

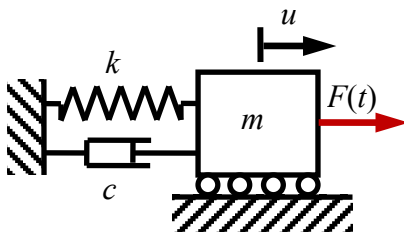
1. Määritä oheisen jäykästi kiinnitetyn pilarin tarkat ominaistajuuDET ja ominaisvektorit. Laske kaksi alinta ominaisparia.  
 Determine two lowest exact eigenvalues and eigenvector for the clamped uniform column.

2. Kuvan värähtelijää kuormittaa harmoninen voima

$$F(t) = \hat{F} \cos(\Omega t)$$

Määritä systeemin vaste, kun herätteen kulmataajuus  $\Omega = \omega$  (resonanssi) ja laske aika, jolloin siirtymävasteen amplitudi saavuttaa likimain pysyvien värähtelyjen vasteen arvon. Värähtelijän alkuehdot ovat  $u(0) = 0, \dot{u}(0) = 0$ .

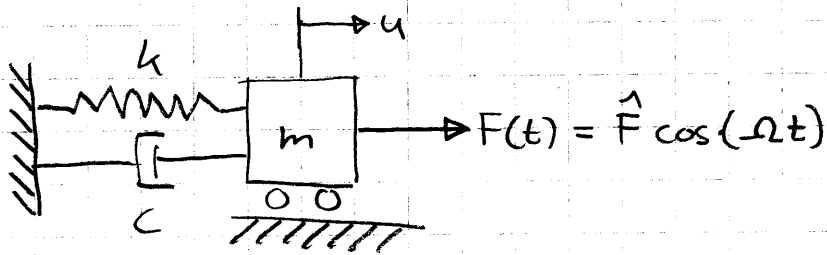
$$\zeta = 0,05; m = 2 \text{ kg}; \hat{F} = 10 \text{ N}; k = 0,8 \text{ N/mm}$$



The harmonic force  $F(t) = \hat{F} \cos(\Omega t)$  acts on the viscously damped system. Determine the response at the resonance  $\Omega = \omega$  and time when steady state response is approximately reached.

$$\zeta = 0,05; m = 2 \text{ kg}; \hat{F} = 10 \text{ N}; k = 0,8 \text{ N/mm}$$

(4)



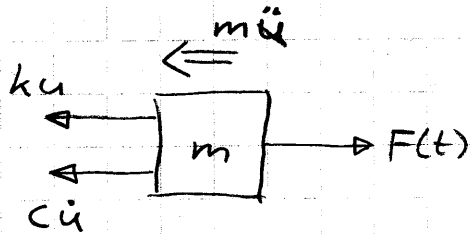
alkuehdot:  $u(0) = 0$      $\dot{u}(0) = 0$

$$\zeta = 0,05$$

$$m = 2 \text{ kg}$$

$$\hat{F} = 10 \text{ N}$$

$$k = 0,8 \text{ N/m}$$



Liikkeyhtälö:

$$\sum F: \leftarrow m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = F(t) = \hat{F} \cos(\Omega t)$$

käytetään merkintöjä

$$\zeta = \frac{c}{c_k}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega, \quad c_k = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega$$

$$\Rightarrow \ddot{u} + \frac{c}{m} \dot{u} + \frac{k}{m} u = \frac{\hat{F}}{m} \cos(\Omega t) \quad \cdot \quad \frac{\hat{F}}{k} = u_{st}$$

$$\ddot{u} + 2\zeta \omega \dot{u} + \omega^2 u = u_{st} \omega^2 \cos(\Omega t)$$

homogeeninen yhtälö

$$\ddot{u} + 2\zeta \omega \dot{u} + \omega^2 u = 0$$

ratkaisu on muotoa

$$u_h(t) = e^{-\zeta \omega t} (C_1 \sin(\omega_d t) + C_2 \cos(\omega_d t))$$

täydellisen yhtälön yksityisratkaisuksi kelpaa

$$u_p(t) = V \bar{u}_{st} \sin(\Omega t)$$

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t} (C_1 \sin(\omega_d t) + C_2 \cos(\omega_d t)) + V u_{st} \sin(\Omega t)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & -\zeta\omega e^{-\zeta\omega t} (C_1 \sin(\omega_d t) + C_2 \cos(\omega_d t)) + \\ & + e^{-\zeta\omega t} (C_1 \omega_d \cos(\omega_d t) - C_2 \omega_d \sin(\omega_d t)) + \\ & + V \Omega u_{st} \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

alkuehdot:

$$u(0) = e^{-\zeta\omega \cdot 0} (C_1 \sin(\omega_d \cdot 0) + C_2 \cos(\omega_d \cdot 0)) + V u_{st} \sin(\Omega \cdot 0) = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(0) = & -\zeta\omega e^{-\zeta\omega \cdot 0} C_1 \sin(\omega_d \cdot 0) + e^{-\zeta\omega \cdot 0} C_1 \omega_d \cos(\omega_d \cdot 0) + \\ & + V \Omega u_{st} \cos(\Omega \cdot 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_1 = -V \frac{\Omega}{\omega_d} u_{st}$$

$$\begin{aligned} u(t) = & -e^{-\zeta\omega t} V \frac{\Omega}{\omega_d} u_{st} \sin(\omega_d t) + V u_{st} \sin(\Omega t) \\ = & V u_{st} \left( -e^{-\zeta\omega t} \frac{\Omega}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + \sin(\Omega t) \right) \end{aligned}$$

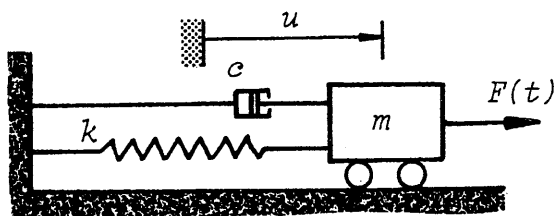
$$\text{kur } \Omega = \omega \Rightarrow V = \frac{1}{2\zeta}$$

$u(t)$

ESIMERKKI 1

Kuvan värähtelijää kuormittaa harmoninen voima

$$F(t) = \hat{F} \cos(\Omega t)$$



Määritä systeemin vaste, kun herätteen kulmataajuus  $\Omega = \omega$  (resonanssi) ja laske aika, jolloin siirtymävasteen amplitudi saavuttaa likimain pysyvien värähtelyjen vasteen amplitudin arvon. Värähtelijän alkuehdot ovat  $u(0) = 0$  ja  $\dot{u}(0) = 0$ .

$$\zeta = 0,05, \quad m = 2 \text{ kg}, \quad \hat{F} = 10 \text{ N}, \quad k = 0,80 \text{ N/mm}$$

RATKAISU

Systeemin homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on tuloksen (382.1) perusteella

$$u_h(t) = e^{-\zeta\omega t} (C_1 \sin(\omega_d t) + C_2 \cos(\omega_d t))$$

Tuloksen (394.7) mukaan resonanssitilanteessa  $\Omega = \omega$  vaihekulma  $\varphi = -\pi/2$  ja tuloksen (395.4) mukaan vahvistuskerroin on  $V = 1/(2\zeta)$ . Tällöin täydellisen yhtälön yksityisratkaisu on

$$u_t(t) = V \bar{u}_{st} \sin(\Omega t) = \frac{\bar{u}_{st}}{2\zeta} \sin(\Omega t)$$

Soveltamalla alkuehtoja  $u(0) = 0$  ja  $\dot{u}(0) = 0$  saadaan integroimisvakioille arvot

$$C_1 = -\bar{u}_{st} (\Omega / \omega_d) / 2\zeta \quad C_2 = 0$$

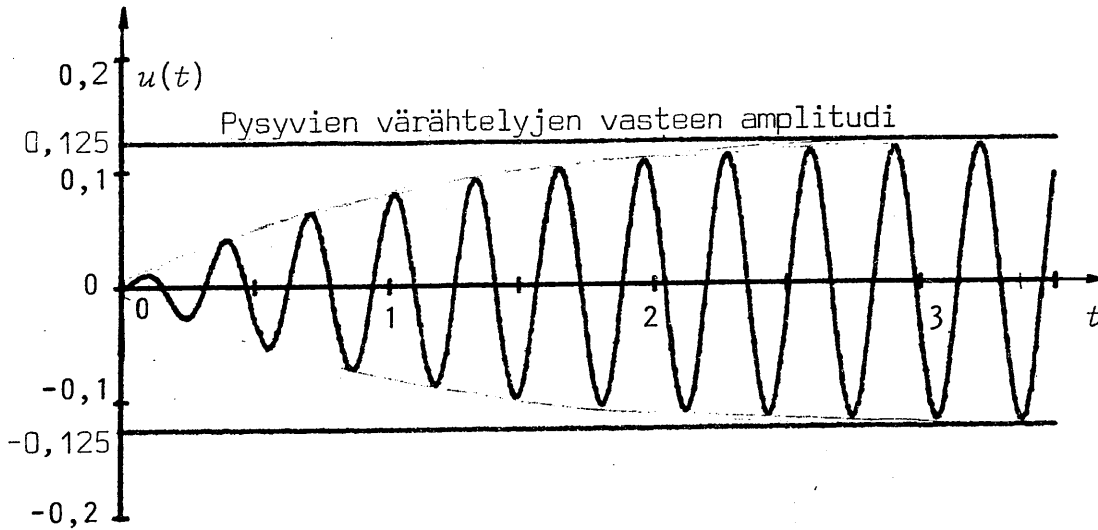
jolloin täydellisen yhtälön ratkaisuksi voidaan kirjoittaa ( $\Omega = \omega$ )

$$u(t) = \frac{\bar{u}_{st}}{2\zeta} \left( \sin(\omega t) - \left( \frac{\omega}{\omega_d} \right) e^{-\zeta\omega t} \sin(\omega_d t) \right)$$

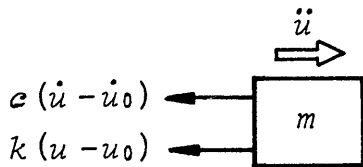
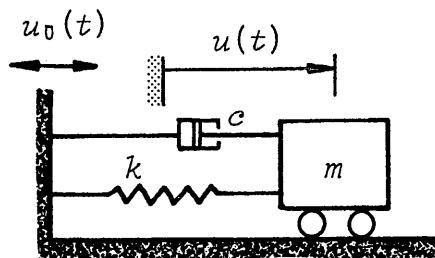
Sijoittamalla annetut numeroarvot siirtymävasteen  $u(t)$  lauseke saa järjestelmässä (kg,m,s) muodon

$$u(t) = 0,12500 \sin(20t) - 0,12516 e^{-t} \sin(19,7498t) \quad \Leftarrow$$

Kuvassa 398.1 on piirretty siirtymävastefunktion kuvaaja. Kuvaajasta nähdään, että siirtymävasteen amplitudi saavuttaa pysyvien värähtelyjen vasteen amplitudin noin 3,4 s kuluessa. Lisäksi nähdään, että vaikka suhteellinen vaimennus ( $\zeta = 0,05$ ) on pieni, niin resonanssitilanne ei aiheuta siirtymävasteen rajatonta kasvua. Todellisissa systeemeissä on aina jonkin verran vaimennusta, joten resonanssi ei pääse kehittymään aivan niin selkeästi kuin teoreettinen tulos (388.3) esittää.



Kuva 1 Vaimennetun systeemin resonanssivaste



### ESIMERKKI 1

Kuvan vaimennetun värähtelijän alusta saa harmonisen siirtymäherätteen

$$u_0(t) = \hat{u}_0 \sin(\Omega t)$$

Määritä systeemin pysyvän värähtelyn vasteen vahvistuskerroin ja vaihekulma.

### RATKAISU

Dynamiikan peruslain mukaan systeemin liikeyhtälö on

$$\rightarrow m\ddot{u} = -k(u - u_0) - c(\dot{u} - \dot{u}_0)$$

Käyttämällä merkintöjä

$$\omega = \sqrt{k/m}, \quad \zeta = c/c_k = c/2m\omega$$

saadaan liikeyhtälö standardimuotoon

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = \omega^2 \hat{u}_0 \sin(\Omega t) + 2\zeta\omega\Omega \hat{u}_0 \cos(\Omega t) \quad (1)$$

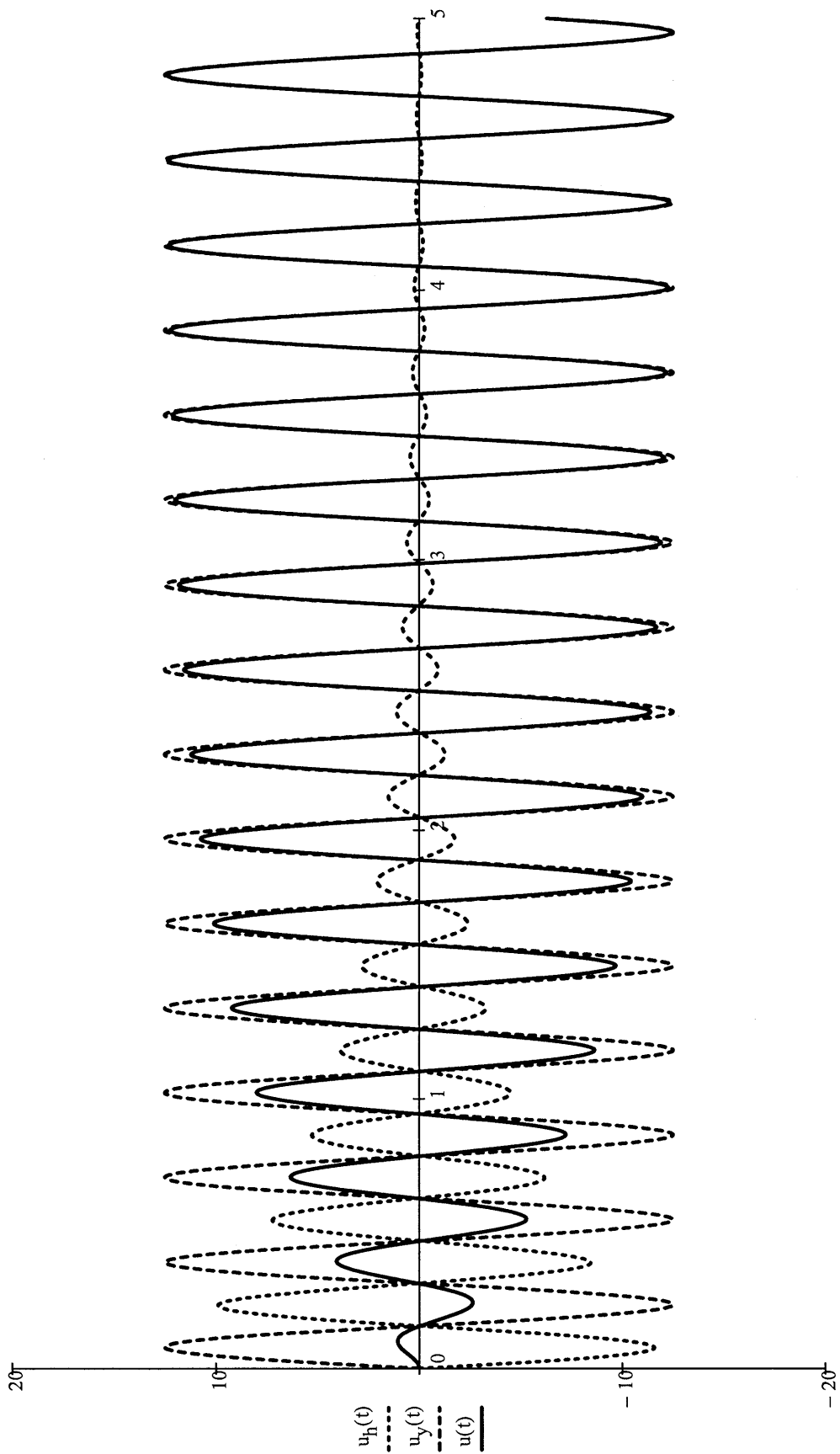
Etsitään pysyvien värähtelyjen vastetta muodossa

$$u_t(t) = A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t) \quad (2)$$

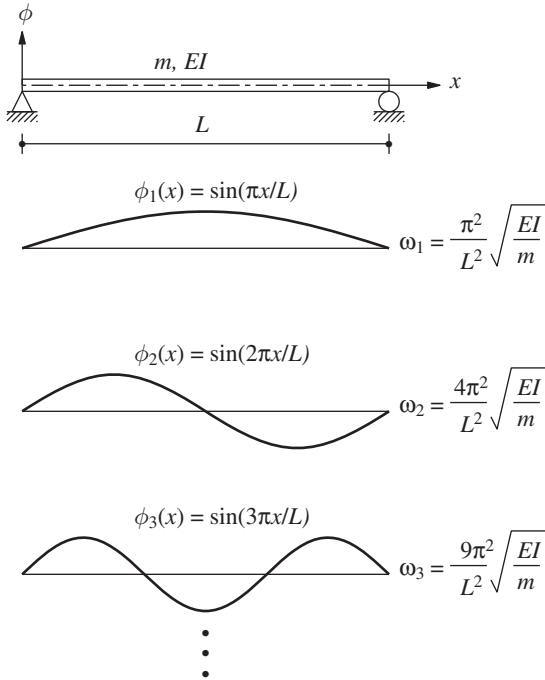
Sijoittamalla esitys (2) liikeyhtälöön (1) päädytään vakioiden lausekkeisiin

$$A = \frac{1 - (\Omega/\omega)^2 + (2\zeta\Omega/\omega)^2}{[1 - (\Omega/\omega)^2]^2 + (2\zeta\Omega/\omega)^2} \hat{u}_0 \quad (3)$$

$$B = \frac{-2\zeta(\Omega/\omega)^3}{[1 - (\Omega/\omega)^2]^2 + (2\zeta\Omega/\omega)^2} \hat{u}_0 \quad (4)$$



t



**Figure 17.3.1** Natural vibration modes and frequencies of uniform simply supported beams.

The value of  $C_1$  is arbitrary;  $C_1 = 1$  will make the maximum value of  $\phi_n(x)$  equal to unity. These natural modes are shown in Fig. 17.3.1.

For a simply supported uniform beam, we have determined an infinite series of modes each with its vibration frequency. Equations (17.3.15) and (17.3.16) and Fig. 17.3.1 tell us that the first mode is a half sine wave and that its frequency  $\omega_1 = \pi^2(EI/mL^4)^{1/2}$ . The second mode is a complete sine wave with frequency  $\omega_2 = 4\omega_1$ ; the third is one and a half sine waves with frequency  $\omega_3 = 9\omega_1$ ; and so on.

### 17.3.2 Uniform Cantilever Beam

In this section the natural vibration frequencies and modes of a uniform cantilever beam are determined. At the clamped end,  $x = 0$ , the displacement and slope are zero. Thus Eq. (17.3.9) gives

$$u(0, t) = 0 \Rightarrow \phi(0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = -C_2 \tag{17.3.17a}$$

$$u'(0, t) = 0 \Rightarrow \phi'(0) = 0 \Rightarrow \beta(C_1 + C_3) = 0 \Rightarrow C_3 = -C_1 \tag{17.3.17b}$$

At the free end,  $x = L$ , of the cantilever the bending moment and shear are both zero. Thus, from Eqs. (17.3.9) and after using Eq. (17.3.17), we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(L, t) = 0 &\Rightarrow EI\phi''(L) = 0 \\ &\Rightarrow C_1(\sin \beta L + \sinh \beta L) + C_2(\cos \beta L + \cosh \beta L) = 0 \end{aligned} \quad (17.3.18a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(L, t) = 0 &\Rightarrow EI\phi'''(L) = 0 \\ &\Rightarrow C_1(\cos \beta L + \cosh \beta L) + C_2(-\sin \beta L + \sinh \beta L) = 0 \end{aligned} \quad (17.3.18b)$$

Rewriting Eqs. (17.3.18a) and (17.3.18b) in matrix form yields

$$\begin{bmatrix} \sin \beta L + \sinh \beta L & \cos \beta L + \cosh \beta L \\ \cos \beta L + \cosh \beta L & -\sin \beta L + \sinh \beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17.3.19)$$

Equation (17.3.19) can be satisfied by selecting both  $C_1$  and  $C_2$  equal to zero, but this would give a trivial solution of no vibration at all. For either or both of  $C_1$  and  $C_2$  to be nonzero, the coefficient matrix in Eq. (17.3.19) must be singular (i.e., its determinant must be zero). This leads to the frequency equation:

$$1 + \cos \beta L \cosh \beta L = 0 \quad (17.3.20)$$

No simple solution is available for  $\beta L$ , so Eq. (17.3.20) is solved numerically to obtain

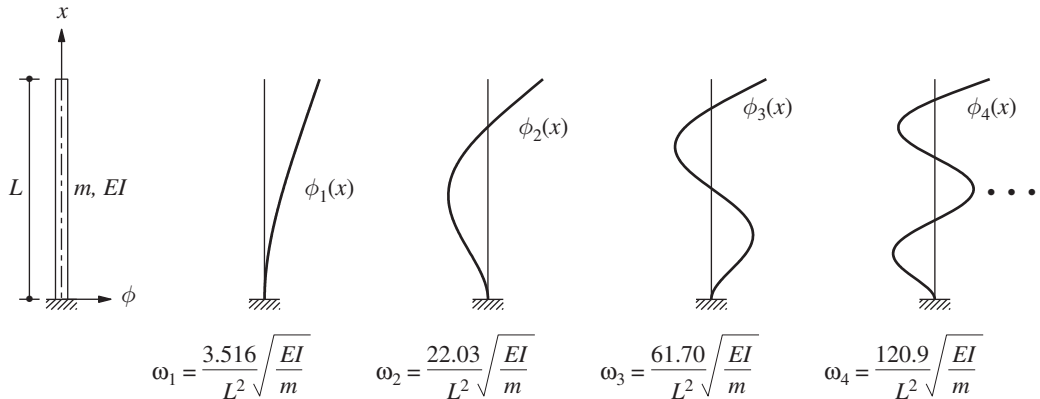
$$\beta_n L = 1.8751, 4.6941, 7.8548, \text{ and } 10.996 \quad (17.3.21)$$

for  $n = 1, 2, 3$ , and 4. For  $n > 4$ ,  $\beta_n L \simeq (2n - 1)\pi/2$ . Equation (17.3.8) then gives the first four natural frequencies:

$$\omega_1 = \frac{3.516}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \omega_2 = \frac{22.03}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \omega_3 = \frac{61.70}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \omega_4 = \frac{120.9}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (17.3.22)$$

Corresponding to each value of  $\beta_n L$ , the natural vibration mode is

$$\phi_n(x) = C_1 \left[ \cosh \beta_n x - \cos \beta_n x - \frac{\cosh \beta_n L + \cos \beta_n L}{\sinh \beta_n L + \sin \beta_n L} (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x) \right] \quad (17.3.23)$$



**Figure 17.3.2** Natural vibration modes and frequencies of uniform cantilever beams.