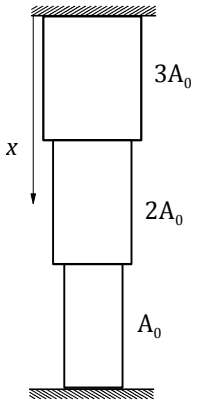
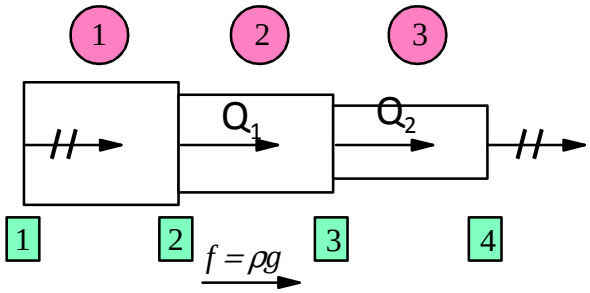
TTY/Teknisen suunnittelun laitos VK I / EDE_21100 / 2013S

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet *Heikki Marjamäki*

Välikoe I 11.10.2013



1. Ratkaise kuvan sauvarakenteen solmusiirtymät ja keskimmäisen elementin solmujännitykset elementtimenetelmällä. Laske myös rakenteen tukireaktiot ylhäällä ja alhaalla. Rakennetta kuormittaa sen oma paino alaspäin. Kunkin sauvan pituus *L* on 10 m, tiheys on 8000 kg/m^3 ja poikkipinta-ala A_0 on 10000 mm^2. Materiaalin kimmokerroin on 100 GPa. Maan vetovoiman kiihtyvyytenä voit käyttää arvoa 10 m/s^2.



ID-taulukko

(tuottaa 2*2 matriisin)

Solmu	ID
1	0
2	1
3	2
4	0

$$\mathbf{f}^V = \frac{f_x A l_e}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

Elementit

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EA_0}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{cc}0 & 1\end{array} \\ \begin{bmatrix}3 & -3\\ -3 & 3\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}0\\1\end{array} \qquad \mathbf{f}_1^V = \frac{f_x A_0 L}{2}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}\begin{array}{c}0\\1\end{array}$$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EA_0}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{cc}1 & 2\end{array} \\ \begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}1\\2\end{array} \qquad \mathbf{f}_1^V = \frac{f_x A_0 L}{2}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\begin{array}{c}1\\2\end{array}$$

$$\mathbf{k}_3 = \frac{EA_0}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{cc}2 & 0\end{array} \\ \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}2\\0\end{array} \qquad \mathbf{f}_3^V = \frac{f_x A_0 L}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{array}{c}2\\0\end{array}$$

Globaali jäykkyysmatriisi ja kuormitusvektori

$$\mathbf{K} = \frac{EA_0}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{cc}1 & 2\end{array} \\ \begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}1\\2\end{array} \qquad \mathbf{F} = \mathbf{P} + \text{"}\sum_e\text{"}\mathbf{f}_e^V = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + \frac{f_x A_0 L}{2}\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}\begin{array}{c}1\\2\end{array}$$

Solmusiirtymät

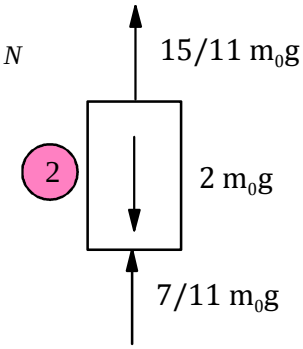
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\end{bmatrix} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} = \frac{L}{11EA_0}\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}\frac{f_x A_0 L}{2} = \begin{bmatrix}21\\25\end{bmatrix}\frac{f_x L^2}{22E} = \begin{bmatrix}21\\25\end{bmatrix}\frac{\rho g L^2}{22E} = \begin{bmatrix}21\\25\end{bmatrix}\frac{8000kg\cdot 10m\cdot 10^2 m^2 s^2 m^2}{m^3 s^2 22\cdot 100\cdot 10^9 kgm} = \begin{bmatrix}0.076\\0.091\end{bmatrix}mm$$

Keskimmäisen elementin solmujännitykset (m_0 on elementin 3 massa)

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{k}_2\mathbf{q}_2 - \mathbf{f}_2^V = \frac{EA_0}{L}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 21 \\ 25 \end{bmatrix}\frac{f_x L^2}{22E} - \begin{bmatrix} 22 \\ 22 \end{bmatrix}\frac{f_x A_0 L}{22} = \begin{bmatrix} -15 \\ -7 \end{bmatrix}\frac{f_x A_0 L}{11} = \begin{bmatrix} -15 \\ -7 \end{bmatrix}\frac{m_0 g}{11} = \begin{bmatrix} -10909 \\ -5091 \end{bmatrix} N$$

$$\sigma_1 = -\frac{f_{21}}{2A_0} = \frac{15\rho g A_0 L}{22A_0} = \frac{15 \cdot 8000kg \cdot 10m \cdot 10m}{22\,m^3 s^2} \approx 0.545MPa$$

$$\sigma_2 = \frac{f_{22}}{2A_0} = \frac{-7\rho g A_0 L}{22A_0} = \frac{-7 \cdot 8000kg \cdot 10m \cdot 10m}{22\,m^3 s^2} \approx -0.255MPa$$



Rakenteen tukireaktiot ylhäällä ja alhaalla ($m_0 = \rho A_0 L = 8000 \cdot 0.01 \cdot 10 = 800kg$)

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{k}_1\mathbf{q}_1 - \mathbf{f}_1^V = \frac{EA_0}{L}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 21 \end{bmatrix}\frac{f_x L^2}{22E} - \begin{bmatrix} 33 \\ 33 \end{bmatrix}\frac{f_x A_0 L}{22} = \begin{bmatrix} -48 \\ 15 \end{bmatrix}\frac{f_x A_0 L}{11} = \begin{bmatrix} -48 \\ 15 \end{bmatrix}\frac{m_0 g}{11} \Rightarrow T_y = \frac{-48}{11} m_0 g = -34.9\,kN$$

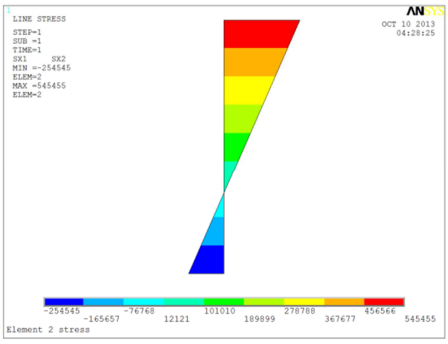
$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{k}_3\mathbf{q}_3 - \mathbf{f}_3^V = \frac{EA_0}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{f_x L^2}{22E} - \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \end{bmatrix}\frac{f_x A_0 L}{22} = \begin{bmatrix} 7 \\ -18 \end{bmatrix}\frac{f_x A_0 L}{11} = \begin{bmatrix} 7 \\ -18 \end{bmatrix}\frac{m_0 g}{11} \Rightarrow T_a = \frac{-18}{11} m_0 g = -13.1\,kN$$

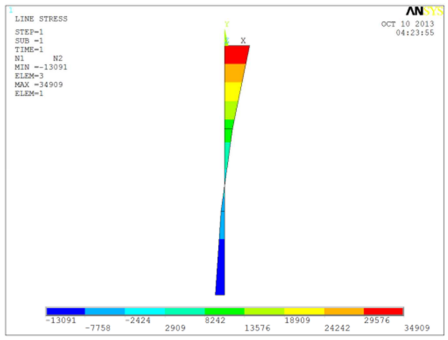
Tarkastus

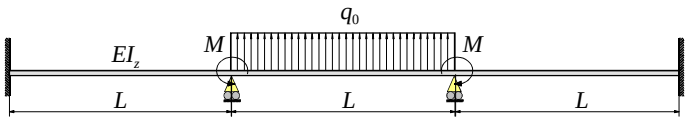
$$-\frac{48}{11} m_0 g - \frac{18}{11} m_0 g = \frac{-66}{11} m_0 g = -6\,m_0 g \;\; OK$$

ANSYS (mallinnettu y-akselin suuntaan käyttäen metrejä, elementti Beam 188)

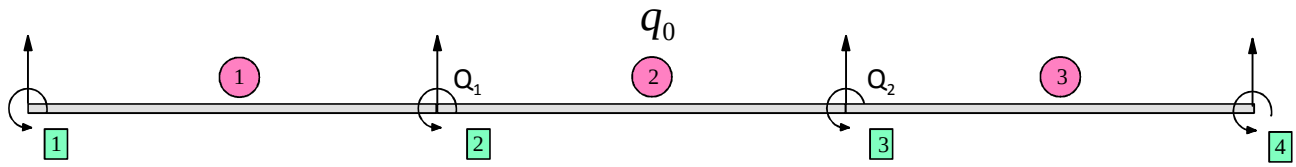
```
***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

  NODE       UY
     1    0.0000
     2 -0.76364E-04
     3 -0.90909E-04
     4    0.0000
```







2. Piirrä kuvan kannattimen taivutusmomenttikuvio ja määritä itseisarvoltaan suurin taivutusmomentin arvo sekä laske tukireaktiot. Palkkien taivutus-jäykkyys on EI_z, viivakuorman q_0 suuruus on F/L ja pistemomenttien M suuruus on FL.



Elementti 1

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EI_z}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

Elementti 2

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EI_z}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} \qquad \mathbf{f}_2^p = \begin{bmatrix} F/2 \\ FL/12 \\ F/2 \\ -FL/12 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{array}$$

Elementti 3

$$\mathbf{k}_3 = \frac{EI_z}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

Koko rakenteen laskentamallin jäykkyysmatriisi saadaan sijoittelusummamalla elementtien jäykkyysmatriisit

$$\mathbf{K} = \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 8L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 8L^2 \end{bmatrix} = \frac{2EI_z}{L}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Jäykkyysmatriisin käänteismatriisi

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{L}{30EI_z}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Koska elementillä 2 on kenttäkuormitus, niin siitä aiheutuu pistemomenttien lisäksi koko rakenteen laskentamallin kuormitusvektoriin **F** termejä

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} M \\ -M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} FL/12 \\ -FL/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FL \\ -FL \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} FL/12 \\ -FL/12 \end{bmatrix} = \frac{13FL}{12}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Lasketaan globaali siirtymävektori **Q**

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} = \frac{L}{30EI_z}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\frac{13FL}{12} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}\frac{13FL^2}{30 \cdot 12EI_z} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\frac{13FL^2}{72EI_z}$$

Elementti 1

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{k}_1\mathbf{q}_1 = \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{13FL^2}{72EI_z} = \begin{bmatrix} 6L \\ 2L^2 \\ -6L \\ 4L^2 \end{bmatrix}\frac{13F}{72L} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 39F \\ 13FL \\ -39F \\ 26FL \end{bmatrix}$$

Elementti 2

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{k}_2\mathbf{q}_2 - \mathbf{f}_2^P = \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\frac{13FL^2}{72EI_z} - \begin{bmatrix} F/2 \\ FL/12 \\ F/2 \\ -FL/12 \end{bmatrix}$$

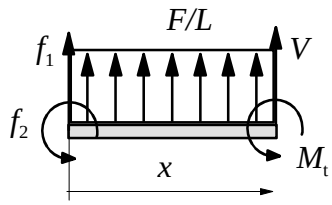
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2L^2 \\ 0 \\ -2L^2 \end{bmatrix}\frac{13F}{72L} - \begin{bmatrix} F/2 \\ FL/12 \\ F/2 \\ -FL/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ L^2 \\ 0 \\ -L^2 \end{bmatrix}\frac{13F}{36L} - \begin{bmatrix} 18F/36 \\ 3FL/36 \\ 18F/36 \\ -3FL/36 \end{bmatrix} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} -18F \\ 10FL \\ -18F \\ -10FL \end{bmatrix}$$

Elementti 3

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{k}_3\mathbf{q}_3 = \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{13FL^2}{72EI_z} = \begin{bmatrix} -6L \\ -4L^2 \\ 6L \\ -2L^2 \end{bmatrix}\frac{13F}{72L} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} -39F \\ -26FL \\ 39F \\ -13FL \end{bmatrix}$$

Taivutusmomenttikuvio

$$\circlearrowleft x \qquad f_2 - f_1 x - F\frac{x^2}{2L} + M_t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_t = -f_2 + f_1 x + F\frac{x^2}{2L}$$

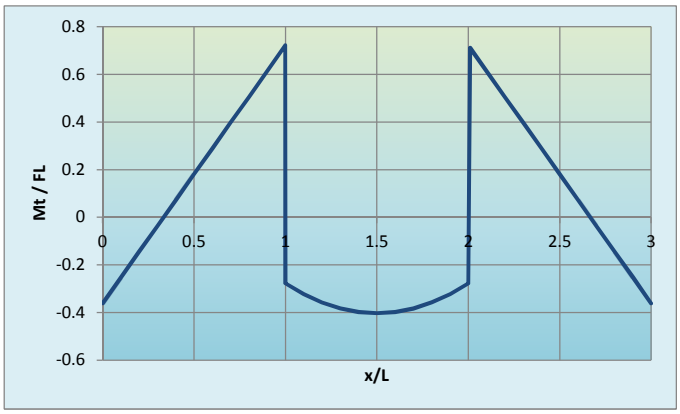


Elementin 2 momentin ääriarvo

$$M_{t,x} = f_1 + \frac{F}{L}x = 0 \qquad \Rightarrow x = -\frac{f_1 L}{F} = \frac{L}{2}$$

$$M_t(L/2) = -\frac{10}{36}FL - \frac{9}{36}FL + F\frac{L^2}{8L} = -\frac{38}{72}FL + \frac{9}{72}FL = -\frac{29}{72}FL$$

Tukireaktiot



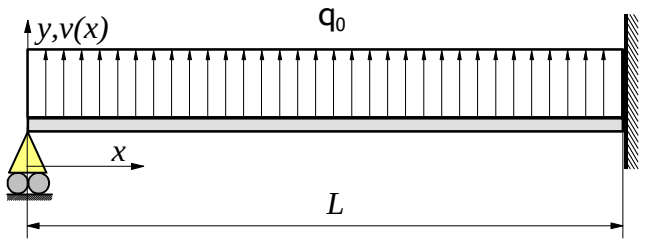
Solmu1: T1y = 39/36 F, M1z = 13/36 FL
Solmu2: T2y = -39/36 F -18/36 F = -57/36 F
Solmu3: T3y = -18/36 F -39/36 F = -57/36 F
Solmu4: T4y = 39/36 F, M4z = -13/36 FL

$$\sum F_y = \frac{F}{36}(39 - 57 - 57 + 39) + F = 0 \quad OK$$

momentti solmun 4 ympäri

$$\sum M_4 = \frac{F}{36}(-39\cdot 3L + 57\cdot 2L + 57\cdot L + 13L - 13L) + M - M - F\cdot 1.5L = 0 \qquad OK$$

Suurin taivutusmomentti on keskitukien kohdalla ennen pistemomenttia: Mt = 26/36 FL



3. Määritä kuvan palkin siirtymäfunktion v(x) likiarvo potentiaalienergian minimin periaatteella. Määritä myös taipuman maksimiarvo ja kohta, jossa se esiintyy. Palkin taivutusjäykkyys on $E\,I_z$. Käytä kinemaattisesti käypää yritettä, jonka valitset polynomeista

$$p(x)=\alpha_0+\alpha_1\left(\frac{x}{L}\right)+\alpha_2\left(\frac{x}{L}\right)^2+\alpha_3\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

Oleelliset reunaehdot

$$\begin{cases}\tilde{v}(0)=0\Rightarrow\alpha_0=0\\ \tilde{v}(L)=0\Rightarrow\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\Rightarrow\alpha_1=-\alpha_2-\alpha_3\\ \tilde{v}_{,x}(L)=0\Rightarrow\dfrac{\alpha_1}{L}+\dfrac{2\alpha_2}{L}+\dfrac{3\alpha_3}{L}=0\Rightarrow-\alpha_2-\alpha_3+2\alpha_2+3\alpha_3=0\Rightarrow\alpha_2=-2\alpha_3\Rightarrow\alpha_1=\alpha_3\end{cases}$$

siis

$$\tilde{v}(x)=\alpha_3\left[\frac{x}{L}-2\left(\frac{x}{L}\right)^2+\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]=\frac{\alpha_3}{L^3}\left[L^2x-2Lx^2+x^3\right]$$

$$\tilde{v}_{,x}(x)=\frac{\alpha_3}{L^3}\left[L^2-4Lx+3x^2\right]$$

$$\tilde{v}_{,xx}(x)=\frac{\alpha_3}{L^3}\left[-4L+6x\right]=\frac{2\alpha_3}{L^3}\left[3x-2L\right]$$

$$\tilde{v}_{,xx}^2=\frac{4\alpha_3^2}{L^6}\left[9x^2-12Lx+4L^2\right]$$

Kimmoenergia

$$U_p=\frac{EI_z}{2}\frac{4\alpha_3^2}{L^6}\int_0^L\left[9x^2-12Lx+4L^2\right]dx=\frac{2EI_z}{L^6}\alpha_3^2\left[3x^3-6Lx^2+4L^2x\right]_0^L=\frac{2EI_z}{L^3}\alpha_3^2$$

Ulkoisen voiman potentiaali

$$WP=-\int_0^L q_0\,\tilde{v}(x)\,dx=-q_0\frac{\alpha_3}{L^3}\int_0^L\left[L^2x-2Lx^2+x^3\right]dx=-q_0\frac{\alpha_3}{L^3}\left[\frac{L^2x^2}{2}-\frac{2Lx^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_0^L$$

$$=-q_0\frac{\alpha_3}{12L^3}\left[6L^4-8L^4+3L^4\right]=-q_0\frac{\alpha_3L}{12}$$

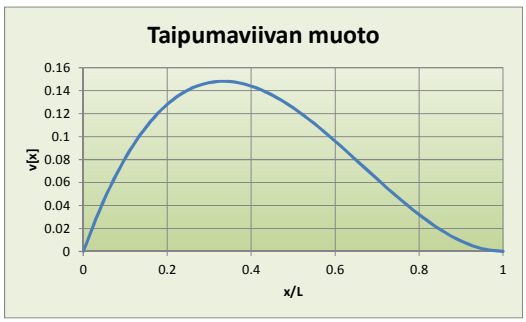
Pot. energian minimi

$$\Pi=U+WP\rightarrow\min\Rightarrow\frac{\partial U}{\partial\alpha_3}=-\frac{\partial WP}{\partial\alpha_3}\Rightarrow\frac{4EI_z}{L^3}\alpha_3=\frac{q_0L}{12}\Rightarrow\alpha_3=\frac{q_0L^4}{48EI_z}$$

$$\tilde{v}(x)=\frac{q_0L}{48EI_z}\left[L^2x-2Lx^2+x^3\right]$$

taipuman maksimikohta

$$\tilde{v}_{,x}(x)=\frac{\alpha_3}{L^3}\left[L^2-4Lx+3x^2\right]=0\Rightarrow3x^2-4Lx+L^2=0\Rightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{4L\pm\sqrt{16L^2-12L^2}}{6}=\frac{4L\pm2L}{6}\Rightarrow x_{\max}=\frac{L}{3}$$

$$\tilde{v}(L/3)=\frac{q_0L}{48EI_z}\left[\frac{L^3}{3}-\frac{2L^3}{9}+\frac{L^3}{27}\right]=\frac{q_0L}{48EI_z}\left[\frac{9L^3}{27}-\frac{6L^3}{27}+\frac{L^3}{27}\right]=\frac{q_0L^4}{324EI_z}$$