Yhtälöt (10.155) ja (10.157) ovat voimassa kaikilla sivuilla  $i$ , joten ne voidaan kirjoittaa myös muodossa (sivujen  $i$  ja  $i-$  osalta)

$$\begin{aligned} -S_i\beta_{xi}^S + C_i\beta_{yi}^S &= \beta_{si}(0), \\ -S_{i-}\beta_{xi}^S + C_{i-}\beta_{yi}^S &= \beta_{si-}(0). \end{aligned}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{aligned}\beta_{xi}^S &= \frac{1}{D_i} [C_{i-}\beta_{si}(0) - C_i\beta_{si-}(0)] \\ &= \frac{1}{2D_i} [C_{i-}C_i(\beta_{yi+} - \beta_{yi-}) + C_iS_{i-}\beta_{xi-} + D_i\beta_{xi} - C_{i-}S_i\beta_{xi+}](10.158a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{yi}^S &= \frac{1}{D_i} [S_{i-}\beta_{si}(0) - S_i\beta_{si-}(0)] \\ &= \frac{1}{2D_i} [S_{i-}S_i(\beta_{xi-} - \beta_{xi+}) + S_{i-}C_i\beta_{yi+} + D_i\beta_{yi} - S_iC_{i-}\beta_{yi-}](10.158b)\end{aligned}$$

missä

$$D_i = C_iS_{i-} - S_iC_{i-}. \quad (10.159)$$

Leikkausmuodonmuutoksen laskemiseen tarvittavien kiertymien interpolaatiot ovat viimein

$$\begin{aligned}\beta_x^S &= \sum_{i=1}^n N_i\beta_{xi}^S \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \left( N_i + \frac{C_{i+}S_i}{D_{i+}} N_{i+} - \frac{C_{i-}S_{i-}}{D_{i-}} N_{i-} \right) \beta_{xi} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{C_{i-}C_{i-}}{D_{i-}} N_{i-} - \frac{C_iC_{i+}}{D_{i+}} N_{i+} \right) \beta_{yi} \right], \quad (10.160a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_y^S &= \sum_{i=1}^n N_i\beta_{yi}^S \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \left( N_i + \frac{S_{i-}C_{i-}}{D_{i-}} N_{i-} - \frac{C_iS_{i+}}{D_{i+}} N_{i+} \right) \beta_{yi} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{S_{i+}S_i}{D_{i+}} N_{i+} - \frac{S_{i-}S_{i-}}{D_{i-}} N_{i-} \right) \beta_{xi} \right]. \quad (10.160b)\end{aligned}$$

Merkintä  $i - -$  tarkoittaa sivua  $i-$  edeltävää sivua.

Kolmi- tai nelisolmuisen stabiloidun MITC elementin virtuaalisen työn lauseke on siten

$$\begin{aligned}&\int_A \left[ -M_x\delta\beta_{x,x} - M_y\delta\beta_{y,y} - M_{xy}(\delta\beta_{x,y} + \delta\beta_{y,x}) \right. \\ &\quad \left. + Q_x(\delta w_{,x} - \delta\beta_x^S) + Q_y(\delta w_{,y} - \delta\beta_y^S) \right] dA \\ &= \int_A \bar{f}\delta w dA + \int_{S_\sigma} (\bar{Q}_n\delta w - \bar{M}_n\delta\beta_n - \bar{M}_{ns}\delta\beta_s) ds, \quad (10.161)\end{aligned}$$

ja missä leikkausvoimat määritetään lausekkeista

$$Q_x = \frac{kGt}{1 + \alpha(h/t)^2}(w_{,x} - \beta_x^S), \quad Q_y = \frac{kGt}{1 + \alpha(h/t)^2}(w_{,y} - \beta_y^S), \quad (10.162)$$

missä  $\alpha$  on positiivinen stabilointivakio ja  $h$  on elementin karakteristinen mitta, esim. suurimman sivun pituus. Momentit määritetään tavanomaiseen tapaan. Elementin jäykkyyismatriisi voidaan integroida tarkasti, eli nelisolmuisen elementin tapauksessa  $2 \times 2$  pisteen Gaussin kaavalla ja kolmioelementin tapauksessa kolmen pisteen kaavalla. Kolmioelementti toimii myös ali-integroituna, eli yhden pisteen kvadratuurilla laskettuna.

Elementille on johdettu optimaaliset suppenemisnopeusestimaatit lähteessä [41]. Numeerisia tuloksia elementin käyttäytymisestä löytyy mm. lähteistä [48], [49]. Kuvaa 10.15 on piirretty leikkausvoimajakauma vapaasti tuetun (kova) neliölaatan tapauksessa laskettuna valikoivasti ali-integroidulla nelisolmuisella elementillä (SRI) ja nelisolmuisella stabiloidulla MITC elementillä. Laatta on kuormitettu tasan jakautuneella paineella, joka vaikuttaa laatan keskellä  $L/8 \times L/8$  kokoisella neliöalueella. Kuvasta nähdään selvästi SRI elementin epästabiilius, joka tulee esiin käytettäessä epäsäännöllistä elementtiverkkoa. Koska kyseessä on kova vapaa tuentatapa ei Reissnerin-Mindlinin laattamallissa esiinny reunahäiriötä (katso liitettä C), voidaan tarkkana ratkaisuna pitää Kirchhoffin laattamallin ratkaisua. Kuva on julkaistu lähteessä [49].

### 10.8.3.1 Stabilointiparametrien fysikaalinen tulkinta

Timoshenkon palkkimallin stabilointivakiolle saatiin fysikaalisesti mielekäs tulkinta luvussa 9.2.5.2. Samaa menettelytapaa voidaan soveltaa myös laattoihin.

Merkitään käyritymien ja kiertymien yhteyttä kuvaavaa kinemaattista operaattorimatriisia symbolilla  $\mathbf{L}$ . Sen adjungantti on tasapaino-operaattori  $\mathbf{L}^*$ . Operaattoreiden  $\mathbf{L}$  ja  $\mathbf{L}^*$  esitys karteesisessa koordinaatistossa on

$$\mathbf{L} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (10.163)$$

Leikkausvoimat  $\mathbf{q} = [Q_x, Q_y]^T$  voidaan lausua momenttitasapainoyhtälön avulla muodossa

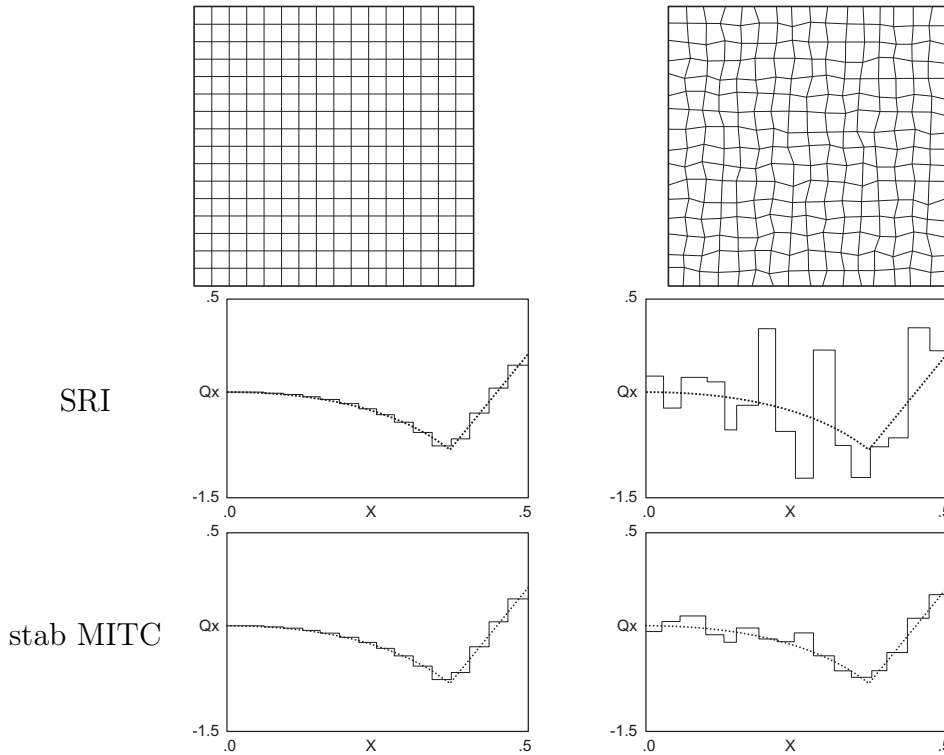
$$\mathbf{q} = \mathbf{L}^* \mathbf{m} = \mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta} \equiv \mathcal{L} \boldsymbol{\beta}. \quad (10.164)$$

Merkitään kiertymävektorin lineaarista osaa ja kuplamuotoa seuraavasti

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 + \Delta \boldsymbol{\beta}. \quad (10.165)$$

Tasapainoyhtälöiden keskimääräinen toteutumisehto on

$$\int_{A^{(e)}} (\mathbf{q} - \mathbf{L}^* \mathbf{m}) dA = \int_{A^{(e)}} [\mathbf{D}_s(\nabla w - \boldsymbol{\beta}^S - \Delta \boldsymbol{\beta}) - \mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L}(\boldsymbol{\beta}_1 + \Delta \boldsymbol{\beta})] dA = \mathbf{0}, \quad (10.166)$$



**Kuva 10.15** Leikkausvoimajakauma ( $Q_x$ ) vaakasuoralla symmetrialinjalla laskettuna SRI (ylhäällä) ja stabiloidulla MITC elementillä (alhaalla) Säännöllinen (vasemmalla) ja epäsäännöllinen (oikealla)  $16 \times 16$  elementtiverkko ja laatan suhteellinen paksuus on  $t/L = 0.01$ . Pisteviiva on tarkka ratkaisu. Kuva lähteestä [49].

eli

$$\int_{A^{(e)}} (\mathbf{D}_s + \mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L}) \Delta \boldsymbol{\beta} dA = \int_{A^{(e)}} \mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta}^S) dA. \quad (10.167)$$

Merkitään elementin nurkkasolmuihin liittyvien vapausasteiden pystyvektoria  $\mathbf{u}^{(e)}$ :lla ja kiertymien kuplamuodon vapausastevektoria  $\Delta \mathbf{u}^{(e)}$ :lla ja  $\Delta \boldsymbol{\beta} = \overset{\circ}{\mathbf{N}} \Delta \mathbf{u}^{(e)}$ . Yhtälön (10.167) ratkaisu voidaan kirjoittaa matriisimuodossa seuraavasti

$$\Delta \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (10.168)$$

missä matriisi  $\mathbf{C}$  on

$$\mathbf{C} = \int_{A^{(e)}} (\mathbf{D}_s + \mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L}) \overset{\circ}{\mathbf{N}} dA \quad (10.169)$$

Leikkausvoimat määritetään keskiarvoistamalla yhtälöstä

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}_s \Pi_0 (\nabla w - \boldsymbol{\beta}^S - \Delta \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{D}_s (\mathbf{B}_s(0) - p \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S}) \mathbf{u}^{(e)}, \quad (10.170)$$

missä  $\Pi_0$  on projektio vakiofunktioksi ja jonka arvo on  $p$  operoituna kiertymän kuplamuotoon. Leikkausmuodonmuutokseen liittyvän  $\mathbf{B}_s$  matriisin keskiarvoa on merkitty



symbolilla  $\mathbf{B}_s(0)$ . Tällöin  $\mathbf{S} = A^{(e)}\mathbf{D}_s\mathbf{B}_s(0)$  ja leikkausvoimalle saadaan

$$\mathbf{q} = (\mathbf{I} - pA^{(e)}\mathbf{D}_s\mathbf{C}^{-1})\mathbf{D}_s\mathbf{B}_s(0)\mathbf{u}^{(e)}, \quad (10.171)$$

missä  $A^{(e)}$  on elementin pinta-ala ja  $\mathbf{I}$   $2 \times 2$  yksikkömatriisi. Leikkausjäykkyyden redusoitu muoto on siten

$$\mathbf{D}_s^* = (\mathbf{I} - pA^{(e)}\mathbf{D}_s\mathbf{C}^{-1})\mathbf{D}_s. \quad (10.172)$$

**Esimerkki 10.4** *Johdetaan nelisolmuisen elementin stabilointiparametrien arvot suorakaidegeometriassa. Parametreina ovat laatan sivusuhte ja ortotrooppisen materiaalin kimmovakioiden suhde.*

Nelisolmuisen elementin matriisi  $\mathbf{C}$  on diagonaalinen suorakaidegeometriassa. Otaksutaan lineaarisesti kimmoinen ortotrooppinen materiaalilaki ja tilanne, jossa materiaalin symmetriasuunnat yhtyvät koordinaattiakselien suuntiin. Otetaan käyttöön seuraavat lyhennysmerkinnät:

$$\begin{aligned} \chi_{12} &= (1 - \nu_{12}\nu_{21})\frac{G_{12}}{E_1}, & \chi_{13} &= (1 - \nu_{12}\nu_{21})\frac{G_{13}}{E_1}, \\ \chi_{23} &= (1 - \nu_{12}\nu_{21})\frac{G_{23}}{E_1}, & \psi &= \frac{E_2}{E_1}. \end{aligned} \quad (10.173a)$$

Elementin pitkän  $x$ -akselin suuntaisen sivun mitta on  $h$  ja  $y$ -suunnassa  $\varepsilon h$ . Redusoitu leikkausjäykkyydematriisi saadaan ilman likimääräistyksiä muotoon

$$\mathbf{D}_s^* = \begin{bmatrix} (1 + \alpha_{xz}(h/t)^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (1 + \alpha_{yz}(h/t)^2)^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{D}_s, \quad (10.174)$$

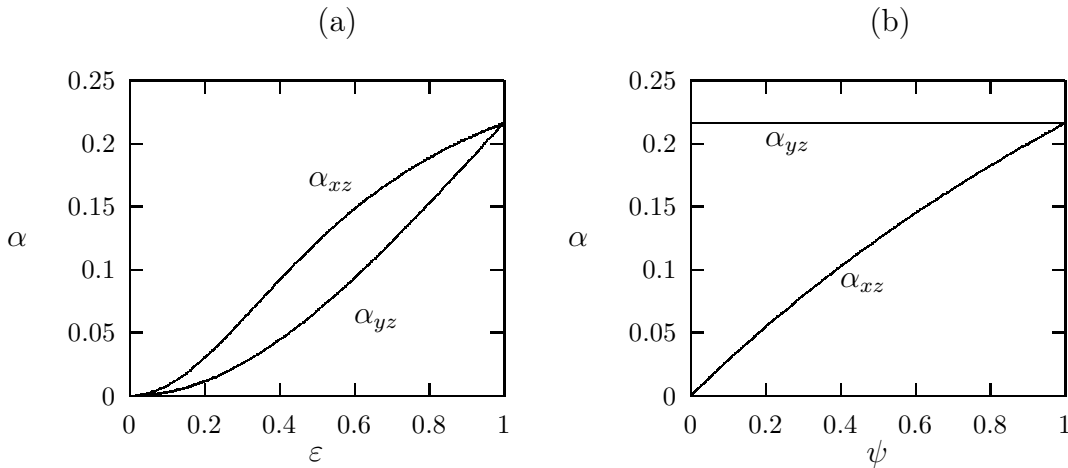
missä

$$\alpha_{xz} = \frac{k\chi_{13}}{1 + \chi_{12}\varepsilon^{-2}}, \quad \alpha_{yz} = \frac{k\chi_{23}}{\chi_{12} + \psi\varepsilon^{-2}}. \quad (10.175)$$

Isotrooppiselle materiaalille ja neliön muotoiselle elementille  $\alpha$ -parametrit ovat yhtäsuuria ja niillä on arvo  $\alpha = k(1 - \nu)/(3 - \nu)$ , joka siten vaihtelee rajoissa  $0.1667 \leq \alpha \leq 0.3125$  suppeumaluvun muuttuessa välillä  $\frac{1}{2} \geq \nu \geq 0$ . Mikäli suppeumaluvulle valitaan arvo 0.3 on stabilointiparametri 0.216, mikä vastaa melko hyvin lähteissä [58] ja [49] esitettyä taipuman neliövirheen suhteen optimaalista stabilointiparametrin arvoa (katso kuvaa 13 lähteessä [58] ja kuvaa 7 lähteessä [49]).

Stabilointiparametrin riippuvuus elementin sivusuhteesta  $\varepsilon$  on esitetty kuvassa 10.16a isotrooppiselle materiaalimallille sekä kimmokerrointen suhteesta  $\psi$  ortotrooppiselle materiaalille neliögeometriassa kuvassa 10.16b.

Edellä esitetty menettely stabilointiparametrin arvon eksplisiittiseksi määrittämiseksi on hyvin riippuvainen kiertymän kuplamuodon valinnasta. Puuttumatta kysymykseen stabilointiparametrin optimaalisesta arvosta, antanee menettely kuitenkin hyväksyttävän fysikaalisen tulkinnan sen luonteesta.



**Kuva 10.16** Stabilointiparametrien  $\alpha_{xz}, \alpha_{yz}$  riippuvuus (a) elementin sivusuhteesta  $\epsilon$ , isotrooppinen materiaali  $\nu = 0.3$ , (b) ortotrooppisen materiaalin tapauksessa kimmokertoimien suhteesta  $\psi = E_2/E_1$ , oletettuna  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.3, G_{12} = G_{13} = G_{23} = E_2/2.6$ , neliöelementti.

#### 10.8.4 Yleinen stabilointiteknikka Reissnerin-Mindlinin laattamallin elementeille

Edellisessä luvussa tarkasteltiin yksityiskohtaisesti lineaarista- ja bilineaarista elementtejä. Johdetaan seuraavaksi yleinen formulaatio stabiileille Reissnerin-Mindlinin laattamallin elementeille lähtemällä laattamallin tasapainoyhtälöistä, jotka ovat

$$\mathbf{L}^* \mathbf{m} - \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (10.176a)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = \bar{f}, \quad (10.176b)$$

jotka voidaan konstitutiivisen lain ja kinemaattisten relaatioiden avulla kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}, \quad (10.177a)$$

$$-\nabla \cdot [\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta})] = 0. \quad (10.177b)$$

Systemissä on kolme yhtälöä ja kolme tuntematonta funktiota  $w, \beta_x$  ja  $\beta_y$ . Probleema voidaan formuloida myös viiden tuntemattoman avulla lisäämällä leikkausvoimat  $\mathbf{q}$  tuntemattomien joukkoon, jolloin päädytään systeemiin:

$$\mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (10.178a)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = \bar{f}, \quad (10.178b)$$

$$\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta}) - \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (10.178c)$$

Muodostetaan systeemin (10.178a) heikko muoto kertomalla yhtälöt painofunktioilla  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ,  $\hat{w}$  ja  $\hat{\mathbf{q}}$ :lla

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta})^T \hat{\boldsymbol{\beta}} dA - \int_{\Omega} \mathbf{q}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} dA = 0, \quad (10.179a)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{q} \hat{w} dA = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA, \quad (10.179b)$$

$$\int_{\Omega} [\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta})^T - \mathbf{q}]^T \hat{\mathbf{q}} dA = 0. \quad (10.179c)$$

Osittaisintegroimalla ja käyttämällä Gaussin lausetta sekä olettaen jäykästi kiinnitetyn laatan reunaehdot systeemi muuntuu muotoon

$$\int_{\Omega} (\mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\beta}} dA - \int_{\Omega} \mathbf{q}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} dA = 0, \quad (10.180a)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{q}^T \nabla \hat{w} dA = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA, \quad (10.180b)$$

$$\int_{\Omega} [\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta})^T - \mathbf{q}]^T \hat{\mathbf{q}} dA = 0. \quad (10.180c)$$

Lasketaan kaksi yllä yhtälöä puolittain yhteen, jolloin saadaan

$$\int_{\Omega} (\mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\beta}} dA + \int_{\Omega} \mathbf{q}^T (\nabla \hat{w} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) dA = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA, \quad (10.181a)$$

$$\int_{\Omega} [\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta}) - \mathbf{q}]^T \hat{\mathbf{q}} dA = 0. \quad (10.181b)$$

Huomataan, että yllä oleva muoto on symmetrinen, mikäli alempi yhtälöistä kerrotaan puolittain leikkausjäykkysmatriisiin käänteismatriisilla  $\mathbf{D}_s^{-1}$ .

Reissnerin-Mindlinin laattamallin ongelmat juontavat leikkausvoiman laskemiseen suoraan kinemaattisia- ja konstitutiivisia yhteyksiä käyttäen, eli kun leikkausvoimat määritetään yhtälöistä

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta}). \quad (10.182)$$

Käytettäessä tasapainoyhtälöä leikkausvoimien laskemiseen tarvitaan vain kiertymiä

$$\mathbf{q}_{\text{tp}} = \mathcal{L} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta}, \quad (10.183)$$

ja leikkausvoimajakauma saadaan stabiiliksi. Lisätään täten yhtälöiden (10.181a) oikealle puolelle stabilointitermit

$$S_1 = \sum_{e=1}^N \alpha \left( \frac{h}{t} \right)^2 \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{q}_{\text{tp}} - \mathbf{q}) \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{tp}} dA, \quad (10.184a)$$

$$S_2 = - \sum_{e=1}^N \alpha \left( \frac{h}{t} \right)^2 \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{q}_{\text{tp}} - \mathbf{q}) \hat{\mathbf{q}} dA, \quad (10.184b)$$

missä  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{tp}} = \mathbf{D}_s^{-1} \mathbf{q}_{\text{tp}}$ . Stabilointitermit voidaan lisätä, sillä jatkuvassa probleemassa ne häviävät identtisesti ja diskreetissä ongelmassa ne häviävät rajalla, kun  $h \rightarrow 0$ . Systemin (10.181a) stabiloitu muoto on siten

$$\int_{\Omega} (\mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\beta}} dA + \int_{\Omega} \mathbf{q}^T (\nabla \hat{w} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) dA = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA + S_1, \quad (10.185a)$$

$$\int_{\Omega} [\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta}) - \mathbf{q}]^T \hat{\mathbf{q}} dA = S_2. \quad (10.185b)$$

Järjestelemällä alemmassa yhtälössä termejä saadaan

$$\sum_{e=1}^N \int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\beta} + \alpha(h/t)^2 \mathbf{D}_s^{-1} \mathbf{L} \boldsymbol{\beta}) - (1 + \alpha(h/t)^2) \mathbf{q}]^T \hat{\mathbf{q}} dA = 0. \quad (10.186)$$

Leikkausvoimat voidaan ratkaista elementtikohtaisesti

$$\mathbf{q}^{(e)} = \frac{\mathbf{D}_s}{1 + \alpha(h/t)^2} (\nabla w - \boldsymbol{\beta} + \alpha(h/t)^2 \mathbf{D}_s^{-1} \mathbf{L} \boldsymbol{\beta}), \quad (10.187)$$

jotka sijoitettuna takaisin yhtälöön (10.185a) antavat siirtymämenetelmäpohjaisen stabiloidun variaatioformulaation

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathbf{D}_b \mathbf{L} \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\beta}} dA - \sum_{e=1}^N \alpha \left( \frac{h}{t} \right)^2 \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{L} \boldsymbol{\beta} \mathbf{D}_s^{-1} \mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\beta}} dA \\ & + \sum_{e=1}^N \frac{\mathbf{D}_s}{1 + \alpha(h/t)^2} \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla w - \boldsymbol{\beta} + \alpha(h/t)^2 \mathbf{D}_s^{-1} \mathbf{L} \boldsymbol{\beta}) (\nabla \hat{w} - \hat{\boldsymbol{\beta}} + \alpha(h/t)^2 \mathbf{D}_s^{-1} \mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\beta}}) dA \\ & = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA. \end{aligned} \quad (10.188)$$

Summalauseke elementtien yli korostaa, että kyseiset termit lasketaan elementtikohtaisesti ja suureiden epäjatkuvuuksista elementtien reunojen yli ei välitetä. Yllä oleva hieman mutkikkaan näköinen lauseke voidaan kirjoittaa klassisen tyylin virtuaalisen työn yhtälön tapaisena hieman yksinkertaisemmassa muodossa seuraavasti:

$$\int_{\Omega} \mathbf{m}^T \hat{\boldsymbol{\kappa}} dA - \sum_{e=1}^N \alpha \left( \frac{h}{t} \right)^2 \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{q}_{\text{tp}}^T \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{tp}} dA + \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{q}^{\text{stab}} \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{\text{stab}} = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA, \quad (10.189)$$

missä on käytetty lyhenteitä

$$\mathbf{q}^{\text{stab}} = \frac{\mathbf{D}_s}{1 + \alpha(h/t)^2} \boldsymbol{\gamma}^{\text{stab}}, \quad (10.190a)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{\text{stab}} = \boldsymbol{\gamma} + \alpha(h/t)^2 \boldsymbol{\gamma}_{\text{tp}}, \quad (10.190b)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{\text{tp}} = \mathbf{D}_s^{-1} \mathbf{q}_{\text{tp}} = \mathbf{D}_s^{-1} \mathbf{L} \boldsymbol{\beta}. \quad (10.190c)$$

Huomaa, että ensimmäinen stabilointitermi vähentää taivutusenergian osuutta. Jotta globaali yhtälösystemi olisi positiivisesti definiitti on stabilointiparametrin  $\alpha$  toteutettava

$$0 < \alpha < C_I. \quad (10.191)$$

Parametri  $C_I$  voidaan helposti estimoida elementtitasolla, katso vastaavaa harjoitustehtävää 6 luvussa 9.4. Formulaatio (10.189) toimii sellaisenaan kaikentyypisillä interpolaatiopolynomeilla (kolmio, suorakaide), jos taipumaa interpoloidaan astetta korkeammilla polynomeilla kuin kiertymiä. Mikäli halutaan käyttää samanasteisia polynomeja sekä taipumalle että kiertymille, on leikkausenergiatermiä vielä rukoitava, jotta saataisiin optimaalisesti konvergentti elementti

$$\int_{\Omega} \mathbf{m}^T \hat{\mathbf{k}} dA - \sum_{e=1}^N \alpha \left( \frac{h}{t} \right)^2 \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{q}_{\text{tp}}^T \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{tp}} dA + \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^{(e)}} \frac{\mathbf{D}_s}{1 + \alpha(h/t)^2} \mathbf{R}^{(e)} \boldsymbol{\gamma}^{\text{stab}} \mathbf{R}^{(e)} \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{\text{stab}} = \int_{\Omega} \bar{f} \hat{w} dA, \quad (10.192)$$

missä  $\mathbf{R}^{(e)}$  on elementtikohtainen reduktio-operaattori, jonka konstruoiminen on kuitenkin melko monimutkaista. Periaatteessa se voidaan tehdä kuten alhaisasteisissa MITC elementeissä, eli konstruoidaan  $\boldsymbol{\beta}^S$  siten, että seuraavat ehdot toteutuvat:

- mikäli taipuman ja kiertymän interpolaatio on astetta  $p$  niin leikkausmuodonmuutos  $\boldsymbol{\gamma}_s$  on astetta  $p - 1$  elementin reunoilla ja
- kaikille astetta  $p - 2$  oleville polynomeille  $\mathbf{p}$  on voimassa ehto

$$\int_{\Omega^{(e)}} (\boldsymbol{\beta}^S - \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{p} dA = 0. \quad (10.193)$$

Redusoitu leikkausmuodonmuutos  $\mathbf{R}^{(e)} \boldsymbol{\gamma}^{\text{stab}}$  lasketaan siten

$$\mathbf{R}^{(e)} \boldsymbol{\gamma}^{\text{stab}} = \nabla w - \boldsymbol{\beta}^S + \alpha(h/t)^2 \boldsymbol{\gamma}_{\text{tp}} = \nabla w - \boldsymbol{\beta}^S + \alpha(h/t)^2 \mathbf{D}_s^{-1} \mathcal{L} \boldsymbol{\beta}. \quad (10.194)$$

Mikäli lukijalla on intoa tutustua asiaan tarkemmin, suositellaan lähteitä [50], [59].

## 10.9 Harjoitustehtäviä

1. Kirjoita bikuubisen Bogner-Fox-Schmidt elementin solmuihin 3 ja 4 liittyvät interpolaatiofunktiot.
2. Ratkaise jäykästi kiinnitetty tasaisesti kuormitettu ( $\bar{f} = f_0 = \text{vakio}$ ) neliölaatta käyttäen yhtä Bogner-Fox-Schmidt-elementtiä laatan neljännekselle. Vastaukseksi riittää laatan taipuman arvo keskipisteessä. Laatan paksuus on  $t$  ja materiaalin kimmovaikut  $E$  ja  $\nu$ .

3. Johda Morleyn kuusivapausasteisen elementin interpolaatiofunktiot lähtien diskreetti-Kirchhoff ajatuksesta. Taipumalle  $w$  voidaan otaksua lineaarinen interpolaatio ja kiertymille  $\beta_x$  ja  $\beta_y$  lineaarinen epäkonformi interpolaatio

$$\begin{aligned}\beta_i &= N_4^{ek} \beta_{i4} + N_5^{ek} \beta_{i5} + N_6^{ek} \beta_{i6} \\ &= (L_1 + L_2 - L_3) \beta_{i4} + (L_2 + L_3 - L_1) \beta_{i5} + (L_3 + L_1 - L_2) \beta_{i6}.\end{aligned}\quad (10.195)$$

Kolme vapausastetta voidaan eliminoida rajoittamalla poikittainen leikkausmuodonmuutos sivun suunnassa häviämään

$$\int_{\text{Sivui}} \gamma_s ds = 0. \quad (10.196)$$

4. Johda Reissnerin-Mindlinin mallin tasapainoyhtälöt lähtien virtuaalisen työn lausekkeesta (10.59).
5. Arnoldin ja Falkin kehittämässä Reissnerin Mindlinin mallin kolmiolaattaelementissä (katso lukua 10.8.2) taipumaa kuvataan epäkonformilla lineaarisella interpolaatiolla, joka on jatkuva elementin sivujen keskipisteissä, eli

$$\begin{aligned}w &= N_4^{ek} w_4 + N_5^{ek} w_5 + N_6^{ek} w_6 \\ &= (L_1 + L_2 - L_3) w_4 + (L_2 + L_3 - L_1) w_5 + (L_3 + L_1 - L_2) w_6,\end{aligned}\quad (10.197)$$

missä  $L_i$ :t ovat alakoordinaatit. Kiertymiä  $\beta_x, \beta_y$  interpoloidaan lineaarisilla interpolaatiofunktioilla, joita on täydennetty kuubisella kuplamuodolla, joka tässä on otettu hierarkiseksi

$$\beta_i = L_1 \beta_{i1} + L_2 \beta_{i2} + L_3 \beta_{i3} + 27 L_1 L_2 L_3 \Delta \beta_{i7}, \quad (10.198)$$

missä  $i = x$  tai  $y$ . Kiertymien interpolaatio on siten konformi. Elementin solmukonfiguraatio ja vapausasteet on esitetty oheisessa kuvassa. Leikkausmuodonmuutos lasketaan elementin keskimääräisten kiertymien avulla

$$\gamma_{iz} = w_{,i} - \bar{\beta}_i, \quad (10.199)$$

missä

$$\bar{\beta}_i = \frac{1}{A^{(e)}} \int_{A^{(e)}} \beta_i dA. \quad (10.200)$$

Piirrä kuva epäkonformeista interpolaatofunktioista  $N_i^{ek}$ , sekä määritä leikkausmuodonmuutosta  $\gamma_{xz}$  vastaava osa muodonmuutoksia ja solmupistesiiirtymiä yhdistävästä  $\mathbf{B}_s$  matriisista.

6. Johda Arnoldin ja Falkin elementille (luku 10.8.2) Francon ja Stenbergin stabiloidun muodon leikkausjäykkyyden redusointitekijät eksplisiittisesti.



# Luku 11

## Kaarevien sauvojen analysointi

Palkkielementtejä käsittelevä luku toimi johdatuksena laattaelementtien maailmaan. Aivan vastaavasti kaarevien rakenteiden analyysissä tämä sauvoja käsittelevä luku muodostaa yhdessä yleisen kolmidimensioisten rakenteiden elementtinenetelmää koskevan luvun kanssa johdatuksen kuorielementtien vaikeaan ja kiehtovaan maailmaan.

Kaarevien rakenteiden elementtinenetelmäformulaatioissa kohdataan kaksi uutta vaikeutta nimitäin jäykän kappaleen liikkeen kuvaamisen ongelma ja ns. kalvo- eli membraanilukkiutuminen.

### 11.1 Kehäsauvaelementti

Yksinkertaisin tapa mallintaa kaari elementtinenetelmällä on kuvata se lineaarisesti interpoloidulla elementillä. Tällöin kinemaattiset yhteydet voidaan johtaa tarkastelemalla suoran palkin kinematiikkaa elementin solmujen määrittelyssä koordinaatistossa  $x_\ell, y_\ell$ , katso kuvaa 11.1. Elementin jäykkyyssmatriisi ja voimavektori voidaan muodostaa ensin paikallisessa  $x_\ell, y_\ell$ -koordinaatistossa ja muuntaa ne lopuksi rakenekoordinaatistoon. Tämä muunnos voidaan suorittaa jo elementin integroimisvaiheessa.

Suoran sauvan kinemaattiset yhtälöt (9.2a) ovat kirjoitettuna nyt  $(x_\ell, y_\ell)$ -koordinaatistossa:

$$u_\ell(x_\ell, y_\ell) = u_c(x_\ell) - y_\ell\theta(x_\ell), \quad (11.1a)$$

$$v_\ell(x_\ell, y_\ell) = v_c(x_\ell). \quad (11.1b)$$

Muodonmuutosten lausekkeet paikallisessa koordinaatistossa ovat

$$\epsilon_\ell = \frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell} = \frac{du_\ell}{dx_\ell} - y_\ell \frac{d\theta}{dx_\ell}, \quad (11.2a)$$

$$\gamma_\ell = \frac{\partial u_\ell}{\partial y_\ell} + \frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell} = \frac{dv_\ell}{dx_\ell} - \theta. \quad (11.2b)$$

Jätetään jatkossa alaindeksi  $\ell$  pois, mikäli yhtälöiden tulokinnassa ei ole sekaannuksen vaaraa. Kirjoitetaan aksiaalinen muodonmuutos paikallisessa koordinaatistossa



seuraavasti:

$$\epsilon = \epsilon_c + y\kappa, \quad (11.3)$$

jolloin virtuaalisen työn yhtälön termi

$$\int_{V^{(e)}} (\sigma\delta\epsilon + \tau\delta\gamma) dV \quad (11.4)$$

voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_{I^{(e)}} (N\delta\epsilon_c + M\delta\kappa + Q\delta\gamma) dx, \quad (11.5)$$

missä  $N$  on palkin normaalivoima  $N = EA\epsilon_c = EAu'_c$  ja pilkku suureen oikeassa yläkulmassa merkitsee derivointia paikallisen  $x$ -koodinaatin suhteen. Havaitaan, että aksiaalilla muodonmuutoksella ei ole kytkentää käyrityksen tai leikkausmuodonmuutoksen (taivutustilan) kanssa, ja elementin jäykkyysmatriisi voidaan kirjoittaa lohkomuodossa

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m^{(e)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_b^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (11.6)$$

missä elementin vapausasteet on järjestetty seuraavasti:

$$\mathbf{u}^{(e)} = \left[ u_1^{(e)} \quad u_2^{(e)} \quad v_1^{(e)} \quad \theta_1^{(e)} \quad v_2^{(e)} \quad \theta_2^{(e)} \right]^T. \quad (11.7)$$

Lohkomatriisien alaindeksi  $m$  viittaa aksiaalisen muodonmuutoksen ja  $b$  taivutustilan ja leikkaussuureisiin. Matriisi  $\mathbf{K}_b^{(e)}$  on luvussa 9.2 esitetty Timoshenkon palkkielementti. Aksiaali- ja taivutustilan välillä on analoginen yksidimensioiden diffuusioyhtälön kanssa, täten aksiaalivapausasteiden suhteen lineaarisesti interpoloidun elementin jäykkyysmatriisi on

$$\mathbf{K}_m^{(e)} = \frac{EA}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11.8)$$

Aksiaali- ja taivutustilan suureiden välinen kytkentä syntyy koordinaatistonmuunnoksessa. Tarkastellaan solmuun  $i$  liittyvien vapausasteiden välistä muunnosta. Kuvan 11.2 perusteella voidaan kirjoittaa

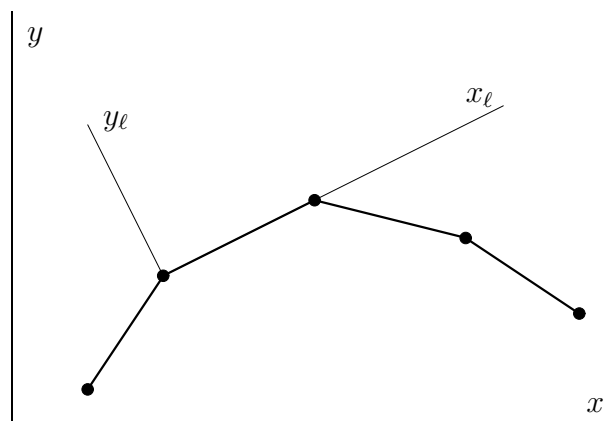
$$u_{\ell i} = (\cos \phi)u_i + (\sin \phi)v_i \quad \text{ja} \quad v_{\ell i} = -(\sin \phi)u_i + (\cos \phi)v_i. \quad (11.9)$$

Kiertymän  $\theta_i$  arvo on sama kummassakin koordinaattijärjestelmässä, joten vapausastevektorin  $\mathbf{u}_i = [u_i, v_i, \theta_i]^T$  muunnos paikalliseen koordinaatistoon saa muodon

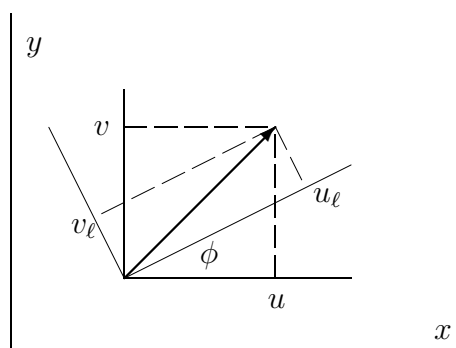
$$\mathbf{u}_{\ell i} = \mathbf{T}_i \mathbf{u}_i, \quad (11.10)$$

missä

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11.11)$$



**Kuva 11.1** Kaaren mallintaminen paloittain lineaarisilla elementeillä.



**Kuva 11.2** Koordinaatistonmuunnos.

Muunnosmatriisi  $\mathbf{T}_i$  on ortogonaalinen, eli  $\mathbf{T}_i^{-1} = \mathbf{T}_i^T$ , joten

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{T}_i^T \mathbf{u}_{\ell i} \quad (11.12)$$

Yhden elementin osuus virtuaalisen työn lausekkeesta on

$$(\delta \mathbf{u}_{\ell}^{(e)})^T \mathbf{K}_{\ell}^{(e)} \mathbf{u}_{\ell}^{(e)} = (\delta \mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{K}_{\ell}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = (\delta \mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (11.13)$$

joten elementin jäykkymatriisin muunnos paikallisesta koordinaatistosta globaaliin rakennekoordinaatistoon on

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{K}_{\ell}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)}. \quad (11.14)$$

Koko elementin muunnosmatriisi on muotoa

$$\mathbf{T}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix}, \quad (11.15)$$

jolloin elementin vapausasteet on järjestetty seuraavasti:

$$\mathbf{u}^{(e)} = \left[ u_1^{(e)} \quad v_1^{(e)} \quad \theta_1^{(e)} \quad u_2^{(e)} \quad v_2^{(e)} \quad \theta_2^{(e)} \right]^T. \quad (11.16)$$

Muunnos (11.14) voidaan suorittaa jo elementin integrointivaiheessa. Elementin jäykkyysmatriisi integroidaan matriisitulona

$$\mathbf{K}_\ell^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx. \quad (11.17)$$

Mikäli vapausasteet on järjestetty kaavan (11.16) mukaisesti, ovat matriisit  $\mathbf{D}$  ja  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & GA_s^* \end{bmatrix} \quad (11.18)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_{1,x} & 0 & 0 & -N_{2,x} \\ 0 & N_{1,x} & -\Pi_0 N_1 & 0 & N_{2,x} & -\Pi_0 N_2 \end{bmatrix}, \quad (11.19)$$

missä  $\Pi_0$  on projektio vakiofunktiolle. Venymät  $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_c, \kappa, \gamma]^T$  paikallisessa koordinaatistossa saadaan lausekkeesta

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (11.20)$$

joten jäykkyysmatriisi voidaan muodostaa suoraan integroimalla paikallisessa koordinaatistossa integraali

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{T}^{(e)} dx. \quad (11.21)$$

Taivutustilan kuvaamiseen voidaan käyttää myös Eulerin-Bernoullin palkkielementtiä, jolloin saadaan klassinen kehäsauvaelementti.

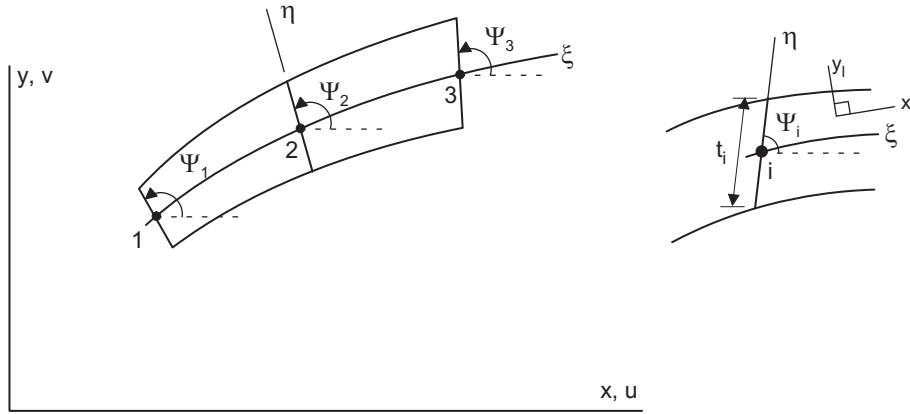
## 11.2 Isoparametrinen kaarielementti

Isoparametrisen kaarevan tasoelementin geometria määritellään kaavoilla

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi) x_i + \frac{1}{2} \eta t_i N_i(\xi) \cos \psi_i], \quad (11.22a)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi) y_i + \frac{1}{2} \eta t_i N_i(\xi) \sin \psi_i], \quad (11.22b)$$

missä  $x_i, y_i$  ovat solmujen  $i = 1, \dots, n$  koordinaatit,  $\psi_i$  on  $x$ -akselista mitattu kulma suoralle viivalle  $\xi = \text{vakio}$  ( $\eta$ -viivalle) ja  $t_i$  on solmun  $i$  kohdalla  $\eta$ -viivaa pitkin mitattu elementin "paksuus", katso kuvaa 11.3. Mitta  $t_i$  ei ole todellinen paksuus, koska  $\eta$ -viiva ei ole välttämättä kohtisuorassa tangenttivektoria  $\mathbf{s} = [x_{,\xi}(\xi, 0), y_{,\xi}(\xi, 0)]^T$



**Kuva 11.3** Isoparametrinen kaarielementti.

vastaan. Isoparametrisen elementin tapaan siirtymiä  $u$  ja  $v$  interpoloidaan samalla tavalla kuin koordinaatteja  $x$  ja  $y$ , eli

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi)u_i - \frac{1}{2}\eta t_i N_i(\xi) \sin \psi_i \theta_i] \equiv \sum_{i=1}^n (N_i u_i - \eta S_i \theta_i), \quad (11.23)$$

$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi)v_i + \frac{1}{2}\eta t_i N_i(\xi) \cos \psi_i \theta_i] \equiv \sum_{i=1}^n (N_i v_i + \eta C_i \theta_i), \quad (11.24)$$

missä on merkitty

$$S_i = \frac{1}{2}t_i N_i \sin \psi_i \quad \text{ja} \quad C_i = \frac{1}{2}t_i N_i \cos \psi_i. \quad (11.25)$$

Globaalissa rakennekoordinaatistossa  $(x, y)$  lausutut muodonmuutokset ovat

$$\epsilon_x = u_{,x} \quad \epsilon_y = v_{,y} \quad \text{ja} \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}. \quad (11.26)$$

Globaalissa rakennekoordinaatistossa  $(x, y)$  lausutut derivaattojen lausekkeet muunnetaan parametrin kuvauksen Jacobin matriisiin avulla (ks. luku 4.6.2) lausutuiksi perusneliön koordinaattien  $(\xi, \eta)$  avulla:

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{Bmatrix} v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix}, \quad (11.27)$$

missä

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}. \quad (11.28)$$

Sama yhteys voidaan lausua myös hieman toisin; ketjuderivoimalla saadaan lausekkeet

$$u_{,x} = u_{,\xi} \xi_{,x} + u_{,\eta} \eta_{,x} \quad (11.29a)$$

$$u_{,y} = u_{,\xi} \xi_{,y} + u_{,\eta} \eta_{,y}. \quad (11.29b)$$

Merkitään Jacobin matriisin transpoosin käänteismatriisia symbolilla  $\mathbf{H} = \mathbf{J}^{-T}$ , täten

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{x_{,\xi}y_{,\eta} - x_{,\eta}y_{,\xi}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \eta_{,x} \\ \xi_{,y} & \eta_{,y} \end{bmatrix}. \quad (11.30)$$

Kaaren siirtymien (11.23) derivaatat ovat

$$u_{,x} = \sum_{i=1}^n [N_{i,x}u_i - (\eta_{,x}S_i + \eta S_{i,x})\theta_i], \quad (11.31a)$$

$$u_{,y} = \sum_{i=1}^n [N_{i,y}u_i - (\eta_{,y}S_i + \eta S_{i,y})\theta_i], \quad (11.31b)$$

$$v_{,x} = \sum_{i=1}^n [N_{i,x}v_i + (\eta_{,x}C_i + \eta C_{i,x})\theta_i], \quad (11.31c)$$

$$v_{,y} = \sum_{i=1}^n [N_{i,y}v_i + (\eta_{,y}C_i + \eta C_{i,y})\theta_i], \quad (11.31d)$$

missä

$$S_{i,x} = \frac{1}{2}t_i N_{i,x} \sin \psi_i \quad S_{i,y} = \frac{1}{2}t_i N_{i,y} \sin \psi_i \quad (11.32a)$$

$$C_{i,x} = \frac{1}{2}t_i N_{i,x} \cos \psi_i \quad C_{i,y} = \frac{1}{2}t_i N_{i,y} \cos \psi_i. \quad (11.32b)$$

Koska interpolaatiofunktiot  $N_i$  ovat vain koordinaatin  $\xi$  funktioita, täten

$$N_{i,x} = H_{11}N_{i,\xi}. \quad (11.33)$$

Derivaattojen (11.31a) lausekkeet voidaan siten lausua muodossa

$$u_{,x} = \sum_{i=1}^n [H_{11}N_{i,\xi}u_i - (H_{12}S_i + \eta H_{11}S_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.34a)$$

$$u_{,y} = \sum_{i=1}^n [H_{21}N_{i,\xi}u_i - (H_{22}S_i + \eta H_{21}S_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.34b)$$

$$v_{,x} = \sum_{i=1}^n [H_{11}N_{i,\xi}v_i + (H_{12}C_i + \eta H_{11}C_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.34c)$$

$$v_{,y} = \sum_{i=1}^n [H_{21}N_{i,\xi}v_i + (H_{22}C_i + \eta H_{21}C_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.34d)$$

missä

$$S_{i,\xi} = \frac{1}{2}t_i N_{i,\xi} \sin \psi_i, \quad C_{i,\xi} = \frac{1}{2}t_i N_{i,\xi} \cos \psi_i. \quad (11.35)$$

Termit  $S_i$  ja  $C_i$  sisältävät interpolaatiofunktion  $N_i$  lausekkeen. Ne ovat täten  $\xi$ -koordinaatin suhteen astetta korkeampiasteisia polynomeja kuin lausekkeiden (11.34a)

muut termit. Tämä aiheuttaa elementin lukkiutumisen aivan kuin suoran Timoshenkon palkin tapauksessakin. Nyt lukkiutumismuotoja on vain kaksi, membraani- ja leikkauslukkiutuminen. Yksidimensioisten rakennemallien tapauksissa yksinkertaisin keino päästä eroon näistä lukkiutumisilmiöistä on pituussuuntainen ali-integrointi. Toinen suositeltavampi tapa on projisoida interpolaatiofunktioiden lausekkeet  $N_i$ , jotka ovat astetta  $p = n - 1$ , astetta  $p - 1$  oleville polynomeille. Täten lausekkeet (11.34a) muuntuvat muotoon

$$u_{,x} = \sum_{i=1}^n [H_{11}N_{i,\xi}u_i - (H_{12}\Pi_{p-1}S_i + \eta H_{11}S_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.36a)$$

$$u_{,y} = \sum_{i=1}^n [H_{21}N_{i,\xi}u_i - (H_{22}\Pi_{p-1}S_i + \eta H_{21}S_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.36b)$$

$$v_{,x} = \sum_{i=1}^n [H_{11}N_{i,\xi}v_i + (H_{12}\Pi_{p-1}C_i + \eta H_{11}C_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.36c)$$

$$v_{,y} = \sum_{i=1}^n [H_{21}N_{i,\xi}v_i + (H_{22}\Pi_{p-1}C_i + \eta H_{21}C_{i,\xi})\theta_i], \quad (11.36d)$$

missä

$$\Pi_{p-1}S_i = \frac{1}{2}t_i\Pi_{p-1}N_i \sin \psi_i \quad \text{ja} \quad \Pi_{p-1}C_i = \frac{1}{2}t_i\Pi_{p-1}N_i \cos \psi_i. \quad (11.37)$$

Projisoidut interpolaatiofunktioit määritetään yhtälöillä

$$\int_{-1}^1 \xi^k (\Pi_{p-1}N_i - N_i) d\xi = 0, \quad k = 0, \dots, p-1. \quad (11.38)$$

Virtuaaliset muodonmuutokset ovat

$$\delta\epsilon_x = \delta u_{,x} \quad \delta\epsilon_y = \delta v_{,y} \quad \text{ja} \quad \delta\gamma_{xy} = \delta u_{,y} + \delta v_{,x}, \quad (11.39)$$

missä

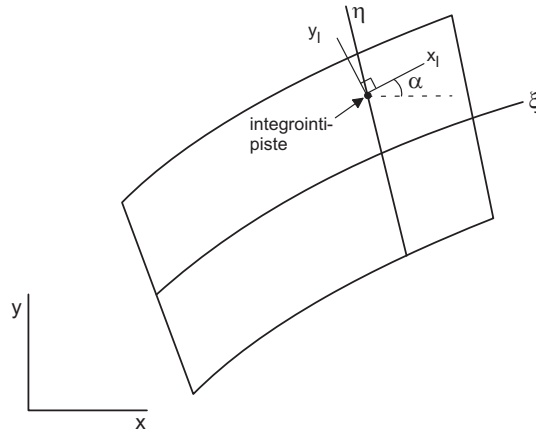
$$\delta u_{,x} = \sum_{i=1}^n [N_{i,x}\delta u_i - (\eta_{,x}S_i + \eta S_{i,x})\delta\theta_i], \quad (11.40a)$$

$$\delta u_{,y} = \sum_{i=1}^n [N_{i,y}\delta u_i - (\eta_{,y}S_i + \eta S_{i,y})\delta\theta_i], \quad (11.40b)$$

$$\delta v_{,x} = \sum_{i=1}^n [N_{i,x}\delta v_i + (\eta_{,x}C_i + \eta C_{i,x})\delta\theta_i], \quad (11.40c)$$

$$\delta v_{,y} = \sum_{i=1}^n [N_{i,y}\delta v_i + (\eta_{,y}C_i + \eta C_{i,y})\delta\theta_i]. \quad (11.40d)$$

Virtuaalisten siirtymien lausekkeiksi saadaan tietenkin yhtälöitä (11.36a) vastaavat lausekkeet.



**Kuva 11.4** Integrointipisteen paikallinen koordinaatisto.

Virtuaalisten muodonmuutosten  $\delta\epsilon$  ja virtuaalisten solmupistesiiirtymien  $\delta\mathbf{u}_i = [\delta u_i, \delta v_i, \delta\theta_i]^T$  välisen yhteyden

$$\delta\epsilon = \mathbf{B}_i \delta\mathbf{u}_i \quad (11.41)$$

avulla muodostetaan solmuihin  $i$  ja  $j$  liittyvä osa elementin jäykkymatriisista

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dV, \quad (11.42)$$

missä

$$dV = b \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (11.43)$$

ja  $b$  on sauvan poikkileikkauksen leveys. Tilavuusintegraali lasketaan numeerisesti Gaussin menetelmällä. Kimmoisan aineen tapauksessa riittää paksuussuunnassa ( $\eta$ :n suunnassa) kaksi integrointipistettä. Lukkiintumisen välttämiseksi on sauvan pituussuunnassa integrointi suoritettava  $n - 1$ :n pisteen Gaussin kaavoilla ( $n$  on solmujen lukumäärä), mikäli termejä  $S_i$  ja  $C_i$  ei projisoida alempiasteisille polynomeille. Mikäli projisointi suoritetaan voidaan pituussuuntainen integrointi suorittaa millä tahansa vähintään  $n - 1$ :n pisteen Gaussin kaavoilla.

Elementin jäykkymatriisin kaavassa (11.42) matriisi  $\mathbf{D}$  on materiaalin jäykkymatriisi globaalissa koordinaatistossa. Ohuen sauvan tapauksessa kuvan 11.4 integrointipisteen paikallisessa  $(x_\ell, y_\ell)$ -koordinaatistossa  $\mathbf{D}_\ell$  matriisi on lineaarisesti kimmoisalle aineelle

$$\mathbf{D}_\ell = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & kG \end{bmatrix}, \quad (11.44)$$

joka ottaa huomioon palkkiteorian otaksunan, että akselin  $y_\ell$  suunnassa jännitys ja venymä ovat nollia, ja  $k$  on leikkauskorjauskerroin, jonka arvo on  $k = 1, 2$  suorakaidepoikkileikkaukselle. Paikallisen koordinaatiston  $(x_\ell, y_\ell)$  ja globaalien  $(x, y)$ -

koordinaatiston väliset muodonmuutosten ja jännitysten muunnoskaavat ovat

$$\boldsymbol{\epsilon}_\ell = \mathbf{T}\boldsymbol{\epsilon} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\sigma}_\ell = \mathbf{T}^{-T}\boldsymbol{\sigma}, \quad (11.45)$$

missä

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -2 \sin \alpha \cos \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix}, \quad (11.46)$$

ja  $\alpha$  on  $x_\ell$ -akselin ja  $x$ -akselin välinen kulma. Mielivaltaisen pisteen  $(\xi, \eta)$   $\xi$ -viivan yksikkötangenttivektori on

$$\vec{i}_\ell = \frac{1}{\sqrt{x_{,\xi}^2 + y_{,\xi}^2}} \begin{Bmatrix} x_{,\xi} \\ y_{,\xi} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}. \quad (11.47)$$

Koska  $\boldsymbol{\sigma}_\ell^T \boldsymbol{\epsilon}_\ell = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon}$  on invariantti, saadaan

$$\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_\ell^T \mathbf{D}_\ell \boldsymbol{\epsilon}_\ell = \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{T}^T \mathbf{D}_\ell \mathbf{T} \boldsymbol{\epsilon} \quad (11.48)$$

joten

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^T \mathbf{D}_\ell \mathbf{T}, \quad (11.49)$$

joka sijoitetaan jäykkyyismatriisin kaavaan (11.42).





# Luku 12

## 3D elementtimenetelmä

### 12.1 Johdanto

Elementtimenetelmän yleistäminen tasoalueesta kolmidimensioisiin alueisiin on yksinkertaista. Lämmönjohtumisyhtälön heikko muoto (4.9)

$$\int_{\Omega} (\nabla \hat{u})^T \mathbf{D} \nabla u d\Omega = \int_{\Omega} \hat{u} \bar{f} d\Omega - \int_{S_q} \hat{u} \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (12.1)$$

on kirjoitettu koordinaatistosta riippumattomaan muotoon ja kelpaa siten sellaiseenaan elementtimenetelmädiskretoinnin pohjaksi myös kolmidimensioisesissa alueissa. Heikko muoto voidaan kirjoittaa myös helposti muistettavassa “virtuaalisen työn muodossa”

$$- \int_{\Omega} (\nabla \hat{u})^T \mathbf{q} d\Omega = \int_{\Omega} \hat{u} \bar{f} d\Omega - \int_{S_q} \hat{u} \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (12.2)$$

missä lämpövuoto saadaan konstitutiivisen mallin avulla, joka Fourierin lämmönjohtumismallin tapauksessa on muotoa  $\mathbf{q} = -\mathbf{D} \nabla u$ , joka elementtimenetelmäapproksimaatiossa saa muodon  $\mathbf{q} = -\mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}$ .

Elementtimatriisiin

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (12.3)$$

diskreetti gradienttioperaattorimatriisi  $\mathbf{B}$  voidaan osittaa elementin paikallisten solmujen mukaan seuraavasti

$$\mathbf{B} = [ \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_m ], \quad (12.4)$$

missä solmun  $i$  osuus on

$$\mathbf{B}_i = \nabla N_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{bmatrix}. \quad (12.5)$$

Kolmiulotteisten kappaleiden jännitysanalyyseissä muodonmuutosenergian variaatio voidaan kirjoittaa muodossa, katso luku 5.2

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega, \quad (12.6)$$

missä jännitysten ja muodonmuutosten vektorit ovat komponenteittain

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T\end{aligned}$$

Elementin paikalliseen solmuun  $i$  liittyvä osuus siirtymä-muodonmuutosmatriisista  $\mathbf{B}$  on

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,z} \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,z} & N_{i,y} \\ N_{i,z} & 0 & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (12.7)$$

## 12.2 Kolmiulotteinen interpolaatio

### 12.2.1 Lineaarinen interpolaatio

Luvun 4.2 lineaarisen tasoelementin kolmiulotteinen vastine on nelisolmuinen tetraedrielementti, jonka interpolaatio voidaan kirjoittaa muodossa

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z. \quad (12.8)$$

Lausumalla  $u$  solmuissa saadaan neljä yhtälöä

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i, \quad (12.9)$$

joista voidaan ratkaista vakiot  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ . Funktion  $u$  lineaarisen interpolaation lauseke on ilmaistuna solmupistearvojen  $u_i, u_j, u_m$  ja  $u_p$  avulla

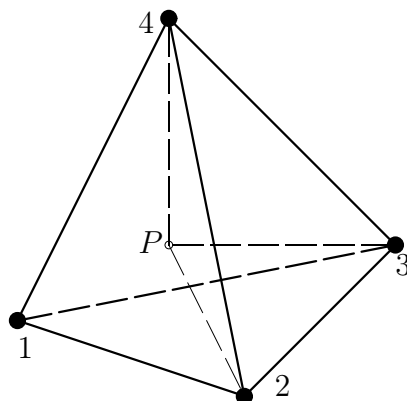
$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{6V} [(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)u_i - (a_j + b_j x + c_j y + d_j z)u_j \\ &\quad + (a_m + b_m x + c_m y + d_m z)u_m - (a_p + b_p x + c_p y + d_p z)u_p].\end{aligned} \quad (12.10)$$

missä

$$6V = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{bmatrix} \quad (12.11)$$

ja  $V$  on tetraedrin tilavuus. Vakiot  $a_i, b_i, c_i$  ja  $d_i$  ovat

$$\begin{aligned}a_i &= \det \begin{bmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{bmatrix}, & b_i &= -\det \begin{bmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{bmatrix}, \\ c_i &= \det \begin{bmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{bmatrix}, & d_i &= -\det \begin{bmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned} \quad (12.12)$$



**Kuva 12.1** Tetraedrielementin tilavuuskoordinaatit.

Muut vakiot  $a_j, b_j, \dots, d_m$  saadaan vaihtamalla indeksejä:  $p \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow m \rightarrow p$  jne. Solmut numeroidaan siten, että esim. solmusta  $p$  katsoen  $i, j$  ja  $m$  kiertävät vastapäivän tai ne ovat järjestyksessä  $mipj$  jne.

Interpolaatio (12.10) voidaan kirjoittaa muodossa

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m + N_p u_p \quad (12.13)$$

kun määritellään

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y + d_i z)/6V \quad \text{jne.} \quad (12.14)$$

### 12.2.2 Tilavuuskoordinaatit

Tetraedrielementin, katso kuva 12.1, tilavuuskoordinaatit määritellään tilavuuksien suhteena

$$L_1 = \frac{V_1}{V}, \quad L_2 = \frac{V_2}{V}, \quad L_3 = \frac{V_3}{V}, \quad L_4 = \frac{V_4}{V}, \quad (12.15)$$

missä  $V_1$  on tetraedrin  $P245$  tilavuus ja  $V$  on elementin  $1234$  tilavuus. Koordinaatti  $L_1$  muuttuu nolasta yhteen karteesisien koordinaattien mukana, solmusta 1 tahkolle  $243$  mentäessä.

Karteesisien koordinaattien ja tilavuuskoordinaattien välillä ovat yhteydet

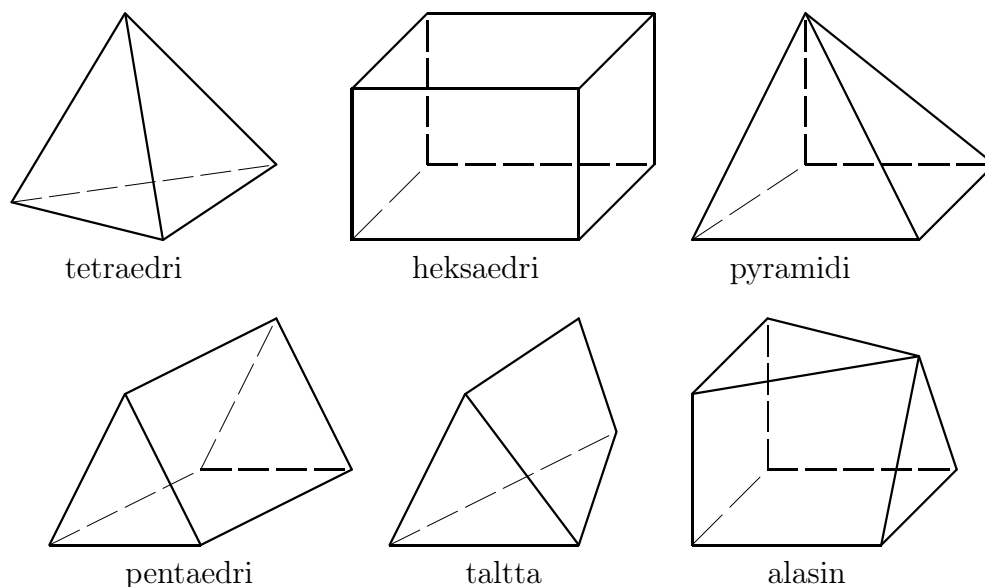
$$\begin{aligned} x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 + L_4 x_4, \\ y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 + L_4 y_4, \\ z &= L_1 z_1 + L_2 z_2 + L_3 z_3 + L_4 z_4, \end{aligned} \quad (12.16)$$

missä  $(x_i, y_i, z_i)$  ovat solmun  $i$  koordinaatit. Luonnollisesti kaikki neljä tilavuuskoordinaattia eivät voi olla riippumattomia, vaan niitä sitoo ehto

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1. \quad (12.17)$$

Koska koordinaatit  $L_i$  muuttuvat lineaarisesti nolasta yhteen ja saavat arvon 1 solmussa  $i$ , lineaariset interpolaatiofunktiot ovat

$$N_i = L_i, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (12.18)$$



**Kuva 12.2** Erilaisia 3-D elementtigeometrioita.

Kartesisten koordinaattien suhteen muodostettujen derivaattojen laskemisessa tarvitaan ketjukaavaa

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{1}{6V} \sum_{i=1}^4 b_i \frac{\partial f}{\partial L_i}. \quad (12.19)$$

Tilavuusintegraaleille voidaan johtaa integrointikaava

$$\int_{V^{(e)}} L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dV = 6V^{(e)} \frac{a!b!c!d!}{(3+a+b+c+d)!}. \quad (12.20)$$

### 12.2.3 Muita 3D-elementtigeometrioita

Kolmidimensioisessa avaruudessa mahdollisia elementtigeometrioita on useita. Kuvasssa 12.2 on esitetty joukko 3-D elementtien perusmuotoja kuten *tetraedri*, *heksaedri*, *pentaedri*, *pyramidi*, *taltta* ja *alasin*.

### 12.2.4 Isoparametrinen kuvaus

Tarkastellaan aluksi isoparametristä hexahedrielementtiä. Isoparametrisen kolmiulotteisen, (3D), elementin pisteen  $P$  paikka suorakulmaisessa  $(x, y, z)$ -koordinaatis-

tossa on

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i, \quad (12.21a)$$

$$y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i, \quad (12.21b)$$

$$z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i, \quad (12.21c)$$

missä  $\xi, \eta, \zeta \in [-1, 1]$  ovat peruskuution dimensiottomat koordinaatit,  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  ovat interpolaatiofunktioita ja  $n$  on elementin solmujen lukumäärä. Kuvassa 12.3 on esitetty 8-solmuinen, trilineaarinen, ja 20-solmuinen supistettu trikvadraattinen elementti.

Isoparametrisen 3D-elementin ratkaistavia suureita interpoloidaan samoilla interpolaatiofunktioilla kuin koordinaattejakin. Diffuusioelementin tapauksessa esimerkiksi lämpötilalle voidaan kirjoittaa elementin alueella

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i, \quad (12.22)$$

missä  $u_i$ , ovat solmupisteiden lämpötila-arvot.

Elementin jäykkyysmatriisin muodostamisessa tarvitaan  $\mathbf{B}$ -matriisissa, esim. (12.5), globaalin koordinaatiston suhteen lausuttuja derivaattoja. Tämä voidaan johtaa tasotapauksen kaltaisesta tarkastelemalla isoparametrisen kuvauksen muunnosmatriisia. Tarkastellaan funktion

$$u(x, y, z) = u(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \quad (12.23)$$

derivaattojen lausekkeita peruskuution koordinaattien  $\xi, \eta, \zeta$  suhteen

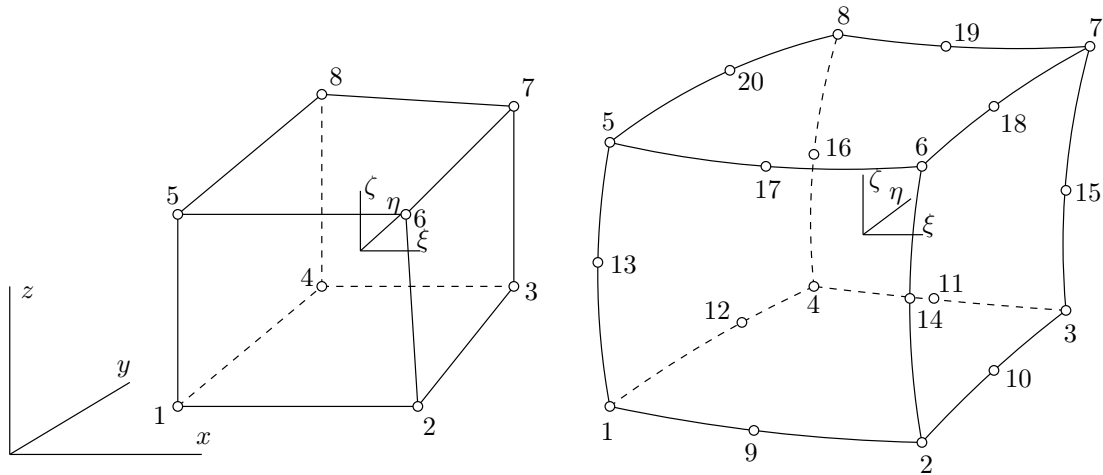
$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (12.24a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (12.24b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad (12.24c)$$

joka voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix}, \quad \text{eli} \quad \mathbf{u}_{,\xi} = \mathbf{J}^T \mathbf{u}_{,x}, \quad (12.25)$$



**Kuva 12.3** Isoparametrinen 3D-hexahedrielementti.

missä  $\mathbf{J}$  on geometriakuvauksen Jacobin matriisi. Kuten tasotapauksessakin on Jacobin matriisin determinantin oltava positiivinen jotta kuvaus olisi yksikäsitteinen ja suuntaisuuden säilyttävä.

Globaalit derivaatat voidaan nyt ratkaista peruskuution koordinaattien suhteen otettujen derivaattojen avulla

$$\mathbf{u},_{\mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{u},_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (12.26)$$

Käänteismatriisin  $\mathbf{J}^{-T}$  lausekkeeksi saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{-T} &= \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y,_{\eta} z,_{\zeta} - z,_{\eta} y,_{\zeta} & -y,_{\xi} z,_{\zeta} - z,_{\xi} y,_{\zeta} & y,_{\xi} z,_{\eta} - z,_{\xi} y,_{\eta} \\ -x,_{\eta} z,_{\zeta} - z,_{\eta} x,_{\zeta} & x,_{\xi} z,_{\zeta} - z,_{\xi} x,_{\zeta} & -y,_{\xi} z,_{\eta} - z,_{\xi} y,_{\eta} \\ x,_{\eta} y,_{\zeta} - y,_{\eta} x,_{\zeta} & -x,_{\xi} y,_{\zeta} - y,_{\xi} x,_{\zeta} & x,_{\xi} y,_{\eta} - y,_{\xi} x,_{\eta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (12.27)$$

missä

$$\det \mathbf{J} = \det \mathbf{J}^T = x,_{\xi}(y,_{\eta} z,_{\zeta} - z,_{\eta} y,_{\zeta}) - y,_{\xi}(x,_{\eta} z,_{\zeta} - z,_{\eta} x,_{\zeta}) + z,_{\xi}(x,_{\eta} y,_{\zeta} - y,_{\eta} x,_{\zeta}), \quad (12.28)$$

ja

$$x,_{\xi} = \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} x_i, \quad x,_{\eta} = \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} x_i, \quad x,_{\zeta} = \sum_{i=1}^n N_{i,\zeta} x_i \quad \text{jne.} \quad (12.29)$$

Tilavuusintegraalit  $\int_V f dV$  lasketaan numeerisesti Gaussin menetelmällä

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta \\ & \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f(x(\xi_i, \eta_j, \zeta_k), y(\xi_i, \eta_j, \zeta_k), z(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)) \det(\mathbf{J}) w_i w_j w_k, \end{aligned} \quad (12.30)$$

missä  $(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$  ovat Gaussin integrointipisteet ja  $w_i, w_j, w_k$  ovat integrointipisteisiin liittyvät painokertoimet. Tavallisesti  $m = n = p$ .

Ekvivalentin pintakuormavektorin muodostamisessa joudutaan laskeman integraaleja  $\int_A f dA$  pinnan yli, esimerkiksi pinnalla  $\zeta = a$ , missä  $a$  on vakio. Lasketaan tämäkin integraali numeerisesti Gaussin menetelmällä

$$\begin{aligned} & \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 f(x(\xi, \eta, \zeta = a), y(\xi, \eta, \zeta = a), z(\xi, \eta, \zeta = a)) \det(\mathbf{J}_a) d\xi d\eta \\ & \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x(\xi_i, \eta_j, \zeta = a), y(\xi_i, \eta_j, \zeta = a), z(\xi_i, \eta_j, \zeta = a)) \det(\mathbf{J}_a) w_i w_j, \end{aligned} \quad (12.31)$$

missä  $(\xi_i, \eta_j, \zeta = a)$  ovat Gaussin integrointipisteet pinnalla  $\zeta = a$  ja  $w_i, w_j$  ovat painokertoimet,  $\det(\mathbf{J}_a)$  on pinnan Jacobin determinatti kaarevalla pinnalla  $\zeta = a$ .

## 12.2.5 Solmuihin sidottu interpolaatio

### 12.2.5.1 Heksahedrielementti

Lagrange ja Serendip tyyppisten elementtiperheiden konstruoiminen kolmidimensioisessa tapauksessa on suoraviivainen yleistys tasotapauksesta. Trilineaarisen elementin interpolaatiofunktioita voidaan kirjoittaa muodossa

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi_i \xi)(1 - \eta_i \eta)(1 - \zeta_i \zeta), \quad (12.32)$$

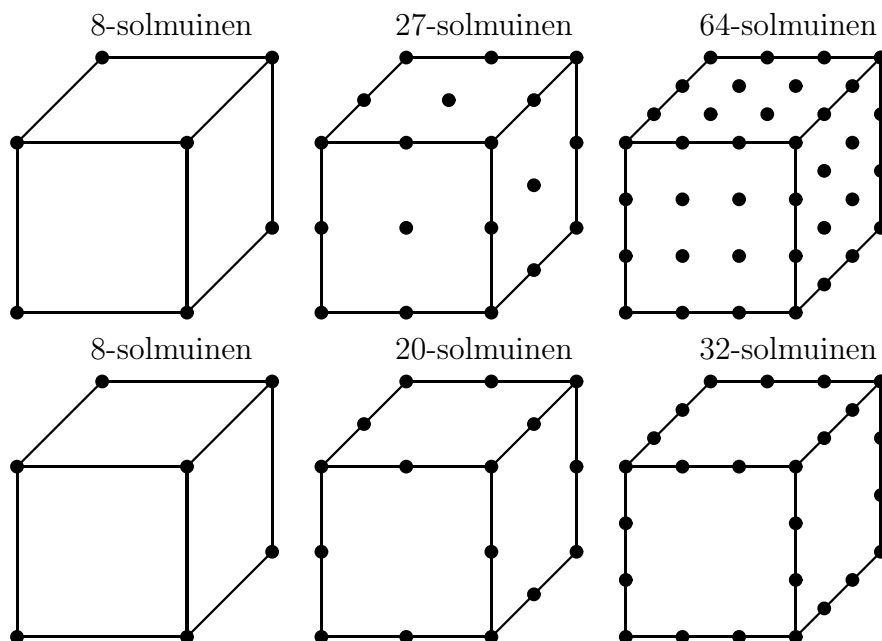
missä  $\xi_i, \eta_i$  ja  $\zeta_i$  ovat solmun  $i$  koordinaatit peruskuutiosta, ja saavat siten arvot  $\pm 1$ .

Lagrange tyyppinen trikavdraattinen elementti saadaan yksinkertaisesti

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = l_r^2(\xi) l_s^2(\eta) l_t^2(\zeta), \quad 0 \leq r, s, t, \leq 2, \quad (12.33)$$

ja missä toisen asteen Lagrange interpolaatiopolynomia on merkitty  $l_p^2(\cdot)$ , katso luku 3.2.2. Trikavdaattisessa elementissä on 27 solmua, 8 nurkissa, 12 särmien keskellä, 6 sivutahkojen keskellä ja yksi alueen sisällä. Serendip tyyppinen supistetussa trikavdaattisessa elementissä ei ole sisäsolmua eikä sivutahkojen keskellä olevia solmuja, joten solmulukumääräksi tulee 20. Se on hyvin yleinen elementti useissa elementtimenetelmäohjelmistoissa. Mikäli elementin muoto ei ole säännöllinen prismamainen,





**Kuva 12.4** Lagrangen trilineaarinen, trikvadraattinen ja trikuubinen elementti (yllä) sekä vastaavat redusoidut, Serendip tyyppiset elementit (alla).

sen tarkkuus on kuitenkin huonompi kuin vastaavan trikvadraattisen Lagrangen elementin. Supistetun trikvadraattisen elementin interpolaatiofunktioiksi saadaan:

- kärkisolmut,  $\xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta)(-2 + \xi_i\xi + \eta_i\eta + \zeta_i\zeta) \quad (12.34)$$

- särmäsolmut joissa  $\xi_i = 0, \eta_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta) \quad (12.35)$$

- särmäsolmut joissa  $\eta_i = 0, \xi_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 - \eta^2)(1 + \zeta_i\zeta) \quad (12.36)$$

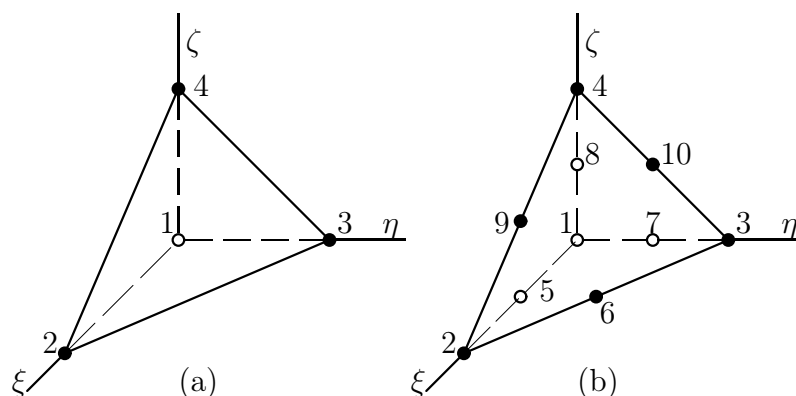
- särmäsolmut joissa  $\zeta_i = 0, \xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 - \zeta^2). \quad (12.37)$$

Yleinen muoto hexahedrielementin Lagrangen interpolaatiolle on

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = l_r^{p_\xi}(\xi)l_s^{p_\eta}(\eta)l_t^{p_\zeta}(\zeta), \quad (12.38)$$

missä interpolaation aste paikallisissa  $\xi, \eta, \zeta$  suunnissa on  $p_\xi, p_\eta, p_\zeta$  ja missä  $0 \leq r \leq p_\xi, 0 \leq s \leq p_\eta, 0 \leq t \leq p_\zeta$ .



**Kuva 12.5** Lineaarinen ja kvadraattinen tetraedrielementti.

### 12.2.5.2 Tetraedrielementti

Isoparametrisen nelisolmuisen tetraedrielementin, kuva 12.5a, interpolaatiofunktiot voidaan kirjoittaa peruselementin koordinaattien avulla seuraavasti

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \xi - \eta - \zeta, & N_3 &= \eta, \\ N_2 &= \xi, & N_4 &= \zeta. \end{aligned} \quad (12.39)$$

Kvadraattisessa tetraedrielementissä on kymmenen solmua joten se sisältää täydellisen kvadraattisen polynomin

$$1, \xi, \eta, \zeta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2, \eta\zeta, \zeta^2, \xi\zeta.$$

Interpolaatiofunktiot voidaan konstruoida samalla tavalla kuin kolmioelementillekin ja ne ovat kuvan 12.5b solmunumeroinnilla

$$\begin{aligned} N_1 &= -L_1(1 - 2L_1), & N_6 &= 4\xi\eta, \\ N_2 &= -\xi(1 - 2\xi), & N_7 &= 4\eta L_1, \\ N_3 &= -\eta(1 - 2\eta), & N_8 &= 4\xi\zeta, \\ N_4 &= -\zeta(1 - 2\zeta), & N_9 &= 4\eta\zeta, \\ N_5 &= 4\xi L_1, & N_{10} &= 4\zeta L_1, \end{aligned} \quad (12.40)$$

missä  $L_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta$ .

## 12.2.6 Hierarkinen interpolaatio

Käsitellään seuraavassa vain heksahedrielementin hierarkisia  $C_0$ -interpolaatiofunktioita. Hierarkisen kannan määrittely voidaan tehdä myös muille kuvassa 12.2 esiintyvillä elementtigeometrioille. Yleistämällä tasotapauksen hierarkisen järjestelmän, kolmi-dimensionoiset hierarkiset interpolaatiofunktiot voidaan jakaa neljään ryhmään.

1. *Solmufunktiot* ovat tavanomaiset trilineaariset interpolaatiopolynomit

$$N_{1,1,1}^{N_i} = \frac{1}{8}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta). \quad (12.41)$$

2. *Särmäfunctiot* määritellään erikseen kullakin kahdellatoista särmällä  $E_k, k = 1, \dots, 12$ . Esimerkiksi särmällä  $E_1$  (katso kuvaa 12.6), jolla  $\eta = \zeta = -1$ , särmäinterpolaatiofunktio ovat

$$N_{i,1,1}^{E_1} = \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 - \zeta)\psi_i(\xi), \quad (12.42)$$

missä  $\psi_i$  funktio on määritelty luvussa 3.2.2.

3. *Tahkofunktiot* määritellään kullakin kuudella sivutahkolla  $F_k$ . Esimerkiksi sivutahkolla  $F_1$ , jolla  $\zeta = -1$ , interpolaatiofunktio ovat

$$N_{i,j,1}^{F_1} = \frac{1}{2}(1 - \zeta)\psi_i(\xi)\psi_j(\eta). \quad (12.43)$$

4. *Sisäiset muodot* ovat puhtaasti elementin paikallisia interpolaatiofunktioita, joilla ei ole kytkentää ympäröivien elementtien vapausasteiden kanssa.

$$N_{i,j,k}^{\text{int}} = \psi_i(\xi)\psi_j(\eta)\psi_k(\zeta). \quad (12.44)$$

Alaindeksit  $i, j, k$  interpolaatiofunktioiden kaavoissa merkitsevät polynomin astetta paikallisessa suunnassa  $\xi, \eta, \zeta$ .

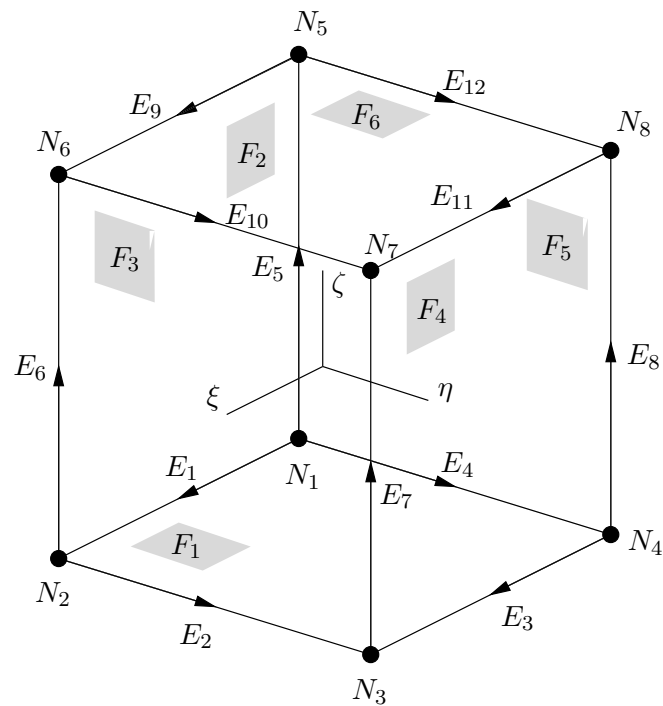
Hierarkisessa järjestelmässä voidaan myös määritellä Lagrangen tyyppinen tensoritulointerpolaatio tai Serendip tyyppinen redusoitu interpolaatio. Särmäinterpolaatiot ovat kummassakin järjestelmässä samat. Sivutahkoihin liittyvät interpolaatiot voidaan määritellä esimerkiksi tahkolle  $F_1$  kaavan (12.43) mukaisesti missä  $i$  ja  $j$  ovat

Serendip	Lagrange	
$i = 2, \dots, p_\xi - 2$	$i = 2, \dots, p_\xi,$	
$j = 2, \dots, p_\eta - 2$	$i = 2, \dots, p_\eta,$	
$i + j = 4, \dots, \max(p_\xi, p_\eta).$		(12.45)

Sisäisille muodoille (12.44) vastaavasti

Serendip	Lagrange	
$i = 2, \dots, p_\xi - 4$	$i = 2, \dots, p_\xi,$	
$j = 2, \dots, p_\eta - 4$	$i = 2, \dots, p_\eta,$	
$k = 2, \dots, p_\zeta - 4$	$i = 2, \dots, p_\zeta,$	
$i + j + k = 6, \dots, \max(p_\xi, p_\eta, p_\zeta)$		(12.46)

Edellä on oletettu anisotrooppinen interpolaatio, missä paikallisten suuntien interpolaation aste voi vaihdella.



$$\Omega_{st}^h = [(-1, 1) \times (-1, 1) \times (-1, 1)]$$

**Kuva 12.6** Heksahedrielementti; solmujen, särmien ja tahkojen numerointi.

### Harjoitustehtäviä

1. Mitkä  $\xi, \eta, \zeta$  polynomien termit sisältää supistettu trikvaadrattinen (Serendip) interpolaatio.
2. Mikä on pienin luku tetraedrielementtejä, joista voidaan muodostaa heksaedrielementti?
3. Konstruoi kuubisen tetraedrielementin interpolaatiofunktiot.



# Luku 13

## Kuorielementtejä

### 13.1 Tasokuorielementti

Edellä on käsitelty erikseen levyjen ja laattojen analysointia elementtimenetelmällä. Tason suunnassa kuormitettuun levyyn tulee kalvojännityksiä ja tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa kuormitettuun levyyn (laattaan) syntyy taivutusjännityksiä. Kaarevaan kuorirakenteeseen (tai taitekuoreen) syntyy sekä kalvo- että taivutusjännityksiä. Kuorirakenne voi olla kaareva yhteen suuntaan, kuten sylinterikuori, tai kahteen suuntaan (kaksoiskaareva), kuten esim. pallokuori. Sylinteripinnan voi taivuttaa takaisin tasoksi, mutta kaksoiskaarevaa pallopintaa ei voi, kuten kartan tekijät hyvin tietävät. Pallokuoren pääkaarevuudet ovat samanmerkkiset, mutta esim. hyperbelikuoren pääkaarevuudet ovat erimerkkiset. Kuorten rakenneteoriassa on kehitetty oma teoria laakeille kuorille. Hyvin laakealle kuorelle voidaan käyttää suoraan laattateoriaa, jossa laakean kuoren kaarevuus otetaan huomioon kinemaattisissa yhtälöissä alkukaarevuutena. Korkean kuoren (engl. deep shell) tapauksessa on käytettävä kuorelle johdettuja kinemaattisia yhtälöitä.

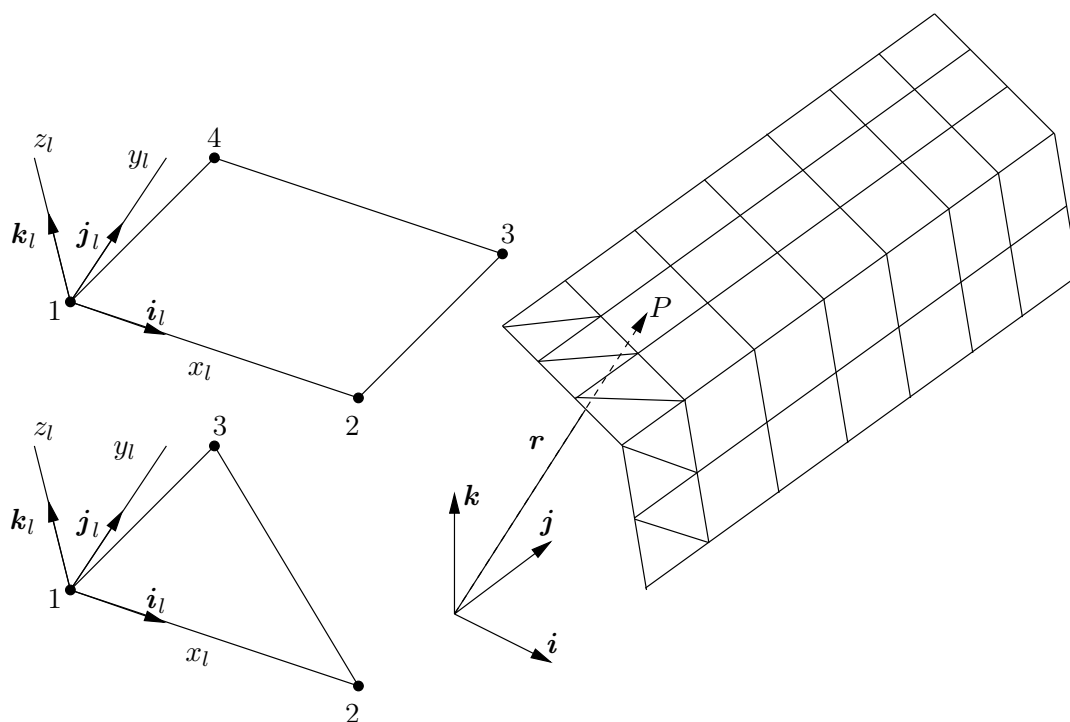
Jakamalla kuoren pinta tasomaisiin osiin, esim. kolmioihin tai nelikulmioihin, voidaan jakoa tihentämällä kuvata kaarevaa pintaa tarkemmin ja tarkemmin. Yksinkertainen kuorielementti saadaankin aikaiseksi yhdistämällä aiemmin esitellyt levy- ja laattaelementit tasokuorielementin omassa koordinaatistossa ja muuntamalla sitten näin syntynyt kuorielementti yhteiseen rakennekoordinaatistoon muunnosmatriisella, samaan tapaan kuin edellä tehtiin kehäsauvaelementille kaarien analysoinnissa.

Jaetaan tasokuori esim. kolmi- ja/tai nelisolmuisiin elementteihin. Kuoren keskipinnan mielivaltaisen pisteen  $P$  paikkavektori on

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (13.1)$$

missä  $\mathbf{i} \equiv \mathbf{i}_g$ ,  $\mathbf{j} \equiv \mathbf{j}_g$  ja  $\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}_g$  ovat globaalisen (rakennekohtaisen) koordinaatiston yksikkökantavektorit (indeksi  $g$  voidaan usein jättää pois). Määritellään paikallinen kantavektori  $\mathbf{i}_l$  sekä kolmi- että nelisolmuiselle elementille kaavalla

$$\mathbf{i}_l = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}, \quad (13.2)$$



**Kuva 13.1** Tasokuori, neli- ja kolmisolmuiset elementit

missä

$$\| \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \| = \sqrt{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)} \quad (13.3)$$

ja  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  ovat elementin solmujen 1 ja 2 paikkavektorit. Merkitsemällä kolmisolmuisen elementin tapauksessa

$$\mathbf{r}_{13} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 \quad (13.4)$$

määritellään paikallinen, tasoa vastaan kohtisuora yksikkövektori

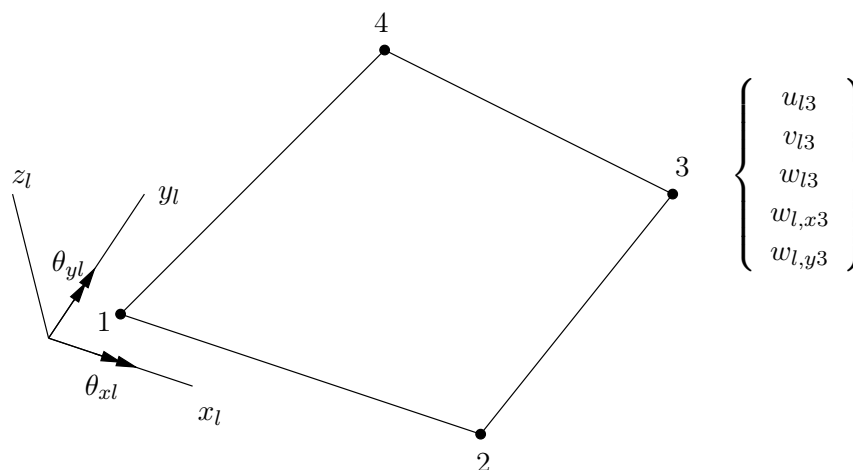
$$\mathbf{k}_l = \frac{\mathbf{i}_l \times \mathbf{r}_{13}}{\| \mathbf{i}_l \times \mathbf{r}_{13} \|}, \quad (13.5)$$

ja lopuksi määritetään paikallisen akselin  $y_l$  suuntainen yksikkövektori

$$\mathbf{j}_l = \mathbf{k}_l \times \mathbf{i}_l. \quad (13.6)$$

Paikallisessa koordinaatistossa  $(x_l, y_l, z_l)$  tasokuoren siirtymät ovat

$$\begin{aligned} u_l(x_l, y_l, z_l) &= u_c(x_l, y_l) + z_l \theta_{y_l}(x_l, y_l), \\ v_l(x_l, y_l, z_l) &= v_c(x_l, y_l) - z_l \theta_{x_l}(x_l, y_l), \\ w_l(x_l, y_l, z_l) &= w_c(x_l, y_l), \end{aligned} \quad (13.7)$$



**Kuva 13.2** Nelisolmuinen tasokuorielementti, pisteet 1, 2, 3 ja 4 samassa tasossa.

missä  $u_c$  ja  $v_c$  ovat kuoren keskipinnan siirtymät paikallisessa koordinaatistossa,  $\theta_{x_l}$  ja  $\theta_{y_l}$  ovat kiertymät paikallisten  $x_l$ - ja  $y_l$ -akseleiden ympäri. Ottamalla huomioon, että Kirchhoffin laattateoriassa poikittaiset leikkausmuodonmuutokset häviävät, eli

$$\gamma_{x_l z_l} = \gamma_{y_l z_l} = 0, \quad (13.8)$$

saadaan kiertymät paikallisten akselien ympäri eliminoitua kaavoilla

$$\theta_{y_l} = -w_{l,x_l}, \quad \theta_{x_l} = w_{l,y_l} \quad (13.9)$$

ja siirtymien kaavat muotoon

$$u_l = u_c - z_l w_{l,x_l}, \quad (13.10)$$

$$v_l = v_c - z_l w_{l,y_l}.$$

Muodonmuutokset ovat paikallisessa koordinaatistossa

$$\varepsilon_{x_l} = u_{l,x_l} - z_l w_{l,x_l x_l},$$

$$\varepsilon_{y_l} = v_{l,y_l} - z_l w_{l,y_l y_l}, \quad (13.11)$$

$$\gamma_{x_l y_l} = u_{l,y_l} + v_{l,x_l} - 2z_l w_{l,x_l y_l}.$$

Tasokuorielementin solmun  $i$  vapausasteet ovat

$$\mathbf{u}_{li}^{(e)} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_{li} \\ \mathbf{w}_{li} \end{array} \right\} \quad (13.12)$$



missä

$$\mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} u_l \\ v_l \end{Bmatrix}_i, \quad \mathbf{w}_i = \begin{Bmatrix} w_l \\ w_{l,x_l} \\ w_{l,y_l} \end{Bmatrix}_i \quad (13.13)$$

ovat levy- laattavapausasteet solmussa  $i$ . Jokaisessa solmussa on siten viisi vapausastetta. Järjestetään vapausasteet ensin (nelisolmuisen elementin tapauksessa) järjestykseen

$$\mathbf{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} u_{l1}^{(e)} & v_{l1}^{(e)} & \cdots & u_{l4}^{(e)} & v_{l4}^{(e)} & w_{l1}^{(e)} & w_{l,x_{l1}}^{(e)} & w_{l,y_{l1}}^{(e)} & \cdots & w_{l4}^{(e)} & w_{l,x_{l4}}^{(e)} & w_{l,y_{l4}}^{(e)} \end{bmatrix}^T. \quad (13.14)$$

Tasonsuuntaisilla kalvomuodonmuutoksilla ei ole kytkentää laatan käyrityksiin, ja elementin jäykkymatriisi voidaan kirjoittaa lohkomuodossa, kuten kehäsauvaelementin tapauksessa,

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m^{(e)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_b^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (13.15)$$

missä indeksit  $m$  ja  $b$  viittaavat kalvo- ja taivutustilan suureisiin, (kuten aiemmin kehäsauvaelementille), ja  $e$  on kyseisen elementin numero.

Otetaan uudelleen käyttöön kiertymävapausasteet  $\theta_{x_l}$  ja  $\theta_{y_l}$

$$\begin{Bmatrix} w_{l,x_l} \\ w_{l,y_l} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x_l} \\ \theta_{y_l} \end{Bmatrix}, \quad (13.16)$$

ja solmun kuudenneksi vapausasteeksi otetaan kiertymä akselin  $z_l$  ympäri,  $\theta_{z_l}$ . Huomataan, että solmuihin  $i$  ja  $j$  liittyvä tasokuorielementin lohko on edullista järjestää muotoon

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_b^{(e)})_{ij} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & (\mathbf{K}_m^{(e)})_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (13.17)$$

missä lohkon  $(\mathbf{K}_b^{(e)})_{ij}$  muunnos (13.16) on ajateltu tehdyksi.

Jos paikallisen koordinaatiston kantavektorit ovat  $\mathbf{i}_l, \mathbf{j}_l, \mathbf{k}_l$  ja globaalisen koordinaatiston kantavektorit puolestaan ovat  $\mathbf{i}_g, \mathbf{j}_g, \mathbf{k}_g$ , niin paikallisten kantavektoreiden komponentit globaalisten kantavektoreiden suunnille (suuntakosinit) ovat

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i}_l \cdot \mathbf{i}_g \\ \mathbf{i}_l \cdot \mathbf{j}_g \\ \mathbf{i}_l \cdot \mathbf{k}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{j}_l \cdot \mathbf{i}_g \\ \mathbf{j}_l \cdot \mathbf{j}_g \\ \mathbf{j}_l \cdot \mathbf{k}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{i}_g \\ \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{j}_g \\ \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{k}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix}. \quad (13.18)$$

Siirtymävektori  $\mathbf{u}$  paikallisessa ja globaalissa koordinaatistossa esitettynä on

$$\mathbf{u} = u_l \mathbf{i}_l + v_l \mathbf{j}_l + w_l \mathbf{k}_l \quad (13.19)$$

ja

$$\mathbf{u} = u_g \mathbf{i}_g + v_g \mathbf{j}_g + w_g \mathbf{k}_g. \quad (13.20)$$

Esimerkiksi komponentti  $u_l$  on

$$\begin{aligned} u_l &= (u_g \mathbf{i}_g + v_g \mathbf{j}_g + w_g \mathbf{k}_g) \cdot \mathbf{i}_l = \\ &= u_g(\mathbf{i}_l \cdot \mathbf{i}_g) + v_g(\mathbf{i}_l \cdot \mathbf{j}_g) + w_g(\mathbf{i}_l \cdot \mathbf{k}_g) \\ &= u_g l_1 + v_g m_1 + w_g n_1. \end{aligned} \quad (13.21)$$

Samalla tavalla johdetaan muut tarvittavat muunnoskaavat.

Paikallisen koordinaatiston ja globaalisen koordinaatiston vapausasteiden välillä ovat yhteydet

$$\begin{Bmatrix} u_l \\ v_l \\ w_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_g \\ v_g \\ w_g \end{Bmatrix} \quad (13.22)$$

ja

$$\begin{Bmatrix} \theta_{x_l} \\ \theta_{y_l} \\ \theta_{z_l} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x_g} \\ \theta_{y_g} \\ \theta_{z_g} \end{Bmatrix}. \quad (13.23)$$

Merkitään, että

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}. \quad (13.24)$$

Solmun  $i$  vapausasteiden muunnosmatriisi on

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_i \end{bmatrix}. \quad (13.25)$$

Yhden elementin osuus sisäisen virtuaalisen työn yhtälössä on

$$(\delta \mathbf{u}_l^{(e)})^T \mathbf{K}_l^{(e)} \mathbf{u}_l^{(e)} = (\delta \mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{K}_l^{(e)} \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = (\delta \mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (13.26)$$

ja elementin jäykkymatriisi lausuttuna globaalisen koordinaatiston suhteen on siten

$$\mathbf{K}^{(e)} \equiv \mathbf{K}_g^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{K}_l^{(e)} \mathbf{T}^{(e)}. \quad (13.27)$$

Elementin muunnosmatriisi koostuu solmujen muunnosmatriiseista. Esimerkiksi nelisolmuisen elementin tapauksessa koko elementin muunnosmatriisi on

$$\mathbf{T}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 \end{bmatrix}. \quad (13.28)$$

Solmuvapausasteita

$$\mathbf{u}_{li}^{(e)} = [u_l \ v_l \ w_l \ \theta_{x_l} \ \theta_{y_l} \ \theta_{z_l}]_i^T \quad (13.29)$$

vastaava paikallisen koordinaatiston solmun  $i$  kuormavektori on

$$\bar{\mathbf{f}}_{li}^{(e)} = \left[ \bar{f}_{u_i} \quad \bar{f}_{v_i} \quad \bar{f}_{w_i} \quad \bar{f}_{\theta_{x_i}} \quad \bar{f}_{\theta_{y_i}} \quad \bar{f}_{\theta_{z_i}} \right]_i^T. \quad (13.30)$$

Paikallisen koordinaatiston suhteen lausuttu ulkoisen virtuaalisen työn termi on

$$(\delta \mathbf{u}_{li}^{(e)})^T \bar{\mathbf{f}}_{li}^{(e)} = (\delta \mathbf{u}_{gi}^{(e)})^T \mathbf{T}_i^{(e)T} \bar{\mathbf{f}}_{li}^{(e)} = (\delta \mathbf{u}_{gi}^{(e)})^T \bar{\mathbf{f}}_{gi}^{(e)}, \quad (13.31)$$

joten

$$\bar{\mathbf{f}}_i^{(e)} \equiv \bar{\mathbf{f}}_{gi}^{(e)} = \mathbf{T}_i^{(e)T} \bar{\mathbf{f}}_{li}^{(e)} \quad (13.32)$$

ja elementin koko kuormavektorin muunnos on

$$\bar{\mathbf{f}}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)T} \bar{\mathbf{f}}_l^{(e)}. \quad (13.33)$$

Jos usempi tasokuorielementti on samassa tasossa, niin rakenteen jäykkyyismatriisista tulee singulaarinen. Tämä voidaan estää lisäämällä vapausastetta  $\theta_{z_l}$  vastaavaan kohtaan jäykkyyismatriisin diagonaalille pieni luku, joka on riittävän suuri estämään singulaarisuuden, mutta ei vaikuta haitallisesti tuloksiin. Pienen luvun lisääminen diagonaalille tarkoittaa ko. kiertymävapausasteen kiinnittämistä jousella ympäröivään maailmaan. Rationaalisempi tapa on käyttää kuorielementin osana levyelementtiä, jossa on valmiina paikallisen akseliston normaalikiertymä  $\theta_{z_l}$ , (engl. drilling degree of freedom).

## 13.2 Kaareva, isoparametrinen kuorielementti

### 13.2.1 Kuorielementin geometriset suureet

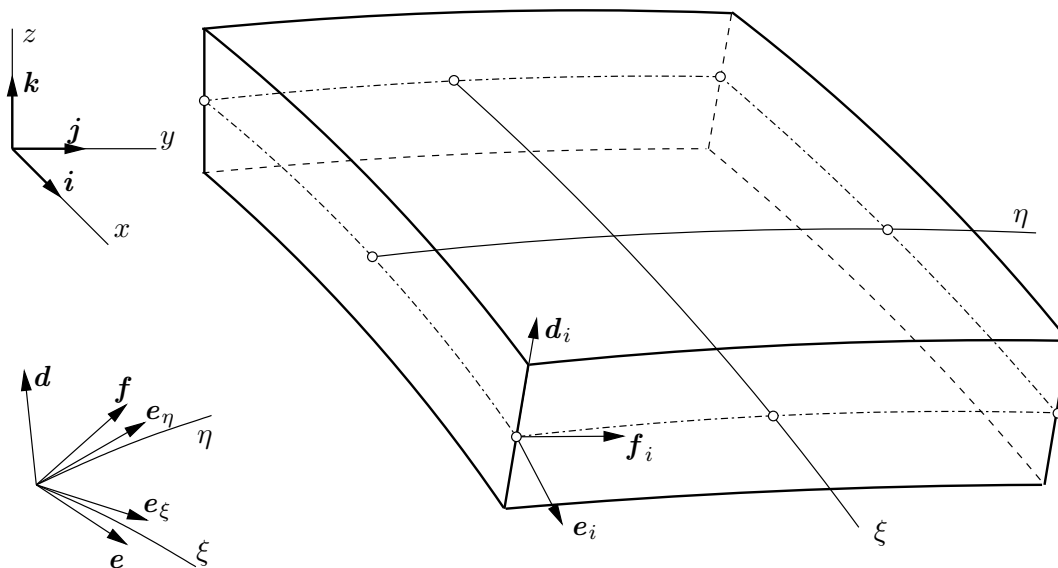
Tarkastellaan yleistä, mielivaltaisen muotoista ohutta kuorta kolmiulotteisessa avaruudessa  $\mathbb{R}^3$ . Kuoren mielivaltaisen pisteen  $P$  paikkavektori suorakulmaisessa koordinaatistossa  $(x, y, z)$  on

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{x}_m(\xi, \eta) + \zeta \mathbf{d}(\xi, \eta), \quad (13.34)$$

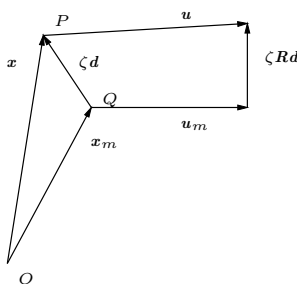
missä  $\xi, \eta \in [-1, 1]$  ovat käyräviivaiset koordinaatit, joiden avulla parametrisoidaan kuoren keskipinta,  $(\xi, \eta) \in \mathcal{M}$ , kuoren paksuuden suunnassa koordinaatti  $z_l = \zeta t \in \mathcal{H} = [-\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t]$ ,  $t = t(\xi, \eta)$  on kuoren paksuus,  $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}(\xi, \eta, 0)$  on kuoren keskipinnalla olevan pisteen  $Q$  paikkavektori, jonka päätepiste on samalla  $\zeta$ -viivalla kuin käsiteltävän, mielivaltaisen pisteen  $P$  paikkavektorin päätepiste,  $\mathbf{d}$  on suunta-vektori, jonka pituus on yksi eli  $\|\mathbf{d}\| = 1$ .

Suorakulmaisen peruskoordinaatiston yksikkökantavektorit ovat  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$ , ja paikkavektori  $\mathbf{x}$  voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (13.35)$$



Kuva 13.3 Isoparametrinen kuorielementti.



Kuva 13.4 Siirtymävektori.

matriisimerkinnöin

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (13.36)$$

Määritellään kuoren keskipinnan tangenttitasossa keskenään ortogonaaliset vektorit  $\mathbf{e}$  ja  $\mathbf{f}$ , jotka ovat kohtisuorassa vektoria  $\mathbf{d}$  vastaan. Vektorikolmikon  $[\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{d}]$  konstruointia käsitellään myöhemmin.

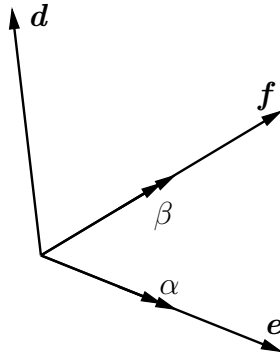
Kuoren mielivaltaisen pisteen  $P$  siirtymävektori  $\mathbf{u}$  voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{u}_m(\xi, \eta) + \zeta \mathbf{R}(\xi, \eta) \mathbf{d}(\xi, \eta), \quad (13.37)$$

missä  $\mathbf{u}_m$  on kuoren keskipinnan vastaavan pisteen  $Q$  siirtymä ja  $\mathbf{R}$  on vektorin  $\mathbf{d}$  rotaatiota esittävä matriisi, kuva 13.4.

Pienten rotaatioiden tapauksessa lineaarisessa kuoriteoriassa kaava (13.37) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_m + \zeta(-\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{e}), \quad (13.38)$$



**Kuva 13.5** Rotaatiot  $\alpha$  ja  $\beta$  paikallisten akseleiden ympäri.

missä  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat kiertymät paikallisten kantavektoreiden  $\mathbf{e}$  ja  $\mathbf{f}$  ympäri, kuva 13.5, ja otaksutaan, että rotaatio vektorin  $\mathbf{d}$  ympäri on nolla.

Koordinaattiviivojen  $\xi$ ,  $\eta$  ja  $\zeta$  tangentialvektorit ovat

$$\mathbf{g}_\xi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}, \quad \mathbf{g}_\eta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta}, \quad \mathbf{g}_\zeta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta}, \quad (13.39)$$

Käyräviivaisen koordinaatiston kantavektorit etäisyydellä  $\zeta$  kuoren keskipinnalta ovat

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\xi &= \mathbf{x}_{,\xi} = \mathbf{x}_{m,\xi} + \zeta \mathbf{d}_{,\xi}, \\ \mathbf{g}_\eta &= \mathbf{x}_{,\eta} = \mathbf{x}_{m,\eta} + \zeta \mathbf{d}_{,\eta}, \\ \mathbf{g}_\zeta &= \mathbf{x}_{,\zeta} = \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (13.40)$$

Kuoren keskipinnalla  $\mathcal{M}$ , ( $\zeta = 0$ ), kantavektorit ovat

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\xi(\xi, \eta) &= \mathbf{g}_\xi(\xi, \eta, 0), \\ \mathbf{a}_\eta(\xi, \eta) &= \mathbf{g}_\eta(\xi, \eta, 0). \end{aligned} \quad (13.41)$$

Paikallinen suorakulmainen koordinaatisto pinnalla  $\zeta = \text{vakio}$  voidaan muodostaa vektoreiden  $\mathbf{g}_\xi$ ,  $\mathbf{g}_\eta$  ja  $\mathbf{g}_\zeta$  avulla. Ohuen kuoren tapauksessa voidaan jännitysten laskentaan käyttää kuoren keskipinnalla paikallista koordinaatistoa, joka voidaan tehdä esim. seuraavalla tavalla. Muodostetaan ensin yksikkövektorit (integrointipisteessä)

$$\mathbf{e}_\xi = \frac{\mathbf{a}_\xi}{\|\mathbf{a}_\xi\|}, \quad \mathbf{e}_\eta = \frac{\mathbf{a}_\eta}{\|\mathbf{a}_\eta\|}. \quad (13.42)$$

Keskipintaa vastaan kohtisuora yksikkövektori  $\mathbf{d}$  voidaan määrittellä kaavalla

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta}{\|\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta\|}. \quad (13.43)$$

Määritellään edelleen apuvektorit

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\eta}{\|\mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\eta\|}, \quad \mathbf{q} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{d}}{\|\mathbf{p} \times \mathbf{d}\|}, \quad (13.44)$$

ja niiden avulla muodostetaan paikallisen koordinaatiston referenssitason suuntaiset, vektoria  $\mathbf{d}$  vastaan kohtisuorat yksikkökantavektorit

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{q}}{\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|}, \quad \mathbf{f} = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{q}}{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|}. \quad (13.45)$$

Näin saadaan koordinaatisto, jonka kantavektorit keskipinnalla  $\zeta = 0$  ovat lähinnä vektoreita  $\mathbf{e}_\xi$  ja  $\mathbf{e}_\eta$ .

Elementin solmupisteessä  $i$  lähtötietona tunnetaan (tai voidaan laskea elementin ala- ja yläpinnan kahden solmupisteen avulla) vektori  $\mathbf{d}_i$ . Vektoria  $\mathbf{d}_i$  vastaan kohtisuora vektori,  $(x, z)$ -tason suunnassa, on

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{d}_i}{\|\mathbf{j} \times \mathbf{d}_i\|}, \quad (13.46)$$

tai jos  $\mathbf{d}_i$  on sattumalta vektorin  $\mathbf{j}$  suuntainen, niin

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{d}_i \times \mathbf{i}}{\|\mathbf{d}_i \times \mathbf{i}\|}, \quad (13.47)$$

$\mathbf{i}$  ja  $\mathbf{j}$  ovat globaalin koordinaatiston kaksi kantavektoria. Lopuksi kolmas kantavektori solmussa  $i$  lasketaan kaavalla

$$\mathbf{f}_i = \frac{\mathbf{d}_i \times \mathbf{e}_i}{\|\mathbf{d}_i \times \mathbf{e}_i\|}. \quad (13.48)$$

### 13.2.2 Siirtymien interpolointi

Isoparametrisen kaarevan kuorielementin geometria voidaan määrittää kaavalla

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi, \eta) \mathbf{x}_{mi} + \frac{1}{2} \zeta t_i N_i(\xi, \eta) \mathbf{d}_i] \quad (13.49)$$

missä  $N_i(\xi, \eta)$  ovat muotofunktiot, vektorin  $\mathbf{x}_i \equiv \mathbf{x}_{mi}$  komponentit  $(x_i, y_i, z_i)$  ovat solmujen  $i = 1, \dots, n$  koordinaatit,  $t_i$  on elementin paksuus solmun  $i$  kohdalla. Mitta  $t_i$  ei kuitenkaan välttämättä ole todellinen paksuus. Vektorin  $\mathbf{d}$  komponentit globaalin kannan suhteen ovat

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix}. \quad (13.50)$$

Siirtymiä  $u, v, w$  interpoloidaan samalla tavalla kuin geometriaa kaavalla

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi, \eta) \mathbf{u}_{mi} + \frac{1}{2} \zeta t_i N_i(\xi, \eta) (-\alpha \mathbf{f}_i + \beta \mathbf{e}_i)], \quad (13.51)$$

missä solmupisteen  $i$  siirtymävektorin  $\mathbf{u}_i \equiv \mathbf{u}_{mi}$  komponentit ovat  $(u_i, v_i, w_i)$  ja vektoreiden  $\mathbf{e}$  ja  $\mathbf{f}$  komponentit ovat

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix}. \quad (13.52)$$

### 13.2.3 Kuoren muodonmuutokset

Globaalissa koordinaatistossa  $(x, y, z)$  lausutut muodonmuutokset ovat venymät

$$\varepsilon_x = u_{,x}, \quad \varepsilon_y = v_{,y}, \quad \varepsilon_z = w_{,z} \quad (13.53)$$

ja leikkausmuodonmuutokset

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}, \quad \gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y}, \quad \gamma_{xz} = u_{,z} + w_{,x}. \quad (13.54)$$

Derivaatat koordinaattien  $x, y$  ja  $z$  suhteen voidaan määrittää derivoinnin ketjusäännön avulla. Siirtymäkomponentin  $u(\xi, \eta, \zeta)$  derivaatat käyräviivaisten koordinaattien  $\xi, \eta$  ja  $\zeta$  suhteen ovat

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (13.55)$$

missä

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (13.56)$$

ja  $\mathbf{J}$  on kuvauksen  $(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow (x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta))$  Jacobin matriisi.

Matriisin  $\mathbf{J}^T$  käänteismatriisi on, kuten 3D-isoparametrisen elementin tapauksessa,

$$\mathbf{J}^{-T} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta} & -y_{,\xi} z_{,\zeta} - z_{,\xi} y_{,\zeta} & y_{,\xi} z_{,\eta} - z_{,\xi} y_{,\eta} \\ -x_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} x_{,\zeta} & x_{,\xi} z_{,\zeta} - z_{,\xi} x_{,\zeta} & -y_{,\xi} z_{,\eta} - z_{,\xi} y_{,\eta} \\ x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta} & -x_{,\xi} y_{,\zeta} - y_{,\xi} x_{,\zeta} & x_{,\xi} y_{,\eta} - y_{,\xi} x_{,\eta} \end{bmatrix}, \quad (13.57)$$

missä

$$\det \mathbf{J} = \det \mathbf{J}^T = x_{,\xi}(y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta}) - y_{,\xi}(x_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} x_{,\zeta}) + z_{,\xi}(x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta}) \quad (13.58)$$

on Jakobin matriisin determinantti ja globaalisten, karteestisten koordinaattien derivaatat luonnollisten koordinaattien suhteen ovat

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} [x_i + \frac{1}{2}t_i\zeta l_3], & x_{,\eta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} [x_i + \frac{1}{2}t_i\zeta l_3], & x_{,\zeta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\zeta} [x_i + \frac{1}{2}t_i\zeta l_3], \\ y_{,\xi} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} [y_i + \frac{1}{2}t_i\zeta m_3], & y_{,\eta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} [y_i + \frac{1}{2}t_i\zeta m_3], & y_{,\zeta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\zeta} [y_i + \frac{1}{2}t_i\zeta m_3], \\ z_{,\xi} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} [z_i + \frac{1}{2}t_i\zeta n_3], & z_{,\eta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} [z_i + \frac{1}{2}t_i\zeta n_3], & z_{,\zeta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\zeta} [z_i + \frac{1}{2}t_i\zeta n_3]. \end{aligned} \quad (13.59)$$

Merkitään

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}^{-T}, \quad (13.60)$$

jolloin

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (13.61)$$

Matriisin  $\mathbf{H}$  komponenttien avulla lausutaan muotofunktioiden derivaatat

$$\begin{aligned} N_{i,x} &= H_{11}N_{i,\xi} + H_{12}N_{i,\eta}, \\ N_{i,y} &= H_{21}N_{i,\xi} + H_{22}N_{i,\eta}, \\ N_{i,z} &= H_{31}N_{i,\xi} + H_{32}N_{i,\eta} \end{aligned} \quad (13.62)$$

ja derivaatat

$$\zeta_{,x} = H_{13}, \quad \zeta_{,y} = H_{23}, \quad \zeta_{,z} = H_{33}. \quad (13.63)$$

Globaalissa koordinaatistossa  $(x, y, z)$  lausutut virtuaaliset muodonmuutokset ovat

$$\delta \varepsilon_x = \delta u_{,x}, \quad \delta \varepsilon_y = \delta v_{,y}, \quad \delta \varepsilon_z = \delta w_{,z}, \quad (13.64)$$

$$\delta \gamma_{xy} = \delta u_{,y} + \delta v_{,x}, \quad \delta \gamma_{yz} = \delta v_{,z} + \delta w_{,y}, \quad \delta \gamma_{xz} = \delta u_{,z} + \delta w_{,x}. \quad (13.65)$$

Elementin kinemaattiset yhtälöt ovat

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B} \delta \mathbf{u}^{(e)} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \delta \mathbf{u}_i^{(e)}, \end{aligned} \quad (13.66)$$

missä solmuun  $i$  liittyvä  $\mathbf{B}$ -matriisin lohko on

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_{1i} + \zeta \mathbf{B}_{2i}, \quad (13.67)$$



$$\mathbf{B}_{1i} = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i N_i H_{13} l_2 & \frac{1}{2}t_i N_i H_{13} l_1 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & -\frac{1}{2}t_i N_i H_{23} m_2 & \frac{1}{2}t_i N_i H_{23} m_1 \\ 0 & 0 & N_{i,z} & -\frac{1}{2}t_i N_i H_{33} n_2 & \frac{1}{2}t_i N_i H_{33} n_1 \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & -\frac{1}{2}t_i N_i (H_{23} l_2 + H_{13} m_2) & \frac{1}{2}t_i N_i (H_{23} l_1 + H_{13} m_1) \\ 0 & N_{i,z} & N_{i,y} & -\frac{1}{2}t_i N_i (H_{33} m_2 + H_{23} n_2) & \frac{1}{2}t_i N_i (H_{33} m_1 + H_{23} n_1) \\ N_{i,z} & 0 & N_{i,x} & -\frac{1}{2}t_i N_i (H_{33} l_2 + H_{13} n_2) & \frac{1}{2}t_i N_i (H_{33} l_1 + H_{13} n_1) \end{bmatrix} \quad (13.68)$$

ja

$$\mathbf{B}_{2i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i N_{i,x} l_2 & \frac{1}{2}t_i N_{i,x} l_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i N_{i,y} m_2 & \frac{1}{2}t_i N_{i,y} m_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i N_{i,z} n_2 & \frac{1}{2}t_i N_{i,z} n_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i (N_{i,y} l_2 + N_{i,x} m_2) & \frac{1}{2}t_i (N_{i,y} l_1 + N_{i,x} m_1) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i (N_{i,z} m_2 + N_{i,y} n_2) & \frac{1}{2}t_i (N_{i,z} m_1 + N_{i,y} n_1) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}t_i (N_{i,z} l_2 + N_{i,x} n_2) & \frac{1}{2}t_i (N_{i,z} l_1 + N_{i,x} n_1) \end{bmatrix}. \quad (13.69)$$

Elementin jäykkyysoatriisi on

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta. \quad (13.70)$$

Integraali koordinaatin  $\zeta$  suhteen voidaan nyt laskea eksplisiittisesti ohuen kuoren tapauksessa sijoittamalla

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_{1i} + \zeta \mathbf{B}_{2i} \quad (13.71)$$

ja

$$\det \mathbf{J} \approx t |\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}| d\xi d\eta. \quad (13.72)$$

Elementin jäykkyysoatriisin kaavassa  $\mathbf{D}$  on materiaalin jäykkyysoatriisi globaalissa koordinaatistossa. Jännitysten ja muodonmuutosten välinen yhteys määritetään kuitenkin integrointipisteen paikallisessa koordinaatistossa  $(x_l, y_l, z_l)$ . Kimmoisen aineen tapauksessa materiaalin jäykkyysoatriisi on paikallisessa koordinaatistossa

$$\mathbf{D}_l = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \frac{1 - \nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (13.73)$$

jossa on otettu huomioon, että kuoren jännitys ja muodonmuutos akselin  $z_l$  suunnassa ovat nollia ja  $k$  on leikkauskerroin, jonka arvoksi homogeeniselle poik-

kileikkaukselle voidaan ottaa  $k = \frac{6}{5}$ . Paikallisen koordinaatiston ja globaalisen koordinaatiston väliset muodonmuutosten ja jännitysten muunnoskaavat ovat

$$\boldsymbol{\varepsilon}_l = \mathbf{T}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\sigma}_l = \mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_\varepsilon^{-T} \boldsymbol{\sigma}, \quad (13.74)$$

missä muunnosmatriisi

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & l_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & l_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & l_3 n_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + m_1 l_2 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + m_2 l_3 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + m_3 l_1 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \quad (13.75)$$

ja  $l_i$ ,  $m_i$  ja  $n_i$  ovat vektoreiden  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$  suuntakosinit, (sisätulot) paikallisten kantavektoreiden  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{f}$  ja  $\mathbf{d}$  suhteen (integrointipisteessä).

Koska  $\boldsymbol{\sigma}_l^T \boldsymbol{\varepsilon}_l = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}$  on invariantti, saadaan yhteys

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_l^T \mathbf{D}_l \boldsymbol{\varepsilon}_l = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{T}_\varepsilon^T \mathbf{D}_l \mathbf{T}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (13.76)$$

joten

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}_\varepsilon^T \mathbf{D}_l \mathbf{T}_\varepsilon \quad (13.77)$$

on materiaalin jäykkyysmatriisi globaalisen koordinaatiston suhteen sijoitettavaksi elementin jäykkyysmatriisiin.

Samalla tavalla kuin tasokuorielementin tapauksessa edellä voidaan isoparametrisen kuorielementin vapausasteeksi ottaa kiertymä,  $\gamma$ , solmupisteen  $i$  paikallisen kantavektorin  $\mathbf{d}_i$  ympäri. Paikallisen ja globaalisen koordinaatiston kiertymien väliset yhteydet ovat

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}, \quad (13.78)$$

missä muunnosmatriisi (solmun  $i$ ) kiertymille on

$$\mathbf{Q}_i = [ \mathbf{e}_i \quad \mathbf{f}_i \quad \mathbf{d}_i ]^T. \quad (13.79)$$

Solmun  $i$  vapausasteiden muunnosmatriisi on

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_i \end{bmatrix}. \quad (13.80)$$

Paikallisessa koordinaatistossa on jälleen lisättävä lavennetun jäykkyysmatriisin diagonaalille pieni luku vapausasteen  $\gamma$  kohdalle estämään jäykkyysmatriisin singulariteetti.



# Luku 14

## Derivaattasuureiden laskennasta

Elementtimenetelmässä, jossa primäärisuuretta interpoloidaan paloittain jatkuvilla funktioilla, on tästä laskettu derivaatta epäjatkuva. Esimerkiksi virtuaalisen työn periaatteesta johdettujen elementtimenetelmäformulaatioiden jännitysten lausekkeet ovat epäjatkuvia siirryttäessä elementtien rajapintojen yli. Jännitysten arvot ovat myös epätarkempia kuin siirtymäsuureet, sillä ne saadaan materiaalilain avulla muodonmuutoksista, jotka on saatu derivoimalla siirtymiä.

Tarkimmillaan derivaattasuureiden arvot ovat usein integroimispisteissä, ja haluttaessa laskea niiden arvoja solmupisteissä voidaan menetellä seuraavin tavoin:

1. Lasketaan primäärisuureen interpolaatiosta derivaattasuureiden arvot solmuissa ja niistä tarvittavat suuret kuten jännitykset, jotka keskiarvoistetaan solmuun liittyvien elementtien pinta-alojen suhteessa.
2. Ekstrapoloidaan jännitysten arvot integrointipisteistä käyttäen hyväksi sopivaa interpolaatiofunktioita ja suoritetaan keskiarvoistus.
3. Otaksutaan jännityskomponenteille *jatkuva* interpolaatio käyttäen samoja interpolaatiofunktioita kuin siirtymille ja määritetään jännitysten solmupistearvot pienimmän neliön keinolla.

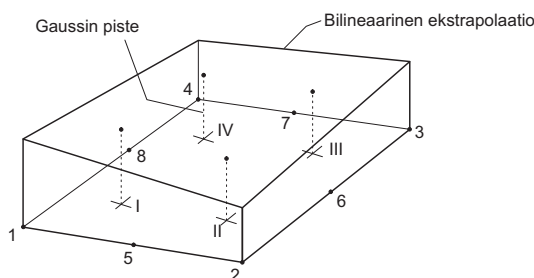
Ensimmäisen kohdan strategia ei kaivanne lisäselvityksiä.

Esitetään seuraavaksi siirtymämenetelmään perustuvan elementtimenetelmän jännityssuureiden laskentamahdollisuuksia, erityisesti jälkikäsitteilyä silmälläpitäen.

### 14.1 Ekstrapolaatio

Oletetaan, että jännityssuure  $Q$  on määritetty bilineaarisen elementin Gaussin-Legendren  $2 \times 2$  integrointipisteissä, I, II, III ja IV. Merkitään haluttuja solmupistearvoja  $Q_1, \dots, Q_4$ . Gaussin-Legendren  $2 \times 2$ -menetelmän pisteiden koordinaatit ovat

$$\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \eta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (14.1)$$



Kuva 14.1 Ekstrapolaatio solmuihin.

jotka on esitetty kuvassa 14.1. Otaksumalla nyt jännitykselle bilineaarinen interpolaatio elementin alueella, saadaan solmupistearvot yhtälöstä

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} & (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} & (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) \\ (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} & (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) & -\frac{1}{2} & (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_I \\ Q_{II} \\ Q_{III} \\ Q_{IV} \end{pmatrix}. \quad (14.2)$$

## 14.2 Pienimmän neliön keino

Olkoon elementtimenetelmän antama ratkaisu siirtymäsuureille  $\mathbf{u}_h$  ja niistä lasketut jännitykset  $\boldsymbol{\sigma}_h$ . Paranneltulle jatkuvalle jännitys jakaumalle käytetään merkintää

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \mathbf{N}\mathbf{s}, \quad (14.3)$$

missä matriisi  $\mathbf{N}$  sisältää interpolaatiofunktiot ja  $\mathbf{s}$  jännitysten solmupistearvot. Uusi jännitys jakauma sovitetaan elementtimenetelmän antamaan “raakajännitykseen” pienimmän neliön keinolla

$$\min_{\mathbf{s}} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_c - \boldsymbol{\sigma}_h)^2 d\Omega, \quad (14.4)$$

josta solmupistejännitysten suhteen derivoimalla saadaan ratkaisuyhtälöksi

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\mathbf{N}\mathbf{s} - \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega = 0. \quad (14.5)$$

Tämä yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{M}\mathbf{s} = \mathbf{b} \quad (14.6)$$

missä kerroinmatriisi  $\mathbf{M}$  ja vektori  $\mathbf{b}$  kootaan elementtiosuuksista

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad \mathbf{b}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma}_h d\Omega. \quad (14.7)$$

Tällä tavoin voidaan jännitysten tarkkuutta hieman parantaa, mutta jännitysten suppenemisnopeuteen sillä ei ole vaikutusta, (katso lukua 8), ainoastaan virhekerroin  $C$  pienenee. Jännitysten tasoitusta ei saa suorittaa rajapinnoilla joissa materiaaliominaisuudet hyppäyksenomaisesti muuttuvat. Tällöin tasoitus on suoritettava osa-alueittain.

**Esimerkki 14.1** *Olkoon ratkaistavana lämmönjohtumisyhtälö*

$$-ku'' = \bar{f}, \quad u(0) = u(L) = 0, \quad \bar{f}(x) = 4f_0 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right). \quad (14.8)$$

*Käyttäen symmetriaa hyväksi ratkaise tehtävä elementtimenetelmällä käyttäen kahta lineaarisesti interpoloitua elementtiä ratkaisualan puolikkaalle. Laske saadusta ratkaisusta lämpövuoto*

$$q_h = -ku'_h. \quad (14.9)$$

*Jälkikäsittele tätä lämpövuon lauseketta otaksumalla parannetulle lämpövuon lausekkeelle  $C_0$ -jatkuva lauseke, eli otaksumalla, että lämpövuoto on esitettävissä kunkin elementin alueella samoilla interpolaatiofunktioilla kuin itse lämpötila-*

$$q_c^{(e)} = N_1(\xi)q_{c1} + N_2(\xi)q_{c2}. \quad (14.10)$$

Diskretoitaessa elementtimenetelmällä puolet alueesta reunaehdot ovat

$$u(0) = 0 \quad \text{ja} \quad q(L/2) = 0. \quad (14.11)$$

Elementtimatriisi on

$$K_{ij}^{(e)} = k \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx = \frac{2k}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} d\xi. \quad (14.12)$$

Käytettäessä lineaarisia elementtejä, yhtälöryhmäksi saadaan

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_2^{(1)} + \bar{f}_1^{(2)} \\ \bar{f}_2^{(2)} \end{Bmatrix}. \quad (14.13)$$

Lasketaan kuormitustermit

$$\bar{f}_i^{(e)} = \frac{1}{2}h^{(e)} \int_{-1}^1 \bar{f}(\xi)N_i(\xi)d\xi, \quad (14.14)$$

jotka ovat:

$$\begin{aligned} \bar{f}_2^{(1)} &= \frac{1}{2}h^{(e)} \int_{-1}^1 4f_0 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{1}{2}(1 + \xi)d\xi \quad \left(\frac{x}{L} = \frac{x_c^{(e)}}{L} + \frac{h^{(e)}}{2L}\xi\right) \\ &= \frac{1}{256}f_0L \int_{-1}^1 (1 + \xi)^2(7 - \xi)d\xi = \frac{13}{192}f_0L, \end{aligned} \quad (14.15)$$

$$\bar{f}_1^{(2)} = \frac{1}{256}f_0L \int_{-1}^1 (3 + \xi)(5 - \xi)(1 - \xi)d\xi = \frac{21}{192}f_0L, \quad (14.16)$$

$$\bar{f}_2^{(2)} = \frac{23}{192}f_0L. \quad (14.17)$$

Yhtälöryhmäksi saadaan siten

$$\frac{4k}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{192} \begin{Bmatrix} 34 \\ 23 \end{Bmatrix}, \quad (14.18)$$

jonka ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 57 \\ 80 \end{Bmatrix} \frac{f_0 L^2}{768k}. \quad (14.19)$$

Käytettäessä lineaarisia elementtejä lämpövuon vakio elementin alueella, ja sille saadaan lauseke

$$q^{(e)} = -ku' = -k \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{h^{(e)}} = \frac{4k}{L} (u_1^{(e)} - u_2^{(e)}). \quad (14.20)$$

Saadaan arvot

$$q^{(1)} = -\frac{57}{192} f_0 L, \quad q^{(2)} = -\frac{23}{192} f_0 L. \quad (14.21)$$

Lämpövuon jälkikäsitteilyä varten muodostetaan matriisi  $\mathbf{M}$ , joka koostuu elementtimatriiseista

$$M_{ij}^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} N_i N_j dx = \frac{1}{2} h^{(e)} \int_{-1}^1 N_i N_j d\xi. \quad (14.22)$$

Lineaarisen elementin tapauksessa se on muotoa

$$\mathbf{M}^{(e)} = \frac{h^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (14.23)$$

Nyt voidaan lämpövuolle antaa reunaehto alueen keskellä, joten ratkaistavaksi jää kaksi suuretta eli lämpövuon arvot solmuissa 1 ja 2. Oikean puolen vakiovektorin  $\mathbf{b}$ , joka koostuu elementtiosuuksista

$$b_i^{(e)} = \frac{1}{2} h^{(e)} \int_{-1}^1 N_i(\xi) q^{(e)} d\xi, \quad (14.24)$$

termit ovat

$$b_1 = b_1^{(1)}, \quad (14.25)$$

$$b_2 = b_2^{(1)} + b_1^{(2)}, \quad (14.26)$$

missä

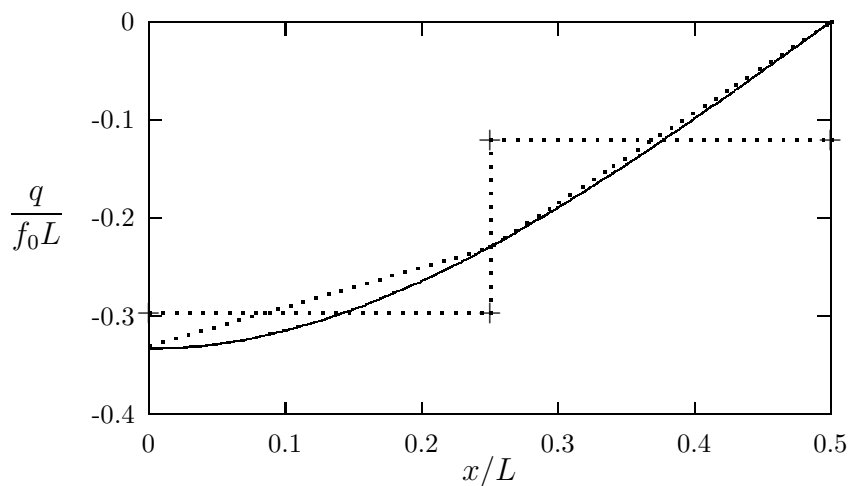
$$b_1^{(1)} = \frac{L}{8} \int_{-1}^1 \left(-\frac{57}{192} f_0 L\right) \frac{1}{2} (1 - \xi) d\xi = -\frac{57}{1536} f_0 L^2, \quad (14.27)$$

$$b_2^{(1)} = b_1^{(1)}, \quad (14.28)$$

$$b_1^{(2)} = -\frac{23}{1536} f_0 L^2. \quad (14.29)$$

Ratkaistava yhtälöryhmä on

$$\frac{L}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{c1} \\ q_{c2} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 57 \\ 80 \end{Bmatrix} \frac{f_0 L^2}{1536}, \quad (14.30)$$



**Kuva 14.2** Lämpövuon ehyt viiva analyttinen ratkaisu ja katkoviivat elementtimenetelmätulokset.

ja sen ratkaisuksi saadaan

$$\begin{Bmatrix} q_{c1} \\ q_{c2} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 148 \\ 103 \end{Bmatrix} \frac{f_0L}{796}. \quad (14.31)$$

Kuvaan 14.2 on piirretty lämpövuon analyttinen lauseke sekä suoraan elementti-interpolaatiosta laskettu että jälkikäsitelty jatkuva lämpövuon arvo.

Analyttinen ratkaisu lämpötilalle on

$$u(x) = \frac{f_0L^2}{3k} \frac{x}{L} \left[ \left(\frac{x}{L}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1 \right], \quad (14.32)$$

josta saadaan lämpövuon kaavalla  $q = -ku'$ .

### 14.2.1 Harjoitustehtäviä

1. Johda yhtälö (14.2).
2. Mieti miten suoritetaan bikvadraattisen tai supistetun bikvadraattiseen (Serendip) elementin ekstrapolaatio solmuihin.
3. Ratkaise esimerkin 14.1 jälkikäsitelty lämpövuon jakauma otaksumatta ehtoa  $q(L/2) = 0$ . Määritä lämpövuon neliövirhe kummassakin tapauksessa. Kumpi menettely antaa ko. normin mielessä paremman tuloksen?





# Luku 15

## Sekaelementtimenetelmät

### 15.1 Johdanto

Sekaelementtimenetelmät muodostavat laajan ryhmän erilaisia epätavallisia elementtimenetelmäformulaatioita. Niiden käytöllä on joukko syitä, jotka voidaan karkeasti jakaa kolmeen ryhmään. Ehkä kaikkein tärkein syy on se, että sekaelementtimenetelmät mahdollistavat rajoiteyhtälöiden luontevan käsittelyn. Esimerkiksi kokoonpuristumattoman aineen, kiinteän tai nesteen, mallinnus ei onnistu tavanomaisella siirtymä-/nopeusformulaatiolla.

Toinen syy on tiettyjen standardiformulaatioissa primäärisuureista derivoimalla laskettujen suureiden fysikaalisessa merkittävyudessa. Elastisuusprobleemissa jännitykset ovat usein tärkeämpiä suureita kuin siirtymät, jotka tavanomaisessa siirtymämenetelmässä ovat kuitenkin astetta tarkempia kuin jännitykset. Lämmönjohtumistehtävässä usein lämpövuoto on tärkeämpi suure kuin itse lämpötila. Täten menetelmä, jossa nämä jännityssuureet olisivat "suoraan" saatavilla saattaisi olla mielekkäämpi.

Kolmas syy liittyy vaikeuteen muodostaa interpolaatiofunktioita joilta vaaditaan derivaattojen jatkuvuutta. Esimerkiksi Kirchhoffin laattamallissa  $C_1$ -jatkuvien funktioiden konstruointi kolmio tai yleiselle nelikulmioelementille on hankalaa ja johtaa epätoivottuihin vapausasteisiin. Sekaelementtimenetelmässä jatkuvuusvaatimuksia voidaan lieventää muuntamalla korkea-asteisia derivaattoja sisältävät yhtälöt matalampiasteiseksi systeemiksi.

### 15.2 Yksinkertainen esimerkkiongelmia

#### 15.2.1 Symmetrisen heikon muodon johto

Tarkastellaan seuraavassa aksiaalisesti kuormitetun sauvan ongelmaa (analogisesti lämmönjohtumisongelmaa). Sauvan tasapainoyhtälö on aksiaalisen siirtymän  $u$  avulla lausuttuna toisen kertaluvun skalaarinen differentiaaliyhtälö:

$$-(EAu')' = \bar{f}. \quad (15.1)$$

Otaksutaan reunaehtotapaus

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, \\ N(L) &= EAu'(L) = \bar{N}_L. \end{aligned} \quad (15.2)$$

Sekaelementtimenetelmäformulaatiota varten muodostetaan toisen kertaluvun yhtälöstä normaalivoiman  $N$  ja siirtymän  $u$  systeemi

$$\begin{aligned} \frac{N}{EA} - u' &= 0 \\ -N' &= \bar{f}. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Kerrotaan ylempi yhtälöistä testifunktioilla  $\hat{N}$  ja alempi  $\hat{u}$ , ja integroidaan alueen  $I = \{x|x \in (0, L)\}$  yli, saadaan systeemin heikko muoto

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\hat{N}N}{EA} dx - \int_0^L \hat{N}u' dx &= 0 \\ - \int_0^L \hat{u}N' dx &= \int_0^L \hat{u}\bar{f} dx. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Osittaisintegroidaan alemman yhtälön ensimmäinen termi ja kerrotaan ylempi yhtälöistä  $-1$ :llä, saadaan elementtimenetelmän kannalta sovelias heikko muoto

$$\begin{aligned} - \int_0^L \frac{\hat{N}N}{EA} dx + \int_0^L \hat{N}u' dx &= 0 \\ \int_0^L \hat{u}'N dx &= \int_0^L \hat{u}\bar{f} dx + \hat{u}(L)\bar{N}_L. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Sekaelementtimenetelmä saadaan kun alue  $I$  jaetaan osa-alueisiin  $I^{(e)}$  ja valitaan osa-alueittain interpolaatiot

$$\begin{aligned} N^{(e)} &= \sum_{i=1}^p N_{Ni}P_i^{(e)} = \mathbf{N}_N \mathbf{p}^{(e)}, \\ u^{(e)} &= \sum_{i=1}^q N_{ui}u_i^{(e)} = \mathbf{N}_u \mathbf{u}^{(e)}. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Vastaavasti testifunktioille valitaan Galerkinin keinon mukaisesti samat interpolaatiofunktiot

$$\begin{aligned} \hat{N}^{(e)} &= \sum_{i=1}^p N_{Ni}\hat{P}_i^{(e)} = \mathbf{N}_N \hat{\mathbf{p}}^{(e)}, \\ \hat{u}^{(e)} &= \sum_{i=1}^q N_{ui}\hat{u}_i^{(e)} = \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}}^{(e)}. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Sijoittamalla nämä heikkoon muotoon (15.5) ja kokoamalla kaikkien elementtien osuudet saadaan yhtälösystemi

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{Bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{Bmatrix} \right) = 0, \quad (15.8)$$

ja merkitään tätä lyhyesti

$$\hat{\mathbf{x}}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0. \quad (15.9)$$

Matriisit  $\mathbf{M}$  ja  $\mathbf{C}$  koostuvat elementtiosuuksista

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \frac{\mathbf{N}_N^T \mathbf{N}_N}{EA} dx, \quad \mathbf{C}^{(e)} = \int_{I^{(e)}} (\mathbf{N}'_u)^T \mathbf{N}_N dx, \quad (15.10)$$

ja ulkoisten kuormien voimavektori saadaan vastaavasti elementtiosuuksista

$$\bar{\mathbf{f}}^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \mathbf{N}_u^T \bar{f} dx, \quad (15.11)$$

lisättynä sauvan päässä vaikuttavan voiman osuudella  $\bar{N}_L$ .

**Esimerkki 15.1** Ratkaistaan edellä kuvattu ongelma käyttäen kahta sekaelementtiä, jossa siirtymälle  $u$  ja normaalivoimalle  $N$  käytetään lineaarista  $C_0$ -interpolaatiota. Otaksutaan  $EA$  vakioksi ja että kuormitus  $\bar{f}$  on lineaarisesti jakautunut palkin pituudelle  $\bar{f} = f_0(1 - x/L)$ .

Interpolaatiofunktiot elementin paikallisessa  $\xi$ -koordinaatistossa ovat täten  $\mathbf{N}_u = \mathbf{N}_N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \xi) & \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{bmatrix}$ , jolloin matriisi  $\mathbf{M}^{(e)}$  ja  $\mathbf{C}^{(e)}$  ovat

$$\mathbf{M}^{(e)} = \frac{h^{(e)}}{6EA} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{(e)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (15.12)$$

Käytetään tasajakoista elementtiverkkoa, tällöin  $h^{(1)} = h^{(2)} = L/2$ . Elementtien ulkoisiksi voimavektoreiksi saadaan

$$\bar{\mathbf{f}}^{(1)} = \frac{1}{24} f_0 L \begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{f}}^{(2)} = \frac{1}{24} f_0 L \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{N}_L \end{Bmatrix}. \quad (15.13)$$

Otetaan käyttöön dimensiottomat vapausasteet  $P_i = EA\alpha_i$ , ja  $u_i = L\delta_i$  sekä pistekuormalle sauvan päässä esitys  $\bar{N}_L = \beta f_0 L$ . Järjestämällä vapausasteet seuraavasti  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T$ , saadaan globaaliksi yhtälösystemiksi

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{12} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{24} + \beta \end{Bmatrix} \frac{f_0 L}{EA}. \quad (15.14)$$

Yhtälösystemin ratkaisu on

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} + \beta \\ \frac{1}{6} + \beta \\ -\frac{1}{12} + \beta \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\beta \\ \frac{1}{6} + \beta \end{pmatrix}. \quad (15.15)$$

### 15.2.2 Muutamia huomautuksia

Tarkkaavainen lukija on jo saattanut huomata, että heikko muoto (15.5) ei vaadi normaalivoiman  $C_0$ -jatkuvuutta. Mikäli normaalivoimalle valitain elementteittäin paloittain jatkuva interpolaatio, on globaali  $\mathbf{M}$  matriisi on lohkodeagonaalinen, eli

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(1)} & & & \\ & \mathbf{M}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{M}^{(E)} \end{bmatrix}. \quad (15.16)$$

Tässä tapauksessa normaalivoimaan liittyvät vapausasteet voidaan kondensoida pois jo elementtitasolla systeemin (15.8) ylempään yhtälön avulla (yhteensopivuusehto), jolloin saadaan

$$\mathbf{p}^{(e)} = (\mathbf{M}^{(e)})^{-1}(\mathbf{C}^{(e)})^T \mathbf{u}^{(e)}, \quad e = 1, \dots, E. \quad (15.17)$$

Sijoittamalla nämä systeemin (15.8) alempaan yhtälöön, tasapainoehtoon, saadaan elementin jäykkymatriisiksi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{C}^{(e)}(\mathbf{M}^{(e)})^{-1}(\mathbf{C}^{(e)})^T. \quad (15.18)$$

**Esimerkki 15.2** Ratkaistaan esimerkkiongelma käyttäen sekaelementtiä, jossa normaalivoimalle  $N$  käytetään lineaarista interpolaatiota, joka on epäjatkuva elementin päätepisteissä Otaksutaan  $EA$  ja  $f$  vakioiksi.

Matriisi  $\mathbf{M}^{(e)}$  on nyt tietenkin sama kuin edellisessä esimerkissä. Sen kääntämismatriisi on

$$(\mathbf{M}^{(e)})^{-1} = \frac{2EA}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (15.19)$$

Täten jäykkymatriisiksi saadaan

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EA}{2h^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (15.20)$$

Tuloksena saatiin siten sama jäykkyyismatriisi kuin tavanomaisen lineaarisesti interpoloituun siirtymämenetelmään perustuvassa elementtimenetelmässä. Globaali yhtälösystemi on siten

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{24} + \beta \end{Bmatrix} f_0 L, \quad (15.21)$$

jonka ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{4}{48} + \frac{1}{2}\beta \\ \frac{1}{6} + \beta \end{Bmatrix} \frac{f_0 L^2}{EA}. \quad (15.22)$$

Sekaelementtimenetelmässä jännitykset ratkaistaan elementtikohtaisesti kuten standardiformulaatiossakin, mutta käyttäen yhtälöä (15.17)

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(e)} &= (\mathbf{M}^{(e)})^{-1} \mathbf{C}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{S}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \\ \mathbf{S}^{(e)} &= \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15.23)$$

Havaitaan, että elementti tuottaa aina normaalivoimajakauman, joka on elementteittäin vakio. Esimerkiksi elementille 1 saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(e)} &= \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{7}{48} + \frac{1}{2}\beta \end{Bmatrix} \frac{f_0 L^2}{EA} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\frac{7}{24} + \beta\right) f_0 L \end{aligned} \quad (15.24)$$

ja yleisesti

$$\mathbf{p}^{(e)} = \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{Bmatrix} = EA \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{h^{(e)}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (15.25)$$

Tässä tapauksessa ei jännitysten lineaarisella interpolaatiolla saatu mitään hyötyä tavanomaiseen elementtimenetelmään verrattuna.

Edellisen esimerkin tulos on kuitenkin luonnollinen. Jännitysten ja siirtymien interpolaation tulee olla oikeassa suhteessa toisiinsa, jotta saataisiin hyvin käyttäytyvä elementti eikä laskentatyötä tuhlattaisi turhaan. Tähän aiheeseen palataan myöhemmin.

Huomaa, että globaali matriisi  $\mathbf{A}$  on indefiniittinen, eli sillä on sekä positiivisia että negatiivisia ominaisarvoja. Tällä seikalla on suuri merkitys lineaarisen systeemin ratkaisussa. Tähän seikkaan palataan luvussa 17.

Yhtälösystemi (15.8) saadaan myös Lagrangen funktionaalin

$$L(N, u) = \int_0^L \left( \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} - Nu' + \bar{f}u \right) dx \quad (15.26)$$

stationäärisyysehdestä, missä sekä normaalivoima  $N$  että aksiaalisiirtymä  $u$  ovat variaitivina suureina. Funktionaalia (15.26) kutsutaan mekaniikassa myös Hellingerin-Reissnerin funktionaaliksi.

### 15.3 Eulerin-Bernoullin palkkimallin sekaelementtimenetelmä-formulaatio

Eulerin-Bernoullin palkkimallin yhteensopiva siirtymäelementtimenetelmä vaatii taipuman interpolaatiofunktioilta  $C_1$ -jatkuvuutta. Sekaelementtimenetelmässä tätä jatkuvuusvaatimusta voidaan lieventää. Palkkimallin differentiaaliyhtälö

$$(EIv'')' = \bar{f} \quad (15.27)$$

voidaan kirjoittaa kahden yhtälön ryhmänä

$$\begin{aligned} M &= -EIv'' \\ -M' &= \bar{f}. \end{aligned} \quad (15.28)$$

Kerrotaan ylempi yhteensopivuusehto testifunktioilla  $\hat{M}$  ja alempi tasapainoyhtälö  $\hat{v}$ :llä ja integroidaan alueen  $I = \{x|x \in (0, L)\}$  yli, saadaan heikko muoto

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\hat{M}M}{EI} dx + \int_0^L \hat{M}v'' dx &= 0 \\ - \int_0^L \hat{v}M' dx &= \int_0^L \hat{v}\bar{f} dx. \end{aligned} \quad (15.29)$$

Suoritetaan osittaisintegrointi ja kerrotaan ylin yhtälö -1:llä, jolloin saadaan symmetrinen heikko muoto

$$\begin{aligned} - \int_0^L \frac{\hat{M}M}{EI} dx + \int_0^L \hat{M}'v' dx &= \left|_0^L \hat{M}v' \right. \\ \int_0^L \hat{v}'M' dx &= \int_0^L \hat{v}\bar{f} dx - \left|_0^L \hat{v}Q, \end{aligned} \quad (15.30)$$

missä  $Q$  on leikkausvoima  $Q = M'$ . Ylemmän yhtälön sijoitustermi häviää jos kiertymä sauvan päissä on estetty tai taivutusmomentilla on sauvan päissä määrätty arvo (myös nolla). Alemman yhtälön sijoitustermi vastaavasti häviää mikäli taipumalla on sauvan päissä määrätty arvo tai leikkausvoima häviää. Sekä taipumalle että taivutusmomentille voidaan valita  $C_0$ -interpolaatio heikkoon muotoon (15.30) perustuvassa elementtimenetelmässä.

### 15.4 Kokoonpuristumattoman aineen ongelma

Täysin kokoonpuristumatonta ainetta ei pystytä analysoimaan siirtymämenetelmällä ja tavanomaiset elementit käyttäytyvät huonosti kun Poissonin luku lähestyy kokoonpuristumattomuusrajaa  $\nu \rightarrow 0, 5$ . Tarkastellaan seuraavassa kokoonpuristumattoman tai lähes kokoonpuristumattoman aineen ongelmaa lineaarisen isotrooppisen

elastisuuden esimerkkitapauksessa. Lineaarisesti kimmoisen ja isotrooppisen materiaalin konstitutiivinen yhtälö on

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}, \quad (15.31)$$

missä kimmomatriisi  $\mathbf{D}$  on kolmidimensioisessa tapauksessa muotoa

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}, \quad (15.32)$$

missä Lam'en vakiot  $\lambda$  ja  $\mu$  ovat

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (15.33)$$

Kun  $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$  niin  $\lambda \rightarrow \infty$ , joten tavanomaista siirtymämenetelmää ei voi soveltaa. Käsitellään seuraavassa muodonmuutosta ja jännitystä matriisisuureina, mikä helpottaa huomattavasti lausekkeiden johtoa. Kun siirrytään takaisin elementtimenetelmään, otetaan jälleen vektorimuotoinen esitys käyttöön. Jaetaan muodonmuutosmatriisi  $\boldsymbol{\epsilon}$  deviatoriseen osaan  $\boldsymbol{\epsilon}'$  ja tilavuudenmuutososaan  $e\mathbf{I}/3$ :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}' + \frac{1}{3}e\mathbf{I}. \quad (15.34)$$

Tilavuudenmuutos on muodonmuutosmatriisin jälki

$$e = \text{tr } \boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (15.35)$$

ja deviatorinen osa saadaan ratkaistua jaon (15.34) perusteella

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{3}e\mathbf{I}. \quad (15.36)$$

Muodonmuutosdeviaattori mittaa materiaaliolkion muodon vääristymistä ja volyymetrinen osa<sup>1</sup> kuvaa tilavuuden muutosta

$$e = \text{tr } \boldsymbol{\epsilon} \approx \frac{V - V_0}{V_0}. \quad (15.37)$$

Keskimääräinen jännitys  $\sigma_m$  määritellään

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\text{tr } \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -p, \quad (15.38)$$

<sup>1</sup>Käytetään myös nimityksiä hydrostaattinen-, pallo- tai dilataatio-osa.



missä keskimääräistä painetta on merkitty  $p$ :llä. Paine on yhteydessä tilavuudenmuutokseen kokoonpuristuvuusmoduulin  $K$  välityksellä seuraavasti

$$e = -\frac{p}{K}. \quad (15.39)$$

Kokoonpuristuvuusmoduuli voidaan lausua muiden elastisten vakioiden avulla esim. seuraavasti

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (15.40)$$

Kokoonpuristumattomalla materiaalilla  $K = \infty$ , jolloin tilavuudenmuutosta ei tapahdu.

Deviatorinen jännitys määritellään

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}. \quad (15.41)$$

Kirjoitetaan materiaalilaki (15.31) indeksimuodossa ja jaetaan se hydrostaattiseen ja deviatoriseen osaan:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda e \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \\ &= (K - \frac{2}{3}\mu) e \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \\ &= K e \delta_{ij} + 2\mu (\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} e \delta_{ij}) \\ &= K e \delta_{ij} + 2\mu \epsilon'_{ij} \\ &= -p \delta_{ij} + \sigma'_{ij}, \end{aligned} \quad (15.42)$$

joten

$$\sigma'_{ij} = 2\mu \epsilon'_{ij} \quad \text{ja} \quad p = -K e. \quad (15.43)$$

Elementtimenetelmässä on kätevää kirjoittaa jännitys ja muodonmuutos pystyvektoreina, jolloin

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -\frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{m}, \quad (15.44)$$

missä yleisessä kolmidimensioisessa tapauksessa  $\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]$  ja  $\mathbf{m}$  on

$$\mathbf{m}^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \quad (15.45)$$

Täten volymetrinen muodonmuutos voidaan kirjoittaa

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \mathbf{m}^T \boldsymbol{\epsilon}. \quad (15.46)$$

Deviatorinen muodonmuutos  $\boldsymbol{\epsilon}'$  voidaan siten lausua muodossa

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{3}\mathbf{m}e = (\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{m}\mathbf{m}^T)\boldsymbol{\epsilon}, \quad (15.47)$$

ja deviatoriselle jännitykselle saadaan yhtälö

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\epsilon}' = \mathbf{D}_0 (\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{m}\mathbf{m}^T) \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}' \boldsymbol{\epsilon}, \quad (15.48)$$

missä

$$\mathbf{D}_0 = \mu \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{D}' = \mu \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & & & \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & & & \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (15.49)$$

Jännitysten tekemä virtuaalinen työn on siten

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{m}p) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T (\mathbf{D}' \boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{m}p) d\Omega. \quad (15.50)$$

Sijoittamalla tämä virtuaalisen työn yhtälöön (5.34) ja ottamalla paineen ja kokoonpuristuvuuden välinen konstitutiivinen yhteys mukaan heikossa muodossa saadaan sekaelementtimenetelmän mukainen formulaatio, jossa tuntemattomina suureina ovat siirtymä  $\mathbf{u}$  ja paine  $p$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T (\mathbf{D}' \boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{m}p) d\Omega &= \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\ \int_{\Omega} \hat{p} \left( \mathbf{m}^T \boldsymbol{\epsilon} + \frac{p}{K} \right) d\Omega &= 0. \end{aligned} \quad (15.51)$$

Valitaan elementtimenetelmän mukaiset interpolaatiot siirtymille  $\mathbf{u}$  ja paineelle  $p$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{q} \quad \text{ja} \quad p = \mathbf{N}_p p. \quad (15.52)$$

Tällöin saadaan seuraavanlainen globaali yhtälösystemi

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{q}} \\ \hat{\mathbf{p}} \end{Bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \right) = 0, \quad (15.53)$$

missä matriisit  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$  ja  $\mathbf{M}$  koostuvat elementtiosuuksista

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D}' \mathbf{B} d\Omega, \\ \mathbf{C}^{(e)} &= - \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_p^T \mathbf{m}^T \mathbf{B} d\Omega, \\ \mathbf{M}^{(e)} &= - \int_{\Omega^{(e)}} K^{-1} \mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_p d\Omega, \\ \bar{\mathbf{f}}^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_u^T \bar{\mathbf{f}} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}^{(e)}} \mathbf{N}_u^T \bar{\mathbf{t}}_n d\Gamma. \end{aligned} \quad (15.54)$$

Mikäli materiaali on kokoonpuristumaton, on matriisi  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ . Huomaa, että jäykkyyismatriisi  $\mathbf{K}^{(e)}$  on miltei samanlainen kuin standardi siirtymämenetelmään

perustuvassa elementtimenetelmässä. Ainoa ero on, että matriaalin jäykkyyssmatriisin  $\mathbf{D}$  tilalla on materiaaliijäykkyys  $\mathbf{D}'$ .

Käyttökelpoisten  $(\mathbf{u}, p)$ -interpolaatioparien löytäminen ei ole aivan yksinkertainen asia. Diskreetin formulaation tulee toteuttaa ns. Babuška-Brezzi stabiiliusehto (lyhyesti BB-ehto), jotta menetelmä olisi täysin luotettava. Huomaa myös, että paineen interpolaatio voi olla epäjatkuva elementin rajapintojen yli. Yksinkertaisin mahdollinen interpolaatiokombinaatio olisi tietenkin valita siirtymille lineaarinen/trilineaarinen  $C_0$ -interpolaatio ja paineelle vakio. Tämä ei kuitenkaan toteuta BB-ehtoa ja tuloksena voi olla hyvinkin villisti oskilloiva painejakauma.

## 15.5 Stabiloidut sekaelementtimenetelmäformulaatiot

Sekamenetelmiin johtavaa systeemia, esim. (15.5) tai (15.51) voidaan yleisesti kuvata seuraavasti

$$\begin{aligned} Au + B^*p &= \bar{f} \\ Bu &= \bar{g}, \end{aligned} \quad (15.55)$$

missä  $A$  ja  $B$  ovat differentiaali tai algebrallisia operaattoreita ja  $B^*$  on  $B$ :n adjungantti. Systeemin (15.55) primäärisuuretta merkitään  $u$ :lla ja  $p$  on Lagrangen kertoja. Numeerisen ratkaisun pohjaksi kelpaava heikkoa muotoa merkittäköön

$$\begin{aligned} a(\hat{u}, u) + b(\hat{u}, p) &= (\hat{u}, \bar{f}) \\ b(\hat{p}, u) &= (\hat{p}, \bar{g}). \end{aligned} \quad (15.56)$$

Kuten kokoonpuristumattoman aineen tapauksessa jo mainittiin, on toimivan elementtimenetelmän konstruointi hankalaa, t.s. sopivien interpolaatioiden löytäminen  $u$ :lle ja  $p$ :lle siten, että ne toteuttaisivat Babuška-Brezzi stabiiliusehdon. Stabiloiduiksi formulaatioksi kutsutaan menetelmiä, jotka kiertävät BB-stabiiliusehdon, jolloin saadaan toimivia elementtimenetelmiä kaikilla mielekkäillä interpolaatiopareilla. Kirjoitetaan systeemi (15.56) muodossa

$$a(\hat{u}, u) + b(\hat{u}, p) + b(\hat{p}, u) = (\hat{u}, \bar{f}) + (\hat{p}, \bar{g}). \quad (15.57)$$

Systeemi (15.57) stabiloidaan lisäämällä siihen elementtikohtaisesti määriteltyjä pienimmän neliön termejä

$$\begin{aligned} a(\hat{u}, u) + b(\hat{u}, p) + b(\hat{p}, u) + \delta_1 h^{2r_1} (A\hat{u} + B^*\hat{p}, Au + B^*p - \bar{f}) \\ - \delta_2 h^{2r_2} (B\hat{u}, Bu - \bar{g}) = (\hat{u}, \bar{f}) + (\hat{p}, \bar{g}), \end{aligned} \quad (15.58)$$

missä  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$  ja eksponentit  $r_1, r_2$  ovat positiivisia.

# Luku 16

## Sähkömagneetiikan numeerisia menetelmiä

Elementtimenetelmän juuret juontavat tarpeesta ratkaista kiinteän aineen mekaniikan ongelmia geometrialtaan monimutkaisissa aluissa. Menetelmän nopeaan leviämiseen käytännön lujuuslaskennan apuvälineeksi edesauttoi sen helppo muunneltavuus erityyppisiin lujuusopin ongelmiin sekä geometrinen joustavuus. Virtausmekaniikkaan elementtimenetelmä on levinnyt hitaammin, johon yhtenä syynä lienee tavanomaiseen Galerkinin menetelmään perustuvan elementtiapproksimaation epäonnistuminen. Nykyisin ongelman syyt ja ratkaisukeinot ovat selvillä ja elementtimenetelmää voidaan menestyksellisesti soveltaa myös erilaisissa virtausmekaniikan ongelmissa.

Sovellettaessa elementtimenetelmää sähkömagneetiikan yhtälöihin tapahtui samankaltainen ilmiö. Maxwellin yhtälöt eivät antautuneet helposti tavanomaisen elementtimenetelmäformulaation vieteltäviksi. Syynä ovat sähkömagneetiikan yhtälöiden erilaiset rajapintojen jatkuvuusominaisuudet. Näitä rajapintoja, jotka vaativat ratkaistavilta suureilta tietyn tyyppisiä jatkuvuusominaisuuksia ovat elementtien väliset rajapinnat. Lääke tähän vaivaan löydettiin, ja elementtimenetelmä on nykyisin sähkömagneetiikassa yksi käytetyimpiä numeerisia menetelmiä.

### 16.1 Johdanto

Sähkömagneettisten kenttien käyttäytymistä kuvaava kenttäteoria sai huipennuksensa James Clerk Maxwellin (1831-1879) tutkimuksissa vuosilta 1854-1879, jotka täydensivät sähkömagneetiikan suurmiesten André Marie Ampéren (1775-1836) ja Michael Faradayn (1791-1867) tulokset. Maxwellin yhtälöiden (1.20)-(1.24) syntymävuotena voidaan pitää vuotta 1864, jolloin hän julkaisi kirjoituksen *A dynamical theory of the electromagnetic field* [60, sivu 177].<sup>1</sup> Maxwell käytti sähkömagneet-

<sup>1</sup>Sähkötekniikan ja sähkömagnetismin teorian historiasta kiinnostuneelle voidaan suositella Ismo Lindellin teosta *Sähkötekniikan historia* [60].

tisten kenttien kuvaamiseen kokoonpuristumattoman nesteen virtausanalogiaa. Paineen vaikutuksesta liikkuvan nesteen virtaviivat yhtyvät magneettisen voimakentän vuoviivoihin.

Tässä johdantoluvussa tarkastellaan Maxwellin yhtälön ratkaisujen luonnetta ja suuri osa materiaalista perustuu Ismo Lindellin ja Ari Sihvolan kirjoihin sähkömagneettisesta kenttäteoriasta [22] sekä Juhani Pitkärännän luentomonisteeseen [61]. Palautetaan nyt Maxwellin yhtälöt uudelleen mieleen:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (16.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (16.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (16.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (16.1d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (16.1e)$$

jossa  $\mathbf{H}$  on magneettikentän voimakkuus,  $\mathbf{B}$  magneettivuon tiheys,  $\mathbf{E}$  sähkökentän voimakkuus,  $\mathbf{D}$  sähkövuon tiheys,  $\mathbf{J}$  sähkövirran tiheys ja  $\rho$  varaustiheys. Yhtälö (16.1a) on nimeltään Ampère-Maxwellin yhtälö. Faradayn laki (16.1b) ilmaisee magneettivuon säilymisen. Edellä olevista viidestä yhtälöstä vain kolme on riippumattomia. Joko kolme ensimmäistä (16.1a)-(16.1c) tai yhtälöt (16.1a), (16.1b) ja (16.1e) voidaan valita riippumattomiksi yhtälöiksi. Näissä kolmessa yhtälössä on kuitenkin viisi tuntematonta vektorisuuretta, joten tarvitaan konstitutiiviset yhtälöt jotka kuvaavat materiaalin käytäytymistä, jotta yhtälösystemi sulkeutuisi ratkaistavaksi systeemiksi. Rajoittamalla yksinkertaiseen lineaariseen ja isotrooppiseen malliin, konstitutiiviset yhtälöt, joita sähkömagnetiikassa usein kutsutaan väliaineyhtälöiksi, voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (16.2a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (16.2b)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (16.2c)$$

jossa  $\epsilon$  on permittiivisyys - kutsutaan myös dielektrisyysvakioksi,  $\mu$  magneettinen permeabiliteetti ja  $\sigma$  sähkönjohtavuus. Ideaalisille sähköä johtaville aineille  $\sigma = \infty$  ja tällöin ideaalisille johteille sähkökenttä häviää, eli  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ . Vastaavasti ideaalisille eristeille sähkönjohtavuus ja siten sähkövirran tiheys häviävät, eli  $\sigma = 0$  ja  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ .

Yleisemmässä tapauksessa väliaineyhtälöt (16.2a) ja (16.2b) ovat muotoa

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (16.3a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (16.3b)$$

jossa  $\epsilon_0, \mu_0$  ovat tyhjän permittiivisyys ja permeabiliteetti,  $\mathbf{P}$  on sähköinen polarisaatio ja  $\mathbf{M}$  magnetoituma. Isotrooppiselle aineelle permittiivisyys ja permeabiliteetti

ovat skalaareja, ja usein ne ilmaistaan dimensiottomien suhteellisen permittiivisyyden  $\epsilon_r$  ja suhteellisen permeabiliteetin  $\mu_r$  avulla

$$\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 = 1 + \chi_e, \quad (16.4a)$$

$$\mu_r = \mu/\mu_0 = 1 + \chi_m, \quad (16.4b)$$

jossa  $\chi_e, \chi_m$  ovat sähköinen ja magneettinen susceptibiliteetti. Sähköinen permittiivisyys ja magneettinen permeabiliteetti ovat kytköksissä yhtälön

$$\epsilon\mu = c^{-2} \quad (16.5)$$

välityksellä, ja jossa  $c$  on valon nopeus.

Maxwellin yhtälöt voidaan ilmasta myös integraalimuodossa

$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} + \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}, \quad (16.6a)$$

$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}, \quad (16.6b)$$

$$\oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \rho dV, \quad (16.6c)$$

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad (16.6d)$$

$$\oint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV, \quad (16.6e)$$

jossa  $A$  on mielivaltainen avoin pinta jonka suljettu reunakäyrä on  $\partial A$  ja  $V$  on mielivaltainen tilavuus jonka suljettu pinta on  $\partial V$ . Yllä olevien yhtälöiden perusteella kahden eri aineen lähteettömällä rajapinnalla on seuraavien ehtojen oltava voimassa

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}, \quad (16.7a)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0, \quad (16.7b)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{0}, \quad (16.7c)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \quad (16.7d)$$

jossa  $\mathbf{n}$  on materiaalialueesta 2 alueeseen 1 osoittava yksikkönormaalivektori. Näistä neljästä ehdosta ainoastaan kaksi ovat toisistaan riippumattomia. Mikäli rajapinnalla esiintyy pintavaraus  $\rho_s$  tai pintavirta  $\mathbf{J}_s$ , rajapintaehdot on kirjoitettava muodossa

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s, \quad (16.8a)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s. \quad (16.8b)$$

Rajapintaehdoja on käsitelty tarkemmin lähteissä [22, Osa 1, sivut 61, 72, 137 ja 159] sekä [17, sivut 9-10].

## 16.2 Maxwellin yhtälön ratkaisujen luonteesta

Maxwellin yhtälöitä ratkaistaan harvoin niiden täydellisessä muodossa, vaan ongelman luonteesta riippuen saadaan helpommin ratkaistava systeemi jättämällä ratkaistavan ongelman kannalta merkityksettömät termit huomioon ottamatta. Se, mistä termeistä voidaan luopua, voidaan päätellä tarkastelemalla isotrooppisen ja lineaarisen aineen sähkömagneettista energiaa tilavuutta kohden

$$w_{\text{em}} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}. \quad (16.9)$$

Energiatiheyden aikaderivaataksi saadaan -joidenkin välivaiheiden jälkeen-

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \\ &= -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}), \end{aligned} \quad (16.10)$$

jossa vektoria  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  kutsutaan Poyntingin vektoriksi, ja sitä merkitään usein symbolilla  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ . Integroimalla yli tarkasteltavan alueen  $V$ , saadaan sähkömagneettisen energian paikallisen säilymislain (16.9) integraalimuotoiseksi esitykseksi

$$\frac{d}{dt} \int_V w_{\text{em}} dV = - \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV - \int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (16.11)$$

jossa  $\mathbf{n}$  on alueen  $V$  reunapinnan yksikköulkonormaalivektori. Energian säilymislait (16.9) ja (16.11) tunnetaan Poyntingin teoreeman nimellä.

Materiaalikappaleen sähkömagneettinen energia voi siten muuttua kahdella tavalla: (i) lämmöksi teholla  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$  tai (ii) säteilemällä reunapinnan läpi teholla  $\mathbf{S}$ . Eristeissä virrantiheys  $\mathbf{J}$  häviää ja energia siirtyy vain säteilemällä. Derivoimalla Ampéren-Maxwellin yhtälö (16.1a) puolittain ajalla, ja sijoittamalla magneettivuon tiheyden  $\mathbf{B}$  ja magneettikentän voimakkuuden  $\mathbf{H}$  välinen konstitutiivinen yhtälö, saadaan yhtälö  $\nabla \times \mu^{-1} \dot{\mathbf{B}} = \ddot{\mathbf{D}}$ , jossa aikaderivaattaa on merkitty symbolin yläpuolisella pisteellä. Sijoittamalla tähän Faradayn laki sekä sähkövuon tiheyden ja sähkökentän välinen konstitutiivinen yhteys, saadaan olettamalla permittiivisyys ja permeabiliteetti vakioksi yhtälö

$$\mu \epsilon \ddot{\mathbf{E}} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (16.12)$$

Sähkömagnetiikassa tarvitaan usein identiteettiä

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}, \quad (16.13)$$

jossa  $\Delta$  on Laplacen operattori ja jonka avulla yhtälö (16.12) saadaan muotoon

$$\mu \epsilon \ddot{\mathbf{E}} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (16.14)$$

Gaussin laista (16.1c) ja väliaineiyhtälöstä (16.2a) saadaan viimein muoto

$$\mu \epsilon \ddot{\mathbf{E}} - \Delta \mathbf{E} = -\epsilon^{-1} \nabla \rho, \quad (16.15)$$

joka on samaa tyyppiä kuin johdantoluvussa esiintynyt aaltoyhtälö (1.18), eli hyperbolinen osittaisdifferentiaaliyhtälö.

Joissain tapauksissa siirrosvirta  $\dot{\mathbf{D}}$  on merkityksetön (esim. sähkömoottoreissa) ja tällöin Maxwellin yhtälöt voidaan lausua muodossa

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad (16.16a)$$

$$\nabla \times \mu^{-1} \mathbf{B} = \sigma \mathbf{E}. \quad (16.16b)$$

Derivoimalla alempi yhtälöistä puolittain ajalla, sijoittamalla siihen Faradayn lain mukainen magneettivuon tiheyden aikaderivaatta sekä ottamalla identiteetti (16.13) huomioon, saadaan yhtälö

$$\sigma \mu \dot{\mathbf{E}} - \Delta \mathbf{E} = -\epsilon^{-1} \nabla \varrho. \quad (16.17)$$

Tämä on diffuusioyhtälön kaltainen parabolinen osittaisdifferentiaaliyhtälö, katso lukua 1.4.

Yleisessä tapauksessa -olettaen kuitenkin materiaalivakioiden olevan paloittain vakioita- saadaan muoto

$$\mu \epsilon \ddot{\mathbf{E}} + \sigma \mu \dot{\mathbf{E}} - \Delta \mathbf{E} = -\epsilon^{-1} \nabla \varrho. \quad (16.18)$$

Tässä esiintyvien vakioiden  $\mu \epsilon$  ja  $\sigma \mu$  suhteista voidaan päätellä ratkaisun luonteenpiirteet. Ongelman luonteeseen vaikuttaa herätteen aikaskaalan suhde systeemin relaksaatioaikaan

$$t_r = \epsilon / \sigma. \quad (16.19)$$

Mikäli systeemin aikaskaala  $t_0$  on huomattavasti relaksaatioaikaa suurempi, eli  $t_0 \gg t_r$ , käyttäytyvät Maxwellin yhtälöt dissipatiivisen parabolisen yhtälön luonteenpiirteiden mukaisesti. Vastaavasti yhtälöiden aaltoluonne on hallitseva kun herätteen aikaskaala on huomattavasti relaksaatioaikaa pienempi, eli  $t_0 \ll t_r$ .

Relaksaatioaika saadaan sähkövarauksen säilymisyhtälöstä (16.1e) kun sijoitetaan siihen väliaine-yhtälöt (16.2c) ja (16.2a), jolloin saadaan

$$\dot{\varrho} + \frac{\sigma}{\epsilon} \varrho = 0, \quad (16.20)$$

joka on tavallinen differentiaaliyhtälö. Sen ratkaisu on tunnetusti muotoa

$$\varrho(x, t) = \varrho(x, 0) \exp(-ct/\sigma). \quad (16.21)$$

## 16.3 Staattiset kentät

Mikäli sähkömagneettiset kentät ovat ajallisesti muuttumattomia niin kytkentä sähkö- ja magneettikentän suureiden väliltä häviää ja ne voidaan ratkaista toisistaan riippumatta. Staattista sähkökenttää kuvaavat yhtälöt ovat

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (16.22a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho, \quad (16.22b)$$



jotka toteavat staattisen sähkökentän pyörteettömyyden ja että varaustiheys on sähkövuon lähde. Magnetostaattiset kenttäyhtälöt ovat vastaavasti

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (16.23a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (16.23b)$$

Tarkastellaan ensin sähköstaattista tapausta. Yhtälöstä (16.22a) nähdään, että sähkökentän voimakkuusvektori  $\mathbf{E}$  on pyörteetön. Tällöin se voidaan esittää skalaarifunktion gradienttina  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ . Funktiota  $\phi$  kutsutaan sähköstaattiseksi potentiaaliksi. Ottamalla väliaine-yhtälö (16.2a) huomioon, saadaan Gaussin laista Poissonin yhtälö

$$-\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = \rho. \quad (16.24)$$

Sähköstatiikassa kaikki materiaalit ovat joko johteita tai ideaalisia eristeitä. Vähäisessä määrinkin johtava eriste on sähköstatiikassa käsiteltävä johtena, vaikkakin stationäärisen tilan saavuttaminen tapahtuu hitaammin kuin johteella. Stationäärisen tilan saavuttamiseen tarvittavaa aikaa voi arvioida relaksaatioajan (16.19) avulla.

Johdekappaleen reunalla sähkökentän on toteutettava reunaehto

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (x, y, z) \in \Gamma, \quad (16.25)$$

jossa  $\mathbf{n}$  on reunapinnan  $\Gamma$  normaalivektori. Täten sähkökentän on oltava reunalla sen normaalin suuntainen. Potentiaalın  $\phi$  gradienttina  $\mathbf{E}$  on kohtisuorassa vakio-potentiaalipintoja vastaan, joten johdekappaleen reunapinta on vakio-potentiaalipinta, eli

$$\phi = \phi_0, \quad (x, y, z) \in \Gamma. \quad (16.26)$$

Johdekappaleen sisällä ei ole varauksia, joten sen sisällä ei ole sähkökenttääkään, eli  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ . Varaukset keskittyvät johteen pinnalle ohueksi kerrokseksi, jota voidaan kuvata pintavarauksella  $\rho_s$ .

Yhtälön (16.24) ratkaisu reunaehdolla (16.26) ei tuota elementtimenetelmälle vaikeuksia. Se voidaan ratkaista jo aikaisemmin esitetyllä tekniikalla.

Magnetostaattinen kenttä saadaan ratkaisemalla yhtälöt (16.23a) ja (16.23b). Magneettivuon tiheys on yhtälön (16.23b) perusteella lähteetön. Täten se voidaan lausua vektorikentän roottorina, eli  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Sijoittamalla  $\mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B} = \mu^{-1}\nabla \times \mathbf{A}$  Ampéren lakiin (16.23a), saadaan toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälö vektoripotentiaalın  $\mathbf{A}$  ratkaisemiseksi:

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}. \quad (16.27)$$

On huomattava, että yhtälössä (16.27) oleva kaksoisroottorioperaattorin ydin ei ole tyhjä joukko. Tämä voidaan nähdä seuraavasti. Oletetaan, että  $\mathbf{A}$  on yhtälön (16.27) ratkaisu, tällöin myös mikä tahansa muotoa  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$  oleva vektorikenttä

on yhtälön (16.27) ratkaisu, jossa  $f$  on mielivaltainen skalaarifunktio. Yksikäsitteisyys saavutetaan vaatimalla divergenssiehdon

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (16.28)$$

toteutuminen. Yhtälö (16.28) on nimeltään Coulombin ehto. Dynaamisen kenttätehtävän tapauksessa käytetään usein Lorenzin ehtoa. Siihen palataan myöhemmin. On huomattava, että magneettivuon tiheys  $\mathbf{B}$  on kuitenkin yksikäsitteisesti määrätty vaikka vektoripotentiali  $\mathbf{A}$  ei ole.

## 16.4 Vektoripotentialiyhtälön numeerinen ratkaisu

### 16.4.1 Heikko muoto

Yhtälön (16.27) ratkaiseminen Galerkinin keinon elementtimenetelmällä käyttäen vektoripotentialin jokaiselle komponentille solmuinterpolaatiofunktioita osoittautui fiaskoksi. Ongelman ydin on vektoripotentiali  $\mathbf{A}$ :n jatkuvuudessa eri materiaalipintojen ja numeerisessa ratkaisussa elementtien rajapintojen yli. Yhtälön (16.27) heikko muoto saadaan tavanomaiseen tapaan kertomalla se puolittain vektoriarvolla painofunktiolla  $\hat{\mathbf{A}}$  ja integroimalla ratkaisualueen yli:

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{A}} \cdot [\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A})] dV = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{J} dV. \quad (16.29)$$

Symmetrinen Galerkinin keinon mukainen elementtimenetelmä saadaan kun derivointioperaatiota siirretään painofunktiolle. Gaussin lauseen, eli divergenssikaavan käyttöä varten palautetaan mieliin vektori-identiteetti

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}. \quad (16.30)$$

Sovelletaan tätä kaavaa suureisiin  $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{A}}$  ja  $\mathbf{b} = \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}$ , saadaan yhtälö (16.29) muunnettua muotoon

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \hat{\mathbf{A}}) \cdot (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) dV - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A})) dV = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{J} dV, \quad (16.31)$$

josta se Gaussin lauseen avulla saadaan muotoon

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \hat{\mathbf{A}}) \cdot (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) dV = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{J} dV + \int_{\partial\Omega} (\hat{\mathbf{A}} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A})) \cdot \mathbf{n} dA. \quad (16.32)$$

Vektorikolmitulon vaihdannaisuuden perusteella ristitulon ja pistetulon paikkaa voidaan vaihtaa, täten reunatermi voidaan muokata ja saadaan elementtimenetelmän perustaksi soveltuva heikko muoto

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \hat{\mathbf{A}}) \cdot (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) dV = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{J} dV + \int_{\Gamma_n} \hat{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{n} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A})) dA, \quad (16.33)$$

jossa  $\Gamma_n$  on reunan osa, jossa probleeman luonnollinen reunaehto on annettu.

Elementtikohtainen interpolaatio voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{A}^{(e)} = \mathbf{N}\mathbf{a}^{(e)} \quad \text{ja} \quad \hat{\mathbf{A}}^{(e)} = \mathbf{N}\hat{\mathbf{a}}^{(e)}, \quad (16.34)$$

jossa  $\mathbf{N}$  on interpolaatiofunktioit sisältävä matriisi. Heikosta muodosta (16.33) nähdään heti, että elementtikohtainen osuus systeemin kerroinmatriisista on tuttua muotoa

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad (16.35)$$

jossa  $\mathbf{B}$ -matriisi on roottorioperaattorin diskreetti vastine,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{N}$ , ja lineaarisen isotrooppisen aineen väliainehtälössä matriisi  $\mathbf{D} = \mu^{-1} \mathbf{I}$ .

Rajoite-ehto (16.28) voidaan ottaa heikossa muodossa huomioon Lagrangen kertojamenettelyllä lisäämällä termit  $\int (\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}}) p dV$  ja  $\int \hat{p} \nabla \cdot \mathbf{A} dV$  heikon muodon (16.29) oikealle puolelle, jolloin saadaan

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{A}} \cdot [\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A})] dV = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{J} dV + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}}) p dV + \int_{\Omega} \hat{p} \nabla \cdot \mathbf{A} dV. \quad (16.36)$$

Suorittamalla osittaisintegroinnit myös lisätyissä rajoitetermeissä, ja valitsemalla Lagrangen kertojat siten, että ne häviävät alueen reunalla  $\Gamma$ , joten

$$\int_{\Gamma} (p \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{n} + \hat{p} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \quad (16.37)$$

jolloin päädytään viimeinkin käyttökelpoiseen magnetostaattisen vektoripotentiaalformulaation heikkoon muotoon

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \times \hat{\mathbf{A}}) \cdot (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) dV + \int_{\Omega} \hat{\mathbf{A}} \cdot \nabla p dV + \int_{\Omega} \nabla \hat{p} \cdot \mathbf{A} dV \\ = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{J} dV + \int_{\Gamma_n} \hat{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{n} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A})) dA. \end{aligned} \quad (16.38)$$

Valitsemalla Lagrangen kertojille elementti-iterpolaatio

$$p = \mathbf{N}_p \mathbf{p}^{(e)} \quad \text{ja} \quad \hat{p} = \mathbf{N}_p \hat{\mathbf{p}}^{(e)}, \quad (16.39)$$

jossa  $\mathbf{p}^{(e)}$  ja  $\hat{\mathbf{p}}^{(e)}$  ovat solmupistearvoista koostuvia vektoreita, voidaan elementtikohtainen kerroinmatriisi kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{A}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(e)} & (\mathbf{C}^{(e)})^T \\ \mathbf{C}^{(e)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (16.40)$$

jossa  $\mathbf{K}^{(e)}$  on sama kuin yhtälössä (16.35) ja rajoitematriisi  $\mathbf{C}^{(e)}$  on muotoa

$$\mathbf{C}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \nabla \mathbf{N}_p^T \mathbf{N} dV. \quad (16.41)$$

Lagrangen kertojille voidaan valita standardi  $C_0$ -jatkuva solmuinterpolaatio, mutta vektoripotentiaalille ei voida käyttää komponenteittain  $C_0$ -jatkuvaa solmuinterpolaatiota. Syy tähän on potentiaalivektorin  $\mathbf{A}$  tangentiaalikomponentin jatkuvuusvaatimus elementtien rajapintojen yli.

### 16.4.2 Ominaisarvotehtävä aikaharmoniselle sähkökentälle

Ennen tangentialisesti jatkuvien interpolaatiofunktioiden konstruoinnista, tarkastellaan hieman vektoripotentialiongelmia helpompaa tapausta. Otetaan lähtökohdaksi yhtälö (16.14), ja kirjoitetaan se nyt uudelleen muodossa

$$\epsilon \ddot{\mathbf{E}} + \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{0}. \quad (16.42)$$

Sijoitetaan tähän aikaharmoninen yrite  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t)$ , jolloin yhtälöstä (16.42) saadaan ominaisarvotehtävä

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_0) = \omega^2 \epsilon \mathbf{E}_0 \quad \text{alueessa } \Omega. \quad (16.43)$$

Jätetään jatkossa alaindeksi 0 pois. Heikko muoto saadaan vastaavalla tavalla kuin vektoripotentialiyhtälöllekin, kerrotaan painofunktiolla  $\hat{\mathbf{E}}$  ja integroidaan ratkaisualueen  $\Omega$  yli. Osittaisintegroinnin jälkeen saadaan tulos

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \hat{\mathbf{E}}) \cdot (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) dV - \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{E}} \cdot [\mathbf{n} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E})] dA = \omega^2 \int_{\Omega} \epsilon \hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (16.44)$$

Vektorikolmitulon vaihdannaisuuden perusteella ristin ja pisteen paikka voidaan vaihtaa, joten reunatermin voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_{\Gamma} \hat{\mathbf{E}} \cdot [\mathbf{n} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E})] dA = \int_{\Gamma} (\hat{\mathbf{E}} \times \mathbf{n}) \cdot (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) dA = - \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{E}}) \cdot (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) dA. \quad (16.45)$$

Mikäli probleemalle on annettu oleellinen reunaehto, resonaattorin tapauksessa  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ , täten myös testifunktion  $\hat{\mathbf{E}}$ :n on toteutettava  $\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ .

Globaali ominaisarvotehtävä on siten muotoa

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u}, \quad (16.46)$$

jossa globaalit matriisit  $\mathbf{K}$  ja  $\mathbf{M}$  kootaan elementtiosuuksista

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{M}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \epsilon \mathbf{N} dV. \quad (16.47)$$

Matriisi  $\mathbf{B}$  on roottorioperaattorin diskreetti vastine ja  $\mathbf{D} = \mu^{-1} \mathbf{I}$ , kuten matriisissa (16.35). Vektori  $\mathbf{u}$  sisältää globaalit vapausasteet.

## 16.5 Roottoriyhhteensopivat kantafunktiot

Tarkastellaan aluksi probleeman (16.43) ratkaisua tasossa. Yksinkertaisin mahdollinen elementti on lineaarinen kolmioelementti. Vaatimalla vektorin  $\mathbf{E}$  tangentialikomponentin jatkuvuus elementin rajapintojen yli, on luonnollista valita vapausasteeksi vektorin tangentialikomponentti elementin kolmella reunaviivalla.

Lähdetään kuitenkin liikkeelle tavanomaisesta solmuinterpolaatiosta sähkökentän voimakkuusvektorin  $\mathbf{E}$  kummallekin komponentille, eli

$$E_x = L_1 E_{x1} + L_2 E_{x2} + L_3 E_{x3}, \quad \text{ja} \quad E_y = L_1 E_{y1} + L_2 E_{y2} + L_3 E_{y3}, \quad (16.48)$$

jossa  $L_i$ :t ovat kolmion alakoordinaatit. Kuvan 16.1 mukaisesti sivun  $i$ , joka yhdistää solmut  $i$  ja  $i+$  vektorin  $\mathbf{E}$  tangentialikomponentti on  $E_{si} = \mathbf{s}_i^T \mathbf{E}$ . Tarvittavat kolme lisärajoitetta saadaan kun vaaditaan tangentialikomponentti vakioksi koko sivun pituudella. Sivun  $i$ -suuntaisen yksikkotangenttivektorin lausekkeeksi saadaan

$$\vec{s}_i = \left[ (x_{i+1} - x_i)\vec{i} + (y_{i+1} - y_i)\vec{j} \right] / \ell_i, \quad (16.49)$$

jossa  $\ell_i$  on sivun  $i$  pituus,  $\ell_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$ . Yksikkotangenttivektori  $\mathbf{s}$  voidaan lausua myös alakoordinaattien määrittelyssä käytettävien kertoimien  $b_i$  ja  $c_i$  avulla, katso lukua 4:

$$\vec{s}_i = (c_i \vec{i} - b_i \vec{j}) / \ell_i. \quad (16.50)$$

Sivun  $i$  suuntainen  $\mathbf{E}$ :n tangentialikomponentin interpolaatio on tietenkin

$$E_{si} = \mathbf{s}_i^T (L_i \mathbf{E}_i + L_{i+} \mathbf{E}_{i+}), \quad (16.51)$$

joka voidaan kirjoittaa sivun reunan suuntaisen dimensiottoman koordinaatin  $\zeta \in (-1, 1)$  funktiona muodossa (katso kuvaa 16.1)

$$E_{si} = \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_{i+}) + \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T (\mathbf{E}_{i+} - \mathbf{E}_i) \zeta. \quad (16.52)$$

Vaatus tangentialikomponentin vakioisuudesta voidaan siten toteuttaa seuraavien kahden ehdon avulla

$$\mathbf{s}_i^T (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_{i+}) = 2E_{si}, \quad (16.53a)$$

$$\mathbf{s}_i^T (\mathbf{E}_{i+} - \mathbf{E}_i) = 0, \quad (16.53b)$$

jotka auki kirjoitettuna ovat

$$c_{i-} (E_{xi+} + E_{xi}) - b_{i-} (E_{yi+} + E_{yi}) = 2E_{si} \ell_i, \quad (16.54a)$$

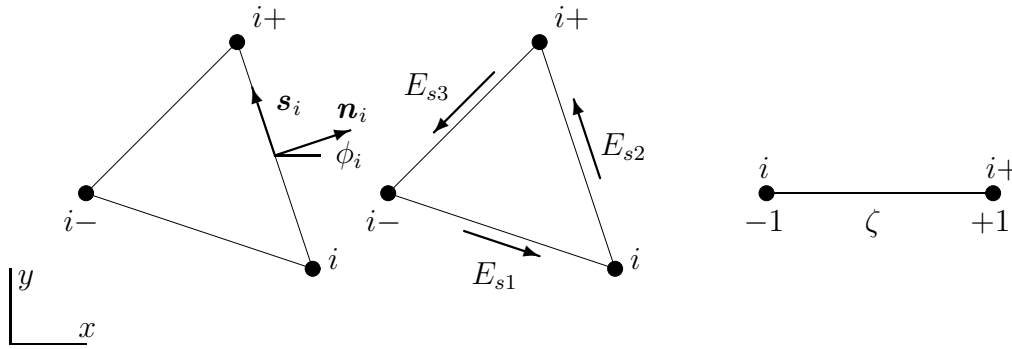
$$c_{i-} (E_{xi+} - E_{xi}) - b_{i-} (E_{yi+} - E_{yi}) = 0. \quad (16.54b)$$

Laskemalla yhtälöt puolittain yhteen saadaan

$$c_{i-} E_{xi+} - b_{i-} E_{yi+} = E_{si} \ell_i, \quad (16.55)$$

ja vähentämällä yhtälöstä (16.54a) alempi yhtälö (16.54b) saadaan vastaavasti

$$c_{i-} E_{xi} - b_{i-} E_{yi} = E_{si} \ell_i. \quad (16.56)$$



Kuva 16.1: Lineaarinen särmäelementti.

Yhtälön (16.55) ilmaisema ehto on oltava voimassa myös sivulla  $i-$ , joten yhdistämällä tämän sivun yhtälö ehdon (16.56) kanssa johtaa yhtälösystemiin

$$c_{i-}E_{xi} - b_{i-}E_{yi} = E_{si}\ell_i, \quad (16.57a)$$

$$c_{i-}E_{xi} - b_{i-}E_{yi} = E_{si-}\ell_{i-}. \quad (16.57b)$$

Koska solmu  $i-$  on sama kuin  $i+$ , voidaan eliminoida solmutuntemattomat  $E_{xi}$  ja  $E_{yi}$  ratkaista yhtälöstä

$$\begin{bmatrix} c_{i-} & -b_{i-} \\ -c_{i+} & b_{i+} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{xi} \\ E_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{si}\ell_i \\ -E_{si-}\ell_{i-} \end{Bmatrix}. \quad (16.58)$$

Merkitään kerroinmatriisiin determinanttia  $D_i = c_{i-}b_{i+} - b_{i-}c_{i+}$ , joten ratkaisu on

$$E_{xi} = (b_{i+}\ell_i E_{si} - b_{i-}\ell_{i-} E_{si-})/D_i, \quad (16.59a)$$

$$E_{yi} = (c_{i+}\ell_i E_{si} - c_{i-}\ell_{i-} E_{si-})/D_i. \quad (16.59b)$$

Kirjoitetaan nyt interpolaatio (16.48) auki

$$E_x = \sum_{i=1}^3 L_i D_i^{-1} (b_{i+} E_{si} - b_{i-} E_{si-}) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{b_{i+}}{D_i} L_i - \frac{b_{i-}}{D_{i+}} L_{i+} \right) \ell_i E_{si}, \quad (16.60a)$$

$$E_y = \sum_{i=1}^3 L_i D_i^{-1} (c_{i+} E_{si} - c_{i-} E_{si-}) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{c_{i+}}{D_i} L_i - \frac{c_{i-}}{D_{i+}} L_{i+} \right) \ell_i E_{si}. \quad (16.60b)$$

Koska  $D_i = D_{i+} = 2A^{(e)}$  havaitaan, että alakordinaattien kertoimissa esiintyvät derivaatat

$$E_x = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial L_{i+}}{\partial x} L_i - \frac{\partial L_i}{\partial x} L_{i+} \right) \ell_i E_{si}, \quad (16.61a)$$

$$E_y = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial L_{i+}}{\partial y} L_i - \frac{\partial L_i}{\partial y} L_{i+} \right) \ell_i E_{si}. \quad (16.61b)$$

Vektorimuodossa lineaarinen särmäenterpolaatio voidaan kirjoittaa yksinkertaisessa muodossa

$$\mathbf{E} = \mathbf{N}\mathbf{e}^{(e)}, \quad (16.62)$$

jossa elementin solmupistevektori on  $\mathbf{e}^{(e)} = [E_{s1}, E_{s2}, E_{s3}]^T$ , ja interpolaatiofunktio-  
matriisi  $\mathbf{N}$  on muotoa

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_3], \quad \text{jossa} \quad \mathbf{N}_i = (L_i \nabla L_{i+} - L_{i+} \nabla L_i) \ell_i. \quad (16.63)$$

Helposti nähdään, että särmäinterpolaatiofunktio toteuttavat yhtälöt

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_i = \ell_i [\nabla \cdot (L_i \nabla L_{i+}) - \nabla \cdot (L_{i+} \nabla L_i)] = 0, \quad (16.64a)$$

$$\nabla \times \mathbf{N}_i = \ell_i [\nabla \times (L_i \nabla L_{i+}) - \nabla \times (L_{i+} \nabla L_i)] = 2\ell_i \nabla L_i \times \nabla L_{i+}. \quad (16.64b)$$

Interpolaatiossa (16.63) gradienttitermit ovat vakioita, joten särmään  $i$  liittyvä interpolaatiofunktio on muotoa

$$\mathbf{N}_i = \frac{\ell_i}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_{i+} L_i - b_i L_{i+} \\ c_{i+} L_i - c_i L_{i+} \end{bmatrix}. \quad (16.65)$$

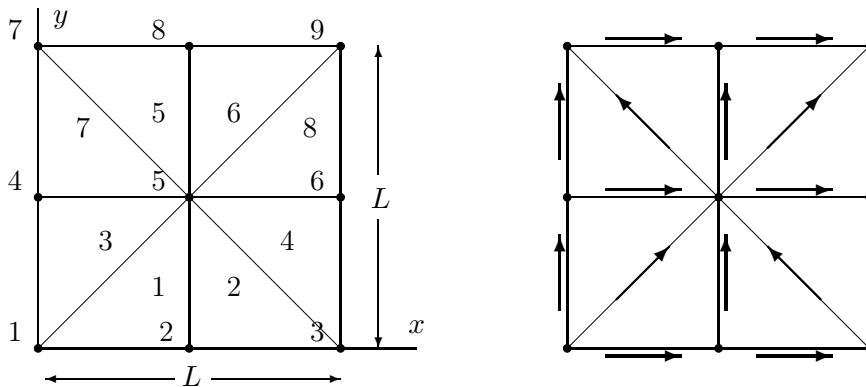
Särmään  $i$  liittyvä osuus matriisista  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{N}$  on skalaari

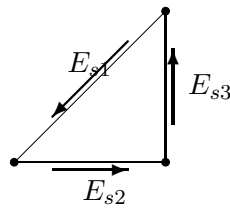
$$B_i = \frac{\ell_i}{2(A^{(e)})^2} [c_{i+} b_i - c_i b_{i+}], \quad (16.66)$$

joten koko  $1 \times 3$ -matriisi  $\mathbf{B}$  on

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2(A^{(e)})^2} \begin{bmatrix} (c_2 b_1 - c_1 b_2) \ell_1 & (c_3 b_2 - c_2 b_3) \ell_2 & (c_1 b_3 - c_3 b_1) \ell_3 \end{bmatrix}. \quad (16.67)$$

**Esimerkki 16.1** Tarkastellaan teräsreunoilla ympäröidyn ilmaonkalon värähtelytaajuuksien määrittämistä alla olevan kuvan mukaisessa neliöalueessa ja siinä esiteyllä elementtiverkolla. Kyseessä on ns. resonaattoriongelma.





Kaikki elementit ovat samanlaisia kun paikalliset solmut numeroidaan samalla tavalla. Muodostetaan siten vain elementin 1 kerroinmatriisi ja yllä olevan kuvan mukaisella solmunumeroinnilla:

$$b_1 = 0, \quad b_2 = -\frac{1}{2}L, \quad b_3 = \frac{1}{2}L, \quad c_1 = \frac{1}{2}L, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{1}{2}L, \\ \ell_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}L, \quad \ell_2 = \ell_3 = \frac{1}{2}L, \quad (16.68)$$

jolloin saadaan

$$\mathbf{B} = \frac{4}{L} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (16.69)$$

Elementtimatriisi on siten

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{2}{\mu} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (16.70)$$

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{2}{\mu} \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{(3)} = \mathbf{K}^{(6)} = \mathbf{K}^{(8)} \quad (16.71)$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{2}{\mu} \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{(4)} = \mathbf{K}^{(5)} = \mathbf{K}^{(7)} \quad (16.72)$$

Elementtien paikallisten vapausasteiden liittyminen globaaleihin vapausasteisiin on esitetty alla olevassa taulukossa.

$i$	1	2	3	5	6	7	8
1	1	3	1	6	8	6	8
2	-	2	4	-	5	7	-
3	2	-	-	4	-	-	7

Globaali matriisi  $\mathbf{K}$  on

$$\mathbf{K} = \quad (16.73)$$



$$\left[ \begin{array}{cccccccc} K_{11}^{(1)} + K_{11}^{(3)} & K_{13}^{(1)} & 0 & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & K_{33}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{21}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & K_{11}^{(2)} + K_{11}^{(4)} & 0 & K_{13}^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & K_{22}^{(3)} + K_{33}^{(5)} & 0 & K_{31}^{(5)} & 0 & 0 \\ & & & & K_{33}^{(4)} + K_{22}^{(6)} & 0 & 0 & K_{21}^{(6)} \\ & & & & & K_{11}^{(5)} + K_{11}^{(7)} & K_{12}^{(7)} & 0 \\ & & & & & & K_{22}^{(7)} + K_{33}^{(8)} & K_{31}^{(8)} \\ \text{symm.} & & & & & & & K_{11}^{(6)} + K_{11}^{(8)} \end{array} \right],$$

josta saadaan

$$\mathbf{K} = \frac{2}{\mu} \left[ \begin{array}{cccccccc} 4 & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ & & & & & 4 & -\sqrt{2} & 0 \\ & & & & & & 2 & -\sqrt{2} \\ \text{symm.} & & & & & & & 4 \end{array} \right] = \mu^{-1} \tilde{\mathbf{K}}. \quad (16.74)$$

Matriisiin  $\mathbf{M}^{(e)}$  alkot ovat muotoa

$$M_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \epsilon \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j dA. \quad (16.75)$$

Särmään  $i$  liittyvä interpolaatiofunktio on

$$\mathbf{N}_i = \frac{\ell_i}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_{i+}L_i - b_iL_{i+} \\ c_{i+}L_i - c_iL_{i+} \end{bmatrix}, \quad (16.76)$$

joten

$$\mathbf{N}_1 = 2\sqrt{2} \begin{bmatrix} -L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} L_2 + L_3 \\ -L_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} -L_1 \\ L_1 + L_3 \end{bmatrix}. \quad (16.77)$$

Matriisiin  $\mathbf{M}^{(e)}$  komponenteiksi saadaan alakoordinaattien integrointikaavaa (4.59) käyttäen lausekkeet

$$M_{11}^{(e)} = \epsilon \int_{\Omega^{(e)}} 8(L_1^2 + L_2^2) dA = \frac{1}{3}\epsilon L^2, \quad (16.78)$$

$$M_{12}^{(e)} = \epsilon \int_{\Omega^{(e)}} 2\sqrt{2}(-L_1L_2 - L_1L_3 + L_2^2) dA = 0, \quad (16.79)$$

$$M_{13}^{(e)} = \epsilon \int_{\Omega^{(e)}} 2\sqrt{2}(L_1^2 - L_1L_2 - L_2L_3) dA = 0, \quad (16.80)$$

$$M_{22}^{(e)} = \epsilon \int_{\Omega^{(e)}} ((L_2 + L_3)^2 + L_2^2) dA = \frac{1}{12}\epsilon L^2, \quad (16.81)$$

$$M_{23}^{(e)} = \epsilon \int_{\Omega^{(e)}} 2(-L_2L_1 - L_2L_3) dA = -\frac{1}{24}\epsilon L^2, \quad (16.82)$$

$$M_{33}^{(e)} = \epsilon \int_{\Omega^{(e)}} (L_1^2 + (L_2 + L_3)^2) dA = \frac{1}{12}\epsilon L^2. \quad (16.83)$$

Koska globaaliin matriisiin ei tule yhtään elementtien  $M_{23}^{(e)}$ -alkiota, on  $\mathbf{M}$  matriisi diagonaalinen

$$\mathbf{M}^{(e)} = \frac{1}{6}\epsilon L^2 \text{diag}(4, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 4) = \epsilon L^2 \tilde{\mathbf{M}}. \quad (16.84)$$

Syntynyt algebrallinen ominaisarvotehtävä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\tilde{\mathbf{K}} = \lambda \tilde{\mathbf{M}} \quad (16.85)$$

jossa on merkitty

$$\lambda = \omega^2 \mu \epsilon L^2. \quad (16.86)$$

Ratkaisemalla ominaisarvot  $\lambda$  yhtälöstä (16.85) saadaan kulmataajuudelle  $\omega$  arvo

$$\omega = \sqrt{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon L}} = \sqrt{\lambda} \frac{c}{L}, \quad (16.87)$$

jossa  $c$  on valon nopeus onkalossa. Ratkaisuksi saadaan ominaisarvot

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 0, & \omega_1 & = 0, \\ \lambda_2 = 4,5838, & \omega_1 & = 2,141, \\ \lambda_3 = 4,5838, & \omega_1 & = 2,141, \\ \lambda_4 = 12,000, & \omega_1 & = 3,464, \\ \lambda_5 = 24,000, & \omega_1 & = 4,899, \\ \lambda_6 = 31,416, & \omega_1 & = 5,605, \\ \lambda_7 = 31,416, & \omega_1 & = 5,605, \\ \lambda_8 = 36,000, & \omega_1 & = 6,000. \end{array}$$



# Luku 17

## Systemiyhtälöiden ratkaisu

### 17.1 Johdanto

Elementtimenetelmädiskretointi johtaa lineaarisen yhtälösystemin

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (17.1)$$

ratkaisuun.<sup>1</sup> Ratkaisumenetelmät voidaan luokitella kahteen kategoriaan:

- suorat Gaussin eliminaatioon perustuvat
- ja epäsuorat eli iteratiiviset algoritmit.

Tiettyjä algoritmeja voidaan pitää edellisten välimuotoina, kuten esim. konjugaatti-gradienttimenetelmää, sillä ne ovat askelmenetelmien kaltaisia, mutta niiden avulla on mahdollista päästä tarkkaan ratkaisuun äärellisellä, ennalta määrättävissä olevalla askelmäärällä.<sup>2</sup> Ennen varsinaisten algoritmien esittelyä tutkitaan kuitenkin kerroinmatriisin  $\mathbf{A}$  rakennetta.

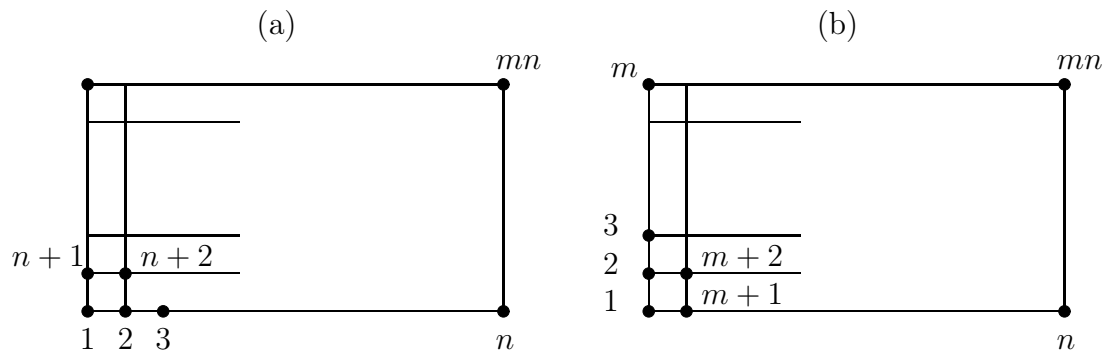
Elementtimenetelmän yhtälösystemille on ominaista, että matriisi  $\mathbf{A}$  on harva matriisi, ts. siinä on vähän nollasta poikkeavia termejä.<sup>3</sup> Tavanomaisen elementtimenetelmän, eli ns.  $h$ -version tapauksessa se on usein myös nauhamainen, mikäli elementtiverkko on suhteellisen säännöllinen. Tämä taas tarkoittaa sitä, että matriisin nollasta eroavat termit asettuvat diagonaalin ympärille kapeaan kaistaan nauhan muodossa. Mitä kapeampi nauha, sen vähemmän muistitilaa matriisialkioiden varastoiminen luonnollisestikin vie.

Nauhanleveyyteen voidaan vaikuttaa solmunumeroinnilla. Havainnollistetaan tilannetta yksinkertaisella kaksiulotteisella esimerkillä. Olkoon diskretoitava alue suorakaiteen muotoinen ja käytetään tasaista elementtiverkkoa, jossa on  $n$ -solmua pituussuuntaisella pidemmällä ja  $m$ -solmua lyhyemmällä sivulla ( $n > m$ ), katso kuva 17.1. Oletetaan, että käytetään bilineaarista elementtiä, joten elementtiverkossa

<sup>1</sup>Elementtimenetelmän diskreettiä tasapainoyntälöä on aikaisemmissa luvuissa merkitty  $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$ . Tässä luvussa noudatetaan kuitenkin lineaarialgebran vakiintunutta merkintäkäytäntöä.

<sup>2</sup>Mikäli laskennassa ei otaksuta tapahtuvan pyöristysvirheitä.

<sup>3</sup>Matriisia kutsutaan harvaksi mikäli matriisi-vektori kertolaskussa tarvittavien operaatioiden määrä on luokkaa  $\mathcal{O}(N)$ , missä  $N$  on tuntemattomien lukumäärä.



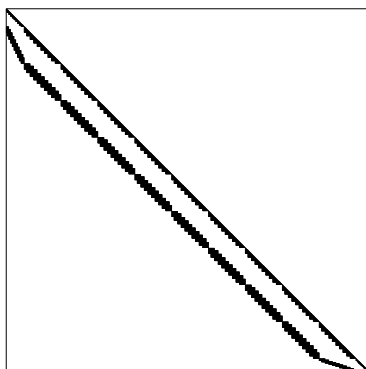
**Kuva 17.1** Solmunumerointi 2-D alueessa. Suorien ratkaisijoiden kannalta (a) huono, (b) optimaalinen ( $n > m$ ) numerointi.

on yhteensä  $(n - 1)(m - 1) \simeq nm$  elementtiä. Otaksutaan lisäksi, että tehtävässä on yksi vapausaste solmua kohden. Numeroidaan solmut pitkän sivun suuntaisesti. Nyt ensimmäinen elementti kytkee toisiinsa solmut  $1, 2, n + 1, n + 2$ . Vastaavasti muiden elementtien tapauksessa elementin kytkemien solmupisteiden ero on luokkaa  $n$ , joka on myös nauhanleveys (yksi vapausaste/solmu). Mikäli solmunumerointi suoritetaan lyhyemmän sivun suuntaisesti, saadaan elementtien solmunumeroiden erotukseksi vastaavasti  $m$ , joka siten tässä tapauksessa tuottaa optimaalisen tuloksen. Esimerkkitapauksessa systeemi yhtälön kerroinmatriisissa on  $nm$  tuntematonta ja se on nauhamainen ja useissa fysikaalisissa sovellutuksissa myös symmetrinen, joten sen sisältämän informaation varastointiin riittää tallentaa vain diagonaalialkiot ja ylä- tai alakolmio jonka puolinauhanleveys on luokkaa  $m$ . Nauhamaisessa varastointimuodossa joudutaan siten tallentamaan  $nm^2$  alkiota.

Nauhamaiselle varastointitavalle on kehitetty hieman tilaa säästävämpi muoto, jota kutsutaan profiilimuodoksi ja siihen perustuvia eliminointiohjelmia profiiliratkaisijoiksi. Havainnollistetaan asiaa seuraavalla symmetrisellä  $8 \times 8$  matriisilla, johon on piirretty profiiliviiva sen yläkolmioon:

$$\begin{bmatrix} x & x & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & x & x & 0 & x & 0 & 0 \\ & & & x & x & x & 0 & 0 \\ & & & & x & x & 0 & x \\ & & & & & x & x & 0 \\ & & & & & & x & x \\ & & & & & & & x \end{bmatrix}.$$

Mikäli oheinen matriisi varastoitaisiin nauhamatriisina (nauhanleveys diagonaalimukaanlukien = 4) tarvitaan tila  $8 \times 4 = 32$  termin kokoiselle taulukolle, mutta varastoitaessa vain profiilin alapuoliset termit riittää 21 alkion tallentaminen. Pro-



**Kuva 17.2** Erään jäykkyysmatriisin nollasta eroavat komponentit (2-D).

filiratkaisijaa varten on varastoitava lisäksi osoitetaulukko, joka sisältää diagonaalialkioiden tai sarakkeen huipun osoitteet. Symmetristen matriisien tapauksessa voidaan vaihtoehtoisesti varastoida vain alakolmio, jolloin matriisialkiot tallennetaan riveittäin. Suorien ratkaisijoiden vaatimista matriisin varastointitavoista kerrotaan lisää luvussa 20.

Kuvassa 17.2 on esitetty havainnollinen kuva jäykkyysmatriisin nollasta eroavista termeistä eräässä laatan stabiiliustehtävässä. Ratkaisussa on käytetty laatan taivutustilan kuvaamiseen BFS-elementtiä ja tason suuntaisen siirtymäkentän mallintamiseen bilineaarista interpolaatiota, joten jokaisessa solmussa on kuusi vapausastetta  $(u_i, v_i, w_i, w_{i,x}, w_{i,y}, w_{i,xy})$  ja elementissä neljä solmupistettä. Elementtiverkko on  $10 \times 10$ , joka johtaa 610 vapausasteen systeemiin ja nauhanleveys on 74, joten nauhamaisessa varastointitekniikassa joudutaan varaamaan tila 45140 reaalityylle, kun taas aktiivisarakemuotoinen varastointitapa vaatii tilan 39525 tyylle.

Kuten kuvasta 17.2 havaitaan, on nauhan sisälläkin suuri joukko nollatermejä. Mikäli tämä tila voitaisiin jättää varastoimatta säästyisi paljon muistitilaa. Se onnistuu erityisesti iteratiivisten ratkaisijoiden tapauksessa, joista seuraavissa kappaleissa enemmän.

Nauhan sisällä olevien nollien lukumäärä yleensä kasvaa probleeman koon kasvaessa. Tarkastellaan esimerkkinä neliölaattaa, jonka neljäsosa mallitetaan bikubisella BFS-elementeillä joissa on neljä vapausastetta solmua kohden. Määritellään matriisin tiheys nollasta eroavien alkioiden ja koko täyden symmetrisen matriisin varastoitavien alkioiden lukumäärän suhteena

$$\text{tiheys} = 100 \frac{M_{\neq 0}}{\frac{1}{2}N(N+1)},$$

jossa  $N$  on vapausasteiden lukumäärä ja  $M_{\neq 0}$  on nollasta eroavien alkioiden lukumäärä diagonaalilla ja yläkolmiossa. Taulukossa 17.1 on esitetty kerroinmatriisin

**Taulukko 17.1** Jäykästi tuetun laatan neljännes, BFS-elementti, tietoja kerroinmatriisista.  $B$  on puolinauhanleveyden maksimiarvo (diagonaali mukaanlukien) ja  $B_{rms}$  on vastaava neliöllinen keskiarvo käytettäessä aktiivisarakeratkaisijaa,  $M_{nauha}$  on varastoitavien matriisialkioiden lukumäärä käytettäessä nauharatkaisijaa  $M_{nauha} = NB$ ,  $N_{profiili}$  on vastaavasti aktiivisarakeremuodossa varastoitavien matriisialkioiden lukumäärä ja  $M_{\neq 0}$  vain nollasta eroavien alkoiden lukumäärä.

verkko	$N$	$B$	$B_{rms}$	$M_{nauha}$	$M_{profiili}$	$M_{\neq 0}$	tiheys [%]
1×1	1	1	1	1	1	1	100.0
4×4	49	22	16	1078	721	551	45.0
10×10	361	46	41	16606	14269	5540	8.5
30×30	3481	126	122	438606	417189	60326	1.0

tiheyden muuttuminen esimerkkitehtävässä erilaisilla elementtiverkoilla laskettaessa.

## 17.2 Suorat eliminaatiomenetelmät

### 17.2.1 Croutin ja Choleskyn hajotelmat

Yhtälösystemin (17.1) ratkaisu Gaussin eliminaatiolla merkitsee matriisin  $A$  hajotelman suorittamista joko muodossa

$$A = LDU$$

tai

$$A = L^* U \quad L^* = LD, \quad (17.2)$$

joissa  $D$  on diagonaalimatriisi ja  $L, U$  ala- ja yläkolmiomatriiseja, joiden diagonaalitermit ovat ykkösiä. Hajotelmaa (17.2) kutsutaan Croutin hajotelmaksi. Mikäli matriisi  $A$  on symmetrinen saadaan Choleskyn hajotelma

$$A = \tilde{L}\tilde{L}^T, \quad \text{missä} \quad \tilde{L} = LD^{\frac{1}{2}}.$$

Choleskyn hajotelmaa voidaan siten käyttää vain tilanteissa, joissa kerroinmatriisi on *positiivisesti definiitti*.

Yhtälösystemin (17.1) ratkaisu hajotelman  $LDL^T$  avulla tapahtuu siten neljäsä vaiheessa:

- muodostetaan systemimatriisin hajotelma

$$A = LDU$$

- kuormavektorin redusointi

$$\mathbf{Lz} = \mathbf{b}$$

- diagonaalilla skaalaus

$$\mathbf{Dy} = \mathbf{z}$$

- ja lopuksi takaisinsijoitus

$$\mathbf{Uu} = \mathbf{y}.$$

Sovellettaessa Gaussin eliminaatioprosessia nauhamaiseen matriisiin havaitaan nauhamaisuuden periytyvän myös hajotelmamatriiseihin  $\mathbf{L}$  ja  $\mathbf{U}$ . Nauhan sisällä olevat nollalohkot sensijaan eivät säily, vaan tapahtuu ns. täyttymistä. Erilaiset eliminaatiotavat tuottavat erilaisen täyttymisasteen, vrt. alirakennetekniikka, jota selvitetään myöhemmissä kappaleissa.

**Esimerkki 17.1** Diskretoitaessa yksidimensioinen lämmönjohtumisprobleema

$$-ku'' = \bar{f}, \quad u(0) = 0, u'(L) = 0$$

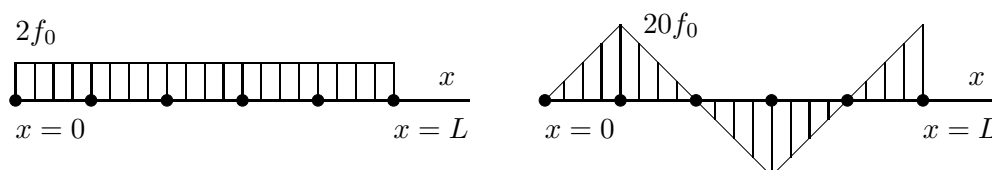
viidellä lineaarisilla elementillä päädytään yhtälösystemiin

$$\frac{k}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ -12 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right) f_0 h = \begin{bmatrix} 14 \\ 2 \\ -10 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} f_0 h, \quad (17.3)$$

eli

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f},$$

kun kuormitus koostuu kahdesta komponentista oheisen kuvan mukaisesti ja  $h = L/5$ .



Suoritetaan kerroinmatriisin  $\mathbf{LU}$  ja  $\mathbf{LDL}^T$  hajotelmat, kuormavektorin reduktio sekä systeemin ratkaisu takaisinsijoituksella.

Jaetaan matriisi  $\mathbf{K}$  dimensiottomaksi tekijällä  $k/h$ . Vähennetään näin saadun matriisin  $\mathbf{K}$  toisesta vaakarivistä luvulla  $-\frac{1}{2}$  kerrottu ensimmäinen vaakarivi:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$



Näin on kaksi ylintä vaakariviä saatettu yläkolmiomuotoon. Seuraavaksi vähennetään yllä olevan matriisin kolmannelta vaakarivista luvulla  $-\frac{2}{3}$  kerrottu toinen vaakarivi:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seuraavaksi yllä olevan matriisin neljännestä vaakarivista vähennetään kertoimella  $-\frac{3}{4}$  kerrottu kolmas vaakarivi:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Viimeisenä vaiheena vähennetään yllä olevan matriisin alimmasta vaakarivista kertoimella  $-\frac{4}{5}$  kerrottu neljäs vaakarivi, jolloin päädytään yläkolmiomatriisiin  $\mathbf{U}$  ja alakolmiomatriisi saadaan käyttämistämme kerroinalkioista  $-\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{2}{3}$ ,  $-\frac{3}{4}$  ja  $-\frac{4}{5}$ :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix}.$$

Totea kertomalla että  $\mathbf{K} = \mathbf{LU}$ .

Helposti nähdään yhteys alakolmiomatriisin  $\mathbf{L}$  ja yläkolmiomatriisin  $\mathbf{U}$  välillä, josta saadaan  $\mathbf{LDL}^T$  hajotelma

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

eli siis  $\mathbf{U} = \mathbf{DL}^T$ .

Kuormavektorin redusointi alakolmiomatriisin  $\mathbf{L}$  avulla tapahtuu seuraavasti:

$$\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 14 \\ 2 + \frac{1}{2}14 \\ -10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ -10 + \frac{2}{3}9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ -4 \\ 2 + \frac{3}{4}(-4) \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ -4 \\ -1 \\ 7 + \frac{4}{5}(-1) \end{pmatrix},$$

joten

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ -4 \\ -1 \\ \frac{31}{5} \end{pmatrix} \frac{f_0 h^2}{k}, \quad \text{josta} \quad \mathbf{y} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -3 \\ -\frac{4}{5} \\ 31 \end{pmatrix} \frac{f_0 h^2}{k}.$$

Ratkaisu saadaan helposti takaisinsijottamalla  $\mathbf{u} = \mathbf{L}^T \mathbf{y}$ :

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -3 \\ -\frac{4}{5} + \frac{4}{5}31 \\ 31 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -3 + \frac{3}{4}24 \\ 24 \\ 31 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 6 + \frac{2}{3}15 \\ 15 \\ 24 \\ 31 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 + \frac{1}{2}16 \\ 16 \\ 15 \\ 24 \\ 31 \end{pmatrix}$$

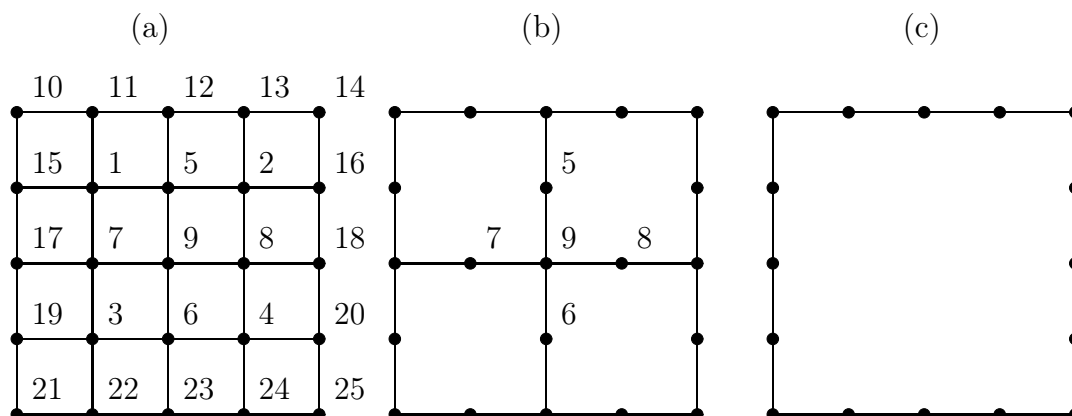
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ 15 \\ 24 \\ 31 \end{pmatrix} \frac{f_0 h^2}{k}.$$

### 17.2.2 Aaltorintamatekniikka

Aaltorintamatekniikalle ominainen piirre on systemimatriisin kokoamisen (elementtimatriisien osuuksista) ja eliminoinnin samanaikaisuus. Tässä menetelmässä systemimatriisi ei milloinkaan esiinny koottuna tietokoneen keskusmuistissa. Bruce Ironsin 1960 luvun loppupuolella kehittämä aaltorintamamenetelmä mahdollisti suurempien tehtävien ratkaisun kuin mitä olisi ollut mahdollista muilla eliminointitekniikoilla senaikaisten tietokoneiden keskusmuistin pienuuden takia. Vieläkin se on tehokas keino suurten tehtävien suoraan ratkaisuun, vaikka virtuaalimuistitekniikka mahdollistaa todellisen keskusmuistin kokoa suurempien tehtävien ratkaisun. Erittäin suurten tehtävien ratkaisu suoritetaan nykyisin iteratiivisia algoritmeja käyttäen, jolloin muistitilan tarve on huomattavasti pienempi suoraan eliminointiin verrattuna. Yksityiskohtaisen selostuksen aaltorintamatekniikasta löytää esimerkiksi lähteestä [25]

### 17.2.3 Alirakennetekniikka

Alirakennetekniikka soveltaa staattisen kondensaation ideaa. Tarkastellaan asiaa esimerkin avulla. Kuvassa 17.3 on esitetty prosessin kulku kaksidimensioisessa tapauksessa, jossa diskretointi on suoritettu nelisolmuisilla bilineaarisilla elementeillä ja otaksutaan yksinkertaisuuden vuoksi, että jokaisessa solmussa on yksi vapausaste.



**Kuva 17.3** Alirakennetekniikan periaate.

Alkuperäinen elementtiverkko on kuvan 17.3a mukainen. Ensimmäisessä vaiheessa muodostetaan neljä makroelementtiä, joiden sisältä eliminoidaan solmujen 1-4 vapausasteet jolloin päädytään kuvan 17.3b tilanteeseen. Seuraavassa vaiheessa yhdistetään neljä makroelementtiä kahdeksi makroelementiksi, joiden sisältä eliminoidaan solmujen 5 ja 6 vapausasteet. Nämä kaksi makroelementtiä yhdistetään viimein koko verkon kattavaksi superelementiksi, jonka sisältä kondensoidaan solmujen 7-9 vapausasteet, jolloin päädytään kuvan 17.3c tilanteeseen.

Näin on saatu jäykkymatriisiin koko huomattavasti alkuperäistä pienemmäksi; tosin se ei ole enää nauhamainen vaan täysi matriisi. Matriisin täyttymisaste hajoitelman yhteydessä on kylläkin osoittautunut alirakennetekniikassa pienemmäksi kuin nauhamaisen alkuperäisen systeemin hajoitelman suorittamisessa. Alirakennetekniikan haittapuolena on huomattavasti hankalampi ohjelmointi erityisesti epä-säännöllisten elementtiverkkojen yhteydessä.

## 17.3 Iteratiiviset menetelmät

Iteratiiviset lineaarisen yhtälösystemin ratkaisumenetelmät voidaan jakaa pääluokkaan, eli stationäärisiin- ja epästationäärisiin menetelmiin. Stationäärisiksi kutsutaan muotoa

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$$

olevia iteraatioita joissa sekä  $\mathbf{B}$  että  $\mathbf{c}$  eivät saa riippua iteraatiokierroksesta  $k$ . Klassiset iteraatiot kuten Jacobi, Gauss-Seidel ja ylirelaksaatiomenetelmät kuuluvat tähän luokkaan. Epästationääriset iteraatiot taas sisältävät informaatiota, joka muuttuu joka iteraatiokierroksella, kuten esimerkiksi konjugaattigradiennimenetelmän parametrit, jotka ovat jäännös- ja suuntavektoreiden sisätuloja.

### 17.3.1 Yksinkertaisia iteraatioalgoritmeja

Konstruoidaan systeemille (17.1) ekvivalentti yhtälöryhmä siirtämällä termi  $\mathbf{Ax}$  yhtälön oikealle puolelle ja lisäämällä puolittain termi  $\mathbf{Mx}$ , jossa  $\mathbf{M}$  on jokin sopivan yksinkertainen matriisi, eli

$$\mathbf{Mx} = (\mathbf{M} - \mathbf{Ax}) + \mathbf{b}. \quad (17.4)$$

Yhtälöt (17.1) ja (17.4) ovat tietenkin ekvivalentteja, mutta systeemi (17.4) antaa mahdollisuuden iteratiiviseen ratkaisuun, jolloin mielivaltaisesta aloitusvektorista  $\mathbf{x}^{(0)}$  (voi olla nollavektori), askeleittain päädytään kohti tarkempaa tulosta, eli saadaan iteraatiokaava

$$\mathbf{Mx}^{(k+1)} = (\mathbf{M} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}. \quad (17.5)$$

On huomattava, että mikä tahansa matriisi  $\mathbf{M}$  ei ole sovelias. Toisaalta sen olisi oltava mahdollisimman yksinkertainen, jotta iteratiivinen ratkaisu olisi kannattavaa. Mitä lähempänä  $\mathbf{M}$  on alkuperäistä matriisia  $\mathbf{A}$  sen parempi. Iteraation (17.5) suppeneminen eli konvergointi<sup>4</sup> on tietenkin riippuvainen matriiseista  $\mathbf{M}$  ja  $\mathbf{A}$ . Merkitään askeleella  $k$  olevaa virhettä  $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}$ , jolloin iteraatiokaavasta (17.5) saadaan

$$\mathbf{M}\mathbf{e}^{(k+1)} = (\mathbf{M} - \mathbf{A})\mathbf{e}^{(k)}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}^{(k+1)} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{A})\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{B}\mathbf{e}^{(k)}.$$

Jokaisella iteraatioaskeleella virhe kerrotaan (toivottavasti pienentävällä) tekijällä  $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ , joten  $k$ :n askeleen jälkeen senhetkinen virhe suhtautuu alkuperäiseen virheeseen yhtälön

$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{B}^k \mathbf{e}^{(0)}$$

mukaisesti.

Yllä olevasta yhtälöstä nähdään heti, että iteraatioalgoritmi (17.5) suppenee vain, jos matriisin  $\mathbf{B}$  kaikki ominaisarvot ovat itseisarvoltaan ykköistä pienempiä, toisin sanoen

$$|\lambda_i(\mathbf{B})| < 1.$$

Konvergenssin määrää siten matriisin  $\mathbf{B}$  itseisarvoltaan suurin ominaisarvo, ja tätä arvoa kutsutaan myös matriisin  $\mathbf{B}$  *spektraalisäteeksi*.

Täten voidaan matriisin  $\mathbf{M}$  hyvälle valinnalle asettaa seuraavat kaksi, toisilleen ristiriitaista ehtoa:

- Yhtälö  $\mathbf{Mx}^{(k+1)} = (\mathbf{M} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$  on oltava ratkaistavissa yksinkertaisesti. Täten matriisin  $\mathbf{M}$  olisi oltava joko diagonaali- tai kolmiomatriisi.

<sup>4</sup>Mikäli iteraatio ei suppene sen sanotaan hajaantuvan eli divergoivan; tilanne joka pyritään kaikin keinoin välttämään.

- Matriisin  $\mathbf{M}$  pitäisi olla mahdollisimman lähellä matriisia  $\mathbf{A}$ , jolloin iteraatiomatriisin  $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{A}) = \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$  ominaisarvot olisivat itseisarvoltaan mahdollisimman pieniä.

Kolme yksinkertaista kandidaattia matriisiksi  $\mathbf{M}$  ovat:

1.  $\mathbf{M}$  on  $\mathbf{A}$ :n diagonaali (Jacobin menetelmä),
2.  $\mathbf{M}$  on  $\mathbf{A}$ :n alakolmio (Gaussin-Seidelin menetelmä),
3.  $\mathbf{M}$  on edellisten kombinaatio jolloin saadaan ylirelaksaatiomenetelmä, jonka lyhenne SOR (successive overrelaxation).

Merkitään jäykkyysmatriisin  $\mathbf{A}$  jakoa diagonaalimatriisin, ala- ja yläkolmiomatriisin summaksi seuraavasti:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U} \quad \text{ja} \quad \mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{A}).$$

Täten iteraatiokaavat mainituille menetelmille ovat:

1. Jacobi ( $\mathbf{M} = \mathbf{D}$ )

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1} [\mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U}) \mathbf{x}^{(k)}] = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)}),$$

2. Gauss-Seidel ( $\mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{D}$ )

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{U} \mathbf{x}^{(k)}), \quad (17.6)$$

3. ylirelaksaatiomenetelmä ( $\mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + (1 - \omega)/\omega \mathbf{D} = \mathbf{L} + (1/\omega) \mathbf{D}$ )

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{L} + \frac{1}{\omega} \mathbf{D})^{-1} \left[ \mathbf{b} - \left( \frac{1 - \omega}{\omega} \mathbf{D} + \mathbf{U} \right) \mathbf{x}^{(k)} \right], \quad (17.7)$$

missä  $\omega$  on relaksaatioparametri  $1 \leq \omega < 2$ . Iteraatiokaavoja (17.6) ja (17.7) ei kuitenkaan käytetä, vaan iterointi tapahtuu niiden ekvivalenteissa muodoissa

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{D}^{-1} (\mathbf{L} \mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{U} \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}), \quad (17.8)$$

ja

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (1 - \omega) \mathbf{x}^{(k)} - \omega \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{L} \mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{U} \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}). \quad (17.9)$$

Kirjoitetaan yllä olevat iteraatiokaavat komponenttimuodossa, josta ne on helppo ohjelmoida algoritmiksi ( $\mathbf{A} = [A_{ij}]$ ,  $\mathbf{b} = \{b_i\}$ ):

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{(k)} \right),$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n A_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

Optimaaliselle ylirelaksaatioparametrin arvolle voidaan johtaa lauseke

$$\omega_{opt} = 1 + \lambda_n,$$

jossa  $\lambda_n$  on iterointimatriisin  $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$  suurin ominaisarvo. Jacobin, Gauss-Seidelin ja ylirelaksaatiomenetelmän suppenemisnopeus on riippuvainen iteraatiomatriisin  $\mathbf{B}$  suurimman ominaisarvosta. Tämä on taas riippuvainen yhtälösystemin koosta ikävällä tavalla. Mitä suurempi systeemi sen varmemmin iteraatiomatriisin suurin ominaisarvo on lähellä ykköstä. Elementtimenetelmässä syntyvien suurien yhtälösystemien ratkaisuun nämä yksinkertaiset iteraatiot ovat siten liian hitaita. Niitä voidaan kuitenkin käyttää osana ns. moniverkkoalgoritmia.

**Esimerkki 17.2** Tarkastellaan edellä mainittujen menetelmien suppenemistä esimerkin avulla, ja suoritetaan yhtälösystemin (17.3) ratkaisu Jacobin, Gaussin-Seidelin ja ylirelaksaatiomenetelmällä. Pyritään promillen tarkkuuteen käytettäessä lopetuskriteeriä

$$\|\mathbf{K}\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{f}\|_{\infty} < TOL \|\mathbf{f}\|_{\infty},$$

eli  $TOL = 0,001$ .

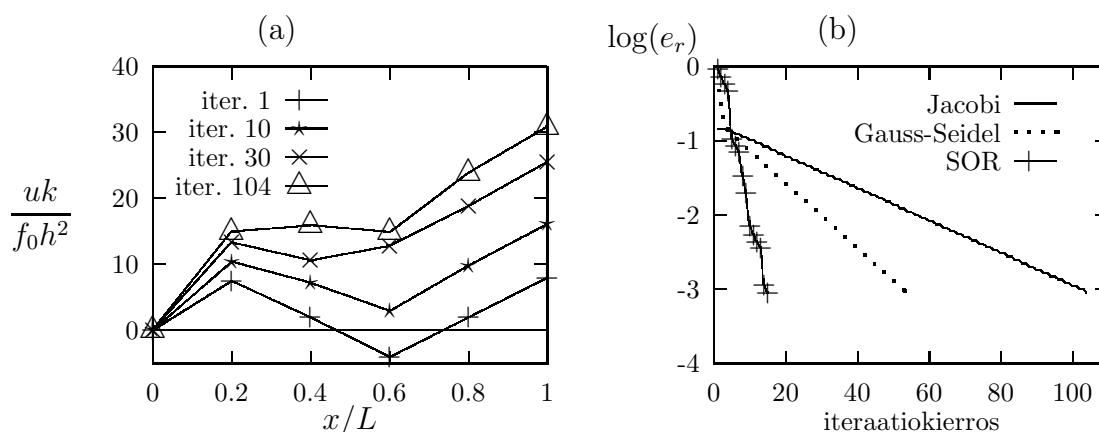
Jacobin menetelmän matriisi  $\mathbf{M}$  on jäykkyysmatriisin diagonaali, joten

$$\mathbf{M} - \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iteraatio suppenee hitaasti ja haluttu tarkkuus saavutetaan vasta 104 iteraation jälkeen. Tutkittaessa iteraation kulkua havaitaan globaalien muodon suppenen hitaasti, kun taas korkeataajuuksiset komponentit iteraatio vangitsee hyvin jo ensimmäisen iteraation jälkeen. Kuvassa 17.4 ratkaisun kulku on piirretty ensimmäisen ja muutamien myöhempien iteraatioiden jälkeen.

Gaussin-Seidelin menetelmän matriisit  $\mathbf{M}$  ja  $\mathbf{M} - \mathbf{K}$  ovat

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} - \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



**Kuva 17.4** Yhtälösystemin ratkaisu klassisilla iteraatioilla: (a) ratkaisun approksimaatio askeleilla 1, 10, 30 ja 104 Jacobin menetelmässä, (b) suhteellinen virhe iteraatiokierrosten funktiona eri menetelmillä.

**Taulukko 17.2** Ratkaisuvektorin ja residuaalin alkioita.

$i$	Jacobi		Gauss-Seidel		SOR		tarkka
	$u_i$	$g_i$	$u_i$	$g_i$	$u_i$	$g_i$	$u_i$
1	14.957	-0.43306E-02	14.953	-0.89394E-02	15.016	0.12366E-01	15
2	15.918	-0.78341E-02	15.915	-0.11702E-01	16.019	0.11629E-01	16
3	14.887	-0.11338E-01	14.889	-0.13083E-01	15.011	-0.13615E-02	15
4	23.867	-0.12676E-01	23.876	-0.13083E-01	24.004	-0.60054E-02	24
5	30.860	-0.70071E-02	30.876	0.00000E-00	31.004	-0.79493E-03	31

Voidaan osoittaa Gaussin-Seidelin menetelmän yhden iteraatioaskeleen vastaavan noin kahta Jacobin iteraatiota. Näin voidaan todeta myös esimerkiksi, sillä vaadittu tarkkuus saavutetaan 53 iteraation jälkeen. Iteraation suppeneminen on samantyyppistä kuin Jacobin iteraation tapauksessa, eli matalataajuuksinen komponentti suppenee hitaimmin.

Ylirelaksaatiomenetelmän optimaalinen relaksaatioparametri on tässä esimerkiksi

$\omega \approx 1.6$ , jolloin iteraatio suppenee 15 kierroksessa. Suhteellisen residuaalin maksiminormin pieneneminen on esitetty kuvassa 17.4b. Ratkaisuvektori on esitetty taulukossa 17.2. Huomaa, että vaikka residuaalilta vaaditaan promillen suhteellista tarkkuutta, ei siirtymien ratkaisuvektori ole lähellä edes prosentin tarkkuutta Jacobin ja Gaussin-Seidelin menetelmissä.

### 17.3.2 Minimointialgoritmejä

Yhtälösystemin (17.1) ratkaisu on ekvivalentti minimointiongelman

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b} \right), \quad (17.10)$$

ratkaisulle, mikäli matriisi  $\mathbf{A}$  on symmetrinen ja positiivisesti definiitti  $n \times n$  matriisi. Tässä luvussa tarkastellaan kahta algoritmia, gradientti- ja konjugaattigradienttimenetelmää (liittogradienttimenetelmä) minimointitehtävän (17.10) ratkaisemiseksi.

#### 17.3.2.1 Gradienttimenetelmä

Merkitään vektoriarvoisen skalaarifunktion gradienttia  $f' = \mathbf{g}$ , eli

$$f' = \mathbf{g} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T.$$

Lisäksi määritellään funktion  $f$  Hessen matriisi  $f'' = \mathbf{H}$

$$f'' = \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Kvadraattiselle funktiolle  $f$  pätee

$$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \quad \text{ja} \quad f''(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}.$$

Etsitään minimointiongelman ratkaisua seuraavassa muodossa

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}$$

jossa  $\mathbf{d}^{(k)}$  on hakusuunta ja  $\alpha^{(k)}$  on askelpituus. Funktion  $f$  Taylorin kehitelmä on

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^{(k+1)}) &= f(\mathbf{x}^{(k)}) + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} \\ &= f(\mathbf{x}^{(k)}) + \alpha^{(k)} \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}^{(k)} + \frac{1}{2} (\alpha^{(k)})^2 \mathbf{d}^{(k)T} \mathbf{H}(\mathbf{v}) \mathbf{d}^{(k)}, \end{aligned}$$

missä vektori  $\mathbf{v}$  on väliltä  $(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k+1)})$ . Termi  $(\alpha^{(k)})^2 \mathbf{d}^{(k)T} \mathbf{H} \mathbf{d}^{(k)}$  on aina positiivinen, sillä  $\mathbf{H}$  otaksutaan positiivisesti definiitiksi. Mikäli vaaditaan ehto  $f(\mathbf{x}^{(k+1)}) < f(\mathbf{x}^{(k)})$ , on tällöin oltava voimassa epäyhtälö

$$\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{d}^{(k)} < 0 \quad \text{kun} \quad 0 < \alpha \ll 1,$$

missä on merkitty  $\mathbf{g}^{(k)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)})$ . Mikäli nyt valitaan

$$\mathbf{d}^{(k)} = -\mathbf{g}^{(k)},$$



saadaan menetelmä jota kutsutaan gradienttimenetelmäksi tai jyrkimmän laskun menetelmäksi.

Optimaalinen askelpituus  $\alpha^{(k)}$  määritetään ehdosta

$$f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}) = \min_{\alpha \geq 0} f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)}).$$

Merkitään  $g(\alpha) = f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)})$ , jolloin minimipisteessä pätee  $dg/d\alpha = 0$ . Ketju-derivoimalla saadaan lauseke

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\alpha} &= f'(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{d}^{(k)} = [\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)}) - \mathbf{b}]^T \mathbf{d}^{(k)} \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b})^T \mathbf{d}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{d}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{d}^{(k)} = 0, \end{aligned}$$

josta tarkaisemalla optimaalinen askelpituus on

$$\alpha^{(k)} = -\frac{\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{d}^{(k)}}{\mathbf{d}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{d}^{(k)}} = \frac{\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{g}^{(k)}}{\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{g}^{(k)}}.$$

Gradienttimenetelmän algoritmi voidaan siten kirjoittaa seuraavasti. Lähdetään aloitusvektorista  $\mathbf{x}_0$ , iteroidaan

$$\mathbf{g}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}, \quad (17.11)$$

$$\alpha^{(k)} = \frac{\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{g}^{(k)}}{\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{g}^{(k)}}, \quad (17.12)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha^{(k)} \mathbf{g}^{(k)}. \quad (17.13)$$

Edellä esitetty iteraatiokaava vaatii kaksi matriisi-vektori kertomista. Algoritmi voidaan kirjoittaa myös muodossa, jossa on vain yksi matriisi-vektori kertominen, jolloin menetelmän työmäärä askelta kohden huomattavasti pienenee. Tämä perustuu siihen, että gradienttia  $\mathbf{g}$  (jota voidaan kutsua myös jäännökseksi eli residuaaliksi) ei lasketa suoraan yhtälöstä (17.11a) vaan edellisen iteraatioaskeleen gradientista seuraavasti

$$\mathbf{g}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{b} = \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)} - \alpha^{(k)} \mathbf{g}^{(k)}) - \mathbf{b} = \mathbf{g}^{(k)} - \alpha^{(k)} \mathbf{A} \mathbf{g}^{(k)}.$$

Gradienttimenetelmän algoritmi voidaan kirjoittaa nyt uudessa muodossa

$$\alpha^{(k)} = \frac{\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{g}^{(k)}}{\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{g}^{(k)}}, \quad (17.14)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha^{(k)} \mathbf{g}^{(k)}, \quad (17.15)$$

$$\mathbf{g}^{(k+1)} = \mathbf{g}^{(k)} - \alpha^{(k)} \mathbf{A} \mathbf{g}^{(k)}, \quad (17.16)$$

missä  $k = 0, 1, \dots$ . Alkuarvauksesta  $\mathbf{x}^{(0)}$  lasketaan  $\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}$ .

## 17.3.2.2 Liittogradienttimenetelmä

Konjugaattigradienttimenetelmässä hakusuunnat  $\mathbf{d}^{(k)}$  valitaan siten, että hakusuunnat konjugoivat, eli ovat ortogonaalisia jäykkyyismatriisilla  $\mathbf{A}$  painotetun sisätulon mielessä

$$\mathbf{d}^{(i)T} \mathbf{A} \mathbf{d}^{(j)} = 0, \quad i \neq j.$$

Konjugaattigradienttimenetelmän algoritmi voidaan kirjoittaa useissa ekvivalenteissa muodoissa jotka eroavat toisistaan muistitilan tarpeen ja laskentatyön määrän suhteen. J.K. Reid on vertaillut konjugaattigradienttimenetelmän eri versioita laskentatyön määrän, muistitilan tarpeen ja tarkkuuden suhteen [53], ja hänen tuloksensa näyttäisivät suosivan seuraavanlaista algoritmia:

$$\alpha^{(k)} = \frac{\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{g}^{(k)}}{\mathbf{d}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{d}^{(k)}}, \quad (17.17)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}, \quad (17.18)$$

$$\mathbf{g}^{(k+1)} = \mathbf{g}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{A} \mathbf{d}^{(k)}, \quad (17.19)$$

$$\beta^{(k)} = \frac{\mathbf{g}^{(k+1)T} \mathbf{g}^{(k+1)}}{\mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{g}^{(k)}}, \quad (17.20)$$

$$\mathbf{d}^{(k+1)} = -\mathbf{g}^{(k+1)} + \beta^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}, \quad (17.21)$$

missä  $k = 0, 1, \dots$ . Alkuarvauksesta  $\mathbf{x}^{(0)}$  lasketaan  $\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{A} \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}$  ja asetetaan  $\mathbf{d}^{(0)} = -\mathbf{g}^{(0)}$ .

Konjugaattigradienttimenetelmä voidaan periaatteessa lukea suoriin menetelmiin kuuluvaksi, sillä se antaa tarkan ratkaisun  $n:n$  askeleen jälkeen, kun kaikki avaruuden  $R^n$  suunnat on käyty lävitse, mikäli laskennassa ei tapahdu pyöristysvirheitä. Edellisessä kappaleessa oleva pieni esimerkki iteroituu kylläkin viidellä iteraatiolla. Konjugaattimenetelmän eri versioiden yksityiskohtaisempi johto löytyy lähteestä [2], jossa on esitetty myös menetelmän virheanalyysi. Helppotajuinen johto ja virheanalyysi on esitetty myös lähteessä [18].

Gradienttimenetelmälle voidaan johtaa virhearvio energianormissa

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A = \left[ (\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x})^T \mathbf{A} (\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}) \right]^{1/2},$$

ja se on [18]

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \left( 1 - \frac{1}{C(\mathbf{A})} \right)^{k/2} \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A, \quad (17.22)$$

missä  $\mathbf{x}$  on minimointitehtävän tarkka ratkaisu ja  $C(\mathbf{A})$  on matriisin  $\mathbf{A}$  häiriöalttius. Tästä voidaan päätellä, että suhteelliseen tarkkuuteen  $TOL$  pääsemiseksi tarvittavien iteraatioiden määrä on

$$I \geq 2C(\mathbf{A}) \log \frac{1}{TOL}. \quad (17.23)$$

Vastaavasti konjugaattigradienttimenetelmälle pätee virhearvio [18]

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq 2 \left( \frac{\sqrt{C(\mathbf{A})} - 1}{\sqrt{C(\mathbf{A})} + 1} \right)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A, \quad (17.24)$$

josta iteraatiomäärä

$$I \geq \frac{1}{2} \sqrt{C(\mathbf{A})} \log \frac{2}{TOL}. \quad (17.25)$$

### 17.3.2.3 Pohjustettu liittogradienttimenetelmä

Arvioista (17.23) ja (17.25) havaitaan, että iteraatiomäärä on suoraan verrannollinen jäykkyysmatriisin  $\mathbf{A}$  häiriöalttiuteen. Tätä riippuvuutta voidaan lieventää käyttämällä muuttujain vaihtoa, eli  $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ , missä  $\mathbf{C}$  on positiivisesti definiitti  $n \times n$  matriisi. Täten minimointiongelma (17.10) muuntuu muotoon

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}} F(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{C}^{-T} \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{C}^{-T} \mathbf{b} \right) = \min_{\mathbf{y}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \tilde{\mathbf{b}} \right),$$

missä on merkitty

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C}^{-T} \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1}, \quad \text{ja} \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{C}^{-T} \mathbf{b}.$$

Mikäli merkitään  $\mathbf{M} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$ , voidaan konjugaattigradienttimenetelmän algoritmi (17.17) kirjoittaa pohjustetussa muodossa [2], [30]:

#### 17.3.2.3.1 PCG-algoritmi (engl. *Preconditioned Conjugate Gradient*):

1. alustus

- (a) muodosta pohjustin  $\mathbf{M}$  (tai suoraan  $\mathbf{M}^{-1}$ ),
- (b) laske aloitusvektori  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$  ja ratkaise suunta  $\mathbf{d}_0 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_0$  sekä laske  $\tau_0 = \mathbf{r}_0^T \mathbf{d}_0$

2. iteroi  $i = 0, 1, 2, \dots$  kunnes saavutetaan riittävä tarkkuus:

- (a) muodosta:  $\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{d}_i$ ,  $\alpha_i = \tau_i / \mathbf{d}_i^T \mathbf{s}$ ,
- (b) päivitä:  $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \alpha_i \mathbf{d}_i$ ,  $\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \alpha_i \mathbf{s}$ ,
- (c) suorita pohjustinoperaatio:  $\mathbf{z} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_{i+1}$ ,
- (d) laske:  $\tau_{i+1} = \mathbf{r}_{i+1}^T \mathbf{z}$ ,  $\beta_i = \tau_{i+1} / \tau_i$ ,
- (e) päivitä:  $\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{z} + \beta_i \mathbf{d}_i$ .

Oheisessa algoritmässä on merkitty  $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} = -\mathbf{g}$ . Iteraation suppenemista voidaan testata laskemalla jäännösvektorin normi  $\|\mathbf{r}\|$  tai  $\sqrt{\tau}$  parametrilla, joka on oikeastaan jäännösvektorin pohjustimen käänteismatriisilla painotettu normi  $\sqrt{\tau} = \|\mathbf{r}\|_{M^{-1}} = (\mathbf{r}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r})^{1/2}$ .

Matriisia  $\mathbf{M}$  kutsutaan pohjustimeksi ja se pyritään valitsemaan siten, että matriisin  $\tilde{\mathbf{A}}$  häiriöalttius olisi huomattavasti pienempi kuin alkuperäisen jäykkymatriisin  $\mathbf{A}$ , eli

$$C(\tilde{\mathbf{A}}) = C(\mathbf{C}^{-T} \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1}) = C(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}) \ll C(\mathbf{A}).$$

Havaitaan, että optimaalinen pohjustus saavutetaan kun  $\mathbf{M} = \mathbf{A}$ . Tämä edellyttäisi kuitenkin matriisin  $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$  hajotelman muodostamista. Suosittu tapa on käyttää epätäydellistä  $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$  hajotelmaa pohjustimena, jossa matriisin nauhan sisäiset nollalkiot säilytetään nollina, ts. jätetään tarkassa hajotelmassa syntyvä nauhan täyttyminen huomiotta. Seuraavassa luvussa kerrotaan lisää erilaisista pohjustustavoista.

### 17.3.3 Pohjustinstrategioista

Pohjustimen valinta ja sen laskenta on ehkä koko iteraatioprosessin tärkein vaihe. Yleisimmät pohjustusmenetelmät voidaan jaotella seuraaviin luokkiin:

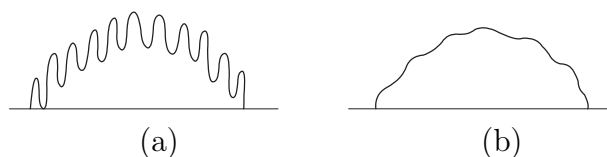
1. klassisiin stationääriin iteraatioihin perustuvat pohjustimet kuten Jacobi, SSOR,
2. epätäydelliset  $\mathbf{L}\mathbf{U}$  tai  $\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$  hajotelmat,
3. polynomipohjustimet,
4. harva approksimaatio pohjustimen käänteismatriisille  $\mathbf{H} = \mathbf{M}^{-1} \approx \mathbf{A}^{-1}$  ja
5. monitasopohjustimet.

Muita menettelyjä on myös olemassa jotka perustuvat ratkaistavan ongelman erikoisuuteeseen.

Pohjustinta sanotaan implisiittiseksi mikäli sen käytössä joudutaan ratkaisemaan lineaarinen yhtälö ja eksplisiittiseksi mikäli pohjustinaskel voidaan suorittaa matriisivektori kertolaskuna. Eksplisiittiset pohjustimet ovat suhteellisen helppoja ohjelmoida vektori- ja rinnakkaisprosessoritietokoneilla verrattuna implisiittisiin pohjustimiin.

### 17.3.4 Moniverkkoalgoritmi

Edellä todettiin yksinkertaisten iteraatioiden, kuten Jacobin iteraation, suppenevan hitaasti. Menetelmän ominaisuuksia tarkemmin tutkien on se kuitenkin nopea ratkaisun korkeataajuuksisten komponenttien vangitsijana, kuva 17.5 (lähteestä [52]).



**Kuva 17.5** Iteraatiivirheen kehittyminen Jacobin iteraatiossa: (a) alkuarvaus, (b) muutaman iteraatiokierroksen jälkeen virhe ei ole juuri pienentynyt, mutta on rauhoittunut [52].

Ratkaisun matalataajuuksiset komponentit suppenevat hitaimmin ja tekevät kyseisten iteraatiomenetelmien käytön suurten elementtimenetelmässä syntyvien yhtälösystemien ratkaisussa kannattamattomaksi.

Moniverkkoratkaisijan idea on käyttää useita diskretoinnin tasoja, ja ratkaisun matalataajuuksiset komponentit vangitaan harvassa verkossa. Moniverkkoalgoritmin kaksi oleellista vaihetta ovat:

- relaksaatiovaihe, jossa ratkaisun korkeataajuuksiset komponentit vangitaan yksinkertaisella iteraatiolla, esim. Jacobin tai Gauss-Seidelin iteraatiolla (relaksaatiota suoritetaan useilla diskretointitasoilla),
- korjausvaihe, jossa ratkaisun matalataajuuksiset komponentit vangitaan ratkaisemalla ongelma hyvin harvassa verkossa.

Moniverkkoalgoritmi esitetään useissa lähteissä (esim. [32], [2]) muodossa, jossa prosessi aloitetaan mielivaltaisesta alkuarvauksesta hienoimmassa verkossa ja relaksoiden kohti karkeinta verkkoa, jossa suoritetaan korjaus ja palataan takaisin korjaten ja relaksoiden kohti hienointa verkkoa. Vieläkin tehokkaampi ja luonnollisempi tapa on johtaa hienoimman verkon iteraatiolle alkuarvaus karkeimman verkon ratkaisusta [52].

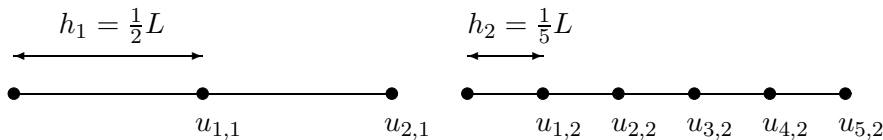
Yksinkertainen kaksiverkkoalgoritmi voisi olla seuraavanlainen:

1. ratkaistaan systeemi harvassa verkossa  $\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ ,
2. interpoloidaan hienon verkon arvot harvasta verkosta  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{F} \mathbf{x}_1$ ,
3. suoritetaan muutama relaksaatioiteraatio hienossa verkossa,
4. muunnetaan jäännös  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2$  harvempaan verkkoon  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{C} \mathbf{r}_2$ ,
5. ratkaistaan harvan verkon korjaus  $\mathbf{A}_1 \Delta \mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_1$ ,
6. siirretään korjaus hienoon verkkoon ja lisätään edellisiin hienon verkon arvoihin  $\Delta \mathbf{x}_2 = \mathbf{F} \Delta \mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2^{uusi} = \mathbf{x}_2^{vanha} + \Delta \mathbf{x}_2$ ,
7. siirrytään kohtaan 3.

Matriisi  $\mathbf{F}$  on interpolaatio hienoon verkkoon ja vastaavasti  $\mathbf{C}$  on “keskiarvoistus” harvaan verkkoon, joka on  $\mathbf{F}$ :n transpoosi. On huomattava, että kaksitasomenetelmä ei ole systeemin suoraa ratkaisua tehokkaampi menetelmä, mutta kelpaa moniverkkoalgoritmin idean esittelyyn.

Voidaan osoittaa, että moniverkkoalgoritmin suppenemisnopeus ei ole riippuvainen tehtävän koosta, eli vapausasteiden lukumäärään hienossa verkossa, mikä on suuri etu tavanomaisiin iteraatioihin verrattuna. Lisäksi moniverkkoalgoritmi on asympotoottisesti optimaalinen työmäärän suhteen.

**Esimerkki 17.3** Tutkitaan esimerkiongelmaa kaksitasomenetelmällä, jossa hienossa verkossa on viisi elementtiä ja harvassa kaksi.



Merkitään harvaa verkkoa alaindeksillä 1 ja hienoa vastaavasti indeksillä 2, siten  $h_1 = L/2$  ja  $h_2 = L/5$ . Interpolaatiomatriisiksi  $\mathbf{F}$  saadaan yksinkertaisesti

$$\begin{Bmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \\ u_{4,2} \\ u_{5,2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{Bmatrix} \quad \text{eli} \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{F}\mathbf{u}_1.$$

Siirretään kuormavektori siirtomatriisilla  $\mathbf{C}$  harvaan verkkoon

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{C}\mathbf{f}_2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 14 \\ 2 \\ -10 \\ 2 \\ 7 \end{Bmatrix} f_0 h = \begin{Bmatrix} 0 \\ 31/5 \end{Bmatrix} f_0 h.$$

Ratkaistaan yhtälösystemi tarkasti harvassa verkossa

$$\frac{2k}{5h} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 31/5 \end{Bmatrix} f_0 h \quad \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 31/2 \\ 31 \end{Bmatrix} \frac{f_0 h^2}{k}.$$

Interpoloidaan hienon verkon aloitusvektori harvan verkon ratkaisusta

$$\mathbf{u}_2^{(0)} = \mathbf{F}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 31/2 \\ 31 \end{Bmatrix} \frac{f_0 h^2}{k} = \frac{31}{5} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix} \frac{f_0 h^2}{k} = \begin{Bmatrix} 6.2 \\ 12.4 \\ 18.6 \\ 24.8 \\ 31.0 \end{Bmatrix} \frac{f_0 h^2}{k}.$$

Suoritetaan relaksaatio Jacobin iteraatiolla

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2^{(1)} &= \mathbf{u}_2^{(0)} + \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{f}_2 - \mathbf{K}_2 \mathbf{u}_2^{(0)}) \\ &= \left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \frac{1}{2}(14 - \frac{31}{5}(2 - 2)) \\ \frac{1}{2}(2 - \frac{31}{5}(-1 + 4 - 3)) \\ \frac{1}{2}(-10 - \frac{31}{5}(-2 + 6 - 4)) \\ \frac{1}{2}(2 - \frac{31}{5}(-3 + 8 - 5)) \\ 7 - \frac{31}{5}(-4 + 5) \end{array} \right) \frac{f_0 h^2}{k} \\ &= \left( \begin{array}{c} 13.2 \\ 13.4 \\ 13.6 \\ 25.8 \\ 31.8 \end{array} \right) \frac{f_0 h^2}{k}. \end{aligned}$$

Muutaman relaksaatioiteraation jälkeen jäännös siirretään harvaan verkkoon, jossa ratkaisu suoritetaan tarkasti. Harvan verkon korjaus siirretään ja lisätään hienon verkon arvoihin jne. Voidaan todeta että tässä esimerkissä yksi moniverkkoalgoritmin kierros antoi hyvän likiarvon ratkaisun matalataajuuksisille komponentille.

## 17.4 Menetelmien vertailua

Lineaarisen yhtälösystemin ratkaisumenetelmiä voidaan vertailla toisiinsa ratkaisuun käytetyn työmäärän ja vaadittavan muistitilan määrän suhteen. Gaussin algoritmiin perustuvan  $\mathbf{LDL}^T$  tai  $\mathbf{LU}$  hajotelman suorittaminen on työmäärältään (peruslaskutoimitusten määrä) luokkaa

$$W \sim \frac{1}{2} N B^2$$

missä  $N$  on tuntemattomien lukumäärä ja  $B$  puolinauhan leveys. Kuormavektorin redusointi ja takaisinsijoitus vaatii  $2NB$  operaatiota, joten asympotoottisesti hajotelman suorittaminen on selvästi työläämpi toimenpide. Kahdessa paikkadimensiossa puolinauhan leveys on luokkaa  $\sqrt{N}$ , joten tällöin yhtälösystemin ratkaisun vaatima työmäärä on luokkaa  $N^2$ .

Iteratiivisten algoritmien työmäärän arviointi ei ole yhtä yksinkertaista. Mikäli iteraation lopetuskriteeriksi valitaan tarkkuus, joka on sama kuin diskretointitarkkuus, voidaan työmäärälle johtaa asympotoottisia lausekkeita. Taulukoon 17.3 on koottu vertailu muutaman menetelmän laskuoperaatioiden asympotoottisista arvioista tarkasteltuna erikseen toisen ja neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälöille

**Taulukko 17.3** Lineaarisen yhtälösystemin ratkaisumenetelmien asymptoottisia laskutoimitusmääräarvioita,  $W \sim CN^k$ ,  $N =$  tuntemattomien lkm.

kertaluku	$k - 2$ dim.	$k - 3$ dim.	menetelmä
2	1.5	1.33	konjugaattigradietti
	1.25	1.17	häiriövaimennettu konj. grad.
	2	2.33	Choleskyn ja Croutin hajotelmat
	1.5	2	alirakennetekniikka
	1	1	moniverkkoalgoritmi
4	2	1.67	konjugaattigradietti
	1.67	1.5	häiriövaimennettu konj. grad.
	2	2.33	Choleskyn ja Croutin hajotelmat
	1.5	1.67	alirakennetekniikka
	1	1	moniverkkoalgoritmi

sekä kahdessa että kolmessa dimensiassa [18]. Moniverkkoalgoritmi on asymptoottisesti optimaalinen yhtälösystemin ratkaisumenetelmä, ja sen työmääräestimaatti

$$W \sim CN$$

on johdettu lähteessä [52].

Muistitilaa suorat ratkaisijat vaativat  $NB$  alkion verran, kun taas iteratiiviset algoritmit selviävät vain tuntemattomien lukumäärään verrannollisella tilantarpeella.

Pelkästään työmääräestimaatin avulla ei voida päätellä kullekin tietokonearkkitehtuurille soveltuva optimaalista algoritmia. Esimerkiksi monitasomenetelmät ovat vaikeasti rinnakkastettavia ja melko mahdottomia saada toimimaan optimaalisesti vektoriprosessorikoneilla. Optimaalisen algoritmin valinta käytössä olevalle tietokoneelle monisyinen ongelma.





# Luku 18

## Etenemistehtävien numeerinen ratkaisu - diffuusioyhtälö

Tässä luvussa tarkastellaan ajasta riippuvan parabolisen diffuusioyhtälön numeerista ratkaisua. Kertauksena luvusta 1 palautetaan mieliin kyseisen yhtälön ominaispiirteet.

Ratkaisumenetelmät esitetään aluksi skalaariyhtälön tapauksessa. Johdannossa käsitellään joitain differenssimenetelmiä sekä globaali, askeleittain jatkuva että epäjatkuva Galerkinin menetelmä. Myös menetelmien stabiilius- ja tarkkuusominaisuuksia tutkitaan.

### 18.1 Diffuusioyhtälö

Tutkitaan yksiulotteisen diffuusioyhtälön

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in (0, L) \quad (18.1)$$

ratkaisua reunaehdoilla  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  ja alkuehdolla  $u(x, 0) = \bar{u}_0 \sin(\pi x/L)$ . Sijoittamalla yhtälöön (18.1) reunaehdot toteuttava yrite

$$u(x, t) = y(t) \sin \frac{\pi x}{L}$$

saadaan alkuarvotettava

$$\frac{dy}{dt} + \frac{k \pi^2}{\rho c L^2} y = 0$$

alkuehdolla  $y(0) = \bar{u}_0$ . Otetaan käyttöön lyhennysmerkinnät  $\dot{y} = dy/dt$  ja  $a = k\pi^2/(\rho c L^2)$ . Huomataan, että kerroin  $a$  on aina positiivinen. Ratkaistavana on siten alkuarvotettava

$$\begin{cases} \dot{y} + ay = 0 \\ y(0) = \bar{y}_0 = \bar{u}_0. \end{cases} \quad (18.2)$$

Yhtälön (18.2) ratkaisu on

$$y(t) = \bar{y}_0 e^{-at}, \quad (18.3)$$

jolle  $y(t) \rightarrow 0$ , kun  $t \rightarrow \infty$ .

## 18.2 Yksiaskeldifferenssimenetelmiä

### 18.2.1 Eulerin menetelmät

Yksinkertaisin mahdollinen aikaintegrointimenetelmä on Eulerin menetelmä, jossa aikaderivaatta korvataan joko taaksepäin tai eteenpäin lausutulla aika-askeleen pituudella jaetulla differenssillä eli erotusosamäärällä. Oletetaan ratkaisu tunnetuksi ajanhetkellä  $t_n$  ja merkitään  $y(t_n) = y_n$ . Eteenpäin lausuttu Eulerin menetelmä saa siten muodon

$$\dot{y}_n + ay_n \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} + ay_n = 0,$$

missä  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ . Ratkaisu ajanhetkelle  $t_{n+1}$  on

$$y_{n+1} = (1 - \Delta ta)y_n. \quad (18.4)$$

Koska yhtälön (18.2) ratkaisu (18.3) on monotoonisesti pienenevä, on numeerisen ratkaisun (18.4) myös toteutettava ehto

$$|1 - \Delta ta| \leq 1,$$

josta seuraa stabiiliusehto suurimmalle sallitulle aika-askeleelle  $\Delta t$ :

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{kr}} = \frac{2}{a} = 2 \frac{\rho c L^2}{k \pi^2}.$$

Aikaintegrointimenetelmää, jonka käytettävyyttä rajoittaa suurin sallittu aika-askeleen pituus, sanotaan *ehdollisesti stabiiliksi*.

Taaksepäin lausuttu Eulerin menetelmä saadaan, kun aikaderivaattaa approksimoidaan ajanhetkellä  $t_{n+1}$  taaksepäin lausutun erotusosamäärän avulla:

$$\dot{y}_{n+1} + ay_{n+1} \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} + ay_{n+1} = 0.$$

Ratkaisu ajanhetkellä  $t_{n+1}$  on

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 + \Delta ta} y_n, \quad (18.5)$$

mistä havaitaan stabiiliusehdon

$$\left| \frac{1}{1 + \Delta ta} \right| \leq 1$$

toteutuvan kaikilla mahdollisilla aika-askeleen arvoilla  $\Delta t > 0$ . Tällaista aikaintegrointimenetelmää sanotaan *ehdoitta stabiiliksi*.

### 18.2.2 Crankin-Nicolsonin menetelmä

Crankin-Nicolsonin menetelmä tunnetaan myös havainnollisemmilla nimillä trapetsikaava tai puolisuunnikaskaava. Siinä aikaderivaattaa approksimoidaan aika-askeleen puolivälissä

$$\dot{y}(t_{n+\frac{1}{2}}) \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\Delta t} = \frac{1}{2} [\dot{y}(t_{n+1}) + \dot{y}(t_n)]. \quad (18.6)$$

Sijoittamalla edellä olevaan lausekkeeseen  $\dot{y}(t_{n+1}) = -ay(t_{n+1})$  ja  $\dot{y}(t_n) = -ay(t_n)$ , saadaan yhtälö

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} + \frac{1}{2}a(y_{n+1} + y_n) = 0,$$

mistä  $y_{n+1}$  voidaan ratkaista:

$$y_{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta ta}{1 + \frac{1}{2}\Delta ta} y_n. \quad (18.7)$$

Trapetsikaava on ehdoitta stabiili, sillä

$$\left| \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta ta}{1 + \frac{1}{2}\Delta ta} \right| \leq 1$$

kaikilla  $\Delta t > 0$ .

### 18.2.3 Keskipistekaava

Tarkastellaan seuraavassa hieman yleisempää tapausta, nimittäin ei-autonomista ongelmaa<sup>1</sup>

$$\dot{y}(t) + a(t)y(t) = 0 \quad \text{ja} \quad y(0) = \bar{y}_0. \quad (18.8)$$

Oletetaan kuitenkin, että kerroin  $a(t) \geq 0 \forall t$ . Tutkitaan trapetsikaavan (18.6)

$$\dot{y}(t_{n+\frac{1}{2}}) \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\Delta t} = \frac{1}{2} [\dot{y}(t_{n+1}) + \dot{y}(t_n)]$$

stabiiliutta kyseisessä tehtävässä. Sijoitetaan yhteydet  $\dot{y}(t_{n+1}) = -a(t_{n+1})y(t_{n+1})$  sekä  $\dot{y}(t_n) = -a(t_n)y(t_n)$  trapetsikaavaan, jolloin saadaan

$$y_{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta ta_n}{1 + \frac{1}{2}\Delta ta_{n+1}} y_n,$$

missä on merkitty  $a_n = a(t_n)$  jne. Havaitaan, että vakiokertoimisen yhtälön tapauksessa ehdoitta stabiili trapetsikaava ei välttämättä ole sitä sovellettuna ei-autonomiseen yhtälöön. Stabiiliusehdoksi saadaan epäyhtälö

$$\Delta t(a_n - a_{n+1}) \leq 4.$$

<sup>1</sup>Yhtälöä  $\dot{y} = f$  sanotaan autonomiseksi, mikäli funktio  $f$  ei riipu eksplisiittisesti ajasta.

Tarkastellaan nyt trapetsikaavan ns. keskipisteverstiota (engl. mid point rule). Tällöin yhtälö (18.8) lausutaan aika-askeleen puolivälissä

$$\dot{y}_{n+\frac{1}{2}} + a_{n+\frac{1}{2}}y_{n+\frac{1}{2}} = 0.$$

Ottamalla huomioon yhteydet

$$\dot{y}_{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} \quad \text{ja} \quad y_{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2}(y_{n+1} + y_n)$$

saadaan keskipistekaavan mukainen algoritmi

$$y_{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t a_{n+\frac{1}{2}}}{1 + \frac{1}{2}\Delta t a_{n+\frac{1}{2}}} y_n, \quad (18.9)$$

mikä helposti havaitaan ehdoitta stabiiliksi.

Keskipistekaavan (18.9) käyttö onkin suositeltavaa, sillä sen stabiiliusominaisuudet säilyvät myös sovellettuna epälineaarisiin ongelmiin, esim. jos kerroin  $a$  on ratkaisun  $y$  funktio.

#### 18.2.4 Eksplisiittiset ja implisiittiset menetelmät

Alkuarvotehtävän

$$\dot{y} + f(y) = 0, \quad (18.10)$$

missä  $f$  on jokin  $y$ :n funktio, ratkaisumenetelmää kutsutaan *eksplisiittiseksi* eli *avomeksi*, mikäli  $y_{n+1}$  voidaan lausua pelkästään ajanhetkellä  $t_n$  (tai sitä aikaisemmilla) määritelyjen suureiden avulla, eli

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(y_n).$$

Mikäli näin ei ole, on menetelmä *suljettu* eli *implisiittinen*, ja tällöin

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(y_{n+1}).$$

Tähän mennessä kuvatuista menetelmistä Euler eteenpäin on eksplisiittinen ja Euler taaksepäin sekä Crank-Nicolson ovat implisiittisiä menetelmiä. Jatkossa Eulerin menetelmiä kutsutaankin eksplisiittiseksi tai implisiittiseksi Eulerin menetelmäksi.

#### 18.2.5 Menetelmien tarkkuus ja stabiilius

Aikaintegrointimenetelmät (18.4), (18.5) ja (18.7) voidaan kirjoittaa muodossa

$$y_{n+1} = Ay_n = A^{n+1} \bar{y}_0, \quad (18.11)$$

missä  $A$  on vahvennustekijä (engl. amplification factor):

$$A = \begin{cases} 1 - \Delta t a & \text{eksplisiittinen Euler,} \\ (1 + \Delta t a)^{-1} & \text{implisiittinen Euler,} \\ (1 + \frac{1}{2}\Delta t a)^{-1}(1 - \frac{1}{2}\Delta t a) & \text{Crank-Nicolson.} \end{cases}$$

Merkitään yhtälön (18.2) tarkkaa ratkaisua  $Y$ :llä ja numeerista ratkaisua  $y$ :llä, ja käytetään lyhennysmerkintöjä:  $Y_n = Y(t_n)$ ,  $y_n = y(t_n)$ . Menetelmän paikallinen katkaisuvirhe  $\tau$  aika-askeleella  $n$  määritellään seuraavasti:

$$Y_n = AY_{n-1} + \tau_n. \quad (18.12)$$

Määritellään aproksimaation  $y$  ja tarkan ratkaisun  $Y$  välinen virhe:

$$e_n = Y_n - y_n.$$

Ottamalla huomioon yhtälöt (18.11) ja (18.12) saadaan

$$\begin{aligned} e_n &= Ae_{n-1} + \tau_n \\ &= \tau_n + A\tau_{n-1} + \dots + A^{n-1}\tau_1. \end{aligned}$$

Mikäli algoritmi on stabiili ts.  $|A| \leq 1$ , saadaan

$$\begin{aligned} |e_n| &\leq |\tau_n| + |A\tau_{n-1}| + \dots + |A^{n-1}\tau_1| \\ &\leq |\tau_n| + |A||\tau_{n-1}| + \dots + |A^{n-1}||\tau_1| \\ &\leq |\tau_n| + |\tau_{n-1}| + \dots + |\tau_1| \\ &\leq n \max_{1 \leq i \leq n} |\tau_i|. \end{aligned}$$

Otaksumalla, että menetelmän paikallinen katkaisuvirhe on luokkaa

$$|\tau(t)| \leq C\Delta t^{q+1}, \quad (18.13)$$

missä  $C$  on positiivinen aika-askeleesta  $\Delta t$  riippumaton vakio, saadaan

$$|e_n| \leq nC\Delta t^{q+1}.$$

Ottamalla huomioon yhteys  $n = t_n/\Delta t$ , tulee

$$|e_n| \leq Ct_n\Delta t^q. \quad (18.14)$$

Mikäli ehto (18.13) toteutuu, on yhtälöllä (18.11) määritelty algoritmi konsistentti ja  $q$  on menetelmän suppenemisnopeus.

Määritetään nyt edellisessä kappaleessa esitettyjen algoritmien paikalliset katkaisuvirheet. Ekspansiiviselle Eulerin menetelmälle saadaan Taylorin lauseen perusteella

$$\begin{aligned}\tau_n &= Y_n - AY_{n-1} \\ &= Y_{n-1} + \dot{Y}_{n-1}\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{Y}(t^*)\Delta t^2 - (1 - \Delta ta)Y_{n-1} \\ &= (\dot{Y}_{n-1} + aY_{n-1})\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{Y}_*\Delta t^2 \\ &= \frac{1}{2}\ddot{Y}_*\Delta t^2 = O(\Delta t^2).\end{aligned}$$

Ajanhetki  $t^*$  sijaitsee aika-askeleella  $(t_{n-1}, t_n)$ . Implisiittisen Eulerin menetelmän katkaisuvirhe on sama kuin eksplisiittisen Eulerin menetelmän, mutta trapetsikaavan eli Crankin-Nicolsonin menetelmän katkaisuvirhe on  $O(\Delta t^3)$ . Eulerin menetelmien tarkkuus on siten astetta  $q = 1$  ja trapetsikaavan  $q = 2$ .

Eulerin menetelmissä kerroin  $C$  lausekkeissa (18.13) ja (18.14) on verrannollinen ratkaisun toiseen aikaderivaattaan. Mikäli ratkaisu on eksponentiaalisesti vaimeneva, kuten on laita esimekkitaupauksessamme  $\dot{Y} + aY = 0$ , on  $\ddot{Y}(t) \leq a^2\bar{y}_0 \forall t$ . Jos tarkastelisimme ongelmaa  $\dot{Y} + aY = \bar{f}(t)$ , missä  $\bar{f}$ :n muutokset ovat nopeita, voi  $\ddot{Y}$  saada hyvinkin suuria arvoja.

## 18.3 Galerkinin menetelmät etenemistehtävien ratkaisussa

### 18.3.1 Globaali Galerkinin menetelmä

Aivan vastaavalla tavalla kuin elliptisten tasapaino-ongelmien yhteydessä voidaan alkuarvotyypinen etenemistehtävä ratkaista Galerkinin menetelmällä. Olkoon ratkaistavana ongelma

$$\begin{cases} \dot{y} + ay = \bar{f}, & 0 < t \leq T, \\ y(0) = \bar{y}_0, \end{cases}$$

jonka heikko muoto saadaan kertomalla yhtälö puolittain painofunktiolla  $w$  sekä integroimalla saatu lauseke halutun aikavälin yli:

$$\int_0^T (\dot{y} + ay)w dt = \int_0^T \bar{f}w dt.$$

Valitaan ratkaistavalle suurelle  $y$  astetta  $q$  oleva polynomiapproksimaatio:  $y = \bar{y}_0 + \sum_{i=1}^q t^i \alpha_i$  ja vastaavasti painofunktiolle  $w = \sum_{i=1}^q t^i w_i$ , eli matriisimerkinnöin

$$y = \bar{y}_0 + \mathbf{N}\boldsymbol{\alpha} = \bar{\mathbf{N}}\mathbf{y} \quad \text{ja} \quad w = \mathbf{N}\mathbf{w}.$$

Heikko muoto saa täten muodon

$$\mathbf{w}^T \left( \int_0^T \left( \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}} + a\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{N}} \right) dt \mathbf{y} - \int_0^T \mathbf{N}^T \bar{f} dt \right) = 0,$$

joka voidaan lyhyesti merkitä

$$\mathbf{w}^T (\bar{\mathbf{A}}\mathbf{y} - \bar{\mathbf{f}}) = 0,$$

missä

$$\bar{\mathbf{A}} = \int_0^T (\mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}} + a\mathbf{N}^T \mathbf{N}) dt \quad \text{ja} \quad \bar{\mathbf{f}} = \int_0^T \mathbf{N}^T \bar{f} dt.$$

Koska testifunktio on mielivaltainen on siten oltava

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{y} = [\bar{\mathbf{a}}_0 \ \mathbf{A}] \tilde{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{f}}.$$

Siirretään alkuehtoon liittyvät termit yhtälön oikealle puolelle, jolloin saadaan

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{a}}_0 \bar{y}_0,$$

missä

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_0^T (\mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}} + a\mathbf{N}^T \mathbf{N}) dt \\ \bar{\mathbf{a}}_0 &= \int_0^T \mathbf{N}^T dt. \end{aligned}$$

Huomaa, että kerroinmatriisi  $\mathbf{A}$  ei ole symmetrinen.

Globaali Galerkinin menetelmä kytkee toisiinsa ratkaistavan ongelman kaikki aikatasot. Siten se ei ole etenemistehtävissä luonteva ratkaisumenetelmä.

### 18.3.2 Aika-askeleittain jatkuva Galerkinin menetelmä

Globaalin Galerkinin menetelmän aika-askeleittain määritelty variantti voidaan muotoilla seuraavasti. Muodostetaan heikko muoto aika-askeleella  $(t_n, t_{n+1})$ :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\dot{y} + ay) w dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{f} w dt,$$

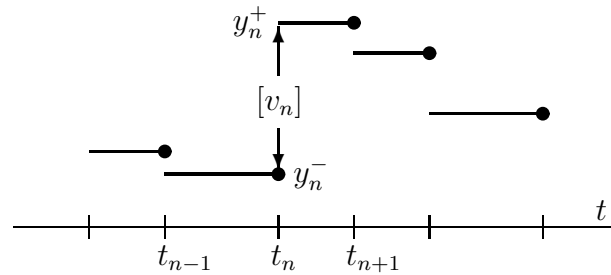
ja etsitään polynomimuotoinen astetta  $q$  oleva approksimaatio  $y$  joka toteuttaa alkuehdon  $y(t_n) = y_n$ . Painofunktioiksi voidaan valita sama kanta kuin yritefunktioille, jolloin saadaan jatkuva Galerkinin menetelmä astetta  $q$  tai astetta alhaisempi,  $t^i, i = 0, 1, \dots, q - 1$ , jolloin voidaan puhua jatkuvasta Petrovin-Galerkinin menetelmästä astetta  $q$ . Jatkossa käytetään lyhennysmerkintöjä  $gG(q)$ ,  $cG(q)$  ja  $cPG(q)$  merkitsemään astetta  $q$  olevaa globaalia, paloittain jatkuvaa Galerkinin ja paloittain jatkuvaa Petrovin-Galerkinin menetelmää.<sup>2</sup>

Tarkastellaan nyt vain Petrovin-Galerkinin menetelmää  $cPG(1)$ . Mikäli  $q = 1$ , paloittain lineaarinen funktio  $y$  toteuttaa

$$y_{n+1} - y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} ay dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{f} dt.$$

<sup>2</sup> Tämä merkintä poikkeaa lähteen [10] käyttämästä tavasta.





**Kuva 18.1** Epäjatkua Galerkinin menetelmä dG(0); merkintöjä.

Olkoon  $y = N_1 y_n + N_2 y_{n+1}$ , missä  $N_1 = (t_{n+1} - t)/\Delta t$  ja  $N_2 = (t - t_n)/\Delta t$ . Tällöin on

$$y_{n+1} - y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} a \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t} dt y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} a \frac{t - t_n}{\Delta t} dt y_{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{f} dt,$$

joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$(1 + \beta_{n+1})y_{n+1} = (1 - \beta_n)y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{f} dt, \quad (18.15)$$

missä

$$\beta_{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} a \frac{t - t_n}{\Delta t} dt, \quad \beta_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} a \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t} dt.$$

Mikäli  $a$  on vakio ja  $\bar{f} = 0$ , saadaan  $\beta_{n+1} = \frac{1}{2}\Delta t a = \beta_n$ , jolloin lineaarinen jatkuva Petrovin-Galerkinin menetelmä, cPG(1), johtaa samaan algoritmiin kuin trapetsikaava.

### 18.3.3 Epäjatkua Galerkinin menetelmä

Epäjatkuvassa Galerkinin menetelmässä joudutaan alkuehto ottamaan variaatio-muotoon mukaan. Astetta  $q$  oleva epäjatkua Galerkinin menetelmä, dG( $q$ ), määritellään seuraavasti. Ratkaistaan aika-askeleittain epäjatkua astetta  $q$  oleva polynomi  $y$  käyttäen heikkoa muotoa

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\dot{y} + ay) w dt + (y_n^+ - y_n^-) w_n^+ = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{f} w dt.$$

Painofunktiolle  $w$  käytetään samaa aika-askeleittain epäjatkuvaa astetta  $q$  olevaa polynomikantaa kuin yritefunktiollekin. Merkinnöillä  $y_n^+$  ja  $y_n^-$  tarkoitetaan raja-arvoja lähestyttäessä vuoroin ylhäältä tai alhalta käsin, eli

$$y_n^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} y(t_n + |\epsilon|), \quad y_n^- = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} y(t_n - |\epsilon|), \quad [y_n] = y_n^+ - y_n^-.$$

Merkintöjä on havainnollistettu kuvassa 18.1.

Epäjatkuvassa Galerkinin menetelmässä voidaan käyttää paloittain vakiota approksimaationa. Tällöin  $w = 1$  ja dG(0) menetelmä voidaan lausua seuraavasti

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} a y dt + y_n^+ = y_n^- + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{f} dt.$$

Koska  $y$  on vakio aika-askeleella  $(t_n, t_{n+1})$ , on luonnollista merkitä tätä arvoa  $y_{n+1}$ :llä. Tällöin on myös  $y_{n+1} = y_{n+1}^- = y_n^+$ . Käyttäen näitä merkintöjä voidaan dG(0) menetelmä kirjoittaa muodossa

$$(1 + \gamma_{n+1})y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{f} dt, \quad (18.16)$$

missä

$$\gamma_{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} a dt.$$

Mikäli  $a$  on vakio ja  $\bar{f} = 0$ , on menetelmä dG(0) identtinen implisiittisen Eulerin menetelmän kanssa.

Yleinen dG(q) menetelmä voidaan kirjoittaa muodossa: määritetään astetta  $q$  oleva polynomi  $y$  siten, että

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\dot{y} + ay) w dt + [y_n] w_n^+ = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{f} w dt,$$

missä painofunktio  $w$  on astetta  $q$ .

## 18.4 Diffuusioyhtälön semidiskreetti muoto

Tarkastellaan nyt yksiulotteisen diffuusioyhtälön (18.1) numeerista käsittelyä, kun ratkaisua  $u$  approksimoidaan paikan suhteen elementtimenetelmällä, ts.

$$u(x, t) = \mathbf{N}(x) \mathbf{u}(t).$$

Lisätään nyt yhtälöön (18.1) lähdetermi, eli tarkastellaan ongelmaa

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = \bar{f},$$

missä  $q$  on lämpövuoto  $q = -k \partial u / \partial x$ . Kerrotaan tämä painofunktiolla  $w$  ja integroidaan alueen  $x \in (0, L)$  yli, jolloin saadaan

$$\int_0^L \rho c \frac{\partial u}{\partial t} w dx + \int_0^L \frac{\partial q}{\partial x} w dx = \int_0^L \bar{f} w dx.$$

Osittaisintegroimalla keskimäinen termi saadaan muoto

$$\int_0^L \rho c \dot{u} w dx - \int_0^L q w' dx = \int_0^L \bar{f} w dx,$$

missä paikkakoordinaatin suhteen otettua derivaatta on merkitty pilkulla suureen oikeassa yläkulmassa. Sijoitetaan heikkoon muotoon elementtiapproksimaatio  $u(x, t) = \mathbf{N}(x)\mathbf{u}(t)$ , ja käytetään painofunktiolle sama kantaa, eli  $w(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{w}$ , jolloin saadaan yhtälö

$$\mathbf{w}^T (\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}) = 0.$$

Vektori  $\mathbf{f}$  voidaan lausua sisäisten ( $\mathbf{r}$ ) ja ulkoisten ( $\bar{\mathbf{f}}$ ) vuosuureiden erotuksena:

$$\mathbf{f} = \mathbf{r} - \bar{\mathbf{f}},$$

missä vektorit kootaan elementtiosuuksista

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^E \mathbf{r}^{(e)}, \quad \mathbf{r}^{(e)} = - \int_{I^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{q} dx, \quad (18.17)$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \sum_{e=1}^E \bar{\mathbf{f}}^{(e)}, \quad \bar{\mathbf{f}}^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{f}} dx. \quad (18.18)$$

Lämpökapasiteettimatriisi  $\mathbf{M}$  kootaan myös elementtiosuuksista

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^E \mathbf{M}^{(e)}, \quad \mathbf{M}^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \rho c \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx.$$

Diffuusioyhtälön semidiskreetti muoto

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_0 = \bar{\mathbf{u}}_0, \end{cases} \quad (18.19)$$

on käyttökelpoinen lähtökohta myös, jos yhtälö on epälineaarinen. Mikäli vuon  $q$  ja lämpötilan  $u$  välillä on lineaarinen yhteys, esim.  $q = -ku'$ , jonka diskreetti muoto on  $q = -k\mathbf{B}\mathbf{u}$ , seuraa sisäisen vuovektorin lausekkeeksi

$$\mathbf{r}^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \mathbf{B}^T k \mathbf{B} dx \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}.$$

Linearisessa tapauksessa semidiskreetti muoto (18.19) voidaan kirjoittaa yksinkertaisesti

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{f}} \\ \mathbf{u}_0 = \bar{\mathbf{u}}_0, \end{cases} \quad (18.20)$$

missä lämmönjohtavuusmatriisi kootaan elementtiosuuksista  $\mathbf{K}^{(e)}$  tavalliseen tapaan.

## 18.5 Diskreetti diffuusioyhtälö

Suoritetaan lineaarisen semidiskreetin diffuusioyhtälön (18.20) aikaintegrointi yleistytyllä keskipistekaavalla

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_{n+\alpha} = (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) / \Delta t, \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+\alpha} = (1 - \alpha)\dot{\mathbf{u}}_n + \alpha\dot{\mathbf{u}}_{n+1}, \\ \mathbf{u}_{n+\alpha} = (1 - \alpha)\mathbf{u}_n + \alpha\mathbf{u}_{n+1}, \end{cases} \quad (18.21)$$

mikä sisältää jo esitetyt algoritmit: eksplisiittinen Euler ( $\alpha = 0$ ), keskipistekaava ( $\alpha = \frac{1}{2}$ ) ja implisiittinen Euler ( $\alpha = 1$ ). Lausutaan yhtälö (18.20) ajanhetkellä  $t_{n+\alpha}$ :

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_{n+\alpha} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+\alpha} = \bar{\mathbf{f}}_{n+\alpha},$$

johon sijoittamalla yleistetyin keskipistekaavan (18.21) lausekkeet saadaan tuntemattoman vektorin  $\mathbf{u}_{n+1}$  ratkaisuyhtälöksi

$$(\mathbf{M} + \alpha\Delta t\mathbf{K})\mathbf{u}_{n+1} = (\mathbf{M} - (1 - \alpha)\Delta t\mathbf{K})\mathbf{u}_n + \Delta t\bar{\mathbf{f}}_{n+\alpha}. \quad (18.22)$$

Mikäli ratkaisu suoritetaan eksplisiittisellä Eulerin menetelmällä ja mikäli lämpökapasiteettimatriisi  $\mathbf{M}$  on diagonaalinen, on eteneminen aikatasolle  $t_{n+1}$  triviaalia:

$$\mathbf{u}_{n+1} = (\mathbf{I} - \Delta t\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})\mathbf{u}_n + \Delta t\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{f}}_n.$$

Kuten skalaariyhtälönkin tapauksessa tämän yksinkertaisen ja askelta kohden vähän laskentatyötä vaativan algoritmin käyttöä haittaa stabiiliusrajoitteesta seuraava suurin mahdollinen aika-askeleen koko. Tarkastellaan seuraavassa algoritmin (18.22) stabiiliusominaisuuksia.

## 18.6 Yleistetyin keskipistekaavan analyysi

Numeerisen analyysin ehkä kuuluisin teoreema on Laxin ekvivalenssiteoreema, joka voidaan lausua seuraavasti:

konsistenssi + stabiilius = välttämätön ja riittävä ehto menetelmän suppenemiselle.

On olemassa lukuisia tekniikoita, joilla menetelmän ominaisuuksia voidaan tutkia. Seuraavassa semidiskreetti diffuusioyhtälö diagonalisoidaan ominaismuotoja superponoimalla, jolloin yhtälöiden välinen kytkentä häviää.

### 18.6.1 Diagonalisointi ominaismuotosuperpositiolla

Ominaismuotosuperpositiomenettelyssä, jota usein kutsutaan myös spektraali- tai Fourier-analyysiksi, ratkaisu  $\mathbf{u}$  lausutaan ominaismuotojen  $\boldsymbol{\psi}_i$  kombinaationa

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^N y_i(t)\boldsymbol{\psi}_i,$$

missä skalaariarvoista funktiota  $y_i$  kutsutaan Fourier-kertoimeksi. Ominaismuodot ja niihin liittyvät ominaisarvot  $\lambda_i$  saadaan yleistetyin ominaisarvotehtävän

$$(\mathbf{K} - \lambda_i\mathbf{M})\boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (18.23)$$

ratkaisuna. Ominaisarvot muodostavat kasvavan jonon

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N,$$

ja ominaismuodot voidaan ortonormeerata siten, että

$$\boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_j = \delta_{ij},$$

missä  $\delta_{ij}$  on Kroneckerin delta. Ortonormaaliudesta seuraa välittömästi, että

$$\boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_i = \lambda_i \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_j = 0 \quad \text{kun} \quad i \neq j.$$

Sijoitetaan ominaismuotohajotelma semidiskreettiin diffuusioyhtälöön, jolloin saadaan

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_i \dot{y}_i + \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_i y_i) = \bar{\mathbf{f}}.$$

Kerrotaan edellä oleva yhtälö skalaaritulon mielessä puolittain ominaisvektorilla  $\boldsymbol{\psi}_j$ :

$$\sum_{i=1}^N (\boldsymbol{\psi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_i \dot{y}_i + \boldsymbol{\psi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_i y_i) = \boldsymbol{\psi}_j^T \bar{\mathbf{f}}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

mistä seuraa ominaismuotojen ortogonaalisuuden avulla

$$\begin{cases} \dot{y}_1 + \lambda_1 y_1 & = \bar{f}_1 \\ \dot{y}_2 + \lambda_2 y_2 & = \bar{f}_2 \\ \vdots & \\ \dot{y}_N + \lambda_N y_N & = \bar{f}_N, \end{cases}$$

missä on merkitty  $\bar{f}_i = \boldsymbol{\psi}_i^T \bar{\mathbf{f}}$ . Täten on riittävää tutkia vain skalaariyhtälön

$$\dot{y} + \lambda y = \bar{f} \tag{18.24}$$

ratkaisua alkuehdolla  $y(0) = \bar{y}_0$ .

### 18.6.2 Stabiilius

Suoritetaan alkuarvotehtävän (18.24) diskretointi yleistetyllä keskipistekaavalla (18.21), jolloin päädytään yhtälöön

$$(1 + \alpha \Delta t \lambda) y_{n+1} = (1 - (1 - \alpha) \Delta t \lambda) y_n + \Delta t \bar{f}_{n+\alpha}.$$

Vahvennustekijä on siten

$$A = \frac{1 - (1 - \alpha) \Delta t \lambda}{1 + \alpha \Delta t \lambda}.$$

Havaitaan, että yleistetty keskipistekaava on ehdoitta stabiili, mikäli parametri  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ . Mikäli näin ei ole, saadaan kriittiselle aika-askeleelle lauseke

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{kr}} = \frac{2}{(1 - 2\alpha)\lambda}.$$

Kriittinen aika-askel on sitä pienempi mitä suurempi ominaisarvo  $\lambda$  on.

Mikäli ongelman (18.1) paikkadiskretointi suoritetaan lineaarisilla elementeillä, ovat elementin lämmönjohtavuus- ja kapasiteettimatriisit

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{M}^{(e)} = \frac{\rho ch}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mikäli lämpökapasiteettimatriisi “lumpataan” eli käytetään diagonaalista muotoa<sup>3</sup>

$$\mathbf{M}^{(e)} = \frac{\rho ch}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

jakamalla alue  $x \in (0, L)$  tasamittaisiin elementteihin ( $N + 1$  kappaletta) saa ominaisarvotehtävä (18.23) muodon:

$$\left( \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} - \lambda_n \rho ch \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \psi_{n,1} \\ \psi_{n,2} \\ \psi_{n,3} \\ \vdots \\ \psi_{n,N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Yritetään  $n$ :nnen ominaismuodon ratkaisua muodossa  $\psi_{n,i} = \sin(\pi n i h / L)$ , jolloin  $i$ :nnes yhtälö on

$$\frac{k}{h} [-\sin(\pi n(i-1)h/L) + 2\sin(\pi n i h / L) - \sin(\pi n(i+1)h/L)] = \lambda_n \rho ch \sin(\pi n i h / L).$$

Yhtälö toteutuu mikäli ominaisarvo on

$$\lambda_n = \frac{2k}{\rho ch^2} (1 - \cos(n\pi h / L)).$$

Systeemin suurin ja pienin ominaisarvo ovat siten ( $h = L / (N + 1)$ ):

$$\lambda_1 = \frac{2k}{\rho ch^2} (1 - \cos(\pi h / L)) = \frac{k\pi^2}{\rho c L^2} + O((h/L)^2),$$

$$\lambda_N = \frac{2k}{\rho ch^2} (1 - \cos(N\pi h / L)) \approx \frac{4k}{\rho ch^2}$$

Eksplisiittisen Eulerin menetelmän kriittinen aika-askel on täten luokkaa

$$\Delta t_{\text{kr}} = \frac{2}{\lambda_N} \approx \frac{\rho ch^2}{2k} = \frac{\rho c L^2}{2k} \left( \frac{h}{L} \right)^2.$$

Mitä suurempi ratkaistava systeemi on, sitä pienemmäksi muuttuu kriittinen aika-askel. Alkuarvotehtäviä, joiden ominaisarvospektri ( $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ ) on laaja, sanotaan *kankeiksi* (engl. stiff).

<sup>3</sup>Lämpökapasiteettimatriisin ja varsinkin massamatriisin “lumpauksesta” kerrotaan lisää luvussa.

### 18.6.3 Konsistenssi ja konvergenssi

Tarkastellaan nyt yleistetyn keskipistekaavan

$$y_{n+1} = Ay_n, \quad \text{missä} \quad A = \frac{1 - (1 - \alpha)\Delta t\lambda}{1 + \alpha\Delta t\lambda},$$

katkaisuvirhettä. Kehitetään  $Y_{n+1}$  ja  $Y_n$  Taylorin sarjaksi ajanhetken  $t_{n+\alpha}$  ympäristössä

$$Y_{n+1} = Y_{n+\alpha} + \dot{Y}_{n+\alpha}(1 - \alpha\Delta t) + \frac{1}{2}\ddot{Y}_{n+\alpha}(1 - \alpha\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}\dddot{Y}_{n+\alpha}(1 - \alpha\Delta t)^3 + O(\Delta t^4),$$

$$Y_n = Y_{n+\alpha} + \dot{Y}_{n+\alpha}(-\alpha\Delta t) + \frac{1}{2}\ddot{Y}_{n+\alpha}(-\alpha\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}\dddot{Y}_{n+\alpha}(-\alpha\Delta t)^3 + O(\Delta t^4),$$

ja sijoitetaan ne katkaisuvirheen määritelmään, joka on kerrottu puolittain vahvenustekijän  $A$  nimittäjällä  $1 + \alpha\Delta t\lambda$ , jolloin saadaan:

$$(1 + \alpha\Delta t\lambda)\tau_{n+1} = (1 + \alpha\Delta t\lambda)Y_{n+1} - [1 + (1 - \alpha)\Delta t\lambda]Y_n$$

$$= (\dot{Y}_{n+\alpha} + \lambda Y_{n+\alpha})\Delta t + \frac{1}{2}[(1 - 2\alpha)\Delta t^2 + \alpha(1 - \alpha)\Delta t^3\lambda]\ddot{Y}_{n+\alpha} + O(\Delta t^3)$$

$$|\tau_{n+1}| \leq \frac{1}{2}\ddot{Y}_{n+\alpha}(1 - 2\alpha)\Delta t^2 + O(\Delta t^3).$$

Mikäli menetelmä on stabiili, eli  $|A| \leq 1$ , suppenee yleistetty keskipistekaava lineaarisesti, jos  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ , ja kvadraattisesti ainoastaan kun  $\alpha = \frac{1}{2}$ , eli

$$|e_n| < \begin{cases} Ct_n\Delta t, & \text{mikäli } \alpha \neq \frac{1}{2}, \\ Ct_n\Delta t^2, & \text{mikäli } \alpha = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

missä  $C$  on aika-askeleesta  $\Delta t$  riippumaton vakio.

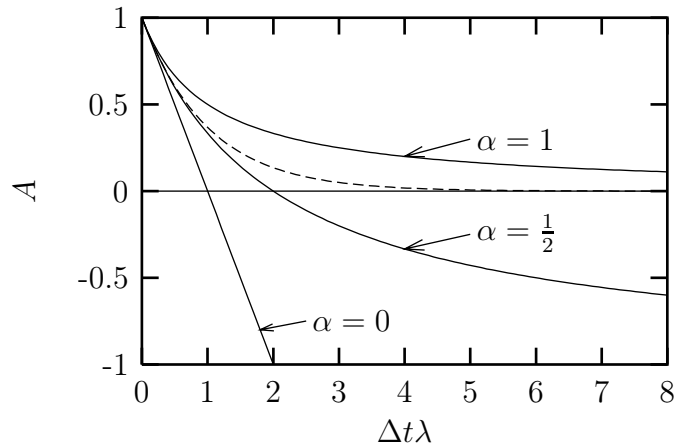
### 18.6.4 Muutamia huomioita

Edellä esitetyn perusteella parametrin arvon  $\alpha = \frac{1}{2}$  käyttö näyttäisi suositeltavalta, sillä se johtaa ehdoitta stabiiliin ja kertaluokkaa tarkempaan algoritmiin kuin muut yleistetyn keskipistekaavan tuottamat menetelmät. Sillä on kuitenkin eräs haittapuoli: se ei vaimenna korkeataajuuksia komponentteja ( $\lambda$  suuri) ja tuottaa tällöin heilehteleviä tuloksia. Tämän voi helposti havaita ratkaisemalla keskipistekaavalla yksiulotteinen tehtävä (18.24) ilman lähdetermiä  $\bar{f}$  ja käyttämällä vakioista aika-askelta. Numeeriseksi ratkaisuksi ajanhetkellä  $t_n$  saadaan

$$y_n = A^n \bar{y}_0 = \left( \frac{1 - \frac{1}{2}\lambda\Delta t}{1 + \frac{1}{2}\lambda\Delta t} \right)^n \bar{y}_0.$$

Mikäli nyt  $\lambda\Delta t$  on suuri, heilahtelee ratkaisu arvojen  $\pm\bar{y}_0$  ympärillä, sillä

$$A \longrightarrow -1, \quad \text{kun } \lambda\Delta t \longrightarrow \infty,$$



**Kuva 18.2** Vahvennustekijä  $A$  muutamalle yleistetyn keskipistekaavan menetelmälle:  $\alpha = 0$  on eksplisiittinen Euler,  $\alpha = \frac{1}{2}$  keskipistekaava ja  $\alpha = 1$  implisiittinen Euler. Tarkka ratkaisu ( $\exp(-\Delta t\lambda)$ ) on piirretty kuvaan katkoviivalla.

katso myös kuvaa 18.2. Heilahteluja ei tapahdu, mikäli vahvennustekijä  $A$  on positiivinen, eli  $\Delta t < 2/\lambda$ , mikä on sama kuin stabiiliusvaatimus eksplisiittiselle Eulerin menetelmälle. Näin pientä aika-askelta ei implisiittisten menetelmien kanssa kannata käyttää. Suurten systeemien tapauksessa heilahteluja esiintyy erityisesti silloin, kun alkuehdoissa on korkeataajuuksisia komponentteja tai ajan suhteen nopeita muutoksia.

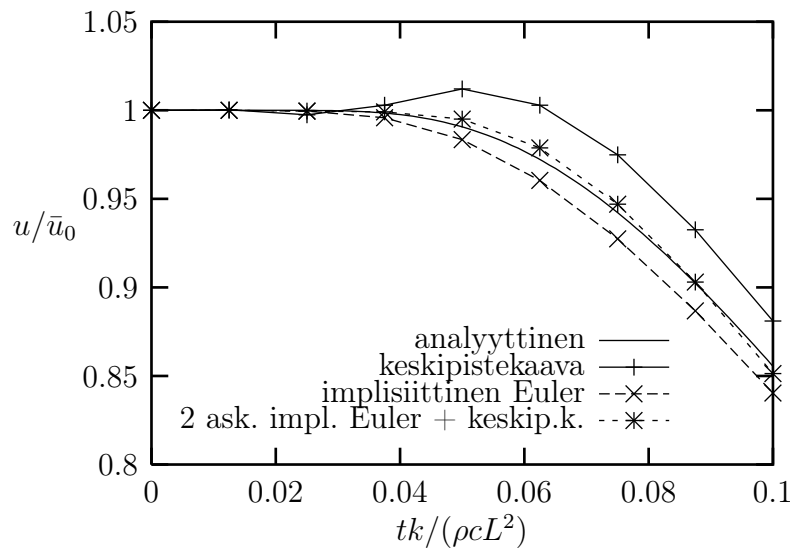
Keskipistekaavan tuottamia heilahteluja voi välttää joko (a) keskiarvoistamalla tai (b) käyttämällä välitömästi transientin vaiheen jälkeen implisiittistä Eulerin menetelmää muutaman askeleen verran ja vaihtamalla tämän jälkeen tarkempaan keskipistekaavaan. Muutama askel implisiittisellä Eulerilla ei tuhoa ratkaisun pitkän aikavälin tarkkuutta mutta estää keskipistekaavan tuottamat heilahtelut.

Tarkastellaan kolmidimensioisen diffuusioongelman

$$\begin{cases} \rho c \dot{u} - k \Delta u = 0 & \text{alueessa } \Omega = \{|x, y, z| < L\}, \\ u(x, y, z, 0) = \bar{u}_0 = \text{vakio,} & \text{alueessa } \Omega \text{ ja reunapinnalla } \partial\Omega, \\ u(x, y, z, t) = 0 & \text{reunapinnalla } \partial\Omega, t > 0, \end{cases}$$

numeerista ratkaisua aikavälillä  $(0, 0.1\rho cL^2/k)$  kuution muotoisessa alueessa, kun alkuehtona on tasainen lämpötila  $\bar{u}_0 > 0$  ja reunaehtona  $u = 0$ , kun  $t > 0$ . Tämä vastaa likimain vakiolämpöisen kappaleen äkillistä siirtämistä olosuhteisiin, jossa reunalämpötila laskee arvon  $\bar{u}_0$  verran. Koska analysoitava kappale ja sen reuna- sekä alkuehdot ovat symmetrisiä jokaisen koordinaattiakselin suhteen, voidaan tarkastella vain sen kahdeksasosaa, mikä on jaettu tasavälisesti trilineaarisiin elementteihin  $4 \times 4 \times 4$  jaolla.





**Kuva 18.3** Menetelmien vertailua kolmidimensioisessa äkillisen jäähtymisen esimerkkitapauksessa. Kuution keskipisteen lämpötilan muuttuminen.

Kuvassa 18.3 on esitetty implisiittisen Eulerin ja keskipistekaavan antamat tulokset kuution keskipisteen lämpötilan kehityksen alkuvaiheelle. Keskipistekaavan antama tulos “yliampuu”, joka on osoituksena edellä kuvatusta ongelmasta. Kuvaan on piirretty myös ratkaisu, jossa kaksi ensimmäistä askelta on suoritettu implisiittisellä Eulerin menetelmällä vaihtaen tämän jälkeen keskipistekaavaan. Näin saatu ratkaisu on lähinnä analyttistä ratkaisua, joka on myös piirretty kuvaan 18.3.

Luvussa 18.6.1 diagonalisointi suoritettiin semidiskreettiin yhtälöön, jonka diagonalisoituun muotoon ajan suhteen toteutettu diskreetointi muodostettiin. On syytä huomata, että tämä prosessi on kommutatiivinen, eli diagonalisointi voidaan suorittaa myös ajan suhteen diskreettiin yhtälösystemiin (18.22). Diagonalisoinnin ja aikadiskretoinnin kommutatiivisuutta on havainnollistettu seuraavalla diagrammilla.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{f}} & \xrightarrow{\text{aikadiskretointi}} & (\mathbf{M} + \alpha\Delta t\mathbf{K})\mathbf{u}_{n+1} = (\mathbf{M} - (1 - \alpha)\Delta t\mathbf{K})\mathbf{u}_n + \Delta t\bar{\mathbf{f}}_{n+\alpha} \\
 \downarrow \text{ominaismuotohajotelma} & & \downarrow \text{ominaismuotohajotelma} \\
 \dot{y} + \lambda y = \bar{f} & \xrightarrow{\text{aikadiskretointi}} & (1 + \alpha\Delta t\lambda)y_{n+1} = (1 - (1 - \alpha)\Delta t\lambda)y_n + \Delta t\bar{f}_{n+\alpha}
 \end{array}$$

### 18.6.5 Korkeamman asteen eksplisiittiset yksiaskelmenetelmät

Eksplisiittinen Eulerin menetelmä voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t i y_n.$$

Sijoittamalla tähän  $\dot{y}_n = -\lambda y_n$  saadaan yhtälö (18.4). Astetta tarkempi eksplisiittinen menetelmä saadaan, kun valitaan

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \dot{y}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{y}_n.$$

Sijoitetaan lausekkeeseen yhteys  $\ddot{y}_n = -\lambda \dot{y}_n = \lambda^2 y_n$ , jolloin saadaan kvadraattinen eksplisiittinen Eulerin menetelmä

$$y_{n+1} = (1 - \Delta t \lambda + \frac{1}{2} \Delta t^2 \lambda^2) y_n. \quad (18.25)$$

Stabiilusanalyysi, harjoitustehtävä 11, paljastaa kuitenkin, että kriittinen aika-askel ei kasva lineaariseen eksplisiittiseen Eulerin menetelmään verrattuna. Tämä on hyvin rajoittava vaatimus. Vaikka korkeamman asteen eksplisiittiset yksiaskelmenetelmät ovat tarkempia kuin yksinkertainen lineaarinen Eulerin menetelmä, ei niiden käyttö ole useinkaan taloudellisesti järkevää, sillä pienellä aika-askeleella laskettaessa lineaarisestikin suppeneva menetelmä on usein riittävän tarkka.

### 18.6.6 Korkeamman asteen implisiittiset yksiaskelmenetelmät

Korkea-asteinen implisiittinen yksiaskelmenetelmä voidaan konstruoida ennustamalla  $y_{n+1}$  arvojen  $y_n, \dot{y}_n, \ddot{y}_n, \dot{y}_{n+1}$  ja  $\ddot{y}_{n+1}$  avulla seuraavasti

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t(\alpha_0 \dot{y}_n + \alpha_1 \dot{y}_{n+1}) + \Delta t^2(\beta_0 \ddot{y}_n + \beta_1 \ddot{y}_{n+1}). \quad (18.26)$$

Yhtälössä on neljä vapaata parametria, jotka voidaan määrätä siten, että yhtälö toteutuu mahdollisimman korkeasteiselle polynomille  $y(t)$ . Vaatimalla yhtälön (18.26) toteutumista polynomeille  $y = t, y = t^2, y = t^3$  ja  $y = t^4$ , saadaan yhtälösystemi

$$\begin{cases} 1 &= \alpha_0 + \alpha_1, \\ 1 &= 2\alpha_1 + 2(\beta_0 + \beta_1), \\ 1 &= 3\alpha_1 + 6\beta_1, \\ 1 &= 4\alpha_1 + 12\beta_1, \end{cases}$$

jonka ratkaisu antaa parametreille arvot:  $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}, \beta_0 = -\beta_1 = \frac{1}{12}$ . Näin on saatu menetelmä

$$y_{n+1} = A y_n, \quad \text{missä} \quad A = \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta t \lambda + \frac{1}{12} \Delta t^2 \lambda^2}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \lambda + \frac{1}{12} \Delta t^2 \lambda^2}. \quad (18.27)$$

Havaitaan, että menetelmä on ehdoitta stabiili, mikäli  $\Delta t \lambda > 0$  ja  $A \rightarrow 1$  kun  $\Delta t \lambda \rightarrow \infty$ .

Sovellettaessa tätä algoritmia semidiskreettiin systeemiin  $\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{0}$  saadaan ratkaisuyhtälöksi

$$\left( \mathbf{M} + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{K} + \frac{1}{12} \Delta t^2 \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_{n+1} = \left( \mathbf{M} - \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{K} + \frac{1}{12} \Delta t^2 \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_n. \quad (18.28)$$

Yhtälön ratkaisu on kuitenkin huomattavan työläs ja paljon muistitilaa vaativa. Mikäli lämpökapasiteettimatriisi ei ole diagonaalinen, tällöin  $\mathbf{M}^{-1}$  on täysi, jolloin myös matriisitulo  $\mathbf{KM}^{-1}\mathbf{K}$  tuottaa täyden matriisin. Mikäli  $\mathbf{K}$  ja  $\mathbf{M}$  ovat harvoja ja dimensioiltaan suuria, ei ylimääräisen täyden apumatriisin varastoiminen tietokoneen muistiin ole mielekästä. Jos taas lämpökapasiteettimatriisi on diagonaalinen, matriisitulo  $\mathbf{KM}^{-1}\mathbf{K}$  voidaan helposti muodostaa, mutta tuloksena on edelleen matriisi, joka on huomattavasti tiheämpi kuin jäykkyysmatriisi  $\mathbf{K}$ . Mikäli systeemin (18.28) ratkaistaan jollain suoralla menetelmällä, on kerroinmatriisin hajotelman teko paljon enemmän aikaa ja muistitilaa vaativa toimenpide kuin yleistetyt keskipistekaavan (18.22) käyttö. Myös iteratiivisten lineaaristen ratkaisijoiden käyttö systeemiin (18.28) on ongelmallista. Yhtälön (18.28) kerroinmatriisin häiriöalttius on luokkaa  $[C(\mathbf{K})]^2$ , joten iteraatioimenetelmien suppenemisnopeus on huono.

Tarkastellaan nyt aproksimaatioon (18.26) perustuvaa menetelmää, jossa vahvennustekijän nimittäjään saadaan neliölauseke, jolla on merkittävä vaikutus semi-diskreettiä ongelmaa ratkaistaessa. Tätä käyttökelpoista algoritmia kutsutaan Calahanin menetelmäksi. Vaaditaan, että approksimaatio (18.26) on tarkka kolmannen asteen polynomille, joten se jättää yhden parametrin  $\alpha$  määräämättömäksi:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t [\alpha \dot{y}_n + (1 - \alpha) \dot{y}_{n+1}] + \frac{1}{6} [(3\alpha - 1) \ddot{y}_n + (3\alpha - 2) \ddot{y}_{n+1}].$$

Sovellettaessa yhtälöön  $\dot{y} + \lambda y = 0$  saadaan implisiittinen yksiaskelkaava

$$y_{n+1} = \frac{1 + (1 - \alpha)\Delta t\lambda - \frac{1}{6}(3\alpha - 2)\Delta t^2\lambda^2}{1 - \alpha\Delta t\lambda + \frac{1}{6}(3\alpha - 1)\Delta t^2\lambda^2} y_n. \quad (18.29)$$

Etsitään sellainen parametrin  $\alpha$  arvo, jolla vahvennustekijän nimittäjään saadaan neliölauseke

$$1 + (1 - \alpha)\Delta t\lambda - \frac{1}{6}(3\alpha - 2)\Delta t^2\lambda^2 = (1 + \beta\Delta t\lambda)^2.$$

Mikäli

$$\beta = \frac{1}{2}(1 - \alpha) \quad \text{ja} \quad \alpha = \pm\sqrt{3}/3,$$

saadaan vahvennustekijäksi lauseke

$$A = \frac{1 - \alpha\Delta t\lambda + \frac{1}{6}(3\alpha - 1)\Delta t^2\lambda^2}{[1 + \frac{1}{2}(1 - \alpha)\Delta t\lambda]^2}.$$

Koska  $A(\Delta t\lambda = 0) = 1$  ja vahvennustekijän kaltevuuskulma

$$\left. \frac{dA}{d(\Delta t\lambda)} \right|_{\Delta t\lambda=0} = -1$$

riippumatta parametrin  $\alpha$  arvosta, menetelmä on ainakin ehdollisesti stabiili. Toisaalta

$$A \longrightarrow \frac{\frac{2}{3}(3\alpha - 1)}{(1 - \alpha)^2} \quad \text{kun} \quad \Delta t\lambda \longrightarrow \infty,$$

ja valinnasta  $\alpha = -\sqrt{3}/3$  seuraa  $A(\infty) = -0.372$ . On helppo osoittaa, että tällä valinnalla  $|A| \leq 1$ , joten Calahanin menetelmä on ehdoitta stabiili.

Sovellettaessa Calahanin menetelmää semidiskreettiin systeemiin  $\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}$  suoritetaan muuttujien vaihto

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{u},$$

jolloin semidiskreetti yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Käyttäen lyhennysmerkintää  $\mathbf{K}^* = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$  saadaan Calahanin menetelmän ratkaisuyhtälösystemiksi

$$\left[\mathbf{I} + \frac{1}{2}(1 - \alpha)\Delta t\mathbf{K}^*\right]^2 \mathbf{x}_{n+1} = \left[\mathbf{I} - \alpha\Delta t\mathbf{K}^* + \frac{1}{6}(3\alpha - 1)\Delta t^2\mathbf{K}^*\right] \mathbf{x}_n.$$

Jos lämpökapasiteettimatriisi  $\mathbf{M}$  on diagonaalinen, tarvitaan ainoastaan kerroinmatriisin  $(\mathbf{I} + \frac{1}{2}(1 - \alpha)\Delta t\mathbf{K}^*)$  hajotelma, mikäli ratkaisu suoritetaan suoralla menetelmällä. Tällä on myös sama rakenne kuin matriisilla  $\mathbf{K}$ , joten ylimääräistä muistitilaa ei tarvita.

## 18.7 Moniaskelmenetelmät

Edellisissä luvuissa on käsitelty vain yksiaskelmenetelmiä eli menetelmiä, jotka si-  
tovat ratkaistavan suureen ja sen derivaattojen lausekkeet vain yhden aika-askelen  
alku ja loppupäässä. Tässä luvussa tarkastellaan menetelmiä, joiden ratkaisussa on  
mukana useampia aikatasoja. Syy useamman aikatason mukaanottoon on halu kon-  
struoida korkeamman asteen menetelmiä, jotka eivät tarvitse korkeamman kertalu-  
vun derivaattatermejä. Korotettaessa  $\mathbf{u}$ :n aikaderivaatan astetta, korotetaan myös  
lausekkeissa esiintyvän  $\mathbf{K}$ :n potenssia, mikä ei ole suotavaa.

Eksplisiittisten moniaskelmenetelmien käytettävyyttä rajoittaa stabiilius. Vaik-  
kakin näin voidaan konstruoida tarkempia integrointimenetelmiä kuin eksplisiitti-  
nen Euler, on niiden kriittinen aika-askel niin pieni, ettei katkaisuvirheen aste ole  
käytännössä merkitsevä. Täten tutkimmekin seuraavassa implisiittisiä moniaskelme-  
netelmiä.

Etsitään kaksiaskelmenetelmälle<sup>4</sup>

$$y_{n+1} = \alpha_{-1}y_{n-1} + \alpha_0y_n + \Delta t(\beta_{-1}\dot{y}_{n-1} + \beta_0\dot{y}_n + \beta_1\dot{y}_{n+1}) \quad (18.30)$$

parametrit siten, että lauseke on tarkka kolmannen asteen polynomeille. Näin saa-  
daan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_0, \\ 2 = \alpha_0 + \beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1, \\ 4 = \alpha_0 + 2\beta_0 + 4\beta_1, \\ 8 = \alpha_0 + 3\beta_0 + 12\beta_1, \end{cases}$$

<sup>4</sup> Kaavan menetelmä on eksplisiittinen ainoastaan mikäli  $\beta_1 = 0$ .

jonka ratkaisu on parametria vaille yksikäsitteinen:  $\alpha_{-1} = \alpha, \alpha_0 = 1 - \alpha, \beta_{-1} = -\frac{1}{12} + \frac{5}{12}\alpha, \beta_0 = \frac{2}{3}(1 - \alpha), \beta_1 = \frac{5}{12} - \frac{1}{12}\alpha$ . Yhtälö (18.30) redusoituu tällöin muotoon

$$y_{n+1} = \alpha y_{n-1} + (1 - \alpha)y_n + t \frac{1}{12} \Delta t [(5\alpha - 1)\dot{y}_{n-1} + 8(1 + \alpha)\dot{y}_n + (5 - \alpha)\dot{y}_{n+1}]. \quad (18.31)$$

Sijoittamalla yhtälöön yrite  $y_n = cA^n$ , missä  $c$  on määräämätön kerroin, ja ottamalla huomioon  $\dot{y} + \lambda y = 0$ , saadaan karakteristinen yhtälö

$$\left[1 + \frac{1}{12}\Delta t\lambda(5 - \alpha)\right] A^2 + \left[\alpha - 1 + \frac{2}{3}\Delta t\lambda(1 + \alpha)\right] A + \left[-\alpha + \frac{1}{12}\Delta t\lambda(5\alpha - 1)\right] = 0.$$

Mikäli  $\Delta t\lambda = 0$ , sen juuret ovat  $A_1 = 1$  ja  $A_2 = -\alpha$ , joten välttämätön ehto menetelmän stabiiliudelle on, että  $|\alpha| \leq 1$ . Stabiiliusehto on

$$0 \leq \Delta t\lambda \leq \frac{6(1 - \alpha)}{1 + \alpha},$$

joten menetelmä on ehdoitta stabiili ainoastaan, kun  $\alpha = -1$ . Tällöin  $A_2 = 1$  kaikilla  $\Delta t\lambda$  joten menetelmän tarkkuus pienenee; odotuksissahan oli luokkaa  $\Delta t^4$  oleva katkaisuvirhe, sillä menetelmä on konsistentti kolmannen asteen polynomille. Kun  $\alpha = -1$ , on karakteristisen yhtälön ratkaisu

$$A_1 = \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t\lambda}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\lambda}, \quad A_2 = 1 \quad \text{ja} \quad y_n = c_1 A_1^n + c_2.$$

Kun  $\Delta t\lambda$  on pieni ja  $y_1 = y_0 \exp(-\Delta t\lambda)$ , saadaan  $c_2 = \frac{1}{12}(\Delta t\lambda)^2$  ja kun  $n \rightarrow \infty$ , niin  $y_\infty \rightarrow O(\Delta t^2) \neq 0$ .

Dahlquist on kehittänyt kuuluisan teorian yleiselle  $k$ -askel menetelmälle, joka on muotoa

$$y_{n+1} = \alpha_1 y_n + \cdots + \alpha_{-k} y_{n+1-k} + \Delta t(\beta_1 \dot{y}_{n+1} + \cdots + \beta_{-k} \dot{y}_{n+1-k}) \quad (18.32)$$

ja on implisiittinen, mikäli  $\beta_1 \neq 0$ . Teorian päätulokset voidaan lausua kahtena teoreemana:

1. Ei ole olemassa eksplisiittistä moniaskelmenetelmää, joka on ehdoitta stabiili.
2. Ei ole olemassa ehdotta stabiilia moniaskelmenetelmää, jonka virhe olisi korkeampaa astetta kuin  $O(\Delta t^2)$ .

## Harjoitustehtäviä

1. Ratkaise alkuarvot tehtävä  $\dot{y} + ay = 0, a = \beta/T > 0$ , missä  $\beta$  on dimensioton vakio, aikavälillä  $(0, T)$  ja alkuehdolla  $y(0) = \bar{y}_0$  käyttäen globaalia Galerkinin menetelmää ja ajan suhteen astetta 2,3 ja 4 olevia yritepolynomeja. Tutki virhettä ajanhetkellä  $t = T$  parametrin  $\beta$  funktiona. Piirrä kuva suhteellisen virheen riippuvuudesta parametrissa  $\beta$ , kun  $\beta \in [0, 1000]$ .

2. Ratkaise edellinen tehtävä trapetsikaavaa ja implisiittistä Eulerin menetelmää käyttäen. Tutki virhettä ajanhetkellä  $t = T$ , kun aika-askel on  $\Delta t = T/200, T/100, T/20$  ja  $T/10$ . Käytä  $\beta$ :lle arvoa 100.
3. Tutki implisiittisen Eulerin ja trapetsikaavan virhettä ajanhetkellä  $t = T$  parametrin  $\beta$  funktiona. Piirrä kuva suhteellisen virheen riippuvuudesta parametrista  $\beta$ , kun  $\beta \in [0, 1000]$ .
4. Johda cG(1) menetelmän ratkaisuyhtälöt ongelmalle  $\dot{y} + ay = \bar{f}$  ja  $y(0) = \bar{y}_0$ . Sovella niitä vakiokertoimisen yhtälön tapaukseen. Mikä on vastaava yleistetyin keskipistekaavan (18.21) menetelmä, eli mikä on parametri  $\alpha$ ?
5. Toista tehtävät 2 ja 3 käyttäen cG(1) menetelmää.
6. Muodosta cPG(2) menetelmän ratkaisuyhtälöt alkuarvotekävälle  $\dot{y} + ay = \bar{f}$ . Sovella sitä vakiokertoimiseen yhtälöön.
7. Tutki, millä ehdoilla dG(0) menetelmä on stabiili. Voiko parametri  $a(t)$  saada negatiivisia arvoja välillä  $(t_n, t_{n+1})$ ?
8. Muodosta dG(1) menetelmän ratkaisuyhtälöt alkuarvotekävälle  $\dot{y} + ay = \bar{f}$ . Sovella sitä vakiokertoimiseen yhtälöön.
9. Suorita semidiskreetin probleeman (18.20) ratkaisu ajan suhteen globaalilla Galerkinin keinolla gG(q). Millainen on ratkaisuyhtälö ja mitä voit sanoa ratkaisun vaatimasta työmäärästä.
10. Ratkaistaan lineaarinen diffuusioyhtälö numeerisesti neliön muotoisessa tasoalueessa. Oleta, että lineaarinen yhtälösystemi ratkaistaan suoralla menetelmällä. Pohdi ja estimoi miten ratkaisuaikat seuraavissa tapauksissa suhtautuvat toisiinsa:
  - (a) käytetään implisiittistä Eulerin menetelmää ja aika-askelta  $T/n$  (vakio),
  - (b) aloitetaan implisiittisellä Eulerin menetelmällä ja muutetaan muutaman askelen jälkeen keskipistekaavaan,
  - (c) käytetään implisiittistä Eulerin menetelmää ja aika-askelta  $T/n$ , mutta laskennan puolivälissä ajanhetkellä  $T/2$  aika-askelta kasvatetaan kaksinkertaiseksi.
11. Määritä kvadraattisen eksplisiittisen Eulerin menetelmän (18.25) stabiiliusvaatimus. Pohdi myös menetelmän implementointia semidiskreetin systeemin ratkaisussa.
12. Määritä kvadraattisen eksplisiittisen Eulerin menetelmän (18.25) paikallisen katkaisuvirheen aste.
13. Määritä algoritmin (18.27) katkaisuvirheen aste.
14. Miten algoritmi (18.28) implementoidaan mahdollisimman tehokkaasti, jos lineaarisen yhtälösystemin ratkaisu suoritetaan iteratiivisesti.
15. Näytä, että Calahanin menetelmä on ehdoitta stabiili valinnalla  $\alpha = -\sqrt{3}/3$ .

16. Määritä Calahanin menetelmän katkaisuvirheen aste.
17. Toista tehtävät 2 ja 3 käyttäen Calahanin menetelmää.
18. Mikä on Calahanin menetelmän ratkaisuyhtälö sovellettuna semidiskreettiin yhtälöön  $M\dot{u} + Ku = \bar{f}$ .
19. Ratkaise alkuarvotettava  $\dot{y} + ay = 0$ ,  $a = \beta/T > 0$ , kaksiaskelmenetelmällä (18.31) ja alkuehdoilla  $y_0 = \bar{y}_0$ ,  $y_1 = \bar{y}_0 \exp(-\Delta ta)$  ja näytä, että kun  $\alpha = -1$  menetelmä on ehdoitta stabiili ja lasketun  $y(T)$ :n tarkkuus on vain  $\Delta t^2$ , mikä on sopusoinnussa Dahlquistin teoreeman kanssa. Mitä tapahtuu, jos  $\alpha = -1 + O(\Delta t)$ ? Toista laskelmat arvolla  $\alpha = \frac{1}{2}$  ja näytä, että menetelmä on vain ehdoitta stabiili. Osoita numeerisesti, että tarkkuus on nyt  $O(\Delta t^3)$ . Vertaa keskipistekaavan antamiin tuloksiin.
20. Ratkaise aikariippuva diffuusio-reaktioyhtälö

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \bar{f} \quad x \in (0, L)$$

ratkaisua reunaehdoilla  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  ja alkuehdolla  $u(x, 0) = \bar{u}_0 \sin(\pi x/L)$ . Reaktiotermi  $\bar{f}$  riippuu lämpötilasta  $u$  lineaarisesti:  $\bar{f} = cu$ , missä  $c = \beta^2 k L^{-2}$ . Mitä kvalitatiivisesti erityyppisiä ratkaisuja saadaan parametrin  $\beta$  muuttuessa.

21. Mieti mitä tarkoittaa stabiiliusvaatimus edellisen tehtävän ongelmalle.
22. Ratkaise tehtävä 20 numeerisesti käyttäen kolmea tasamittaista lineaarista elementtiä paikkadiskreointiin ja implisiittistä Eulerin menetelmää aikaintegrointiin. Käytä parametrille  $\beta$  arvoja 3 ja 5. Mikä on kriittinen aika-askel ekplisiittiselle Eulerin menetelmälle?
23. Mitkä differenssikaavat saadaan, kun alkuarvotettava  $\dot{y} + ay = \bar{f}$  alkuehdolla  $y(0) = \bar{y}_0$  ratkaistaan numeerisesti pistekolokaatiomenetelmällä

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} w(\dot{y} + ay - \bar{f}) dt = 0,$$

ja painofunktioksi valitaan:

- (a)  $w = \delta(t_n)$ ,  
 (b)  $w = \delta(t_{n+1})$ ,  
 (c)  $w = \delta(\frac{1}{2}(t_n + t_{n+1}))$ ,

missä  $\delta$  on Diracin delta-funktio. Yritteelle  $y$  käytetään lineaarista approksimaatiota  $y = \Delta t^{-1} [(t_{n+1} - t)y_n + (t - t_n)y_{n+1}]$ .

24. Kirjoita lämmönjohtumisongelman

$$\begin{aligned} \rho c \dot{u} - k u'' &= 0, & 0 < x < L, \\ q(0) &= \bar{q}_0 = -\alpha_0(u - \bar{u}_0), \\ q(L) &= \bar{q}_L = \alpha_L(u - \bar{u}_L), \end{aligned}$$

semidiskreetti muoto. Käytä yhtä lineaarista elementtiä. Tehtävä kuvaa seinärakenteen lämpötilajakauman kehitystä. Otaksutaan, että ulkoilman lämpötila  $\bar{u}_0$  muuttuu ajan mukana  $\bar{u}_0 = \bar{u}_L \sin(\pi t/T)$  ja sisälämpötila on vakio  $\bar{u}_L$ .

Reunaehdoissa esiintyvä  $\alpha$  parametri on lämmönsiirtokerroin. Yleensä se riippuu tarkasteltavan pinnan lämpötilasta, jolloin ongelmasta tulee epälineaarinen. Otaksutaan nyt lämmönsiirtokerroin vakioksi. Dimensiotonta lukua

$$\text{Bi} = \frac{\alpha L}{k}$$

kutsutaan Biotin luvuksi.

25. Edellinen tehtävä ratkaistaan eksplisiittisellä Eulerin menetelmällä. Määritä kriittinen aika-askel kun käytetään (a) konsistenttia, (b) lumpattua lämpökapasiteettimatriisia. Oleta, että  $\alpha_0 = \alpha_L = \alpha$ .
26. Ratkaise tehtävä 24 käyttäen (a) eksplisiittistä, (b) implisiittistä Eulerin ja (c) Crankin-Nicolsonin menetelmää aikavälillä ( $0 < t \leq 2T$ ). Tee laskelmat Biotin luvun arvoilla 0.5 ja 2. Laskuissa voidaan olettaa seinän materiaaliksi betoni, jolle  $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$ ,  $c = 880 \text{ J/(kgK)}$ ,  $k = 1.7 \text{ W/(mK)}$ , sekä ajalle  $T = 12$  tuntia ja sisäilman lämpötilalle  $\bar{u}_L = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Seinän paksuudelle voi käyttää arvoa  $L = 0.2 \text{ m}$ . Käytä implisiittimenetelmille aika-askelta 1, 10 ja 30 minuuttia. Eksplisiittisen Eulerin menetelmälle käytä vain lumpattua lämpökapasiteettimatriisia mutta laske implisiittisillä menetelmillä käyttäen sekä konsistenttia että lumpattua versiota. Vertaile tuloksia ja piirrä seinän lämpötilat sekä ulko- että sisäpinnalla. Ratkaise Biotin luvun arvoilla 0.5 ja 2.





# Luku 19

## Etenemistehtävien numeerinen ratkaisu - liikeyhtälö

Tässä luvussa tarkastellaan ajasta riippuvan hyperbolisen aaltoyhtälön numeerista ratkaisua. Kertauksena luvusta 1 palautetaan mieliin kyseisen yhtälön ominaispiirteet.

Ratkaisumenetelmät esitetään aluksi skalaariyhtälön tapauksessa. Myös menetelmien stabiilius- ja tarkkuusominaisuuksia tutkitaan.

### 19.1 Yksivapausasteinen liikeyhtälö

Tutkitaan värähtelevän langan mallin

$$\begin{aligned}\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sigma A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ u(x, 0) &= \bar{u}_0 \sin(\pi x/L), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= v(x, 0) = \bar{v}_0 \sin(\pi x/L)\end{aligned}\tag{19.1}$$

ratkaisua. Sijoittamalla yhtälöön reuna- ja alkuehdot toteuttava yrite

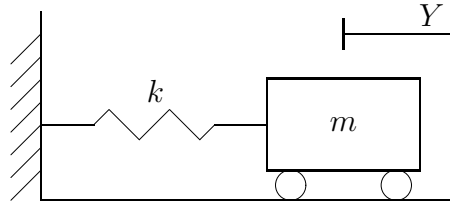
$$u(x, t) = Y(t) \sin \frac{\pi x}{L},$$

saadaan alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} \ddot{Y} + \omega^2 Y = 0, \\ Y(0) = \bar{u}_0, \\ \dot{Y}(0) = \bar{v}_0, \end{cases}\tag{19.2}$$

missä on merkitty  $\omega^2 = \pi^2 \sigma / (\rho L^2)$ . Tehtävän ratkaisu

$$Y(t) = \frac{\bar{v}_0 L}{c\pi} \sin \omega t + \bar{u}_0 \cos \omega t$$



**Kuva 19.1** Yksivapausasteinen värähtelijä.

esittää jaksollista vaimentumatonta liikettä, jonka kulmataajuus on  $\omega$ . Yhtälö (19.2) voitaisiin kirjoittaa myös muodossa

$$\begin{cases} m\ddot{Y} + kY = 0, \\ Y(0) = \bar{u}_0, \\ \dot{Y}(0) = \bar{v}_0, \end{cases} \quad (19.3)$$

missä massa  $m = \rho A$ , jousivakio  $k = \pi^2 \sigma A / L^2$  ja kulmataajuudelle on lauseke  $\omega^2 = k/m$ . Kuvassa 19.1 on havainollistettu tällaista yksivapausasteita mekaanista värähtelijää.

## 19.2 Keskeisdifferenssimenetelmä

Eräs yksinkertaisimmista liikeyhtälön integroimismenetelmistä on keskeisdifferenssimenetelmä. Merkitään ajanhetken  $t_{n+1}$  ja  $t_n$  välistä aika-askelta  $\Delta t_{n+1}$ . Aika-askelien  $(t_{n-1}, t_n)$  ja  $(t_n, t_{n+1})$  keskipisteissä määritettyjen nopeuksien  $\dot{y}_{n-\frac{1}{2}}$  ja  $\dot{y}_{n+\frac{1}{2}}$  keskeisdifferenssiaprosimaatiot ovat

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{n-\frac{1}{2}} &\approx \dot{y}_{n-\frac{1}{2}} = \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t_n}, \\ \dot{Y}_{n+\frac{1}{2}} &\approx \dot{y}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t_{n+1}}. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Näitä nopeuksien arvoja käytetään laskettaessa kiihtyvyyden keskeisdifferenssiaprosimaatio ajanhetkellä  $t_n$ :

$$\ddot{Y}_n \approx \ddot{y}_n = \frac{\dot{y}_{n+\frac{1}{2}} - \dot{y}_{n-\frac{1}{2}}}{t_{n+\frac{1}{2}} - t_{n-\frac{1}{2}}} = \frac{\dot{y}_{n+\frac{1}{2}} - \dot{y}_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t_{n+\frac{1}{2}}}. \quad (19.5)$$

Yhdistämällä yhtälöt (19.4) ja (19.5) saadaan lauseke

$$\ddot{y}_n = \frac{\Delta t_n (y_{n+1} - y_n) - \Delta t_{n+1} (y_n - y_{n-1})}{\Delta t_n \Delta t_{n+\frac{1}{2}} \Delta t_{n+1}}. \quad (19.6)$$

Mikäli aika-askel on vakio, on tuloksena tuttu lauseke

$$\ddot{y}_n = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\Delta t^2} \quad (19.7)$$

Soveltamalla keskeisdifferenssikaavaa (19.7) liikeyhtälöön (19.2) voidaan ajanhetkelle  $t_{n+1}$  edetä yhtälön

$$y_{n+1} = (2 - \Delta t^2 \omega^2) y_n - y_{n-1} \quad (19.8)$$

mukaisesti. Edellä esitetystä muodosta keskeisdifferenssimenetelmä on eksplisiittinen kaksiaskelmenetelmä.

Tutkitaan algoritmin (19.8) stabiiliutta. Sijoitetaan differenssilausekkeeseen yrite  $y_n = C\lambda^n$ , jolloin karakteristiseksi yhtälöksi saadaan

$$\lambda^2 - (2 - \Delta t^2 \omega^2)\lambda + 1 = 0,$$

ja jonka juuret ovat

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{1}{2}\Delta t^2 \omega^2 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\Delta t^2 \omega^2\right)^2 - 1}.$$

Koska liikeyhtälön ratkaisun pitää olla oskilloiva ja jotta numeerinen ratkaisu olisi myös, on karakteristisen yhtälön juurien oltava kompleksisia. Tämä toteutuu mikäli

$$\left(1 - \frac{1}{2}\Delta t^2 \omega^2\right)^2 < 1,$$

mistä seuraa ehto aika-askeleen pituudelle:

$$\Delta t < \Delta t_{\text{kr}} = \frac{2}{\omega}. \quad (19.9)$$

Kun ehto  $\Delta t < 2/\omega$  toteutuu, ovat karakteristisen yhtälön juuret kompleksilukuja

$$\lambda_{1,2} = a \pm \left(\sqrt{1 - a^2}\right) i,$$

missä  $i^2 = -1$  ja  $a = 1 - \frac{1}{2}\Delta t^2 \omega^2$ . Tällöin juurten itseisarvo on 1 riippumatta aika-askeleen pituudesta. Täten keskeisdifferenssimenetelmä on koko stabiiliusalueellaan konservatiivinen, eikä numeerisissa tuloksissa esiinny amplitudivirhettä.

## 19.3 Newmarkin menetelmäperhe

### 19.3.1 Menetelmä ja sen stabiiliusanalyysi

Ehä kaikkein tunnetuin liikeyhtälön suora integrointimenetelmä on Newmarkin menetelmä, joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t \dot{y}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 [(1 - 2\beta)\ddot{y}_n + 2\beta\ddot{y}_{n+1}], \\ \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \Delta t [(1 - \gamma)\ddot{y}_n + \gamma\ddot{y}_{n+1}], \end{aligned} \quad (19.10)$$

missä parametrit  $\beta$  ja  $\gamma$  määrittävät spesifisen algoritmin. Sovellettaessa menetelmää liikeyhtälöön (19.2) saadaan muoto

$$\begin{bmatrix} 1 + \beta\Omega^2 & 0 \\ \gamma\Omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{n+1} \\ \Delta t \dot{y}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\Omega^2 & 1 \\ (\gamma - 1)\Omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_n \\ \Delta t \dot{y}_n \end{Bmatrix},$$

missä on merkitty  $\Omega^2 = \Delta t^2 \omega^2$ . Yhtälö voidaan kirjoittaa lyhyesti muodossa

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_n,$$

missä  $\mathbf{x}_n = [y_n, \Delta t y_n]^T$  jolloin vahvennumatriisin lauseke on

$$\mathbf{A} = \frac{1}{1 + \beta \Omega^2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\Omega^2 & 1 \\ -\Omega^2 - (\beta - \frac{1}{2}\gamma)\Omega^4 & 1 + (\beta - \gamma)\Omega^2 \end{bmatrix}.$$

Vahvennumatriisin ominaisarvot voidaan laskea karakteristisen polynomin nol-lakohdista

$$\lambda^2 - 2A_1\lambda + A_2 = 0, \quad (19.11)$$

missä

$$A_1 = \frac{1}{2} \text{trace} \mathbf{A} = \frac{1}{2}(A_{11} + A_{22}) = 1 - \frac{\frac{1}{2} + \gamma}{1 + \beta \Omega^2} \Omega^2,$$

$$A_2 = \det \mathbf{A} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1 + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right) \frac{\Omega^2}{1 + \beta \Omega^2}.$$

Juuret ovat

$$\lambda_{1,2} = A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - A_2}.$$

Jotta numeerinen ratkaisu esittäisi oskiloivaa vastetta, on juurien oltava kompleksisia, täten karakteristisen polynomin diskriminantin on toteutettava ehto

$$A_1^2 - A_2 < 0$$

$$\implies -4\Omega^2 + \left[\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)^2 - 4\beta\right] \Omega^4 < 0. \quad (19.12)$$

Mikäli  $\Omega^4$ :n kerroin on negatiivinen, ovat juuret aina kompleksisia kaikilla mahdollisilla  $\Omega^2$ :n arvoilla ( $\Omega^2 = \omega^2 \Delta t^2 > 0$ ). Saadaan ehto

$$\beta > \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2. \quad (19.13)$$

Vahvennumatriisin ominaisarvot ovat siten

$$\lambda_{1,2} = A_1 \pm \left(\sqrt{A_2 - A_1^2}\right) i.$$

Juurien on myös oltava itseisarvoltaan ykköstä pienempiä, jotta menetelmä olisi stabiili. Mikäli juuret ovat kompleksikonjugaatteja, on stabiiliusehto seuraava:

$$|\lambda|^2 = A_2 = 1 + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right) \frac{\Omega^2}{1 + \beta \Omega^2}, \quad (19.14)$$

Jos valitaan  $\gamma = \frac{1}{2}$  on juurien itseisarvo aina 1 ja siten riippumaton käytetyn aika-astekeen koosta. Juurien kompleksisuusehto (19.13) saa tällöin muodon  $-4\Omega^2 + (1 -$

$4\beta)\Omega^4 < 0$ , mikä toteutuu valinnalla  $\beta = \frac{1}{4}$ . Tämä alkuperäinen Newmarkin menetelmä saa siten muodon

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t \dot{y}_n + \frac{1}{4} \Delta t^2 (\ddot{y}_n + \ddot{y}_{n+1}), \\ \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \frac{1}{2} \Delta t (\ddot{y}_n + \ddot{y}_{n+1}). \end{aligned} \quad (19.15)$$

Menetelmästä käytetään myös trapetsikaavan tai keskimääräisen kiihtyvyyden menetelmän nimiä.

Stabiiliusehto (19.14) toteutuu kun  $\gamma \geq \frac{1}{2}$ . Newmarkin menetelmä (19.10) on ehdoitta stabiili ja sen vahvennismatriisin ominaisarvot ovat kompleksisia, mikäli seuraavat ehdot toteutuvat

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad \beta > \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2. \quad (19.16)$$

Stabiiliusalueita voidaan hieman laajentaa, mikäli juurien sallitaan olevan reaaliset. Tällöin  $A_1^2 - A_2 > 0$  ja kriittinen ehto seuraa epäyhtälöistä

$$\begin{cases} -1 \leq A_1 \leq 0 \\ \max |\lambda| = A_1 - \sqrt{A_1^2 - A_2} \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} 0 < A_1 \leq 1 \\ \max |\lambda| = A_1 + \sqrt{A_1^2 - A_2} \end{cases}.$$

Ensimmäinen yllä olevista ehdoista osoittautuu kriittiseksi:

$$2A_1 + A_2 + 1 \geq 0 \quad \implies \quad 4 + 2(2\beta - \gamma)\Omega^2 \geq 0. \quad (19.17)$$

Ottamalla huomioon myös ehto (19.14), Newmarkin menetelmä (19.10) on ehdoitta stabiili mikäli epäyhtälöt

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2} \quad (19.18)$$

toteutuvat. Ehto (19.16) on odotetusti rajoittavampi, sillä  $\frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2 \equiv \frac{1}{4}[(\gamma - \frac{1}{2})^2 + 2\gamma]$ , joten  $\beta \geq \frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}(\gamma - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}\gamma \geq \frac{1}{2}\gamma$ , katso myös kuvaa 19.2.

Mikäli  $\beta < \gamma/2$  on Newmarkin menetelmä ehdollisesti stabiili. Kriittisen aika-askelen pituus voidaan määrittää epäyhtälöstä (19.17), josta saadaan

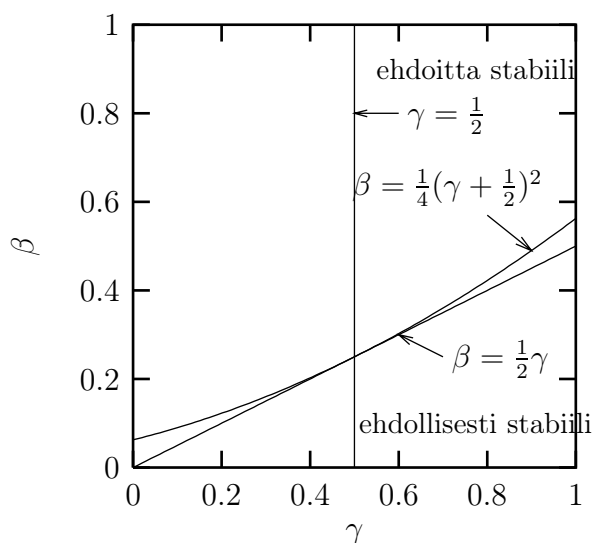
$$\omega \Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\gamma - \beta}} = \Omega_{\text{kr}}. \quad (19.19)$$

Edellä esitetty kriittisen aika-askelen lauseke on usein havainnollisempi kirjoitettuna värähtelyn jaksonajan  $T = 2\pi/\omega$  avulla:

$$\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{\Omega_{\text{kr}}}{2\pi}.$$

Erikoishuomion ansaitsevat pisteet  $A_1 = \pm 1, A_2 = 1$ , sillä tällöin karakteristisella yhtälöllä on kaksoisjuuri jonka itseisarvo on 1. Stabiiliusehto tarvitaan estämään tekijän  $\mathbf{A}^n$  suurenemista kun  $n$  kasvaa. Jotta vahvennismatriisin potenssit pysyisivät rajoitettuna on seuraavien ehtojen oltava voimassa:<sup>1</sup>

<sup>1</sup> $\rho(\mathbf{A})$  on matriisin  $\mathbf{A}$  spektraalisäde.



**Kuva 19.2** Newmarkin menetelmän stabiiliusalue.

1.  $\rho(\mathbf{A}) = \max_i |\lambda_i| \leq 1$
2.  $\mathbf{A}$ :n moninkertaisten ominaisarvojen on oltava itseisarvoltaan aidosti ykköstä pienempiä.

Ehdot (1) ja (2) määrittelevät *spektraalisesti stabiilin* vahvennumatriisin  $\mathbf{A}$ . Mikäli ominaisarvot ovat erisuuria, on vahvennumatriisi similaarinen diagonaalimatriisin kanssa

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}, \quad \text{missä} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

missä  $\mathbf{P}$  on ortogonaalinen  $\mathbf{A}$ :n lineaarisesti riippumattomista ominaisvektoreista koostuva matriisi. Mikäli  $\mathbf{A}$ :n ominaisarvot ovat yhtäsuuria, ovat sen ominaisvektorit lineaarisesti riippuvia ja tällöin  $\mathbf{A}$  on similaarinen Jordanin lohkoista koostuvan matriisin kanssa

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1}, \quad \text{missä} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

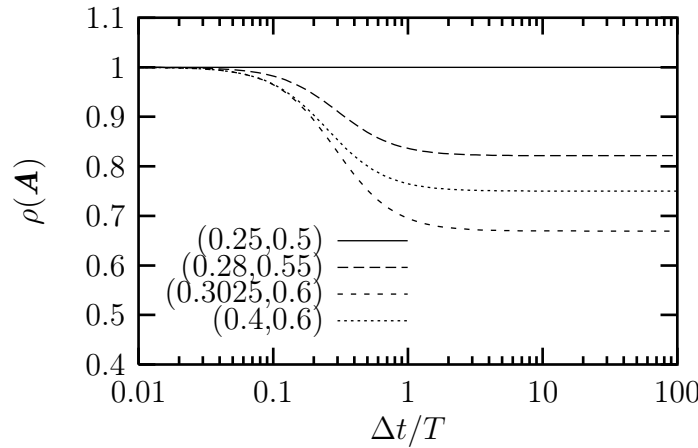
Vahvennumatriisin  $n$ :s potenssi on

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1} \quad \text{tai} \quad \mathbf{A}^n = \mathbf{Q}\mathbf{J}^n\mathbf{Q}^{-1},$$

missä

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{J}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

Spektraalisen stabiiliusehon kohta 2 on siten ymmärrettävissä; jotta vahvennumatriisin ei-diagonaali-alkiot pysyisivät rajoitettuna on oltava  $\lambda < 1$ , jolloin  $n\lambda^{n-1} \rightarrow 0$ , kun  $n \rightarrow \infty$ .



**Kuva 19.3** Newmarkin menetelmän vahvennismatriisin spektraalisäde.

### 19.3.2 Newmarkin menetelmäperheen tunnettuja edustajia

Valitsemalla Newmarkin parametreille arvot  $\beta = 0, \gamma = \frac{1}{2}$  saadaan jo aikaisemmin esitelty keskeisdifferenssimenetelmä:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t \dot{y}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{y}_n, \\ \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \frac{1}{2} \Delta t (\ddot{y}_n + \ddot{y}_{n+1}). \end{aligned}$$

Ratkaistaan ylemmästä yhtälöstä kiihtyvyyden lauseke  $\ddot{y}_n$

$$\ddot{y}_n = \frac{2}{\Delta t} (y_{n+1} - y_n - \Delta t \dot{y}_n). \quad (19.20)$$

Sijoittamalla tämä nopeuden lausekkeeseen hetkellä  $n$ , saadaan nopeuden keskeisdifferenssiapproksimaatio:

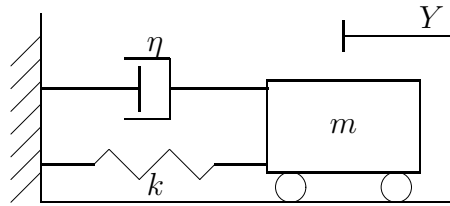
$$\begin{aligned} \dot{y}_n &= \dot{y}_{n-1} + \frac{1}{2} (\ddot{y}_{n-1} + \ddot{y}_n) \\ &= \dot{y}_{n-1} + \frac{1}{2} \Delta t \left[ \frac{2}{\Delta t} (y_{n+1} - y_n - \Delta t \dot{y}_n) + \frac{2}{\Delta t} (y_n - y_{n-1} - \Delta t \dot{y}_{n-1}) \right] \\ \implies \dot{y}_n &= \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta t}. \end{aligned}$$

Näin lauseke (19.20) saa tutun muodon

$$\ddot{y}_n = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\Delta t^2}.$$

Keskeisdifferenssimenetelmä on ehdollisesti stabiili kuten todettiin jo luvussa 19.2 ja yleisemmin Newmarkin menetelmäperheen yhteydessä. Kriittinen taajuus  $\Omega_{kr} = 2$  ja aika-askel  $\Delta t_{kr} = 2/\omega$ .





**Kuva 19.4** Vaimennettu yksivapausasteinen värähtelijä.

Keskimääräisen kiihtyvyyden eli trapetsikaavan ja keskeisdifferenssimenetelmän lisäksi Newmarkin menetelmäperheen tunnettuja esustajia ovat lineaarisen kiihtyvyyden menetelmä ( $\beta = \frac{1}{6}, \gamma = \frac{1}{2}$ ) ja Foxin ja Goodwinin menetelmä ( $\beta = \frac{1}{12}, \gamma = \frac{1}{2}$ ). Nämä ovat *implisiittisiä ehdollisesti stabiileja* menetelmiä, minkä vuoksi ne eivät ole taloudellisia suurten systeemien analysointiin.

## 19.4 Vaimennettu värähtelijä

Tarkastellaan kuvan 19.4 mukaista systeemiä, jossa vaimenninvoima on suoraan verrannollinen massan nopeuteen. Värähtelijän liikeyhtälö on

$$m\ddot{Y} + c\dot{Y} + kY = \bar{f}.$$

Liikeyhtälö voidaan saattaa myös muotoon

$$\ddot{Y} + 2\zeta\omega\dot{Y} + \omega^2Y = \frac{\bar{f}}{m}\bar{F}, \quad (19.21)$$

missä  $\zeta = c/(2m\omega)$  on suhteellinen vaimennuskerroin. Yhtälön (19.21) homogeenisen osan ratkaisu on muotoa  $Y_h = C \exp(rt)$ , ja tekijä  $r$  saadaan karakteristisen polynomin

$$r^2 + 2\zeta\omega r + \omega^2 = 0$$

nollakohdista

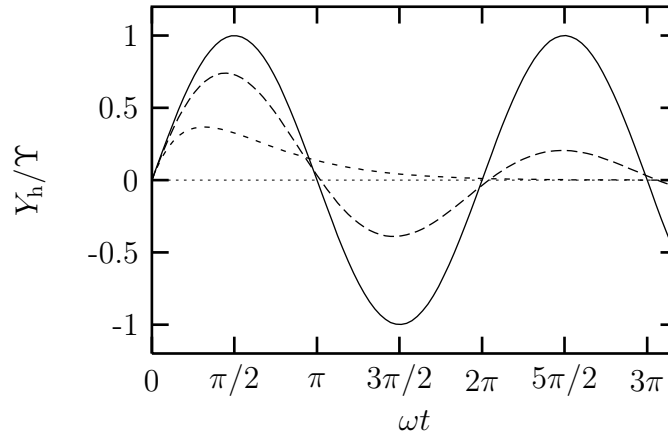
$$r_{1,2} = -\zeta\omega \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega.$$

Homogeenisen osan ratkaisun luonne riippuu nyt suhteellisen vaimennuksen  $\zeta$  arvosta ja seuraavat kolme tapausta ovat mahdollisia.

1. Vaimennuksen sanotaan olevan ylikriittinen kun  $\zeta > 1$ . Tällöin karakteristisen yhtälön juuret ovat reaalisia, erisuuruisia ja negatiivisia. Liike vaimenee monotonisesti ja koska ratkaisu ei esitä värähtelyä kutsutaan sitä aperiodiseksi liikkeeksi.
2. Kun  $\zeta = c/(2m\omega) = 1$  on karakteristisella yhtälöllä reaalinen kaksoisjuuri. Tällöin yhtälön (19.21) homogeenisen osan ratkaisu on muotoa

$$Y_h(t) = (C_1 + C_2t)e^{-\omega t},$$

mikä esittää aperiodista vaimenevaa liikettä, ks. kuva 19.5.



**Kuva 19.5** Vaimentumaton värähtely, kriittinen ja alikriittinen vaimennettu värähtely ( $\zeta = 0, 1, 0.2$ ).

3. Sovellutusten kannalta tärkein tapaus on alikriittinen vaimennus kun  $\zeta < 1$ , jolloin juuret ovat kompleksisia konjugaattilukuja. Tällöin ratkaisu esittää taa-juudella  $\omega$  tapahtuvaa harmonista värähtelyä jonka amplitudi pienenee eksponentiaalisesti ajan mukana (ks. kuva 19.5)

$$Y_h(t) = e^{-\zeta\omega t}(C_1 \sin \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t) = \Upsilon e^{-\zeta\omega t} \sin(\omega_d t + \phi), \quad (19.22)$$

missä  $\Upsilon = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ,  $\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2}\omega$  ja  $\phi = \arctan(C_2/C_1)$ .

#### 19.4.1 Keskeisdifferenssimenetelmä vaimennetulle liikeyhtälölle

Sijoittamalla keskeisdifferenssimenetelmän kaavat

$$\ddot{y} = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\Delta t^2}, \quad (19.23)$$

$$\dot{y} = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta t} \quad (19.24)$$

liikeyhtälöön (19.21) tulee siitä järjestyiden jälkeen differenssiyhtälö

$$y_{n+1} - \frac{2 - \Omega^2}{1 + \zeta\Omega} y_n + \frac{1 - \zeta\Omega}{1 + \zeta\Omega} y_{n-1} = \frac{\Delta t^2}{1 + \zeta\Omega} \bar{F}_n.$$

Yritteellä  $y_n = C\lambda^n$  saadaan homogeenisen yhtälön avulla karakteristinen yhtälö

$$\lambda^2 - \frac{2 - \Omega^2}{1 + \zeta\Omega} \lambda + \frac{1 - \zeta\Omega}{1 + \zeta\Omega} = 0,$$

jonka juuret ovat

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - \Omega^2 \pm \Omega \sqrt{\Omega^2 - 4(1 - \zeta^2)}}{2(1 + \zeta\Omega)}.$$

Jotta ratkaisu esittäisi värähdysliikettä, täytyy karakterisen yhtälön juurten olla kompleksikonjugaatteja, ja juurrettavan on oltava negatiivinen, eli

$$\Omega^2 - 4(1 - \zeta^2) < 0 \quad \text{eli} \quad \omega\Delta t = \Omega < \Omega_{\text{kr}} = 2\sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Juuret ovat tällöin

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - \Omega^2 \pm i\Omega\sqrt{4(1 - \zeta^2) - \Omega^2}}{2(1 + \zeta\Omega)}$$

Vaihtoehtoisesti voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{z}_n + \mathbf{L}\bar{F}_n,$$

missä vahvennumatriisi  $\mathbf{A}$  ja vektorit  $\mathbf{L}$  ja  $\mathbf{z}_n$  ovat nyt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{2 - \Omega^2}{1 + \zeta\Omega} & -\frac{1 - \zeta\Omega}{1 + \zeta\Omega} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{(\Delta t)^2}{1 + \zeta\Omega} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_n = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaessa vahvennumatriisin ominaisarvot saadaan teitenkin sama karakteristinen yhtälö ja samat juuret kuin edellä.

Differenssiyhtälön homogeenisen osan ratkaisu on

$$y_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

missä  $C_1$  ja  $C_2$  ovat alkuehtojen perusteella ratkaistavia vakioita. Differenssiyhtälön ratkaisu esittää värähdysliikettä, kun karakteristisen yhtälön juuret ovat kompleksikonjugaatteja, ja tällöin voidaan juuret kirjoittaa muotoon

$$\lambda_{1,2} = a \pm bi.$$

Merkitsemällä

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \phi = \frac{b}{a}$$

tulee ratkaisu muotoon

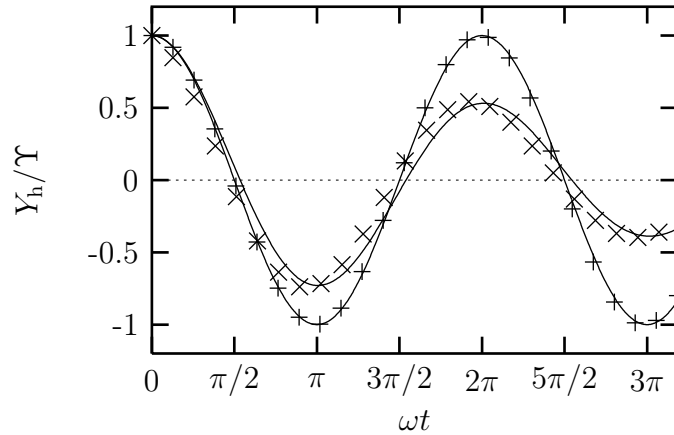
$$\begin{aligned} y_n &= \rho^n (C_3 \cos n\phi + C_4 \sin n\phi) \\ &= e^{\ln \rho^n} (C_3 \cos n\phi + C_4 \sin n\phi). \end{aligned}$$

Keskeisdifferenssimenetelmän tapauksessa

$$\rho = \sqrt{\frac{1 - \zeta\Omega}{1 + \zeta\Omega}},$$

ja vaihekulma toteuttaa yhtälön

$$\tan \phi = \frac{\Omega\sqrt{4(1 - \zeta^2) - \Omega^2}}{2 - \Omega^2}$$



**Kuva 19.6** Vaimentamaton ja vaimennettu värähtelijä laskettuna Keskeisdifferenssimenetelmällä käyttäen askelpituutta  $0.2\Delta t_{kr}$ . Suhteelliselle vaimennuskertoimelle on käytetty arvoa 0.1. Analyytinen tulos on piirretty yhtenäisellä viivalla.

Homogeenisen liikeyhtälön tarkka ratkaisu (19.22) alkuehdoilla  $y(0) = \bar{y}_0$ ,  $\dot{y}(0) = \dot{\bar{y}}_0$  on

$$Y_h(t) = e^{-\zeta\omega t} \left[ \bar{y}_0 \cos \omega_d t + \left( \frac{\dot{\bar{y}}_0}{\omega_d} + \frac{\zeta \bar{y}_0 \omega}{\omega_d} \right) \sin \omega_d t \right].$$

Numeerisen menetelmän vaimennus saadaan suhteen  $\rho/(e^{-\zeta\omega\Delta t})$  avulla, ja vaihekulmaa  $\phi$  verrataan suureeseen  $\omega_d\Delta t$ . Kuvassa 19.7 on esitty keskeisdifferenssimenetelmän jaksonajan virhe aika-askeen koon funktiona, samoin kuin yhden aika-askeleen aikana tapahtuva amplitudivirhe.

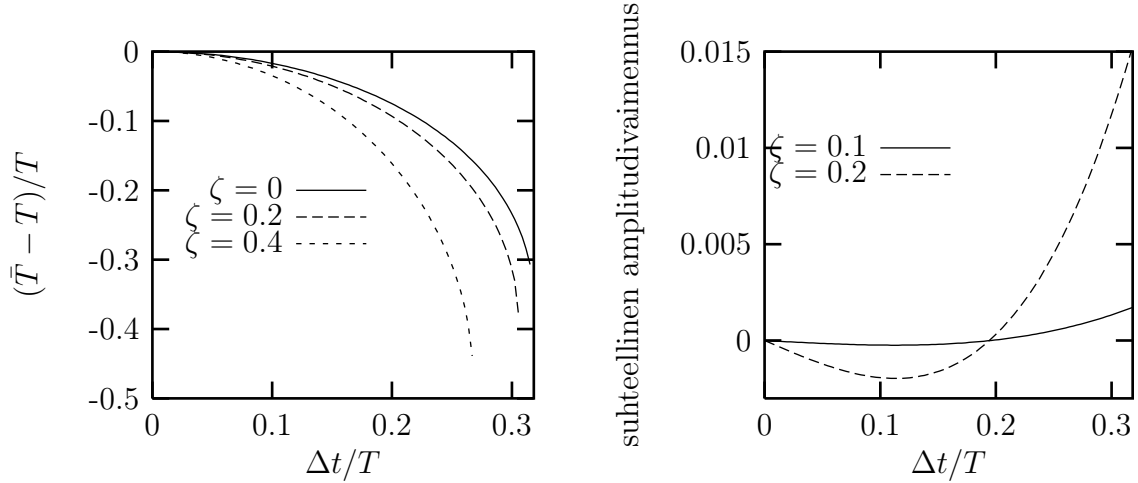
#### 19.4.2 Newmarkin menetelmä vaimennetulle liikeyhtälölle

Käytettäessä Newmarkin algoritmia (19.10)

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t \dot{y}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 [(1 - 2\beta)\ddot{y}_n + 2\beta\ddot{y}_{n+1}], \\ \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \Delta t [(1 - \gamma)\ddot{y}_n + \gamma\ddot{y}_{n+1}], \end{aligned}$$

vaimennetun värähtelijän yhtälöön (19.21) askeleilla  $n$  ja  $n + 1$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_n + 2\zeta\omega\dot{y}_n + \omega^2 y_n &= \bar{F}_n = \frac{\bar{f}_n}{m}, \\ \ddot{y}_{n+1} + 2\zeta\omega\dot{y}_{n+1} + \omega^2 y_{n+1} &= \bar{F}_{n+1} = \frac{\bar{f}_{n+1}}{m}, \end{aligned}$$



**Kuva 19.7** Keskeisdifferenssimenetelmän vaihevirheen ja yhden aika-askelen suhteellisen amplitudivirheen (vaimennus positiivisena) riippuvuus aika-askelen koosta. Muista, että keskeisdifferenssimenetelmällä ei ole amplitudivirhettä vaimentumattomalle systeemille.

saadaan kaavat

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 + \beta\Omega & 2\beta\zeta\Omega \\ \gamma\Omega^2 & 1 + 2\gamma\zeta\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{n+1} \\ \Delta t\dot{y}_{n+1} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\Omega^2 & 1 - (1 - 2\beta)\zeta\Omega \\ (\gamma - 1)\Omega^2 & 1 + 2(\gamma - 1)\zeta\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_n \\ \Delta t\dot{y}_n \end{Bmatrix} + \Delta t^2 \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\bar{F}_n + \beta\bar{F}_{n+1} \\ (1 - \gamma)\bar{F}_n + \gamma\bar{F}_{n+1} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Kuten luvussa 19.3.1 menetelmä voidaan kirjoittaa kompaktissa muodossa

$$\dot{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{L}_n \quad (19.25)$$

missä  $\mathbf{x} = [y, \Delta t\dot{y}]^T$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2$  ja

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 + \beta\Omega^2 & 2\beta\zeta\Omega \\ \gamma\Omega^2 & 1 + 2\gamma\zeta\Omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\Omega^2 & 1 - (1 - 2\beta)\zeta\Omega \\ (\gamma - 1)\Omega^2 & 1 + 2(\gamma - 1)\zeta\Omega \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_n = \mathbf{A}_1^{-1}\Delta t^2 \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\bar{F}_n + \beta\bar{F}_{n+1} \\ (1 - \gamma)\bar{F}_n + \gamma\bar{F}_{n+1} \end{Bmatrix}.$$

Menetelmän (19.25) stabiiliusanalyysi on periaatteeltaan aivan sama kuin luvussa 19.3.1. Vahvennumatriisin invariantit ovat

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 - \frac{\zeta\Omega + \frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{2})\Omega^2}{D}, \\ A_2 &= 1 - \frac{2\zeta\Omega + \frac{1}{2}(\gamma - \frac{1}{2})\Omega^2}{D}, \end{aligned}$$

missä  $D = 1 + 2\gamma\zeta\Omega + \beta\Omega^2$  ja karakteristinen polynomi on kuten yhtälössä 19.11. Jotta vahvennusmatriisin ominaisarvot olisivat kompleksisia, on oltava voimassa ehto

$$A_1^2 < A_2,$$

mistä seuraa

$$\left[\frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2 - \beta\right] \Omega^2 + \zeta(\frac{1}{2} - \gamma)\Omega + \zeta^2 - 1 < 0. \quad (19.26)$$

Havaitaan, että ehdot vahvennusmatriisin juurien kompleksisuudelle ovat vaimennettun liikeyhtälön tapauksessa samat kuin vaimentamattomallekin, eli ehdot (19.16) ovat

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad \beta > \frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2. \quad (19.27)$$

Tällöin juurien itseisarvo on myös ykköstä pienempi, joten menetelmä on ehdoitusta stabiili. Mikäli edellä mainittu ehto ei toteudu ja mikäli  $\gamma \geq \frac{1}{2}$ , on menetelmä ehdollisesti stabiili ja kriittinen taajuus saadaan yhtälöstä (19.26):

$$\Omega \leq \Omega^{\text{bif}} = \frac{\frac{1}{2}\zeta(\gamma - \frac{1}{2}) + \sqrt{\frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2 - \beta + \zeta^2(\beta - \frac{1}{2}\gamma)}}{\frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2 - \beta}.$$

Kuten vaimentamattomassakin tapauksessa stabiiliusaluetta voidaan laajentaa epäyhtälöiden (??) rajoittamaa aluetta suuremmaksi. Tällöin juurien reaalisuus salitaan ( $A_1^2 - A_2 > 0$ ), ja rajoittavat ehdot ovat:

$$\begin{cases} -1 \leq A_1 \leq 0 \\ \max |\lambda| = A_1 - \sqrt{A_1^2 - A_2} \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} 0 < A_1 \leq 1 \\ \max |\lambda| = A_1 + \sqrt{A_1^2 - A_2} \end{cases}.$$

Ensimmäinen epäyhtälö osoittautuu kriittiseksi: <sup>2</sup>

$$2(2\beta - \gamma)\Omega^2 + 4\zeta(2\gamma - 1)\Omega^2 + 4 \geq 0,$$

mistä saadaan ehdot  $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$  Newmarkin menetelmän ehdoitusta stabiiliudelle vaimennettun värähtelijän tapauksessa. Nämä ovat samat ehdot kuin vaimentamattomalle systeemillekin.

#### 19.4.2.1 Menetelmän korkeataajuuskäyttäytyminen

Mikäli Newmarkin menetelmää käytetään systeemien ratkaisuun, jotka perustuvat rakennemallien semidiskretoituihin yhtälöihin joissa korkeimmat taajuudet ovat virheellisiä, on korkeiden taajuuksien algoritmien vaimennus suotava ominaisuus. Edellisissä luvuissa on näytetty, että Newmarkin menetelmällä ei ole vaimentamattomalle systeemille amplitudivaimennusta, mikäli  $\gamma$  parametrilla on arvo  $1/2$ . Mikäli  $\gamma > 1/2$ , Newmarkin menetelmässä on algoritmista vaimennusta, mitä voidaan mitata vahvennusmatriisin spektraalisäteiden avulla.

<sup>2</sup> Jälkimmäinen ehto toteutuu aina:  $\Omega^2/(1 + 2\gamma\zeta\Omega + \beta\Omega^2) > 0$ .

Maksimaalinen korkeiden taajuuksien vaimennus saadaan aikaan kun valitaan parametreille arvot (k-newmark-ehto-juuret-kompleksisia) joka on vahvennusehto. Tällöin vahvennusehto on kaksikielinen. Tällöin vahvennusehto on kaksikielinen. Tällöin vahvennusehto on kaksikielinen.

$$\lambda_{1,2} = A_1 = 1 - \frac{\zeta\Omega + \frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{2})\Omega^2}{1 + 2\zeta\gamma\Omega + \beta\Omega^2}.$$

Kun aika-askel kasvaa, lähestyy spektraalisäde raja-arvoa

$$\rho_\infty^{\text{bif}} = \lim_{\Delta t/T \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{A}) = \left| 1 - \frac{2}{\gamma + \frac{1}{2}} \right|.$$

Tehokkain korkeiden taajuuksien vaimennus saataisiin kun valitaan  $\beta = 1, \gamma = \frac{3}{2}$ . Valitettavasti tällä algoritmilla on hyvin huono tarkkuus matalien taajuuksien alueella, joten se ei ole käyttökelpoinen rakenteiden transienttiansalyseissä.

## 19.5 Yleistetty $\alpha$ -menetelmä

Newmarkin menetelmäperheen jäsenistä ainoastaan trapetsikaava on ehdoitta stabiili ja tarkkuudeltaan toista kertalukua. Trapetsikaavan haittapuolena on kuitenkin se ettei sillä ole minkäänlaista algoritmista vaimennusta. Seuraavassa esitetään menetelmä, jonka tarkkuus on samaa luokkaa kuin trapetsikaavalla, mutta jonka algoritmista vaimennusta voidaan säätää yhdellä parametrilla.

Yleistetyn  $\alpha$ -menetelmän siirtymän ja nopeuden kaavat ovat samat kuin Newmarkin menetelmässä, eli

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \dot{y}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)(\Delta t)^2 \ddot{y}_n + \beta(\Delta t)^2 \ddot{y}_{n+1},$$

$$\dot{y}_{n+1} = \dot{y}_n + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{y}_n + \gamma\Delta t \ddot{y}_{n+1},$$

mutta nyt liikeyhtälö kirjoitetaan muodossa

$$m\ddot{y}_{n+1-\alpha_m} + c\dot{y}_{n+1-\alpha_f} + ky_{n+1-\alpha_f} = f(t_{n+1-\alpha_f}), \quad (19.28)$$

missä  $\alpha_m, \alpha_f$  ovat menetelmän parametrejä ja

$$y_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)y_{n+1} + \alpha_f y_n,$$

$$\dot{y}_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)\dot{y}_{n+1} + \alpha_f \dot{y}_n,$$

$$\ddot{y}_{n+1-\alpha_m} = (1 - \alpha_m)\ddot{y}_{n+1} + \alpha_m \ddot{y}_n,$$

$$t_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)t_{n+1} + \alpha_f t_n.$$

Siirtymän ja nopeuden alkuarvot ovat  $y(0) = y_0$  ja  $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ . Kiihtyvyyden alkuarvo saadaan liikeyhtälöstä

$$\ddot{y}(0) = m^{-1}(f(0) - c\dot{y}_0 - ky_0).$$

Yleistetyn  $\alpha$ -menetelmän stabiiliutta ja tarkkuutta tutkitaan samalla tavalla kuin Newmarkin menetelmän ominaisuuksia edellä soveltamalla menetelmää yhden vapausasteen värähtelijän liikeyhtälöön

$$\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \omega^2y = f$$

alkuehdoin  $y(0) = y_0$ ,  $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ .

Homogeenisessa tapauksessa  $f = 0$  saadaan kaava

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

missä  $\mathbf{A}$  on vahvistusmatriisi ja

$$\mathbf{X}_n = \left\{ \begin{array}{c} y_n \\ \Delta t \dot{y}_n \\ (\Delta t)^2 \ddot{y}_n \end{array} \right\}.$$

Algoritmin stabiilius, amplitudin virhe ja vaihevirhe riippuvat vahvistusmatriisin ominaisarvoista. Vahvenusmatriisin spektraalisäde on

$$\rho = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\},$$

missä  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  ovat matriisin  $\mathbf{A}$  ominaisarvot. Voidaan osoittaa, että yleistetty  $\alpha$ -menetelmä on ehdoitta stabiili, jos

$$\alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2}, \quad \beta \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_f - \alpha_m).$$

Spektraalisäde mittaa myös menetelmän numeerista vaimennusta. Korkeiden taajuuksien vaimennus on integrointimenetelmän suotava ominaisuus, mutta se ei saa vaimentaa liikaa matalia taajuuksia. Yleistetyn  $\alpha$ -menetelmän matalien taajuuksien vaimennus minimoituu, kun  $\alpha_f = (\alpha_m + 1)/\sqrt{3}$ .

Yleistetyn  $\alpha$ -menetelmän katkaisuvirhe on suuruusluokkaa  $O[(\Delta t)^2]$ , eli sen tarkkuus on toista kertalukua, jos

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f.$$

## 19.6 Moniaskelmenetelmät

Tarkastellaan alkuarvotettavaa

$$\dot{y} = f(y, t), \quad y(0) = y_0. \quad (19.29)$$

Haetaan tehtävän ratkaisua ajanhetkillä  $t = n\Delta t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Merkitään, että  $y_n$  on tarkan ratkaisun  $y(t_n)$  approksimaatio ajanhetkellä  $t_n$ , ja  $f_n \equiv f(y_n, t_n)$ .



Yleinen lineaarinen moniaskelmenetelmä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}, \quad (19.30)$$

missä  $\alpha_j$  ja  $\beta_j$  ovat vakioita. Asetetaan  $\alpha_k = 1$ .  $k$ -askelmenetelmän tapauksessa tarvitaan  $k$  alkuarvoa,  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ . Yksiaskelmenetelmälle tarvitaan vain alkuarvo  $y_0$ .

Moniaskelmenetelmä on eksplisiittinen, jos  $\beta_k = 0$ , ja implisiittinen, jos  $\beta_k \neq 0$ . Eksplisiittisen menetelmän tapauksessa differenssiyhtälöstä (19.30) saadaan  $y_{n+k}$  suoraan, kun  $y_{n+j}$  ja  $f_{n+j}$ ,  $j = 0, 1, \dots, k-1$  tunnetaan edellisten aika-askeleiden ratkaisujen perusteella. Sitävastoin implisiittisen menetelmän tapauksessa on jokaisella aika-askeleella ratkaistava yhtälö

$$y_{n+k} = \Delta t \beta_k f(y_{n+k}, t_{n+k}) + g, \quad (19.31)$$

missä  $g$  on (tässä vaiheessa) tunnetuista arvoista  $y_{n+j}$  ja  $f_{n+j}$ ,  $j = 0, 1, \dots, k-1$  riippuva funktio. Lineaarisen funktion  $f$  tapauksessa yhtälön (19.31) ratkaisu on helppo. Sensijaan, jos funktio  $f(t, y)$  riippuu epälineaarisesti ratkaistavasta funktiosta  $y$ , niin myös differenssiyhtälöstä (19.30) tulee epälineaarisia, ja ratkaisu on haettava iteratiivisesti.

### 19.6.1 Johto Taylorin kehitelmän avulla

Tarkastellaan seuraavaksi moniaskelmenetelmien kertoimien määrittystä. Kehitetään funktio  $y(t)$  hetkellä  $t_n$  Taylorin sarjaksi

$$y(t_n + \Delta t) = y(t_n) + \Delta t y^{(1)}(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} y^{(2)}(t_n) + \dots, \quad (19.32)$$

missä on merkitty

$$y^{(p)}(t_n) \equiv \frac{d^p y}{dt^p}(t_n), \quad p = 1, 2, \dots \quad (19.33)$$

Katkaisemalla toisen termin jälkeen ja ottamalla huomioon, että  $\dot{y}(t) = f(y, t)$ , Taylorin kehitelmästä saadaan differentiaaliyhtälön (19.29) tarkkojen ratkaisujen välille likikaava

$$y(t_n + \Delta t) \approx y(t_n) + \Delta t f(y(t_n), t_n), \quad (19.34)$$

jonka virhe on

$$\frac{(\Delta t)^2}{2!} y^{(2)}(t_n) + \frac{(\Delta t)^3}{3!} y^{(3)}(t_n) + \dots \quad (19.35)$$

Kaava (19.34) voidaan tulkita myös yhtälön (19.29) likiratkaisujen väliseksi tarkaksi kaavaksi

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f_n, \quad (19.36)$$

joka on eksplisiittinen Eulerin menetelmä. Menetelmän (19.36) katkaisuvirhe on  $O((\Delta t)^2)$ , ja se integroi tarkasti yhtälön (19.29) lineaarisen polynomin mukaisen ratkaisun.

Taylorin kehitelmistä

$$y(t_n + \Delta t) = y(t_n) + \Delta t y^{(1)}(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} y^{(2)}(t_n) + \frac{(\Delta t)^3}{3!} y^{(3)}(t_n) + \dots, \quad (19.37)$$

$$y(t_n - \Delta t) = y(t_n) - \Delta t y^{(1)}(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} y^{(2)}(t_n) - \frac{(\Delta t)^3}{3!} y^{(3)}(t_n) + \dots \quad (19.38)$$

saadaan vähentämällä

$$y(t_n + \Delta t) - y(t_n - \Delta t) = 2\Delta t y^{(1)}(t_n) - \frac{(\Delta t)^3}{3} y^{(3)}(t_n) + \dots, \quad (19.39)$$

josta johdetaan keskeisdifferenssimenetelmä

$$y_{n+2} = y_n + 2\Delta t f_{n+1}. \quad (19.40)$$

Menetelmän (19.40) katkaisuvirhe on  $\pm \frac{1}{3}(\Delta t)^3 y^{(3)}(t_n) + \dots$ .

Yleinen yksiaskelmenetelmä on

$$y_{n+1} + \alpha_0 y_n = \Delta t (\beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n). \quad (19.41)$$

Haetaan parametreille  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  ja  $\beta_1$  optimaaliset arvot.

Sijoittamalla vastaavaan likikaavaan

$$y(t_n + \Delta t) + \alpha_0 y(t_n) \approx \Delta t [\beta_1 \dot{y}(t_n + \Delta t) + \beta_0 \dot{y}(t_n)] \quad (19.42)$$

kehitymät

$$y(t_n + \Delta t) = y(t_n) + \Delta t y^{(1)}(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} y^{(2)}(t_n) + \dots, \quad (19.43)$$

$$y^{(1)}(t_n + \Delta t) = y^{(1)}(t_n) + \Delta t y^{(2)}(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} y^{(3)}(t_n) + \dots$$

saadaan

$$C_0 y(t_n) + C_1 \Delta t y^{(1)}(t_n) + C_2 (\Delta t)^2 y^{(2)}(t_n) + C_3 (\Delta t)^3 y^{(3)}(t_n) + \dots \approx 0, \quad (19.44)$$

missä

$$C_0 = 1 + \alpha_0, \quad C_1 = 1 - \beta_1 - \beta_0, \quad (19.45)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} - \beta_1, \quad C_3 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\beta_1.$$

Mahdollisimman tarkka yksiaskelmenetelmä saadaan ottamalla  $\alpha_0 = -1$ ,  $\beta_1 = \beta_0 = \frac{1}{2}$ . Tällöin saadaan menetelmä

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \Delta t (f_{n+1} + f_n), \quad (19.46)$$

joka on nimeltään trapetsikaava. Tässä tapauksessa  $C_3 = -\frac{1}{12}$ , ja trapetsikaavan katkaisuvirhe on  $\pm \frac{1}{12}(\Delta t)^3 y^{(3)}(t_n) + \dots$ .

### 19.6.2 Moniaskelmenetelmän kertaluku

Moniaskelmenetelmään (19.30) liittyy differenssioperaattori

$$\mathcal{L}[y(t); \Delta t] = \sum_{j=0}^k [\alpha_j y(t + j\Delta t) - \Delta t \beta_j \dot{y}(t + j\Delta t)], \quad (19.47)$$

missä  $y(t)$  on jakuvasti derivoituva funktio tarkasteluvälillä. Kehittämällä funktio  $y(t + j\Delta t)$  ja sen derivaatta  $\dot{y}(t + j\Delta t)$  Taylorin sarjoiksi saadaan kaavasta (19.47)

$$\mathcal{L}[y(t); \Delta t] = C_0 y(t) + C_1 \Delta t y^{(1)}(t) + \dots + C_p (\Delta t)^p y^{(p)}(t) + \dots \quad (19.48)$$

Differenssioperaattorin (19.47) tarkkuus on kertalukua  $q$ , jos  $C_0 = C_1 = \dots = C_q = 0$  ja  $C_{q+1} \neq 0$ . Vakioiden  $\alpha_j$  ja  $\beta_j$  avulla saadaan

$$\begin{aligned} C_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k, \\ C_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k), \\ C_p &= \frac{1}{p!} (\alpha_1 + 2^p \alpha_2 + \dots + k^p \alpha_k) \end{aligned} \quad (19.49)$$

$$- \frac{1}{(p-1)!} (\beta_1 + 2^{p-1} \beta_2 + \dots + k^{p-1} \beta_k), \quad p = 2, 3, \dots$$

Kehitelmän (19.48) ensimmäistä nollasta poikkeavaa kerrointa  $C_{q+1}$  nimitetään virhekerroimeksi.

Moniaskelmenetelmän (19.30) katkaisuvirhe ajanhetkellä  $t_{n+k}$  on

$$\mathcal{L}[y(t_n); \Delta t] = \sum_{j=0}^k [\alpha_j y(t_n + j\Delta t) - \Delta t \beta_j \dot{y}(t_n + j\Delta t)], \quad (19.50)$$

missä  $y(t)$  on differentiaaliyhtälön (19.29) tarkka ratkaisu. Katkaisuvirhe  $T_{n+k} \equiv \mathcal{L}[y(t_n); \Delta t]$  on luonteltaan paikallinen. Otaksamalla, että  $y_{n+j} = y(t_{n+j})$ ,  $j = 0, 1, \dots, k-1$ , eli näillä ajanhetkillä katkaisuvirhe on nolla, saadaan kaavasta (19.50)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \alpha_j y(t_n + j\Delta t) &= \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j \dot{y}(t_n + j\Delta t) + \mathcal{L}[y(t_n); \Delta t] \\ &= \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j f(y(t_n + j\Delta t), t_n + j\Delta t) + \mathcal{L}[y(t_n); \Delta t], \end{aligned} \quad (19.51)$$

missä  $y(t)$  on tarkka ratkaisu. Likiratkaisu  $y_{n+k}$  toteuttaa moniaskelmenetelmän kaavan

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j f(y_{n+j}, t_{n+j}). \quad (19.52)$$

Vähentämällä kaavat (19.51) ja (19.52) toisistaan tulee, kun  $\alpha_k = 1$ , tarkoilla alkuarvoilla

$$y(t_{n+k}) - y_{n+k} = \Delta t \beta_k [f(y(t_{n+k}), t_{n+k}) - f(y_{n+k}, t_{n+k})] + \mathcal{L}[y(t_n); \Delta t]. \quad (19.53)$$

Jos  $\eta_{n+k} \in (y_{n+k}, y(t_{n+k}))$ , niin saadaan

$$f(y(t_{n+k}), t_{n+k}) - f(y_{n+k}, t_{n+k}) = \frac{\partial f(\eta_{n+k}, t_{n+k})}{\partial y} [y(t_{n+k}) - y_{n+k}], \quad (19.54)$$

joten

$$\mathcal{L}[y(t_n); \Delta t] \equiv T_{n+k} = \left[ 1 - \Delta t \beta_k \frac{\partial f(\eta_{n+k}, t_{n+k})}{\partial y} \right] [y(t_{n+k}) - y_{n+k}]. \quad (19.55)$$

Eksplisiittisen menetelmän, ( $\beta_k = 0$ ), katkaisuvirhe on tarkan ratkaisun ja tarkoilla alkuarvoilla lasketun moniaskelmenetelmän ratkaisun erotus, ja implisiittisen menetelmän katkaisuvirhe on ko. erotukseen verrannollinen. Jos tarkka teoreettinen ratkaisu on riittävän monta kertaa derivoituva, niin sekä eksplisiittiselle että implisiittiselle moniaskelmenetelmälle

$$y(t_{n+k}) - y_{n+k} = C_{q+1}(\Delta t)^{q+1} y^{(q+1)}(t_n) + O((\Delta t)^{q+2}), \quad (19.56)$$

missä  $q$  on menetelmän kertaluku. Termi  $C_{q+1}(\Delta t)^{q+1} y^{(q+1)}(t_n)$  on paikallinen pää(pään?)katkaisuvirhe, joka tunnetaan, jos moniaskelmenetelmän kertaluku  $q$  ja virhevakio  $C_{q+1}$  tunnetaan.

### 19.6.3 Konsistenssi

Lineaarisen moniaskelmenetelmän sanotaan olevan konsistentti, jos sen kertaluku on  $q \geq 1$ . Kaavoista (19.49) seuraa, että moniaskelmenetelmä (19.30) on konsistentti, jos

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0, \quad \sum_{j=0}^k j \alpha_j = 0 = \sum_{j=0}^k \beta_j. \quad (19.57)$$

Määrittelemällä polynomit

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \zeta^j, \quad \sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^k \beta_j \zeta^j \quad (19.58)$$

konsistenssiehdot (19.57) saadaan muotoon

$$\rho(1) = 0, \quad \rho'(1) = \sigma(1), \quad (19.59)$$

missä  $\rho'(\zeta) = \frac{d\rho(\zeta)}{d\zeta}$ . Konsistentin moniaskelmenetelmän ensimmäisellä karakteristisella polynomilla  $\rho(\zeta)$  on aina juurena  $\zeta_1 = +1$ . Juurta  $\zeta_1$  sanotaan pääjuureksi.

Myös muita juuria, lisäjuuria  $\zeta_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, k$  esiintyy, kun moniaskelmenetelmän askelluku on suurempi kuin yksi.

Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$\dot{y} = 0, \quad y_0 = 0, \quad (19.60)$$

jonka ratkaisu on  $y(t) = 0$ . Soveltamalla moniaskelmenetelmää (19.30) tähän tehtävään tulee differenssiyhtälö

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = 0. \quad (19.61)$$

Jos polynomin  $\rho(\zeta)$  juuret  $\zeta_i$  ovat reaaliset ja erisuuret, niin differenssiyhtälön ratkaisu on

$$y_n = \Delta t \sum_{j=1}^k d_j \zeta_j^n, \quad (19.62)$$

missä  $d_j$  ovat vakioita ja pääjuuri  $\zeta_1 = 1$ . Menetelmä suppenee ajanhetkellä  $t = n\Delta t$ , eli

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ t = n\Delta t}} \Delta t \zeta_i^n = t \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\zeta_i^n}{n} = 0, \quad (19.63)$$

jos ja vain jos juuret toteuttavat ehdot

$$|\zeta_i| \leq 1. \quad (19.64)$$

Jos polynomin  $\rho(\zeta)$  juuri  $\zeta_s$  on  $m$ -kertainen, niin tämän juuren osuus differenssiyhtälön ratkaisuun on muotoa

$$\Delta t [d_{s,1} + d_{s,2}n + d_{s,3}n(n-1) + \dots + d_{s,m}n(n-1)\dots(n-m+2)] \zeta_s^n. \quad (19.65)$$

Ratkaisu suppenee nyt ajanhetkellä  $t = n\Delta t$ , eli

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ t = n\Delta t}} \Delta t n^p \zeta_s^n = t \lim_{n \rightarrow \infty} n^{p-1} \zeta_s^n = 0, \quad p \geq 1, \quad (19.66)$$

jos ja vain jos

$$|\zeta_i| < 1, \quad (19.67)$$

eli moninkertaisen juuren on oltava ykköstä pienempi.

Määritellään, että lineaarinen moniaskelmenetelmä on **nolla-stabiili**, jos sen ensimmäisen karakteristisen polynomin  $\rho(\zeta)$  juuret toteuttavat ehdot  $|\zeta_j| \leq 1$  ja sen mahdolliset moninkertaiset juuret toteuttavat ehdot  $|\zeta_j| < 1$ . Juuret voivat olla myös kompleksisia.

Kun ensimmäisen kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö ratkaistaan korvaamalla se korkeamman kertaluvun differenssiyhtälöllä, syntyy em. lisäjuuria. Nolla-stabiilius takaa sen, että lisäjuurten vaikutus menee kohti nollaa aika-askelta pienennettäessä.

Dahlquistin teoreeman mukaan lineaarinen moniaskelmenetelmä suppenee, jos se on konsistentti ja nolla-stabiili.

Lineaarisia ensimmäisen kertaluvun moniaskelmenetelmiä voidaan soveltaa myös toisen kertaluvun yhtälöille

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \quad (19.68)$$

tekemällä muuttujien vaihdos

$$y = u, \quad \dot{y} = v, \quad (19.69)$$

jolloin saadaan kahden yhtälön systeemi

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ m\dot{v} + cv + ku &= f, \end{aligned} \quad (19.70)$$

eli

$$\begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{u} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -m^{-1}c & -m^{-1}k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} m^{-1}f \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (19.71)$$

Moniaskelmenetelmä voidaan yleistää tavallisten differentiaaliyhtälöiden systeemille

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \quad (19.72)$$

Vastaavasti toisen kertaluvun yhtälöryhmän tapauksessa

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \dot{\mathbf{y}}(0) = \dot{\mathbf{y}}_0 \quad (19.73)$$

tekemällä muuttujien vaihdos

$$\mathbf{y} = \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{v}, \quad (19.74)$$

tulee

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{v}, \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{K}\mathbf{u} &= \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (19.75)$$

eli

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (19.76)$$

### 19.6.4 Kankeat yhtälöt

Tavallisten differentiaaliyhtälöiden ryhmän

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \quad (19.77)$$

ratkaisu, kun matriisin  $\mathbf{A}$  ominaisarvot  $\lambda_i$  ovat erisuuret, on

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^m k_i e^{\lambda_i t} \mathbf{c}_i + \mathbf{g}(t), \quad (19.78)$$

missä  $\mathbf{c}_i$  ovat ominaisarvoihin  $\lambda_i$  liittyvät ominaisvektorit.

Otaksutaan, että ominaisarvojen reaalisosat ovat negatiiviset, eli  $\Re\lambda_i < 0$ . Tällöin ratkaisun ensimmäinen osa

$$\mathbf{y}_t(t) = \sum_{i=1}^m k_i e^{\lambda_i t} \mathbf{c}_i \rightarrow 0, \quad \text{kun } t \rightarrow \infty. \quad (19.79)$$

Ratkaisun osa  $\mathbf{y}_t(t)$  on nimeltään transientti ratkaisu (ohimenevä). Jos kiinnostuksen kohteena on vakiintuneen tilan ratkaisu  $\mathbf{h}(t)$ , niin numeerista ratkaisua täytyy jatkaa niin pitkälle, että transientin ratkaisun hitaimmin vaimentuva komponentti on mennyt riittävän pieneksi.

Lineaarista systeemiä  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(t)$  sanotaan kankeaksi, jos matriisin  $\mathbf{A}$  ominaisarvojen reaalisosat ovat  $\Re\lambda_i < 0$  ja  $\max |\Re\lambda_i| \gg \min |\Re\lambda_i|$ .

### 19.6.5 Moniaskelmenetelmän stabiiliusalue

Soveltamalla moniaskelmenetelmää

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}, \quad (19.80)$$

testiprobleemaan tai mallitehtävään

$$\dot{y} = \lambda y, \quad \lambda < 0, \quad (19.81)$$

saadaan yrittien  $y_n = Cr^n$  avulla polynomiyhtälö

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j r^j - \Delta t \lambda \sum_{j=0}^k \beta_j r^j = 0, \quad (19.82)$$

eli

$$P(\Delta t \lambda) = \rho(r) - \Delta t \lambda \sigma(r) = 0, \quad (19.83)$$

missä  $P(r, \Delta t \lambda)$  on menetelmän karakteristinen polynomi. Karakteristisen polynomiyhtälön juuret ovat yleisessä tapauksessa kompleksilukuja, joten myös  $\Delta t \lambda$  on

kompleksinen. Menetelmän stabiiliusalue on on kompleksisessa  $\Delta t\lambda$ -tasossa sellainen, että polynomiyhtälön  $P(r, \Delta t\lambda) = 0$  juuret ovat yksikköympyrällä, kun  $\Delta t\lambda$  on alueen sisällä.

Stabiiliusalueen reuna voidaan piirtää nyt kulman  $\theta$  funktiona

$$\Delta t\lambda(\theta) = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}. \quad (19.84)$$

**Esimerkki 19.1** Määritetään implisiittisen ja eksplisiittisen Eulerin menetelmän stabiiliusalueet.

Implisiittisen Eulerin menetelmän

$$y_{n+1} - y_n = \Delta t f_{n+1} \quad (19.85)$$

ja mallitehtävän  $\dot{y} = \lambda y$ ,  $\lambda < 0$  tapauksessa  $y_{n+1} - y_n = \Delta t \lambda y_{n+1}$  ja

$$\rho(r) = r - 1, \quad \sigma(r) = r. \quad (19.86)$$

Stabiiliusalueen määrittäväksi yhtälöksi saadaan

$$\Delta t\lambda(\theta) = \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta}} = 1 - e^{-i\theta}, \quad (19.87)$$

joka on yksikköympyrä keskipisteenä  $(1, 0)$  kompleksisessa  $\Delta t\lambda$ -tasossa. Implisiittinen Eulerin menetelmä on stabiili ympyrän ulkopuolella.

Eksplisiittisen Eulerin menetelmän

$$y_{n+1} - y_n = \Delta t f_n \quad (19.88)$$

ja testiongelman  $\dot{y} = \lambda y$  tapauksessa saadaan karakteristinen polynomiyhtälö

$$r - 1 - \Delta t\lambda = 0, \quad (19.89)$$

ja stabiiliusalueen määrittäväksi yhtälöksi tulee

$$\Delta t\lambda(\theta) = e^{i\theta} - 1, \quad (19.90)$$

joka on yksikköympyrä keskipisteenään  $(-1, 0)$  kompleksisessa  $\Delta t\lambda$ -tasossa. Eksplisiittinen Eulerin menetelmä on stabiili ympyrän sisäpuolella.

Määritellään, että numeerinen menetelmä on **A-stabiili**, jos sen absoluuttisen stabiiliuden alue sisältää koko puolitason  $\Re(\Delta t\lambda) < 0$ .

A-stabiilit menetelmät soveltuvat hyvin kankeille systeemeille, joille  $\Re\lambda_i < 0$  eli ominaisarvojen reaali-osat ovat negatiiviset.

A-stabiilien moniaskelmenetelmien joukkoa rajoittaa Dahlquistin teoreema, jonka mukaan

- eksplisiittinen moniaskelmenetelmä ei voi olla A-stabiili,



- $A$ -stabiilin implisiittisen moniaskelmenetelmän tarkkuuden kertaluku ei voi olla suurempi kuin kaksi,
- pienin virhevakio  $C_3 = -\frac{1}{12}$  on implisiittisellä toisen kertaluvun moniaskelmenetelmällä, trapetsikaavalla.

Koska Dahlquistin teoreema rajoittaa  $A$ -stabiilin moniaskelmenetelmän kertaluvun arvoon kaksi, on ehdotettu vähemmän vaativia stabiilius-määritelmiä.

Numeerista menetelmää sanotaan  $A(\alpha)$ -stabiiliksi, jos sen stabiiliusalue sisältää kompleksitasossa kiilan  $\{|\Delta t\lambda| - \alpha < \pi - \arg(\Delta t\lambda) < \alpha\}$ . Esimerkiksi, jos ratkaistavan systeemin kaikki ominaisarvot ovat reaalisia, niin voidaan käyttää  $A(0)$ -stabiilia menetelmää.

Numeerista menetelmää sanotaan jäykkä-stabiiliksi, jos sen absoluuttisen stabiiliuden alue koostuu kahdesta osasta  $\mathcal{R}_1$  ja  $\mathcal{R}_2$ , siten, että se on tarkka alueessa  $\mathcal{R}_2$  sovellettuna mallitehtävään  $\dot{y} = \lambda y$ ,  $\Re\lambda < 0$ , kun alueet ovat

$$\mathcal{R}_1 = \{\Delta t\lambda \mid \Re(\Delta t\lambda) < -a\}, \quad (19.91)$$

$$\mathcal{R}_2 = \{\Delta t\lambda \mid -a \leq \Re(\Delta t\lambda) \leq b, -c \leq \Im(\Delta t\lambda) \leq c\},$$

missä  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ovat positiivisia vakioita.

Joskus tarvitaan vielä  $A$ -stabiiliutta voimakkaampaa ominaisuutta.

Numeerista yksiaskelmenetelmää sanotaan  $L$ -stabiiliksi, jos se on  $A$ -stabiili ja lisäksi sovelletaessa sitä mallitehtävään  $\dot{y} = \lambda y$ ,  $\Re\lambda < 0$  se tuottaa kaavan  $y_{n+1} = A(\Delta t\lambda)y_n$ , missä  $|A(\Delta t\lambda)| \rightarrow 0$ , kun  $\Re(\Delta t\lambda) \rightarrow -\infty$ .

$L$ -stabiiliudesta seuraa  $A$ -stabiiliuus, josta puolestaan seuraa  $A(\alpha)$ -stabiilius.

Soveltamalla trapetsikaavaa mallitehtävään  $\dot{y} = \lambda y$ ,  $\Re\lambda < 0$ , saadaan

$$y_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{2}\Delta t\lambda}{1 - \frac{1}{2}\Delta t\lambda} y_n. \quad (19.92)$$

Kiinteällä arvolla  $\Delta t\lambda$   $y_n \rightarrow 0$ , kun  $n \rightarrow \infty$ , joten trapetsikaava on  $A$ -stabiili. Trapetsikaavan

$$y_{n+1} - y_n = \Delta t \frac{1}{2} (f_{n+1} + f_n) \quad (19.93)$$

ja testitehtävän  $\dot{y} = \lambda y$ ,  $\lambda < 0$  tapauksessa

$$y_{n+1} - y_n = \Delta t \lambda \frac{1}{2} (y_{n+1} + y_n) \quad (19.94)$$

karakteristinen polynomi yhtälö on

$$r - 1 - \Delta t \lambda \left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}\right), \quad (19.95)$$

ja stabiiliusalueen rajan määrittää kompleksitasossa yhtälö

$$\Delta t \lambda(\theta) = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}, \quad (19.96)$$

joka on imaginaariakseli. Trapetsikaava on stabiili koko puolitasossa  $\Delta t\lambda \leq 0$ , eli se on  $A$ -stabiili.

Funktion  $y$  numeerisen ratkaisun itseisarvot  $|y_n|$  voivat supeta kuitenkin hyvin hitaasti, sillä suurilla arvoilla  $|\Re(\Delta t\lambda)|$

$$|y_{n+1}| = \left| \frac{1 + \frac{1}{2}\Delta t\lambda}{1 - \frac{1}{2}\Delta t\lambda} \right| |y_n|. \quad (19.97)$$

### 19.6.6 Toisen kertaluvun yhtälöt

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön avulla annetulle alkuarvotekävälle

$$\ddot{y} = f(y, t), \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \quad (19.98)$$

suoraan soveltuva lineaarinen moniaskelmenetelmä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = (\Delta t)^2 \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}, \quad (19.99)$$

missä  $\alpha_k = 1$  ja  $\alpha_0$  ja  $\beta_0$  eivät molemmat ole nollia. Toisen derivaatan  $\ddot{y}$  approksimointiin tarvitaan vähintään kolme funktion  $y$  arvoa, ja  $k$ :n arvon on oltava vähintään kaksi.

#### 19.6.6.1 Kertaluku

Toisen kertaluvun tavalliselle differentiaaliyhtälölle soveltuvaan moniaskelmenetelmään (19.99) liittyy differenssioperaattori

$$\mathcal{L}[y(t); \Delta t] = \sum_{j=0}^k [\alpha_j y(t + j\Delta t) - (\Delta t)^2 \beta_j \ddot{y}(t + j\Delta t)], \quad (19.100)$$

missä  $y(t)$  otaksutaan jakuvasti derivoituvaksi funktioksi tarkasteluvälillä. Kehittämällä funktio  $y(t + j\Delta t)$  ja sen toinen derivaatta  $\ddot{y}(t + j\Delta t)$  Taylorin sarjoiksi saadaan kaavasta (19.100)

$$\mathcal{L}[y(t); \Delta t] = C_0 y(t) + C_1 \Delta t y^{(1)}(t) + \cdots + C_p (\Delta t)^p y^{(p)}(t) + \cdots \quad (19.101)$$

Differenssioperaattorin (19.100) tarkkuus on kertalukua  $q$ , jos  $C_0 = C_1 = \cdots =$

$C_q = C_{q+1} = 0$  ja  $C_{q+2} \neq 0$ . Vakioiden  $\alpha_j$  ja  $\beta_j$  avulla saadaan

$$\begin{aligned} C_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k, \\ C_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k, \\ C_2 &= \frac{1}{2!}(\alpha_1 + 2^2\alpha_2 + \cdots + k^2\alpha_k) \\ &\quad - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k), \\ C_p &= \frac{1}{p!}(\alpha_1 + 2^p\alpha_2 + \cdots + k^p\alpha_k) \\ &\quad - \frac{1}{(p-2)!}(\beta_1 + 2^{p-2}\beta_2 + \cdots + k^{p-2}\beta_k), \quad p = 3, 4, \dots \end{aligned} \tag{19.102}$$

Kehitelmän (19.101) ensimmäistä nollasta poikkeavaa kerrointa  $C_{q+2}$  nimitetään virhekertoimeksi.

Moniaskelmenetelmän (19.99) katkaisuvirheen päätermi ajanhetkellä  $t_n$  on  $C_{q+2}(\Delta t)^{q+2}y^{(q+2)}(t_n)$ . Se on paikallinen pääkatkaisuvirhe, joka tunnetaan, jos moniaskelmenetelmän kertaluku  $q$  ja virhekerroin  $C_{q+2}$  tunnetaan.

### 19.6.6.2 Konsistenssi

Lineaarisen moniaskelmenetelmän (19.99) sanotaan olevan konsistentti, jos sen kertaluku on vähintään yksi.

Määrittelemällä polynomit

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \zeta^j, \quad \sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^k \beta_j \zeta^j \tag{19.103}$$

konsistenssiehdot voidaan esittää toisen kertaluvun yhtälön tapauksessa muodossa

$$\rho(1) = \rho'(1) = 0, \quad \rho''(1) = 2\sigma(1), \tag{19.104}$$

missä  $\rho'(\zeta) = \frac{d\rho(\zeta)}{d\zeta}$ . Tapauksessa  $k = 1$  olisi  $\rho(1) = \rho'(1) = 0$  ja siten  $\alpha_1 = \alpha_0 = 0$ , joten vaaditaan, että  $k \geq 2$ . Konsistentin moniaskelmenetelmän (19.99) ensimmäisellä karakteristisella polynomilla  $\rho(\zeta)$  on kaksoisjuuri  $\zeta_1 = +1$ . Juurta  $\zeta_1$  sanotaan pääjuureksi. Muut juuret ovat lisäjuuria.

Määritellään, että lineaarinen, toisen kertaluvun yhtälölle suoraan soveltuva moniaskelmenetelmä (19.99) **nolla-stabiili**, jos sen ensimmäisen karakteristisen polynomin  $\rho(\zeta)$  juuret toteuttavat ehdot  $|\zeta_j| \leq 1$  ja jokainen juuri, jolle  $|\zeta_k| = 1$ , on korkeintaan kaksinkertainen juuri.

Soveltamalla moniaskelmenetelmää (19.99)

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}, \quad (19.105)$$

testiprobleemaan

$$m\ddot{y} + ky = 0 \quad (19.106)$$

eli

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (19.107)$$

missä  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , saadaan yrittien  $y_n = Cr^n$  avulla polynomiyhtälö

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j r^j + (\Delta t \omega)^2 \sum_{j=0}^k \beta_j r^j = 0, \quad (19.108)$$

eli

$$P(r, \Delta t \omega) = \rho(r) + (\Delta t \omega)^2 \sigma(r) = 0, \quad (19.109)$$

missä  $P(r, \Delta t \omega)$  on menetelmän karakteristinen polynomi. Menetelmän stabiiliusalue on on kompleksisessa  $\Delta t \omega$ -tasossa sellainen, että polynomiyhtälön  $P(r, \Delta t \omega) = 0$  juuret ovat yksikköympyrällä, kun  $\Delta t \omega$  on alueen sisällä.

Stabiiliusalueen reuna voidaan piirtää nyt kulman  $\theta$  funktiona

$$\Delta t \omega(\theta) = \sqrt{\frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}}. \quad (19.110)$$

**Esimerkki 19.2** Määritetään Newmarkin menetelmän  $\beta = \frac{1}{12}$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$  ja Houboltin menetelmän stabiiliusalueet.

Parametrien arvoilla  $\beta = \frac{1}{12}$  ja  $\gamma = \frac{1}{2}$  Newmarkin menetelmä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_2 y_{n+2} = (\Delta t)^2 (\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \beta_2 f_{n+2}), \quad (19.111)$$

missä kertoimet ovat nyt

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1, & \alpha_1 &= -2, & \alpha_2 &= 1, \\ \beta_0 &= \frac{1}{12}, & \beta_1 &= \frac{10}{12}, & \beta_2 &= \frac{1}{12}. \end{aligned} \quad (19.112)$$

Mallitehtävän  $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$  tapauksessa tulee

$$y_{n+2} - 2y_n + y_n = \frac{(\Delta t \omega)^2}{12} (y_{n+2} + 10y_{n+1} + y_n). \quad (19.113)$$

Karakteristisen polynomin osat ovat

$$\rho(r) = r^2 - 2r + 1, \quad \sigma(r) = \frac{1}{12}r^2 + \frac{10}{12}r + \frac{1}{12}, \quad (19.114)$$

ja stabiiliusalueen määrittäväksi yhtälöksi saadaan

$$\Delta t\omega(\theta) = \sqrt{\frac{e^{2i\theta} - 2e^{i\theta} + 1}{e^{2i\theta} + 10e^{i\theta} + 1}}. \quad (19.115)$$

Houboltin menetelmässä nopeutta ja kiihtyvyyttä approksimoidaan taaksepäin otettujen differenssien avulla

$$11y_{n+3} - 18y_{n+2} + 9y_{n+1} - 2y_n = 6\Delta t\dot{y}_{n+3}, \quad (19.116)$$

$$2y_{n+3} - 5y_{n+2} + 4y_{n+1} - y_n = (\Delta t)^2\ddot{y}_{n+3}.$$

Mallitehtävän  $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$  tapauksessa saadaan karakteristinen polynomi yhtälö

$$2r^3 - 5r^2 + 4r - 1 + (\Delta t\omega)^2 r^3 = 0, \quad (19.117)$$

ja stabiiliusalueen määrittää yhtälö

$$\Delta t\omega(\theta) = \sqrt{\frac{2e^{3i\theta} - 5e^{2i\theta} + 4e^{i\theta} + 1}{e^{3i\theta}}}. \quad (19.118)$$

Stabiiliusalue leikkaa reaaliakselin kohdassa  $\Re(\Delta t\omega) = 3.46$ .

## 19.7 Vaimennuksen mallintaminen

Vaimennus on hyvin monimutkainen ilmiö, joka riippuu useista eri tekijöistä jonka vuoksi sen mallintaminen on usein vaikeaa. Vaimennettu systeemi ei ole konservatiivinen, eli energiaa säilyttävä. Vaimennuksen syntyvät jaotellaan usein seuraavasti:

1. neste l. viskoosi vaimennus, joka syntyy esim. ympäröivän väliaineen vastuksesta,
2. kitkavaimennus (ns. kuiva eli Coulombin kitka)
3. materiaalin vaimennus.

Tarkastellaan seuraavissa luvuissa väliaineen vastuksen ja materiaalin vaimennuksen malleja.

### 19.7.1 Väliaineen vastus

Tarkastellaan edelleen värähtelevän langan ongelmaa ottaen nyt huomioon ympäröivän väliaineen vastus. Otaksutaan, että väliaine voidaan mallintaa kokoonpuristumattomana viskoosina nesteenä, eli Stokesin nesteenä. Tällöin ratkaistavana on ns. kytketty ongelma, joka sitoo toisiinsa värähtelevän langan mallin (19.1)

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sigma A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \bar{f}, \\ u(x, 0) = \bar{u}_0 \sin(\pi x/L), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v(x, 0) = \bar{v}_0 \sin(\pi x/L) \end{cases} \quad (19.119)$$

ja Stokesin nesteen

$$\begin{cases} \rho_n \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \mu \Delta \vec{v} + \nabla p = \rho_n \vec{b}, \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0, \\ \boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \mu(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) \end{cases} \quad (19.120)$$

yhtälöt. Nesteen tiheyttä on merkitty  $\rho_n$ , viskositeetti  $\mu$ , nopeusvektori  $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$  ja paine on  $p$ . Langan liikeyhtälön kuormatermi  $\bar{f}$  määräytyy nesteen lankaan kohdistamasta traktiosta. Yksinkertaistetaan mallia siten, että oletetaan virtauksen tapahtuvan vain värähtelevän langan tasossa. Oletetaan myös nesteen tilavuusvoimat häviävän pieniksi, eli  $\vec{b} \approx 0$ . Yhtälö

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (19.121)$$

on nesteen kokoonpuristumattomuusehto. Stokesin nesteen liikeyhtälöissä (19.120) esiintyvät Laplace- ja gradienttioperaattorit kohdistuvat vektoriin  $\vec{v}$ :

$$\Delta \vec{v} = (\nabla \cdot \nabla) \vec{v} = \begin{cases} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \end{cases}, \quad \text{ja} \quad \nabla \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Jännitysmatriisin  $\boldsymbol{\sigma}$  muoto on tasotapauksessa

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

ja leikkausjännitykset ovat pareittain yhtäsuuret  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ .

Etsitään langan värähtelylle ratkaisua edelleekin muodossa

$$u(x, t) = Y(t) \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Tällöin langan nopeus on  $v(x, t) = \partial u \partial t = \dot{Y}(t) \sin(\pi x/L)$ . Nesteen nopeus langan välittömässä läheisyydessä on oltava sama kuin langan, joten yritetään nesteen nopeuskentän  $y$ -komponentille lauseketta

$$v_y = \dot{Y}(t) \sin \frac{\pi x}{L} e^{\pi y/L}, \quad \text{kun } y < 0.$$

Kokoonpuristumattomuusehdosta (19.121) saadaan

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\pi}{L} \dot{Y} \sin \frac{\pi x}{L} e^{\pi y/L} \implies v_x = \dot{Y} \cos \frac{\pi x}{L} e^{\pi y/L}.$$

Paine voidaan ratkaista integroimalla yhtälöt

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho_n \frac{\partial v_x}{\partial t} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) = -\rho_n \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\rho_n \ddot{Y} \cos \frac{\pi x}{L} e^{\pi y/L}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho_n \frac{\partial v_y}{\partial t} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) = -\rho_n \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\rho_n \ddot{Y} \sin \frac{\pi x}{L} e^{\pi y/L}, \end{aligned}$$

josta saadaan

$$p = -\frac{L}{\pi} \rho_n \ddot{Y} \sin \frac{\pi x}{L} e^{\pi y/L}.$$

Langan kuormitus  $\bar{f}$  saadaan tasapainoehdosta

$$\bar{f} = -2D\sigma_y,$$

missä  $D$  on langan halkaisija. Pystysuuntaisen jännityksen  $\sigma_y$  lauseke on

$$\sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{L}{\pi} \rho_n \ddot{Y} \sin \frac{\pi x}{L} e^{\pi y/L} + 2\mu \frac{\pi}{L} \dot{Y} \sin \frac{\pi x}{L} e^{\pi y/L}$$

jonka arvo langan kohdalla on

$$\sigma_y(x, 0, t) = \left( \frac{L}{\pi} \rho_n \ddot{Y} + 2\mu \frac{\pi}{L} \dot{Y} \right) \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Värähtelevän langan liikeyhtälöksi (19.119) saadaan siten

$$\begin{aligned} \rho A \ddot{Y} \sin \frac{\pi x}{L} + \sigma A \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 Y \sin \frac{\pi x}{L} &= -2 \left( \frac{LD}{\pi} \rho_n \ddot{Y} + 2\mu D \frac{\pi}{L} \dot{Y} \right) \sin \frac{\pi x}{L} \\ \implies \left[ \left( \rho A + 2 \frac{LD}{\pi} \rho_n \right) \ddot{Y} + 4\pi \mu \frac{D}{L} \dot{Y} + \sigma A \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 Y \right] \sin \frac{\pi x}{L} &= 0, \end{aligned} \quad (19.122)$$

mikä voidaan lyhyesti kirjoittaa muodossa

$$M\ddot{Y} + c\dot{Y} + kY = 0. \quad (19.123)$$

Väliaineen vaikutuksesta liikeyhtälön massatermi  $M$  koostuu kahdesta osasta, langan omasta massasta  $m$  ja ns. lisätystä massasta  $m_{\text{lm}}$ :

$$m = \rho A, \quad m_{\text{lm}} = 2 \frac{LD}{\pi} \rho_n. \quad (19.124)$$

Mikäli problemaa ei olisi analysoitu kytkettynä tehtävänä, joudutaan massatermiä muuttamaan yhtälön (19.124) mukaisesti. Yleisessä tapauksessa lisätyn massan jakauman ja suuruuden arviointi on vaikea ongelma.

### 19.7.2 Materiaalin vaimennus

Ainemallin viskoosit ominaisuudet aikaansaavat liikeyhtälöön vaimennusefektin. Tarkastellaan aksiaalisesti kuormitettua sauvaa, jonka liikeyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial N}{\partial x} = \bar{f}(t), \quad (19.125)$$

missä  $N$  on sauvan normaalivoima. Mikäli materiaalia kuvataan lineaarisesti kimmoisalla mallilla on normaalivoiman lauseke  $N = EA\epsilon = EA\partial u/\partial x$ , jolloin päädytään samanlaiseen osittaisdifferentiaaliyhtälöön kuin värähtelevän langan tapauksessa (19.1). Oletetaan nyt materiaalin noudattavan Kelvinin mallia, jossa jännityksen  $\sigma$ , muodonmuutoksen  $\epsilon$  ja muodonmuutosnopeuden  $\dot{\epsilon}$  välillä on yhteys

$$\sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon}, \quad (19.126)$$

missä  $\eta$  on materiaalivakio, joka kuvaa materiaalin viskooseja ominaisuuksia. Sijoittamalla jännityksen (19.126) lauseke sauvan liikeyhtälöön (19.125) saadaan

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \eta A \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \bar{f}(t). \quad (19.127)$$





# Luku 20

## Elementtimenetelmän ohjelmointi

### 20.1 Johdanto

Elementtimenetelmän analyysi sisältää usein kolme erillistä osuutta:

- elementtimallin luonti,
- ratkaisu ja
- tulosten jälkikäsittely ja tarkastelu.

Usein myös edellä mainittuja tehtäviä hoitaa eri ohjelmat, jotka kommunikoivat keskenään malli- ja tulostustiedostojen avulla.

Vaikka elementtimallin luonti ja tulosten visualisointi kuuluvat olennaisena osana FEM-ohjelmistoon tarkastellaan seuraavissa luvuissa vain itse elementtiratkaisijan ohjelmointiin liittyviä kysymyksiä. Elementtiratkaisijan pääosat ovat

- elementtimatriisien muodostaminen,
- globaalin yhtälösystemin kokoaminen,
- globaalin yhtälösystemin ratkaisu ja
- jännitys ym. vuosuureiden laskenta.

Elementtimenetelmällä diskretoitu ongelma palautuu aina lineaarisen yhtälösystemin ratkaisuun vaikka itse ongelma olisikin epälineaarinen ajasta riippuva etenemis-tehtävä. Tämän systemin ratkaisu on prosessin eniten tietokoneresursseja vaativa toimenpide <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Elementtimallin luonti voi vaatia vielä kertaluokkaa suurempia resursseja, mikäli henkilötyö lasketaan mukaan.

## 20.2 Elementtimatriisien muodostaminen

Elementtimatriisi lasketaan yleensä termeistä, jotka ovat muotoa

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV,$$

joka yleensä lasketaan numeerisesti kvadratuurien avulla. Matriisi  $\mathbf{B}$  sisältää interpolaatiofunktioiden ja/tai niiden derivaattojen lausekkeita ja  $\mathbf{D}$  on parametrimatriisi, joiden arvot voivat myös muuttua elementin alueella. Elementtimatriisin muodostamiseksi on

1. alustettava integrointipisteiden paikat ja painokertoimet
2. summataan kaikkien integrointipisteiden osuudet, jolloin jokaisessa integrointipisteessä  $i$ :
  - (a) lasketaan interpolaatiofunktioiden ja niiden derivaattojen arvot peruselementin luonnollisissa koordinaateissa  $\xi_i \dots$ ,
  - (b) muodostetaan geometriakuvauksen Jacobiamatriisi ja muodostetaan interpolaatiofunktioiden derivaatat globaalien koordinaattien suhteen,
  - (c) muodostetaan  $\mathbf{B}(\xi_i, \dots)$  ja  $\mathbf{D}(\xi_i, \dots)$  matriisit
  - (d) lasketaan tulo  $\mathbf{E}(\xi_i, \dots) = \mathbf{B}(\xi_i, \dots)^T \mathbf{D}(\xi_i, \dots) \mathbf{B}(\xi_i, \dots)$  ja summataan tulos elementin jäykkyysmatriisiin

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} + w_i \mathbf{E}(\xi_i, \dots)$$

missä termi  $w_i$  sisältää integrointipisteen painokertoimen ja geometriakuvauksen mittakaavatekijän.

Kun elementin  $e$  jäykkyysmatriisi on laskettu sijoitetaan se globaalille jäykkyysmatriisille varattuun taulukkoon. Kokoamisalgoritmi riippuu siitä millä tavalla globaali jäykkyysmatriisi on varastoitu. Tätä seikkaa käsitellään tarkemmin tulevissa luvuissa.

### 20.2.1 Interpolaatiofunktiot

## 20.3 Matriisin varastointitavat ja kokoamisprosessi

## 20.4 Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu

### 20.4.1 Johdanto

Merkitään ratkaistavaa globaalia yhtälösystemiä seuraavasti:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{20.1}$$

missä kerroinmatriisi  $\mathbf{A}$ :n ominaisuudet riippuvat ratkaistavasta ongelmasta. Tyypillisissä rakenteiden mekaniikan tehtävissä se on usein symmetrinen ja positiivisesti definiitti.

Systeemin (20.1) ratkaisun periaatteellisesta helppoudesta huolimatta, optimaalisen ratkaisualgoritmin valinta on monimutkainen ongelma, erityisesti mikäli yhtälösystemi on suuri. Ratkaisualgoritmin valintaan vaikuttavat kerroinmatriisin ominaisuuksien lisäksi myös käytettävissä olevan tietokoneen arkkitehtuuri.

### 20.4.2 Suorat ratkaisijat

Yleisimmät Gaussin eliminaatioon perustuvat tekniikat vähentävät jollain luvulla kerrotun vaakarivin jostain toisesta systeemin (20.1) vaakarivistä jotta systemi saataisiin yläkolmiomuotoon, joka sitten voidaan ratkaista takaisinsijoittamalla.

Tarkastelaan ensin yleistä LU hajotelmaa, jonka suorittamiseen soveltuvat rivi- ja sarakemuotoiset algoritmit on esitetty kuvassa 20.2. Rivimuotoisessa esityksessä 20.2a sisin silmukka käy matriisia lävitse riveittäin, joten matriisin varastointi on myös syytä tehdä riveittäin, jotta silmukan muistiviittaukset osoittaisivat peräkkäisiin muistipaikkoihin.

Kuvassa 20.2 esitetyt algoritmit eivät ole LU-hajotelman ainoat mahdolliset variaatiot. Kuten esitetyistä rivi- ja sarakemuotoisista algoritmeista voidaan havaita, ovat aritmeettiset perusoperaatiot samoja kummassakin tavassa. Yleistämällä saadaan LU-hajotelman erilaiset ns. *ijk*-muodot, joiden geneerinen muoto:

```

do
  do
    do
       $A_{ij} = A_{ij} - L_{ik}/A_{kj}$ 
    end do
  end do
end do

```

missä do silmukoiden indeksit  $i$ ,  $j$  ja  $k$  esintyvät eri järjestyksessä.

Eri *ijk*-muodot viittaavat ja laskevat hajotelman  $\mathbf{L}$  ja  $\mathbf{U}$  tekijät eri tavalla. Kuvassa 20.3 on pyritty havainnollistamaan eri versioiden eroja, alkioiden saatavuuden ja hajotelman tekijöiden suhteen.

Kuvassa 20.5 on esitetty nauhamuotoon tallennetun matriisin LU-hajotelma *kji*-sarakemuodossa.

```

      SUBROUTINE HIF1D(F,X,N,IORD)
C=====
C   Program to evaluate 1-D hierarchical interpolation functions
C=====
C   F       = interpolation functions of degree N
C             F(1) = (1-X)/2, F(2) = (1+X)/2 : nodal interpolation
C             F(3) ... F(N+1) : internal interpolation functions
C             generated from Legendre polynomials
C   X       = argument
C   N       = degree of the polynomial
C   IORD    = order of derivative (0 or 1)
C=====
      INTEGER          N,IORD,I
      DOUBLE PRECISION F(*),X
C
C --- generate Legendre polynomials using a stable recursion formula
C
      F(1) = 1.D0
      F(2) = X
      DO I = 1, N-1
         F(I+2) = 2.D0*X*F(I+1)-F(I)-(X*F(I+1)-F(I))/REAL(I+1)
      END DO
C
C --- set up interpolation functions or their derivatives
C
      IF(IORD.EQ.0) THEN
         DO I = N, 2, -1
            F(I+1) = (F(I+1)-F(I-1))/DSQRT(REAL(4*I)-2.D0)
         END DO
         F(1) = 0.5D0*(1.D0 - X)
         F(2) = 0.5D0*(1.D0 + X)
      ELSE IF(IORD.EQ.1) THEN
         DO I = N, 2, -1
            F(I+1) = DSQRT(REAL(I) - 0.5D0)*F(I)
         END DO
         F(1) = -0.5D0
         F(2) = 0.5D0
      END IF
C
      RETURN
      END

```

**Kuva 20.1** Hierarkiset Legendren polynomeihin perustuvat interpolaatiofunktio

```

do k = 1, n - 1
  do i = k + 1, n
     $L_{ik} = A_{ik}/A_{kk}$ 
    do j = k + 1, n
       $A_{ij} = A_{ij} - L_{ik}/A_{kj}$ 
    end do
  end do
end do
(a)

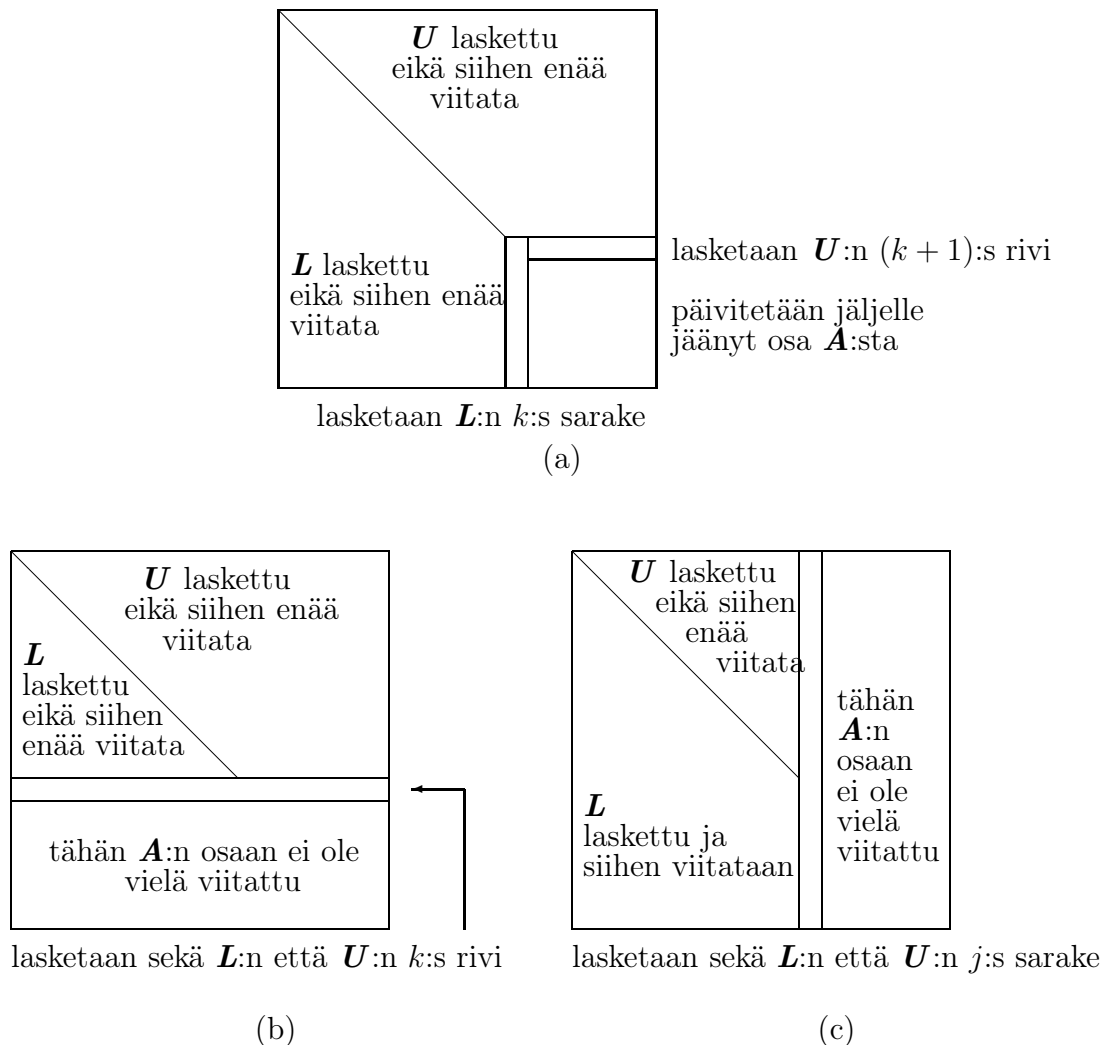
```

```

do k = 1, n - 1
  do r = k + 1, n
     $L_{rk} = A_{rk}/A_{kk}$ 
  end do
  do j = k + 1, n
    do i = k + 1, n
       $A_{ij} = A_{ij} - L_{ik}/A_{kj}$ 
    end do
  end do
end do
(b)

```

**Kuva 20.2** LU-hajotelma: (a) Rivimuotoinen  $kij$ -versio ja (b) sarakemuotoinen  $kji$ -versio.



**Kuva 20.3** Matriisialkiöiden saatavuus LU-hajotelman eri  $ijk$ -muodoissa: (a)  $kij, kji$ , (b)  $ikj, ijk$ , (c)  $jki, jik$ .

```

do  j = 2, n
  do  r = j, n
     $L_{r,j-1} = A_{r,j-1} / A_{j-1,j-1}$ 
  end do
  do  k = 1, j - 1
    do  i = k + 1, n
       $A_{ij} = A_{ij} - L_{ik} / A_{kj}$ 
    end do
  end do
end do

```

**Kuva 20.4** Sarakemuotoinen viivästyneeseen päivitykseen perustuva LU-hajotelma ( $jki$ -muoto).

```

      SUBROUTINE FACBLU(A,NB,N,NU,NL,IOUT)
C=====
C   Program for LU factorization of a band matrix
C   Column oriented kji-version
C-----
C   Calling parameters:
C   A   : array storing a N x N matrix in a band format
C   NB  : bandwidth = NU + 1 + NL
C   N   : dimension of the system
C   NU  : bandwidth of the upper triangular part of A
C   NL  : bandwidth of the lower triangular part of A
C   IOUT: output unit number
C=====
      IMPLICIT NONE
      INTEGER      N,NB,NL,NU,IOUT
      DOUBLE PRECISION A(NB,N)
C --- local variables -----
      INTEGER      I,J,K,ND,I1,I2,KK,L,IK
      DOUBLE PRECISION C,ZERO
      PARAMETER    (ZERO = 0.DO)
C
      ND = NU + 1
      DO K = 1, N - 1
         IF( A(ND,K) .EQ. ZERO ) THEN
            WRITE(IOUT,5000) K
            STOP
         END IF
         C = 1.DO / A(ND,K)
         DO L = NU + 2, NB
            A(L,K) = C*A(L,K)
         END DO
         DO J = K + 1, K + NU
            KK = NU + K - J + 1
            I1 = MAX(1,NU+2+K-J)
            I2 = NB + K - J
            C = A(KK,J)
            DO I = I1, I2
               IK = I + J - K
               A(I,J) = A(I,J) - A(IK,K)*C
            END DO
         END DO
      END DO
C
      5000 FORMAT(' *** ERROR **** Singular matrix ',/
&              ' zero diagonal in equation ',I6)
      END

```

**Kuva 20.5** Nauhamuodossa tallennetun matriisin LU-hajotelma.



```

SUBROUTINE FACBCH(A,NB,N,IOUT)
C=====
C   Program for Cholesky factorization of a band matrix
C   column oriented jki-version -- lower part of the matrix stored
C-----
C   Calling parameters:
C   A   : array storing a N x N matrix in a band format
C   NB  : (half)bandwidth including diagonal
C   N   : dimension of the system
C   IOUT: output unit number
C=====
      IMPLICIT NONE
      INTEGER      N,NB,IOUT
      DOUBLE PRECISION A(NB,N)
C --- local variables -----
      INTEGER      I,J,K,I1,JK,L,IK,K1
      DOUBLE PRECISION C,ZERO
      PARAMETER    (ZERO = 0.DO)
C
      IF( A(1,1) .LE. ZERO ) THEN
        WRITE(IOUT,5000) 1
        STOP
      END IF
      A(1,1) = DSQRT(A(1,1))
C
      DO J = 2, N
        DO L = 2, NB
          A(L,J-1) = A(L,J-1) / A(1,J-1)
        END DO
        K1 = MAX(1,J-NB+1)
        DO K = K1, J - 1
          JK = J - K + 1
          C = A(JK,K)
          I1 = NB + K - J
          DO I = 1, I1
            IK = I + J - K
            A(I,J) = A(I,J) - A(IK,K)*C
          END DO
        END DO
        IF( A(1,J) .LE. ZERO ) THEN
          WRITE(IOUT,5000) J
          STOP
        END IF
        A(1,J) = DSQRT(A(1,J))
      END DO
C
      5000 FORMAT(' *** ERROR **** Matrix not positive definite ',/
&              ' non-positive diagonal in equation ',I6)
      END

```

**Kuva 20.6** Nauhamuodossa tallennetun matriisin Choleskin hajotelma.

Versio: kevät 2014

# Kirjallisuutta

## Oppikirjoja

- [1] E. Ahola, *Lujuusoppi, elementtimenetelmä*, Otakustantamo 342, toinen painos, 1977.
- [2] O. Axelsson, V.A. Barker, *Finite element solution of boundary value problems, theory and computation*, Academic Press, 1984.
- [3] S.C. Brenner, L.R. Scott, *The Mathematical theory of finite element methods*, Springer-Verlag, Texts in Applied Mathematics 15, 1996.
- [4] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, Springer Series in Computational Mathematics 15, 1991.
- [5] R.D. Cook, D.S. Malkus, M.E. Plesha, *Concepts and applications of finite element analysis*, John Wiley & Sons, kolmas painos 1989.
- [6] M.A. Crisfield, *Finite elements and solution procedures for structural analysis, vol 1, linear analysis*, Pineridge Press 1986.
- [7] G. Dhatt, G. Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine, toinen painos 1984.
- [8] J.J. Dongarra, I.S. Duff, D.C. Sorensen, H.A. van der Vorst, *Numerical linear algebra for high-performance computers*, SIAM, 1998.
- [9] I.S. Duff, A.M. Erisman, J.K. Reid, *Direct methods for sparse matrices*, Oxford science publications, 1986.
- [10] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, C. Johnson, *Computational differential equations*, Studentlitteratur, 1996.
- [11] R.H. Gallagher, *Finite element analysis: fundamentals*, Prentice-Hall, 1975.
- [12] A. George, J.W.H. Liu, *Computer solution of large sparse positive-definite systems*, Prentice-Hall, 1981.
- [13] M.K. Hakala, *Lujuusopin elementtimenetelmä*, Otatieto 457, neljäs painos 1991.

- 
- [14] K.H. Huebner, E.A. Thornton, *The finite element method for engineers*, John Wiley & Sons, toinen painos 1982.
- [15] T.J.R. Hughes, *The Finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice-Hall, 1987.
- [16] B. Irons, S. Ahmad, *Techniques of finite elements*, Ellis Horwood, 1980.
- [17] J. Jin, *The finite element method in electromagnetics*, John Wiley & Sons, 2. painos, 2002.
- [18] C. Johnson, *Numerical solutions of partial differential equations by the finite element method*, Cambridge University Press, 1987.
- [19] N. Kikuchi, *Finite element methods in mechanics*, Cambridge University Press, ensimmäinen painos 1986.
- [20] C. Lanczos, *The variational principles of mechanics*, Dover, neljäs painos 1970.
- [21] H.P. Langtangen, *Computational partial differential equations: numerical methods and diffpack programming*, Springer, lecture notes in computational science and engineering 2, 1999.
- [22] I. Lindell, A. Sihvola, *Sähkömagneettinen kenttäteoria, 1. Staattiset kentät*, toinen painos, Otatieto 560, 2004. *2. Dynaamiset kentät*, toinen painos, Otatieto 570, 2004.
- [23] J.L. Meek, *Computer methods in structural analysis*, E & FN Spon, ensimmäinen painos, 1991.
- [24] G. Meurant, *Computer solution of large linear systems*, North Holland, Studies in Mathematics and its applications 28, Elsevier, 1999.
- [25] S. Orivuori, *Rakenteiden mekaniikan numeeriset menetelmät*, TKK, Rakennetekniikan laitoksen julkaisu 122.
- [26] J.M. Ortega, *Introduction to parallel and vector solution of linear systems*, Plenum Press, 1988.
- [27] B.D. Reddy, *Functional analysis and boundary-value problems: an introductory treatment*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 30, 1986.
- [28] J. Robinson, *Integrated theory of finite element methods*, John Wiley & Sons, 1973.
- [29] T. Rylander, A. Bondeson, P. Ingelström, *Computational electromagnetics*, Springer, 2. painos, 2013.
- [30] Y. Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, PWS Publishing Company, 1996.
- [31] E.-M. Salonen, *Mekaniikan käsitteitä ja kaavoja*, TKK, Mekaniikka, opetusmoniste 6, 1987.

- [32] G. Strang, *Introduction to applied mathematics*, Wellesley-Cambridge Press, 1986.
- [33] G. Strang, G.J. Fix, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, 1973.
- [34] B. Szabó, I. Babuška, *Finite element analysis*, John Wiley & Sons, 1991.
- [35] K. Washizu, *Variational methods in elasticity and plasticity*, Pergamon Press, kolmas painos 1982.
- [36] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, *The finite element method, volume 1, basic formulation and linear problems*, McGraw-Hill, neljäs painos 1989.

## Artikkeleita

- [37] D.N. Arnold, R.S. Falk, Edge effects in Reissner-Mindlin plate theory, *Analytical and Computational Models of Shells* ss. 71-89, 1989 ASME toim. A.K. Noor, T. Belytschko ja J.C. Simo.
- [38] D.N. Arnold, R.S. Falk, A uniformly accurate finite element method for the Reissner-Mindlin plate, *SIAM, Journal on Numerical Analysis*, vol 26, ss. 1276-1290, 1989.
- [39] K.-J. Bathe, E.N. Dvorkin, A four node plate bending element based on Mindlin-Reissner plate theory and mixed interpolation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, ss. 367-383, 1985.
- [40] K.-J. Bathe, E.N. Dvorkin, A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 22, ss. 697-722, 1986.
- [41] F. Brezzi, M. Fortin, R. Stenberg, Error analysis of mixed-interpolated elements for Reissner-Mindlin plates, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol 1, ss. 125-151, 1991.
- [42] E.H. Dill, A triangular finite element for thick and thin plates, *Computers and Structures*, vol. 35, ss. 301-308, 1990.
- [43] L. Franca, R. Stenberg, A modification of a low-order Reissner-Mindlin plate bending element.
- [44] J. Freund, E.-M. Salonen, Heikkojen muotojen painofunktioista, *Rakenteiden Mekaniikka*, Vol 23, 1990, No 3, sivut 18-61.
- [45] I. Fried, Shear in  $C^0$  and  $C^1$  bending finite elements, *Int. J. Solids Structures*, **9** 1973, ss. 449-460.
- [46] B. Häggblad, K.-J. Bathe, Specifications of boundary conditions for Reissner/Mindlin plate bending finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 30. ss. 981-1011, 1990.

- [47] T. Kant, E.Hinton, Mindlin plate analysis by segmentation method, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol 109, ss.537-556, 1983.
- [48] M. Lyly, R. Stenberg, T. Vihinen, A stable bilinear element for Reissner-Mindlin plate model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 110, ss. 343-357, 1993
- [49] M. Lyly, R. Stenberg, New three and four node plate bending elements, *Rakenteiden Mekaniikka*, vol 27, no 2, ss. 3-29, 1994.
- [50] M. Lyly, R. Stenberg, Stabilized MITC plate bending elements *Advances in Finite Element Techniques*, ss. 11–16, 1994, toim. M. Papadrakakis, B.H.V. Topping.
- [51] R.H. MacNeal, A simple quadrilateral shell element, *Computers & Structures*, **8** 1987, ss. 175-183.
- [52] J. Pitkäranta, Reuna-arvotettävien moniverkkoratkaisijat - numeronmurskauksesta numeroiden pehmittelyyn, *Arkhimedes*, vol. 38, 1986, ss. 55-66.
- [53] J.K. Reid, On the method of conjugate gradients for the solution of large sparse systems of equations, *Large Sparse Sets of Linear Equations*, ss. 231–254, Academic Press, 1971, toim. J.K. Reid.
- [54] W.T. Russell, R.H. MacNeal, An improved electrical analogy for the analysis of beams in bending, *J. Appl. Mech.*, Sept. 1953.
- [55] E.-M. Salonen, Heikkojen muotojen johtamisesta, *Rakenteiden Mekaniikka*, Vol 21, 1988, No 1, sivut 66-75.
- [56] R. Stenberg, T. Vihinen, Calculations with some linear elements for Reissner-Mindlin plates, *Proceedings of the European Conference on New Advances in Computational Structural Mechanics*, ss. 505-511, 1991, toim. P. Ladeveze, O.C. Zienkiewicz.
- [57] P. Tong, Exact solution of certain problems by finite element method, *AIAA Journal*, **7** 1969, ss. 178-180.
- [58] M. Lyly, R. Stenberg, T. Vihinen, A stable bilinear element for Reissner-Mindlin plates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 110, ss. 343–357, 1993.
- [59] M.Lyly, R. Stenberg, Error analysis of the stabilized MITC plate elements, *Proceedings of the 6th Finnish Mechanics Days*, ss. 67–83, 1997, toim. J. Aalto, T. Salmi.

## Muuta

- [60] I. Lindell, *Sähkötekniikan historia*, Otatieto Oy, 552, 1994.

- [61] J. Pitkäranta, *Insinöörimatematiikka: Maxwellin yhtälöt*, käsinkirjoitettu luentomoniste keväältä 1997.
- [62] C. Reid, *Courant*, Springer-Verlag, New York, 1996.



# Luku A

## Hermiten interpolaatiopolynomit

### A.1 Solmuinterpolaatio

Lagrange'n interpolaatiopolynomi on yksinkertainen tapa interpoloida funktiota kun tunnetaan pelkästään funktion arvot tietyissä pisteissä. Elementtimenetelmässä voidaan Lagrange'n interpolaatiota käyttää hyväksi kun interpolaatiolta vaaditaan vain funktion jatkuvuutta elementtien välillä. Mikäli interpolaatiolta vaaditaan korkeampaa jatkuvuuden astetta elementtien rajapintojen yli siirryttäessä on kätevää konstruoida ne Hermiten interpolaatiopolynomeista, jotka mahdollistavat funktion interpolaation käyttäen funktion ja sen derivaattojen arvoja solmupisteissä. Astetta  $n$  oleva Hermiten polynomi  $H^n(\xi)$  on  $\xi$ :n suhteen astetta  $2n + 1$  oleva polynomi jonka derivaatat astelukuun  $n$  saakka ovat jatkuvia. Hermiten polynomi voidaan varustaa kahdella alaindeksillä, joista ensimmäinen viittaa kertoimena olevan solmuarvon derivaatan astelukuun ja toinen välin päätesolmuun, eli  $H_{mi}^n(\xi)$ .

Hermiten polynomien ja sen derivaatan arvot välin päätepisteessä  $\xi_i$  saavat arvon nolla tai yksi seuraavasti:

$$\frac{d^k H_{mi}^n(\xi_j)}{dx^k} = \delta_{km} \delta_{ij}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq m \leq n, \quad i, j = 1, 2, \quad (\text{A.1})$$

jossa  $\delta_{ij}$  on Kroneckerin delta, joka saa arvon 1 kun  $i = j$  ja 0 muulloin. Tästä ehdosta määräytyvät Hermiten polynomien lausekkeet.

Nollannen asteen Hermiten interpolaatiopolynomit toteuttavat siis  $H_{01}^0(\xi_1) = 1, H_{01}^0(\xi_2) = 0$  ja  $H_{02}^0(\xi_1) = 0, H_{02}^0(\xi_2) = 1$ , joten ne ovat välillä  $\xi \in (-1, 1)$  tutut lineaariset interpolaatiofunktiot

$$H_{01}^0(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad H_{02}^0(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi), \quad (\text{A.2})$$

eli samat kuin Lagrange'n lineaariset interpolaatiopolynomit.



Ensimmäisen asteen Hermiten polynomi määräytyy ehdoista:

$$\begin{aligned}
H_{01}^1(-1) &= 1, & \frac{dH_{01}^1}{d\xi}(-1) &= 0, & H_{01}^1(1) &= 0, & \frac{dH_{01}^1}{d\xi}(1) &= 0, \\
H_{11}^1(-1) &= 0, & \frac{dH_{11}^1}{d\xi}(-1) &= 1, & H_{11}^1(1) &= 0, & \frac{dH_{11}^1}{d\xi}(1) &= 0, \\
H_{02}^1(-1) &= 0, & \frac{dH_{02}^1}{d\xi}(-1) &= 0, & H_{02}^1(1) &= 1, & \frac{dH_{02}^1}{d\xi}(1) &= 0, \\
H_{12}^1(-1) &= 0, & \frac{dH_{12}^1}{d\xi}(-1) &= 0, & H_{12}^1(1) &= 0, & \frac{dH_{12}^1}{d\xi}(1) &= 1,
\end{aligned} \tag{A.3}$$

josta seuraa

$$\begin{aligned}
H_{01}^1(\xi) &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) = (H_{01}^0)^2(1+2H_{02}^0), \\
H_{11}^1(\xi) &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(1+\xi) = 2(H_{01}^0)^2H_{02}^0, \\
H_{02}^1(\xi) &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) = (H_{02}^0)^2(1+2H_{01}^0), \\
H_{12}^1(\xi) &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(\xi-1) = -2H_{01}^0(H_{02}^0)^2.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

## A.2 Hierarkiset $C_1$ -interpolaatiofunktiot

Luvussa 3.2.2 käsiteltiin yksidimensioisten hierarkisten  $C_0$ -jatkuvien interpolaatiofunktioiden muodostamista. Ne konstruointiin integroimalla Legendren polynomeista, ja ne toteuttivat ortogonaalisuusehdon

$$\int_{-1}^1 \frac{d\psi_i}{d\xi} \frac{d\psi_j}{d\xi} d\xi = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j, \\ 0, & \text{jos } i \neq j. \end{cases} \tag{A.5}$$

Koska  $C_1$ -jatkuvaa interpolaatiota tarvitaan neljännen kertaluvun ongelmissa, on  $C_1$ -jatkuvien interpolaatiopolynomien konstruoinnissa järkevää vaatia ortogonaalisuusehto toisille derivaatoille, eli siis:

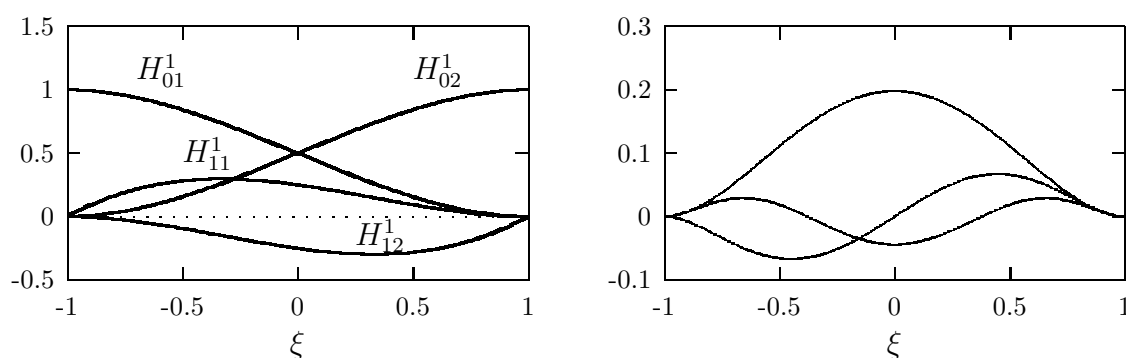
$$\int_{-1}^1 \frac{d^2\psi_i}{d\xi^2} \frac{d^2\psi_j}{d\xi^2} d\xi = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j, \\ 0, & \text{jos } i \neq j. \end{cases} \tag{A.6}$$

Hierarkinen  $C_1$ -interpolaatiofunktiojärjestelmä sisältää neljä solmuinterpolaatiofunktioita (A.4), joita voidaan kutsua myös ulkoisiksi interpolaatiofunktioiksi, ja sisäiset muodot

$$\overset{1}{N}_i(\xi), \quad i = 1, \dots, p-3. \tag{A.7}$$

Jotta sisäiset muodot olisivat toisen derivaatan suhteen ortogonaalisia, saadaan ne integroimalla Legendren polynomeja kahdesti

$$\begin{aligned}
\overset{1}{N}_i(\xi) &= \sqrt{\frac{2i+3}{2}} \int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^t P_{i+1}(s) ds dt \\
&= \sqrt{\frac{2i+3}{2}} \int_{-1}^{\xi} (\xi-t) P_{i+1}(t) dt \quad i = 1, \dots, p-3.
\end{aligned} \tag{A.8}$$



**Kuva A.1** Hierarkiset Hermiten  $C_1$ -interpolaatiopolynomit asteeseen  $p = 6$  saakka.

Osittaisintegroimalla ja käyttämällä Bonnetin rekursiokaavaa (3.24) muodossa

$$\xi P_n(\xi) = \frac{1}{2n+1} ((n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}), \quad (\text{A.9})$$

päädyytään lausekkeisiin

$$\frac{1}{N_i}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(2i+3)}} \left( \frac{P_{i+3} - P_{i+1}}{2i+5} - \frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{2i+1} \right) \quad i = 1, \dots, p-3. \quad (\text{A.10})$$

Derivaatoille saadaan lausekkeet

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \frac{1}{N_i} &= \frac{P_{i+2} - P_i}{\sqrt{2(2i+3)}}, \\ \frac{d^2}{d\xi^2} \frac{1}{N_i} &= \sqrt{\frac{1}{2}(2i+3)} P_{i+1}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Hierarkisen Hermiten  $C_1$  interpolaation ulkoiset ja muutama ensimmäinen sisäistä muodoista on esitetty kuvassa A.1.

## Harjoitustehtäviä

1. Määritä toisen asteen Hermiten polynomi ja piirrä kuvaajat.
2. Käy läpi yksityiskohtaisesti vaiheet muodon (A.8) ja (A.10) välillä.
3. Laske auki muutama alin sisäinen hierarkinen muoto (A.10).



# Luku B

## Lagrangen kertojamenettely

Monissa käytännön tehtävissä funktionaalien minimointitehtävä ei esiinny aivan selkeässä muodossa kuin on edellä esitetty, vaan on olemassa tiettyjä rajoitusehtoja joita funktionaalien tulee noudattaa. Johdatuksena aloitetaan kuitenkin tutkimalla tavallisen funktion

$$z = f(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (\text{B.1})$$

ääriarvon määrittämisestä sidosehtojen

$$g(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0 \quad (\text{B.2})$$

vallitessa. Ensimmäinen ajatus saattaisi olla yhden muuttujan eliminointi rajoituksesta (B.2), ja sijoittaa se funktioon (B.1), jolloin saadaan rajoittamaton minimointitehtävä jossa funktio  $f$  riippuu vain  $(n - 1)$ :stä muuttujasta. Usein tällainen eliminointi johtaa mutkikkaisiin lausekkeisiin, mikäli on ollenkaan mahdollinen. Lisäksi funktio  $f$  saattaa olla symmetrinen muuttujien  $u_1, u_2, \dots, u_n$  suhteen, jolloin ei ole olemassa mitään syytä miksi jokin tietty muuttuja keinotekoisesti valittaisiin riippuvaksi kun muut taasen saavaat olla riippumattomia.

J.-L. Lagrange on kehittänyt menetelmän ylimääräisten sidosehtojen käsittelemiseksi, joka säilyttää symmetrian muuttujien suhteen ja muuntaa sidotun ääriarvotekävän vapaaksi. Menetelmää nimitetään Lagrangen määräämättömien kertojien keinoksi, tai lyhyesti Lagrangen kertojamenettelyksi, jossa muodostetaan funktio

$$L(u_1, u_2, \dots, u_n, \lambda) = f(u_1, u_2, \dots, u_n) + \lambda g(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

ja ääriarvon etsintä suoritetaan nyt muuttujien  $u_1, u_2, \dots, u_n$  ja  $\lambda$  suhteen. Siis hinta, joka joudutaan systemaattisesta menettelystä maksamaan on yhden lisätuntemattoman mukaantulo.

Lagrangen kertojamenettely yleistyy mutkattomasti tapauksiin, joissa sideyhtälöitä on  $m$ -kappaletta.

Lagrangen kertojien fysikaalinen tutkinta on usein havainnollinen ja se on voima, joka tarvitaan kyseisen rajoitteen ylläpitämiseen.

**Esimerkki B.1** Etsi funktion

$$z = f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 5x - 4y + 4$$

ääriarvo, rajoitteella

$$g(x, y) = x + 2y - 5 = 0.$$

Yksi tapa ratkaista tehtävä on eliminoida vaikkapa muuttuja  $x$  sidosityhtälöstä, ja sijoittamalla näin saatu  $x$ :n lauseke funktioon  $f$  jolloin siitä tulee vain muuttujan  $y$  funktio

$$f^*(y, x(y)) = 11y^2 - 44y + 54.$$

ääriarvo löytyy stationäärisyysehdestä

$$\frac{df^*}{dy} = 22y - 44 = 0,$$

josta seuraa  $y$ :lle arvo  $y = 2$ . Sijoittamalla saatu arvo eliminoidun muuttujan yhtälöön ja näin saadut arvot itse funktioon, saadaan funktion sidotuksi ääriarvoksi arvo  $z = 10$ .

Systemaattisempi tapa on ratkaista tehtävä Lagrangen kertojan avulla. Muodostetaan Lagrangen funktio

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 5x - 4y + 4 + \lambda(x + 2y - 5),$$

jonka stationäärisyysehdestä

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - 2y + 5 + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -2x + 6y - 4 + 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x + 2y - 5 = 0, \end{aligned}$$

voidaan tuntemattomat parametrit ratkaista suoraan. Kirjoitetaan yhtälösystemi matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix},$$

jonka ratkaisu on  $x = 1, y = 2, \lambda = -3$ . Funktion minimiarvo saadaan sijoittamalla

$$L(1, 2, -3) = f(1, 2) = 10 = f^*(2).$$

Funktionaalin variointi side-ehtojen vallitessa on suoraviivainen yleistys funktion rajoitetun ääriarvon etsimiselle. Olkoon funktionaali

$$I(w) = \int_a^b F(x; w, w') dx$$

jonka statonääriarvoa etsitään rajoitteella

$$G(x; w) = 0.$$

Kerrotaan rajoite tuntemalla funktiolla  $\lambda(x)$  ja integroidaan välin  $(a, b)$  yli ja lisätään näin saatu termi funktionaaliin

$$L(w, \lambda) = \int_a^b [F(x; w, w') + \lambda(x)G(x; w)] dx,$$

jolloin variointi suoritetaan molempien tuntemattomien funktioiden  $w$  ja  $\lambda$  suhteen.

**Esimerkki B.2** Keskimääräisen poikittaisen leikkausmuodonmuutoksen huomioinnottavasta Timoshenkon palkkimallista saadaan Eulerin-Bernoullin palkkimalli kun palkin poikkileikkauksen leikkausmuodonmuutos  $\gamma$  häviää, eli

$$\gamma(x) = v'(x) - \theta(x) = 0,$$

jossa  $\theta$  on palkin poikkileikkauksen kiertymä ja  $v$  on palkin akselin taipuma. Timoshenkon palkkiteorian potentiaalienergian funktionaali on

$$\Pi(v, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(\theta')^2 + GA(v' - \theta)^2] dx - \int_0^L f v dx,$$

jossa  $EI$  on palkin poikkileikkauksen taivutusjäykkyys ja  $GA$  leikkausjäykkyys. Muodosta Lagrangen funktionaali ja johda Eulerin yhtälöt. Mikä on Lagrangen kertojan  $\lambda(x)$  fysikaalinen tulkinta? Totea myös, että tuloksena saaduista yhtälöistä voidaan päätyä Eulerin-Bernoullin palkkiteorian yhtälöön

$$EIv'''' = f.$$

Koska rajoitteen vuoksi leikkausenergiatermi  $GA(v' - \theta)^2$  häviää identtisesti, voidaan se jättää pois ja saadaan minimoitavaksi funktionaaliksi

$$\Pi(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L EI(\theta')^2 dx - \int_0^L f v dx,$$

rajoite-ehdolla

$$v' - \theta = 0.$$

Lagrangen funktionaali on siten

$$L(v, \phi, \lambda) = \frac{1}{2} \int_0^L EI(\theta')^2 dx + \int_0^L \lambda(v' - \theta) dx - \int_0^L f v dx.$$

Varioidaan funktioita  $v, \theta$  ja  $\lambda$ , eli  $v \rightarrow v + \epsilon \hat{v}, \theta \rightarrow \theta + \eta \hat{\theta}, \lambda \rightarrow \lambda + \zeta \hat{\lambda}$ , jolloin saadaan

$$L(v + \epsilon \hat{v}, \theta + \eta \hat{\theta}, \lambda + \zeta \hat{\lambda}) = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(\theta' + \eta \hat{\theta}')^2] dx + \int_0^L (\lambda + \zeta \hat{\lambda})(v' + \epsilon \hat{v}' - \theta - \eta \hat{\theta}) dx - \int_0^L f(v + \epsilon \hat{v}) dx.$$

Stationäärisyysehdoista

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0, \eta=0, \zeta=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial L}{\partial \eta} \right|_{\epsilon=0, \eta=0, \zeta=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial L}{\partial \zeta} \right|_{\epsilon=0, \eta=0, \zeta=0} = 0,$$

saadaan

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial L}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0, \eta=0, \zeta=0} &= \int_0^L (\lambda \hat{v}' - f \hat{v}) dx = 0, \\ \left. \frac{\partial L}{\partial \eta} \right|_{\epsilon=0, \eta=0, \zeta=0} &= \int_0^L (EI \theta' \hat{\theta}' - \lambda \hat{\theta}) dx = 0, \\ \left. \frac{\partial L}{\partial \zeta} \right|_{\epsilon=0, \eta=0, \zeta=0} &= \int_0^L \hat{\lambda} (v' - \theta) dx = 0. \end{aligned}$$

Alimmaisesta yhtälöstä seuraa rajoite-ehto, sillä Lagrangen kertojafunktion variaatio  $\hat{\lambda}$  on mielivaltainen. Jotta kahdesta ylimmäisestä yhtälöstä voidaan tehdä päätelmiä, on suoritettava osittaisintegrointeja, joista seuraa

$$\begin{aligned} \int_0^L (\lambda \hat{v}' - f \hat{v}) dx &= \left[ \lambda \hat{v} - \int_0^L (\lambda' + f) \hat{v} dx \right]_0^L = 0, \\ \int_0^L (EI \theta' \hat{\theta}' - \lambda \hat{\theta}) dx &= \left[ EI \theta' \hat{\theta} - \int_0^L (EI \theta'' + \lambda) \hat{\theta} dx \right]_0^L = 0. \end{aligned}$$

Koska variaatiot  $\hat{v}, \hat{\theta}$  ja  $\hat{\lambda}$  ovat homogeeniset reunaehdot toteuttavia mielivaltaisia<sup>1</sup> funktioita, saadaan Eulerin yhtälöiksi

$$\begin{aligned} \lambda' + f &= 0, \\ EI \theta'' + \lambda &= 0, \\ v' - \theta &= 0. \end{aligned}$$

Yhtälöistä havaitaan heti, että Lagrangen kertojan  $\lambda$  fysikaalinen tulkinta on leikkausvoima  $Q$ . Suorittamalla yhtälöissä funktioiden  $\theta$  ja  $\lambda$  eliminointi, saavutaan Eulerin-Bernoullin palkkiteorian yhtälöön

$$\theta = v' \quad \text{ja} \quad \lambda = -EI v''' \quad \Rightarrow \quad EI v'''' = f.$$

<sup>1</sup>Tiettyjä sileysominaisuuksia kuitenkin vaaditaan.

Joissain tapauksissa rajoiteyhtälö on muotoa, jossa integraalilauseke saa tietyn vakioarvon

$$\int_a^b G(x; w) dx = C.$$

Tämänmuotoisia rajoiteyhtälöitä kutsutaan *isoperimetrisiksi ehdoiksi*. Ainoa ero tämän ja edellisen tapauksen välillä on, että Lagrangen kertoja on nyt paljas luku eikä funktio. Lagrangen funktionaaliksi saadaan

$$L(w, \lambda) = \int_a^b F(x; w, w') dx + \lambda \left( \int_a^b G(x, w) dx - C \right)$$

ja sen variaatioksi

$$\delta L = \delta \int_a^b [F(x; w, w') + \lambda G(x; w)] dx.$$

**Esimerkki B.3** Määritä variaatiolaskentaa käyttäen sen lyhimmän käyrän yhtälö  $y = f(x)$ , joka rajoittaa alan  $A$  alapuolelleen ( $x$ -akselin ja käyrän  $y = f(x)$  väliin jäävä alue) välillä  $(0, 1)$ . Rajoite on siis

$$\int_0^1 f(x) dx = A.$$

Otetaan rajoiteyhtälö mukaan Lagrangen kertojan  $\lambda$  avulla, jolloin saadaan Lagrangen funktionaali

$$L(y, \lambda) = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx + \lambda \left( \int_0^1 y dx - A \right).$$

Suoritetaan variaatio  $y \rightarrow y + \epsilon \hat{y}$ , ja asetetaan funktionaalin ensimmäinen variaatio häviämään

$$\begin{aligned} \left. \frac{dL}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \int_0^1 \left[ \frac{y' \hat{y}'}{\sqrt{1 + (y')^2}} + \lambda \hat{y} \right] dx = 0 \\ &= \int_0^1 \frac{y' \hat{y}}{\sqrt{1 + (y')^2}} - \int_0^1 \left\{ \frac{d}{dx} \left[ \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right] - \lambda \right\} \hat{y} dx = 0. \end{aligned}$$

Otaksutaan, että käyrän  $y$  päätepisteiden arvot ovat annetut, joten variaation on toteutettava homogeeniset reunaehdot jolloin sijoitustermi yllä olevasta lausekkeesta häviää. Koska variaatio  $\hat{y}$  on muuten mielivaltainen on seuraavan yhtälön toteuduttava

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right] &= \lambda \\ y' &= (\lambda x + c) \sqrt{1 + (y')^2} \\ y' &= \frac{\lambda x + c}{\sqrt{1 - (\lambda x + c)^2}} \\ y &= \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda x + c)^2} + d \end{aligned}$$



jossa  $c$  ja  $d$  ovat vakioita. Alin yhtälö saadaan muotoon

$$(x + c/\lambda)^2 + (y - d)^2 = (1/\lambda)^2,$$

eli

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (1/\lambda)^2,$$

jossa vakiot  $x_0, y_0$  ja  $\lambda$  määritetään ehdoista

$$y(0) = a, \quad y(1) = b, \quad \int_0^1 y dx = A.$$

---

Tämä suoraviivainen esitys Lagrangen kertojista on kirjoitettu menetelmän soveltamista silmälläpitäen. Syvällisempi ja yksityiskohtaisempi käsittely määräämätömiä kertojien menettelystä on löydettävissä esimerkiksi Lanczosin kirjasta [20] kappaleesta 2.

## Harjoitustehtäviä

1. Johda funktionaalin

$$I(w) = \frac{1}{2} \int_0^L k(w'')^2 dx$$

Eulerin yhtälö, rajoitteella

$$\int_0^L w^2 dx = 1.$$

Mitä fysikaalista ongelmaa yhtälö kuvaa?

# Luku C

## R-M laattamallin reunahäiriöt

Kirchhoffin ja Reissnerin-Mindlinin laattamallien perustavanlaatuisen ero on se, että Kirchhoffin mallin ratkaisut ovat riippumattomia laatan suhteellisesta paksuudesta  $t/L$  (mikäli kuorma ajatellaan skaalatuksi tekijällä  $t^3$ ,  $L$ =laatan karakteristinen mita keskipinnan tasossa) kun taas Reissnerin-Mindlinin laattamallin ratkaisut riippuvat paksuudesta hyvin monimutkaisella tavalla. Erityisesti R-M mallin ratkaisuisa voi esiintyä reunahäiriö pienillä paksuuden arvoilla.

Reunahäiriön luonne riippuu ratkaisevasti laatan geometriasta ja reunaehdoista ja sen voimakkuus on eriasteinen eri suureilla. Laatan taipumassa ei esiinny reunahäiriötä millään geometrialla eikä reunaehtotapauksella, mutta muissa suureissa kuten kiertymissä, taivutusmomenteissa ja leikkausvoimissa reunahäiriöitä esiintyy lievimmillään kiertymissä ja voimakkaimmillaan leikkausvoimissa.

### C.1 Tasapainoyhtälöiden muokkaus

Reissnerin-Mindlinin laattamallin tasapainoyhtälöt ovat kolmen osittaisdifferentiaaliyhtälön muodostama kytketty yhtälöryhmä kolmen tuntemattoman funktion (taipuman  $w$  ja kiertymien  $\beta$ ) ratkaisemiseksi. Sen analyyttinen ratkaisu on hankalaa yksinkertaisimmissakin reunaehtotapauksissa. Eräällä muunnoksella se voidaan saattaa ekvivalenttiin muotoon, josta kytkentä häviää, jolloin systeemin ratkaisu olennaisesti helpottuu. Tarkastellaan seuraavassa tätä prosessia. Esitys pohjautuu D.N. Arnoldin ja R.S. Falkin artikkeliin [37].

Reissnerin Mindlinin laattamallin tasapainoyhtälöt ovat siis (10.121a):

$$kGt(\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} - \Delta w) = \bar{f}, \quad (\text{C.1})$$

$$D[\Delta\beta_x + \frac{1}{2}(1 + \nu)(\beta_{y,xy} - \beta_{x,yy})] + kGt(w_{,x} - \beta_x) = 0, \quad (\text{C.2})$$

$$D[\Delta\beta_y + \frac{1}{2}(1 + \nu)(\beta_{x,xy} - \beta_{y,xx})] + kGt(w_{,y} - \beta_y) = 0, \quad (\text{C.3})$$

jotka voidaan kirjoittaa lyhyemmässä muodossa

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} = \bar{f}, \quad (\text{C.4})$$

$$-\operatorname{div} \mathbf{M} + \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (\text{C.5})$$

missä leikkausvoimavektori  $\mathbf{q}$  ja momenttitensori (matriisi)  $\mathbf{M}$  ovat

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_s(\mathbf{grad}w - \boldsymbol{\beta}), \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{xy} & M_y \end{bmatrix} = \mathcal{D}_b\boldsymbol{\kappa},$$

ja jossa  $\mathcal{D}_b$  on laatan taivutusjäykkyystensori ja  $\mathbf{D}_s$  leikkausjäykkyysmatriisi. Käyristymämatriisi  $\boldsymbol{\kappa}$  on

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_x & \kappa_{xy} \\ \kappa_{xy} & \kappa_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_{x,x} & -\beta_{x,y} - \beta_{y,x} \\ -\beta_{x,y} - \beta_{y,x} & -\beta_{y,y} \end{bmatrix}.$$

Taivutusjäykkyystensori voidaan määritellä kaavalla

$$\mathcal{D}_b\boldsymbol{\kappa} = D[(1 - \nu)\boldsymbol{\kappa} + \nu\text{tr}(\boldsymbol{\kappa})\mathbf{I}],$$

jossa  $\text{tr}$  on matriisin jälki (eli diagonaalialkioiden summa) ja  $\mathbf{I}$  on  $2 \times 2$  yksikkömatriisi. Differentiaalioperaattorit  $\text{div}$ ,  $\mathbf{div}$  ja  $\mathbf{grad}$  määritellään seuraavasti:

$$\text{div}\mathbf{q} = Q_{x,x} + Q_{y,y}, \quad \mathbf{div}\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_{x,x} + M_{xy,y} \\ M_{xy,x} + M_{y,y} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{grad}w = \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Otaksumalla laatta tasapaksuksi ja homogeeniseksi sekä materiaali kimmoisaksi isotrooppiseksi voidaan yhtälöt (C.4) kirjoittaa siirtymäsuureiden avulla seuraavasti

$$-kGt \text{div}(\mathbf{grad}w - \boldsymbol{\beta}) = \bar{f}, \quad (\text{C.7})$$

$$-\mathbf{div}(\mathcal{D}_b\boldsymbol{\kappa}) + kGt(\mathbf{grad}w - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}. \quad (\text{C.8})$$

Jotta rajatapauksena  $t \rightarrow 0$  saadaan äärellinen ratkaisu, skaalataan kuorma teki-jällä  $t^3$  (eli  $\bar{f} = t^3\bar{g}$ ), jolloin saadaan

$$-kGt^{-2} \text{div}(\mathbf{grad}w - \boldsymbol{\beta}) = \bar{g}, \quad (\text{C.9})$$

$$-\mathbf{div}\tilde{\mathcal{D}}_b\boldsymbol{\kappa} + kGt^{-2}(\mathbf{grad}w - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}, \quad (\text{C.10})$$

missä skaalattu taivutusjäykkyystensori on

$$\tilde{\mathcal{D}}_b = t^{-3}\mathcal{D}_b.$$

Jatkossa käytetään merkintää

$$B = \frac{E}{12(1 - \nu^2)}$$

lausekkeiden yksinkertaistamiseksi.

Tarkkojen ratkaisujen konstruomiseksi Arnold ja Falk onnistuvat häivyttämään kytkennän kolmen yhtälön (C.9) välillä siirtymällä uusiin tuntemattomiin funktioihin  $v$ ,  $m$  ja  $q$ . Alkuperäiset tuntemattomat funktiot  $w$ ,  $\beta_x$  ja  $\beta_y$  määritellään uusien avulla seuraavasti:

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{grad}v - \frac{t^2}{kG}(\mathbf{grad}m + \mathbf{rot}q), \quad w = v - \frac{Bt^2}{kG}\Delta v - \frac{t^2}{kG}m, \quad (\text{C.11})$$

jossa skalaarifunktion vektoriarvoinen roottorioperaattori määritellään

$$\mathbf{rot}q = \left\{ \begin{array}{c} q_{,y} \\ -q_{,x} \end{array} \right\}.$$

Tällöin yhtälösystemi (C.9) muuntuu kolmeksi erilliseksi osittaisdifferentiaaliyhtälöksi

$$B\Delta^2 v = \bar{g}, \quad (\text{C.12})$$

$$\Delta m = 0, \quad (\text{C.13})$$

$$-\frac{t^2}{12k}\Delta q + q = 0. \quad (\text{C.14})$$

Alkuperäinen systeemi (C.4) on kolmen toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälön systeemi. Täten sen jokaisella reunalla voidaan antaa täsmälleen kolme reunaehto. Muunnettu systeemi (C.12) sen sijaan on yhden neljännen ja kahden toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöiden systeemi, jolle voidaan antaa neljä reunaehto jokaisella reunan osalla. Näistä kolme reunaehto seuraa luonnollisesti alkuperäisen ongelman reunaehdoista, mutta puuttuvan neljännen ehdon asettamista tarkastellaan esimerkkitapauksen yhteydessä, sillä sen järkevä valinta määräytyy reunaehdon tyypistä.

## C.2 Esimerkkinä puoliääretön laatta

Tarkastellaan puoliäärettömän laatan ( $y > 0$ ) ja pehmeän vapaasti tuettu reunaehdon tapausta. Laatan kuormitukseksi otaksutaan  $\bar{f}(x, y) = f_0 \cos(\pi x/L)$  jolloin skaalattu kuorma on  $\bar{g}(x, y) = g_0 \cos(\pi x/L)$ , eli  $f_0 = g_0 t^3$ .

Laatan kuormituksesta johtuen voidaan osittaisdifferentiaaliyhtälösystemin (C.12) ratkaisua yrittää etsiä muodossa

$$v(x, y) = V(y) \cos \frac{\pi x}{L}, \quad m(x, y) = M(y) \cos \frac{\pi x}{L}, \quad q(x, y) = Q(y) \sin \frac{\pi x}{L},$$

missä  $V(y)$ ,  $M(y)$  ja  $Q(y)$  ovat vain  $y$ :n funktioita ja toteuttavat tavalliset differentiaaliyhtälöt

$$B(V'''' - 2\alpha^2 V'' + \alpha^4 V) = g_0, \quad (\text{C.15})$$

$$M'' - \alpha^2 M = 0, \quad (\text{C.16})$$

$$-\frac{t^2}{12k}(Q'' - \alpha^2 Q) + Q = 0, \quad (\text{C.17})$$

missä on merkitty  $\alpha = \pi/L$ . Yhtälöiden ratkaisut ovat

$$V(y) = \frac{g_0}{\alpha^4 B} + ae^{-\alpha y} + \alpha y b e^{-\alpha y}, \quad (\text{C.18})$$

$$M(y) = ce^{-\alpha y}, \quad (\text{C.19})$$

$$Q(y) = de^{-\delta y/t}, \quad (\text{C.20})$$

jossa dimensioton vakio  $\delta = \sqrt{12k + \alpha^2 t^2}$  ja vakiot  $a, b, c, d$  määräytyvät reunaehdoista.

Alkuperäisten muuttujien avulla lausuttuna pehmeän vapaasti tuetun reunan reunaehdot ovat yleisessä muodossa seuraavat:

$$w = 0, \quad M_n = \mathbf{n}^T \mathbf{M} \mathbf{n} = 0, \quad M_{ns} = \mathbf{s}^T \mathbf{M} \mathbf{n} = 0,$$

jossa  $\mathbf{n}$  ja  $\mathbf{s}$  merkitsevät reunakäyrän normaalin ja tangentin suuntaisia yksikkövektoreita. Puoliäärettömän laatan reunalla  $y = 0$  reunaehdot saavat muodon

$$w = 0, \quad (\text{C.21})$$

$$\beta_{y,y} + \nu \beta_{x,x} = 0, \quad (\text{C.22})$$

$$\beta_{x,y} + \beta_{y,x} = 0. \quad (\text{C.23})$$

Siirtymällä uusiin muuttujiin saadaan reunaehtojen lausekkeiksi

$$v - \frac{Bt^2}{kG} \Delta v - \frac{t^2}{kG} m = 0, \quad (\text{C.24})$$

$$v_{,yy} - \frac{t^2}{kG} (m_{,yy} - q_{,xy}) + \nu \left[ v_{,xx} - \frac{t^2}{kG} (m_{,xx} + q_{,xy}) \right] = 0, \quad (\text{C.25})$$

$$2v_{,xy} - \frac{t^2}{kG} (2m_{,xy} + q_{,yy} - q_{,xx}) = 0, \quad (\text{C.26})$$

jotka muuntuvat muotoon

$$V(0) - \frac{Bt^2}{kG} [V''(0) - \alpha^2 V(0)] - \frac{t^2}{kG} M(0) = 0, \quad (\text{C.27})$$

$$V''(0) - \nu \alpha^2 V(0) - \frac{t^2}{kG} [M''(0) - \nu \alpha^2 M(0)] + \frac{t^2}{kG} \alpha (1 - \nu) Q'(0) = 0, \quad (\text{C.28})$$

$$-2\alpha V'(0) + 2\frac{t^2}{kG} \alpha M'(0) - \frac{t^2}{kG} [Q''(0) + \alpha^2 Q(0)] = 0. \quad (\text{C.29})$$

Nyt joudutaan keksimään neljäs reunaehto, joksi kyseisessä tapauksessa valitaan

$$v(x, 0) = 0, \quad \Rightarrow \quad V(0) = 0.$$

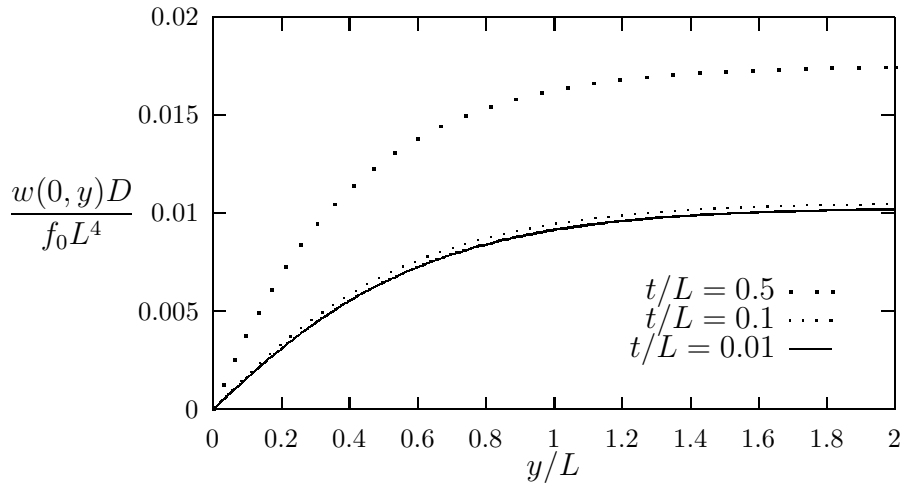
Yksinkertaisten mutta pitkäkköjen algebrallisten laskutoimitusten jälkeen saadaan vakioiden  $a, b, c$  ja  $d$  arvoiksi

$$a = -\frac{g_0}{\alpha^4 B}, \quad (\text{C.30})$$

$$b = -\frac{g_0}{2\alpha^4 B} (1 + \alpha t (1 - \nu) \delta p^{-1}), \quad (\text{C.31})$$

$$c = \frac{g_0}{\alpha^2} \delta \alpha t (1 - \nu) p^{-1}, \quad (\text{C.32})$$

$$d = \frac{g_0 k G}{\alpha^2 B} \left( 1 + \frac{1}{6k} \alpha^2 t^2 \right) p^{-1}, \quad (\text{C.33})$$



**Kuva C.1** Taipuma  $y$ -akselilla.

jossa on käytetty lyhennysmerkintää

$$p = \alpha t(1 - \nu)\delta \left(1 + 2\alpha^2 t^2 \frac{B}{kG}\right) - (\delta^2 + \alpha^2 t^2) \left(1 + \frac{1}{6k}\alpha^2 t^2\right).$$

Huomaa, että kertoimet  $a, b$  ja  $d$  ovat laatan paksuuden  $t$  suhteen ykkösen luokkaa, eli  $a, b, d \sim \mathcal{O}(1)$  ja  $c$ :n hallitseva termi on luokkaa  $\mathcal{O}(t/L)$ .

Taipuman lausekkeeksi saadaan täten

$$\begin{aligned} w &= v - \frac{t^2 B}{kG} \Delta v - \frac{t^2}{kG} m, \\ &= \left[ \left(1 + \alpha^2 t^2 \frac{B}{kG}\right) V - \frac{t^2 B}{kG} (V'' + M) \right] \cos \alpha x \\ &= \left\{ \left(1 + \alpha^2 t^2 \frac{B}{kG}\right) \frac{g_0}{\alpha^4 B} - \left[ a + b \left( \alpha y + 2\alpha^2 t^2 \frac{B}{kG} \right) - \frac{t^2}{kG} c \right] e^{-\alpha y} \right\} \cos \alpha y \\ &= \frac{g_0 L^4}{\pi^4 B} (c_1 - c_2 e^{-\alpha y}) \cos \alpha y = \frac{f_0 L^4}{\pi^4 D} (c_1 - c_2 e^{-\alpha y}) \cos \alpha y \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

jossa dimensiottomat vakiot  $c_1$  ja  $c_2$  ovat:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 + \alpha^2 t^2 \frac{B}{kG}, \\ c_2 &= 1 + \frac{1}{2} \left( \alpha y + 2\alpha^2 t^2 \frac{B}{kG} \right) (1 + \alpha t(1 - \nu)\delta f^{-1}) \frac{1}{6k} \alpha^3 t^3 \delta p^{-1} \end{aligned}$$

Taipumaprofiili  $y$ -akselilla on piirretty kolmella eri suhteellisen paksuuden  $t/L$  arvolla kuvaan C.1.

Määritelmiä (C.11) hyväksikäyttäen saadaan leikkausvoimille lauseke

$$\mathbf{q} = kGt(\mathbf{grad}w - \beta) = -t^3(B\mathbf{grad}\Delta v - \mathbf{rot}q),$$

joka komponenttimuodossa lausuttuna on

$$\begin{aligned} Q_x &= -t^3 \left( B \frac{\partial}{\partial x} \Delta v - \frac{\partial q}{\partial y} \right) = t^3 [\alpha B (V'' - \alpha^2 V) + Q'] \sin \alpha x, \\ Q_y &= -t^3 \left( B \frac{\partial}{\partial y} \Delta v - \frac{\partial q}{\partial x} \right) = -t^3 [B (V''' - \alpha^2 V') + \alpha Q] \cos \alpha x, \end{aligned}$$

ja josta saadaan lopullinen muoto

$$Q_x = \frac{g_0 t^3 L}{\pi} \left( c_3 e^{-\alpha y} - \frac{\delta}{\alpha t} c_4 e^{-\delta y/t} - 1 \right) \sin \alpha x, \quad (\text{C.35})$$

$$Q_y = \frac{g_0 t^3 L}{\pi} (c_3 e^{-\alpha y} - c_4 e^{-\delta y/t}) \cos \alpha x, \quad (\text{C.36})$$

joissa

$$\begin{aligned} c_3 &= 1 + \alpha t (1 - \nu) \delta p^{-1}, \\ c_4 &= \frac{kG}{B} \left( 1 + \frac{1}{6k} \alpha^2 t^2 \right) p^{-1}. \end{aligned}$$

Ohuen laatan tapauksessa termi  $\exp(-\delta y/t)$  aiheuttaa reunahäiriön, jonka leveys on laatan paksuuden  $t$  luokkaa. Huomaa ero leikkausvoimien  $Q_x$  ja  $Q_y$  lausekkeissa. Leikkausvoiman  $Q_x$  lausekkeessa reunahäiriötä aiheuttava termi kerrotaan vielä lausekkeella  $\delta/(\alpha t) = (\delta/\pi)(L/t)$ , joka ohuen laatan tapauksessa on suuri. Täten voidaan päätellä reunahäiriön olevan voimakkaampi  $Q_x$ :n kuin  $Q_y$ :n tapauksessa. Leikkausjännitysten jakaumat reunan läheisyydessä kolmella eri suhteellisen paksuuden arvolla on piirretty kuvaan C.2.

Taivutusmomenttien määrittämiseen tarvitaan kiertymien lausekkeet, jotka saadaan määritelmästä (C.11):

$$\begin{aligned} \beta_x &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{t^2}{kG} \left( \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right), \\ \beta_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{t^2}{kG} \left( \frac{\partial m}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

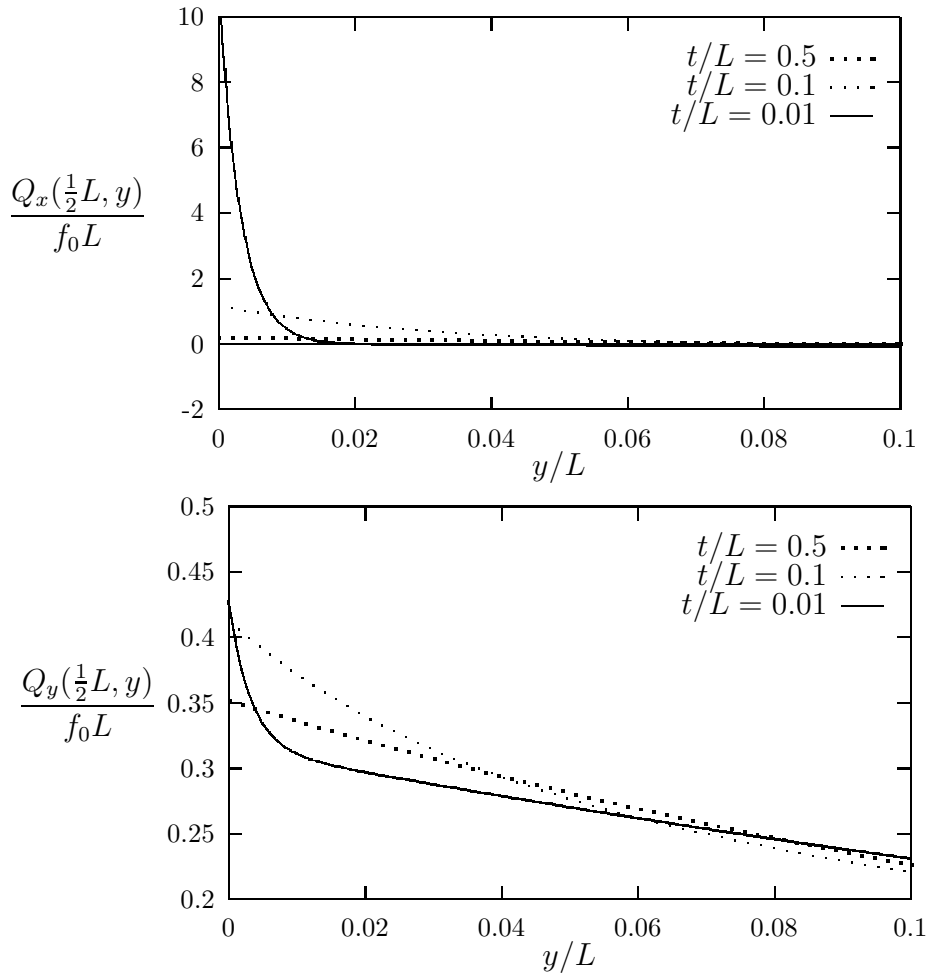
josta seuraa

$$\beta_x = \frac{g_0}{\alpha^3 B} (c_5 e^{-\alpha y} + \alpha t \delta c_6 e^{-\delta y/t} - 1) \sin \alpha x, \quad (\text{C.37})$$

$$\beta_y = \frac{g_0}{\alpha^3 B} (c_7 e^{-\alpha y} + \alpha^2 t^2 c_6 e^{-\delta y/t} - 1) \cos \alpha x, \quad (\text{C.38})$$

missä

$$\begin{aligned} c_5 &= 1 + \frac{1}{2} \alpha y c_3 - \frac{1}{6k} \alpha^3 t^3 \delta p^{-1}, \\ c_6 &= \left( 1 + \frac{1}{6k} \alpha^2 t^2 \right) p^{-1}, \\ c_7 &= 1 - \frac{1}{2} (1 - \alpha y) c_3 - \frac{1}{6k} \alpha^3 t^3 \delta p^{-1}. \end{aligned}$$



**Kuva C.2** Leikkausvoimajakaumat.

Edellä olevissa lausekkeissa (C.34), (C.35) ja (C.37) esiintyvät  $c_i$  vakiot on kirjoitettu siten, että niiden riippuvuus laatan paksuudesta on ykkösen luokkaa, eli  $c_i \sim \mathcal{O}(1)$ . Täten  $t$ -riippuvuus voidaan helpoimmin nähdä lausekkeista (C.34), (C.35) ja (C.37).

Taivutusmomentit  $M_x, M_y$  ja vääntömomentti  $M_{xy}$  voidaan määrittää tutuista yhtälöistä

$$\begin{aligned} M_x &= -D(\beta_{x,x} + \nu\beta_{y,y}), \\ M_y &= -D(\beta_{y,y} + \nu\beta_{x,x}), \\ M_{xy} &= -\frac{1}{2}(1 - \nu)D(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}). \end{aligned}$$

Kiertymien lausekkeista voidaan havaita, että reunahäiriö on voimakkaimmillaan vääntömomentissa  $M_{xy}$ , jossa se on luokkaa

$$M_{xy} \sim e^{-\delta y/t},$$



kun se taivutusmomenteissa on luokkaa

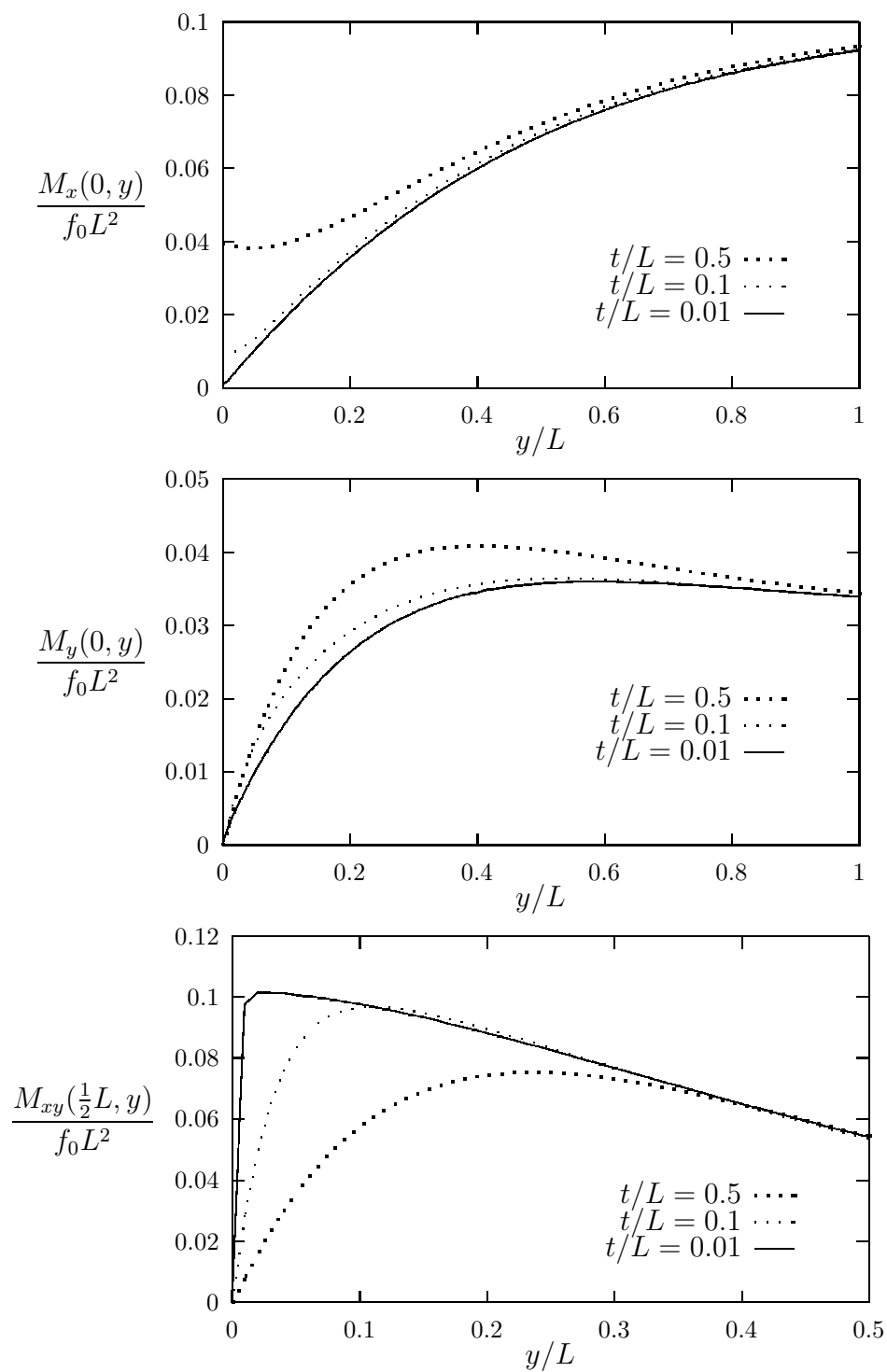
$$M_x, M_y \sim (t/L)e^{-\delta y/t}.$$

Momenttien jakaumat  $y$ -akselin suuntaisilla suorilla  $x = 0$  ja  $x = L/2$  on piirretty kuvaan C.3 kolmella eri suhteellisen paksuuden arvolla.

### C.3 Yhteenveto

Arnoldin ja Falkin tutkimusten perusteella voimakkaimmat reunahäiriöt esiintyvät laatan reunanosilla jotka ovat pehmeästi vapaasti tuetut tai vapaat. Heikoin reunahäiriö esiintyy pehmeän jäykästi kiinnitetyn reunan tapauksessa. Suoraviivaisella reunalla reunahäiriötä ei esiinny pehmeän jäykästi kiinnitetyn ja kovan yksinkertaisen tuennan tapauksissa. Pyörähdyssymmetrisesti kuormitetun ympyrälaatan tapauksessa reunahäiriöt häviävät kokonaan kaikista suureista ja kaikilla reunaehtotapauksilla, joten tätä tapausta voidaan pitää hyvin erikoisena Reissnerin-Mindlinin laattamallissa. Vaikka kyseinen tapaus on suosittu R-M laattamalliin perustuvien laattaelementtien testauskohde, on se edellisen perusteella mahdollisimman epätydyttävä testiesimerkiksi.

Edellä esitetty puoliäärettömän laatan tapaus on myös hieman akateeminen esimerkki. Jännityssuureiden käyttäytyminen kulmien läheisyydessä olisi myös tärkeä tietää. Kirchhoffin laattamallissa esiintyvää singulariteettia, eli vapaasti tuetun laatan kulman pistemäistä tukireaktiota ei esiinny Reissnerin-Mindlinin laattamallissa. Sitä vastaa reunahäiriömäinen ‘piikki’ leikkausvoimajakaumassa. Lisäinformaatiota jännityssuureiden jakaumasta kulmien läheisyydessä saa artikkeleista [47], [46].



**Kuva C.3** Momenttijakaumat.