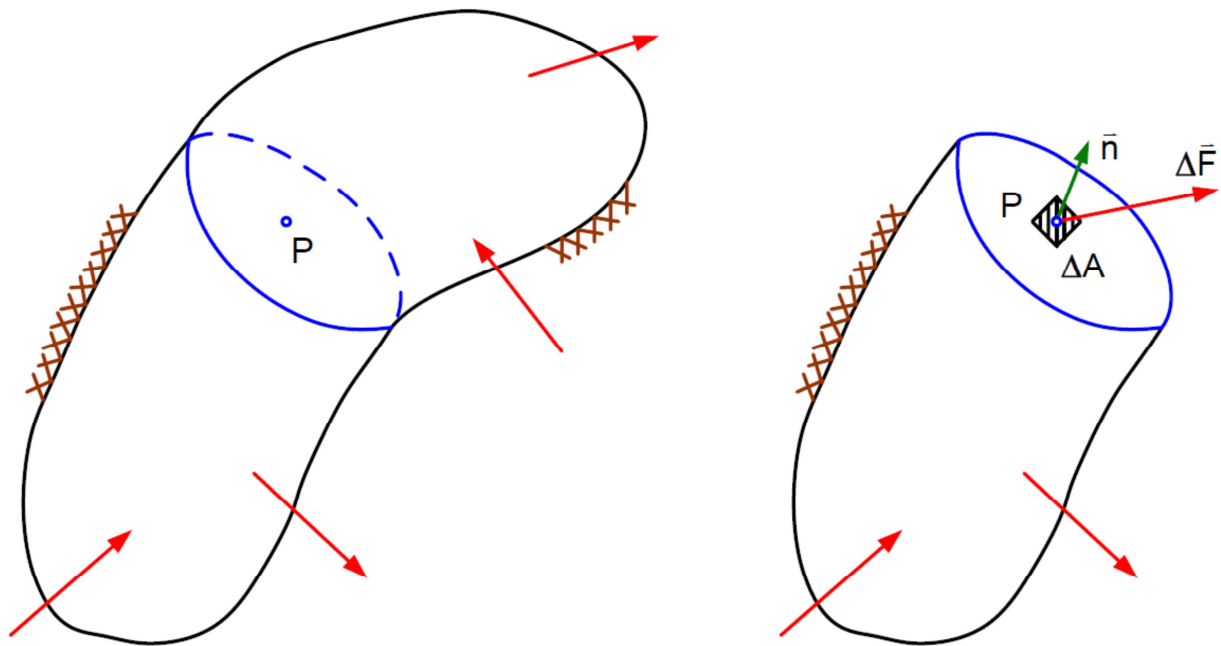


Jännitystila

Tarkastellaan kuvan mukaista mielivaltaista kolmiulotteista kappaletta, jota kuormitetaan ja tuetaan siten, että se on tasapainossa. Kappaleen kuormitus muodostuu sen pintaan kohdistuvista voimajakautumista, kuten painevoimista ja kappaleen kaikkiin materiaali pisteisiin vaikuttavista tilavuusvoimista, kuten painovoima. Kuormituksista johtuen kappaleen pisteisiin syntyy rasituksia. Kappaleen mielivaltaiseen pisteeseen P kohdistuvia rasituksia voidaan tutkia kuvittelemalla kappale jaetuksi pisteen P kautta kulkevalla tasolla kahteen osaan. Valitun leikkauksen määrittelee sen normaalin suuntainen ykkösvektori $\mathbf{n}$.



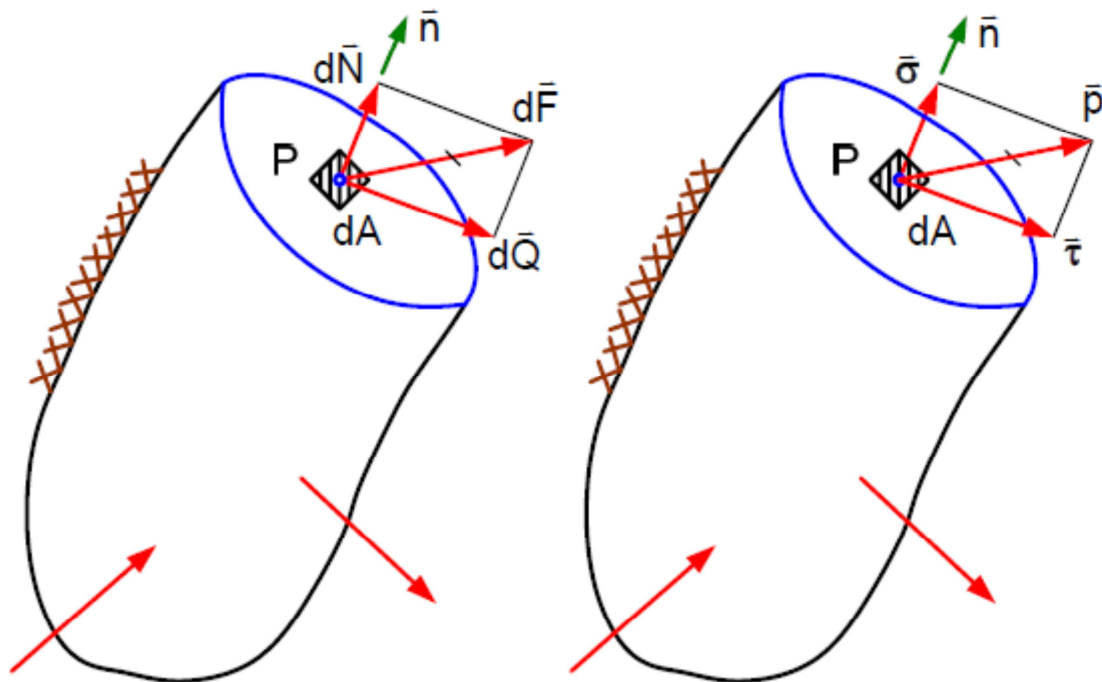
Kuva 1. Jännitysvektorin määrittely

Pisteen P sisältävään pintaelementtiin ΔA kohdistuvien sisäisten voimien resultantti on $\Delta \mathbf{F}$. Pisteeseen P liittyvän pintaelementin ΔA , jonka normaalin suunta on $\mathbf{n}$, jännitysvektori $\mathbf{p}$ on raja-arvo

$$\mathbf{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{F}}{dA} \quad (1)$$

Kaavan raja-arvossa oletetaan, että elementin ΔA pientyessä piste P pysyy sen sisällä ja resultantin $\Delta \mathbf{F}$ vaikutuspiste lähestyy rajatta pistettä P. Kun aineelle oletetaan kontinuumimalli (jatkuva aine), raja-arvo on olemassa. Jännitysvektorin $\mathbf{p}$ lauseke riippuu valitusta leikkauksesta eli vektorista $\mathbf{n}$.

Kappaleen pisteen P jännitystila tarkoittaa kaikkien sen kautta asetettujen pintaelementtien jännitysvektorien muodostamaa joukkoa. Kappaleen jännitystilakenttä muodostuu sen kaikkien pisteiden jännitystiloista.



Kuva 2. Jännitysvektorin komponentit

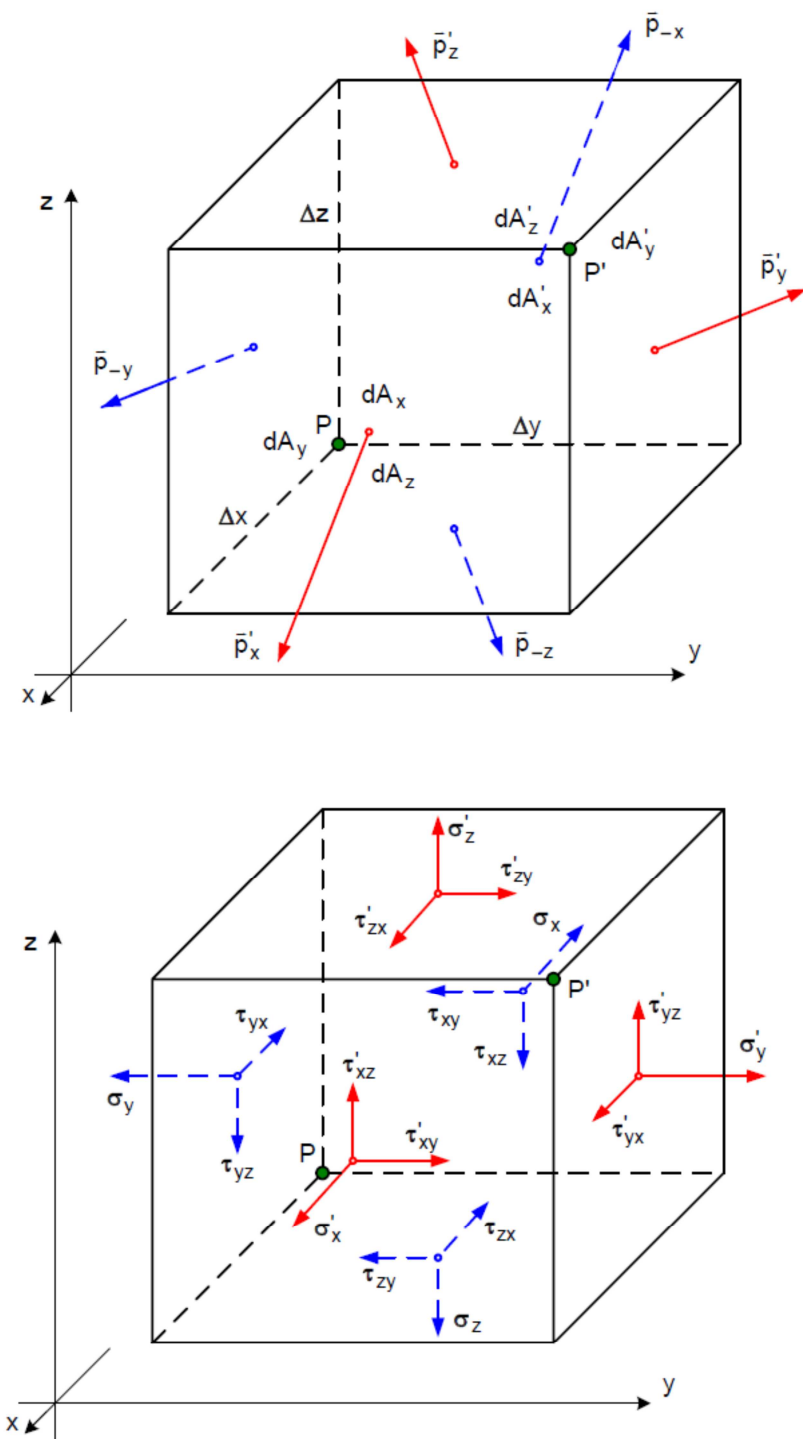
Kuvassa 2 on esitetty differentiaalelementtiin dA kohdistuvan voimavektorin $d\mathbf{F}$ suorakulmaiset komponentit $d\mathbf{N}$ ja $d\mathbf{Q}$. $d\mathbf{N}$ on normaalin $\mathbf{n}$ suuntainen ja sitä sanotaan normaalivoimadifferentiaaliksi. $d\mathbf{Q}$ on pintaelementin dA suuntainen ja on nimeltään leikkausvoimadifferentiaali. Voidaan siis kirjoittaa

$$d\mathbf{F} = d\mathbf{N} + d\mathbf{Q} \quad (2)$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (1) saadaan

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{N}}{dA} + \frac{d\mathbf{Q}}{dA} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau} \quad (3)$$

jossa vektoria $\boldsymbol{\sigma}$ sanotaan normaalijännitysvektoriksi ja vektoria $\boldsymbol{\tau}$ leikkausjännitysvektoriksi. Kuvassa 2 on esitetty jännitysvektorin $\mathbf{p}$ jako komponentteihin $\boldsymbol{\sigma}$ ja $\boldsymbol{\tau}$. Pisteen P jännitystilän tunteminen edellyttää kaikkien siihen liittyvien pintaelementtien jännitysvektorien tuntemista. Näitä pintaelementtejä on ääretön määrä. Myöhemmin tullaan osoittamaan, että riittää tuntea kolmen toisiaan vastaan kohtisuorassa olevan pintaelementin jännitysvektorit. Nämä kolme pintaelementtiä valitaan koordinaattitasoista, jolloin niiden normaalit ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Kuvassa 3 dA_x , dA_y ja dA_z ovat tällaiset pintaelementit normaalien ollessa koordinaattiakselien negatiivisiin suuntiin. Näiden pintaelementtien jännitysvektorit ovat $\mathbf{p}_{-x}$, $\mathbf{p}_{-y}$ ja $\mathbf{p}_{-z}$. Ne voidaan jakaa koordinaattiakselien suuntaisiksi komponenteiksi, jolloin kuhunkin pintaelementtiin tulee yksi normaalijännitys- ja kaksi leikkausjännityskomponenttia kuvan 3 mukaisesti. Kun koordinaattiakselien positiivisiin suuntiin olevia ykkösvektoreita merkitään $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$, saadaan pintaelementtien dA_x , dA_y ja dA_z jännitysvektoreiksi kuvan 3 perusteella



Kuva 3. Jännitystilän komponentit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_{-x} &= -\sigma_x \mathbf{i} - \tau_{xy} \mathbf{j} - \tau_{xz} \mathbf{k} \\
 \mathbf{p}_{-y} &= -\tau_{yx} \mathbf{i} - \sigma_y \mathbf{j} - \tau_{yz} \mathbf{k} \\
 \mathbf{p}_{-z} &= -\tau_{zx} \mathbf{i} - \tau_{zy} \mathbf{j} - \sigma_z \mathbf{k}
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

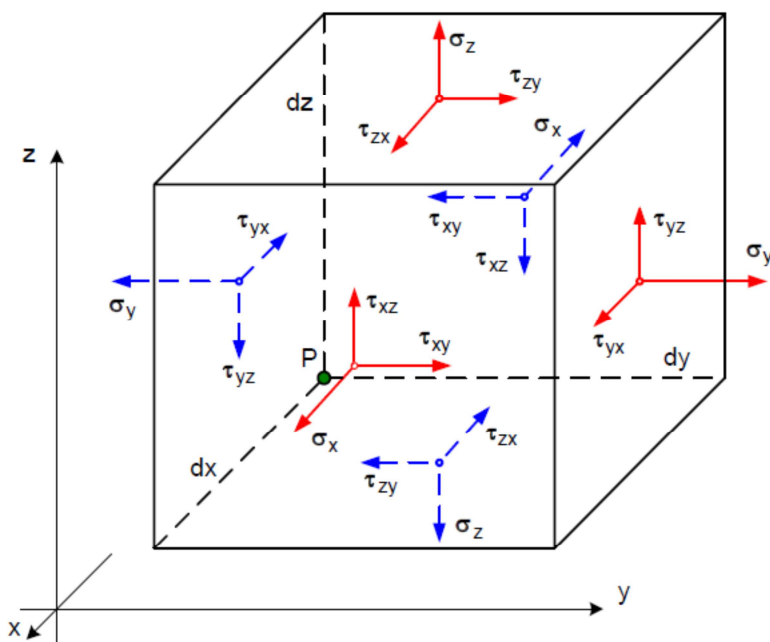
Kaavassa (4) on käytetty merkintätapaa, jossa ensimmäinen alaindeksi ilmaisee pintaelementin normaalin suunnan ja leikkausjännityskomponenteissa toinen alaindeksi ilmaisee jännityskomponentin suunnan.

Pistettä P mielivaltaisen lähellä olevan pisteen P' jännitystila voidaan hallita käyttämällä kuvan 3 mukaisia pintaelementtejä dA'_x , dA'_y ja dA'_z , joiden normaalit ovat koordinaattiakselien positiivisiin suuntiin. Näiden pintaelementtien jännitysvektorit ovat kuvan 3 mukaan

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_x &= -\sigma'_x \mathbf{i} - \tau'_{xy} \mathbf{j} - \tau'_{xz} \mathbf{k} \\ \mathbf{p}'_y &= -\tau'_{yx} \mathbf{i} - \sigma'_y \mathbf{j} - \tau'_{yz} \mathbf{k} \\ \mathbf{p}'_z &= -\tau'_{zx} \mathbf{i} - \tau'_{zy} \mathbf{j} - \sigma'_z \mathbf{k} \end{aligned} \quad (5)$$

Kun piste P' lähestyy pistettä P, voiman ja vastavoiman periaatteesta seuraa, että

$$\mathbf{p}'_x \rightarrow \mathbf{p}_x = \mathbf{p}_{-x}, \mathbf{p}'_y \rightarrow \mathbf{p}_y = \mathbf{p}_{-y}, \mathbf{p}'_z \rightarrow \mathbf{p}_z = \mathbf{p}_{-z}, \text{ ts. } \sigma'_x \rightarrow \sigma_x, \tau'_{xy} \rightarrow \tau_{xy}, \text{ jne.}$$



Kuva 4. Jännityselementti

Pisteen P jännitystilan havainnollistamiseen voidaan käyttää kuvan 4 mukaista differentiaalisuuntais-särmiötä, jonka sivujen pituudet ajatellaan äärettömän pieniksi. Tällöin särmiön vastakkaisten sivujen vastinjännityskomponentit ovat yhtä suuria ja vastakkaissuuntaisia. Pisteen P kautta kulkevia tahoja sanotaan negatiivisiksi tahoiksi ja muita positiivisiksi tahoiksi. Nimitykset johtuvat normaalien suunnista. Itse särmiötä sanotaan jännityselementiksi.

Kuvasta 4 ilmenee myös jännityskomponenttien merkkisopimus. Positiivisen tahon jännityskomponentti on positiivinen, jos se on koordinaattiakselin positiiviseen suuntaan, mutta negatiivisen tahon jännityskomponentti on positiivinen, jos se on koordinaattiakselin negatiiviseen suuntaan.

Pisteen jännitystila on tunnettu, kun tunnetaan sitä vastaavan jännityselementin positiivisten tahojen jännityskomponentit. Nämä voidaan järjestää kolmiriviseksi neliömatriisiksi $\mathbf{S}$, jota sanotaan jännitysmatriisiksi. Jännitysmatriisin kukin vaakarivi sisältää yhden tahon jännityskomponentit ja sen lauseke on

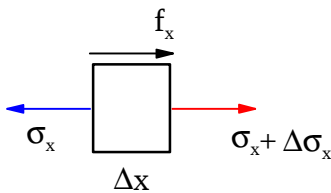
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (6)$$

Jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt

Yleensä kuormitetun kappaleen jännitystila on erilainen sen eri pisteissä. Näin oletettiin kuvassa 3 pisteille P ja P'. Siirryttäessä kappaleen pisteestä sen lähinaapuripisteeseen ei jännitystilan vaihtelu voi olla täysin mielivaltaista, vaan sen on tapahduttava statiikan sääntöjen mukaisesti. Tästä seuraa, että jännityskomponenttien on toteutettava kappaleen pisteissä tietyt osittaisdifferentiaaliyhtälöt, joita sanotaan jännityskomponenttien tasapainoyhtälöiksi.

Aksiaalinen jännitystila

Johdetaan tasapainoyhtälöt ensin aksiaalisen jännitystilan tapauksessa, jolloin vain x-akselin suuntainen jännitys- ja tilavuusvoimakomponentti on nollasta poikkeava. Tällöin voidaan tarkastella kuvan 5 mukaista kappaleen osaa, jonka poikkileikkaus on A ja pituus on Δx .



Kuva 5. Tasapainoyhtälö aksiaalisessa jännitystilassa

Voimatasapaino x-suunnassa antaa

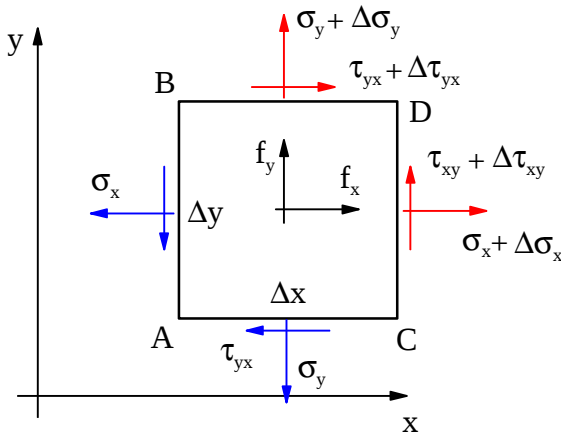
$$-\sigma_x A + \sigma_x A + \sigma_{x,x} \Delta x A + f_x A \Delta x = 0 \quad (7)$$

josta sieventämällä ja jakamalla pituudella Δx saadaan voimatasapainodifferentiaaliyhtälö

$$\sigma_{x,x} + f_x = 0 \quad (8)$$

Tasojännitystila

Johdetaan tasapainoyhtälöt sitten tasojännitystilan tapauksessa, jolloin vain xy-tason suuntaiset jännitys- ja tilavuusvoimakomponentit ovat nollasta poikkeavia ja lisäksi z-koordinaatista riippumattomia. Tällöin voidaan tarkastella kuvan 6 mukaista kappaleen osaa, jonka sivujen pituudet ovat Δx ja Δy sekä paksuus s . Koska Δx ja Δy oletetaan hyvin pieniksi (ja lopulta $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$), jännityskomponentit voidaan olettaa vakioiksi kullakin kuvan 6 alkion sivulla. Näitä edustavat sivujen keskipisteisiin piirretyt jännityskomponentit.



Kuva 6. Tasapainoyhtälöt tasotapauksessa

Siirryttäessä sivulta AB sivulle CD saa komponentti σ_x lisäyksen $\Delta\sigma_x$, jota approksimoidaan differentiaalilla eli $\Delta\sigma_x = \sigma_{x,x} \Delta x$, jossa pilkun jälkeen merkitty alaindeksi tarkoittaa derivointia kyseisen suureen suhteen. Sivun CD x-suuntainen normaalijännitys on siis $\sigma_x + \sigma_{x,x} \Delta x$. Vastaavasti saadaan kuvan 6 muut jännityskomponentit. Elementtiin vaikuttavat lisäksi x- ja y-akselin suuntaiset tilavuusvoimat f_x ja f_y . Tilavuusvoimat voivat aiheutua esimerkiksi painovoimasta tai kappaleen pyörimisestä. Jos painovoima vaikuttaa y-akselin negatiiviseen suuntaan, on $f_x = 0$ ja $f_y = -pg$, jossa p on kappaleen materiaalin tiheys. Koska tarkasteltava kappale on tasapainossa, on myös sen jokainen osa tasapainossa. Tämä pätee myös kuvan 5 alkioon. Tasapaino tasossa merkitsee sitä, että voimatasapaino toteutuu x- ja y-suunnissa ja pisteen A suhteen toteutuu momenttitasapaino. Momenttitasapainoyhtälö pisteen A suhteen on

$$\begin{aligned} & \sigma_x \Delta y \frac{\Delta y}{2} \cdot s - (\sigma_x + \sigma_{x,x} \Delta x) \Delta y \frac{\Delta y}{2} \cdot s + (\tau_{xy} + \tau_{xy,x} \Delta x) \Delta y \Delta x \cdot s - \sigma_y \Delta x \frac{\Delta x}{2} \cdot s + \\ & (\sigma_y + \sigma_{y,y} \Delta y) \Delta x \frac{\Delta x}{2} \cdot s - (\tau_{yx} + \tau_{yx,y} \Delta y) \Delta x \Delta y \cdot s - f_x \Delta x \Delta y \frac{\Delta y}{2} \cdot s + f_y \Delta x \Delta y \frac{\Delta x}{2} \cdot s = 0 \\ \Rightarrow & -\sigma_{x,x} \frac{\Delta y}{2} + \tau_{xy} + \tau_{xy,x} \Delta x + \sigma_{y,y} \frac{\Delta x}{2} - \tau_{yx} + \tau_{yx,y} \Delta y - f_x \frac{\Delta y}{2} + f_y \frac{\Delta x}{2} = 0 \end{aligned}$$

Kun $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ saadaan tulokseksi leikkausjännitysten parittainen yhtäsuuruus eli

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (9)$$

Voimatasapaino x-suunnassa antaa

$$-\sigma_x \Delta y \cdot s + (\sigma_x + \sigma_{x,x} \Delta x) \Delta y \cdot s - \tau_{yx} \Delta x + (\tau_{yx} + \tau_{yx,y} \Delta y) \Delta x \cdot s + f_x \Delta x \Delta y \cdot s = 0$$

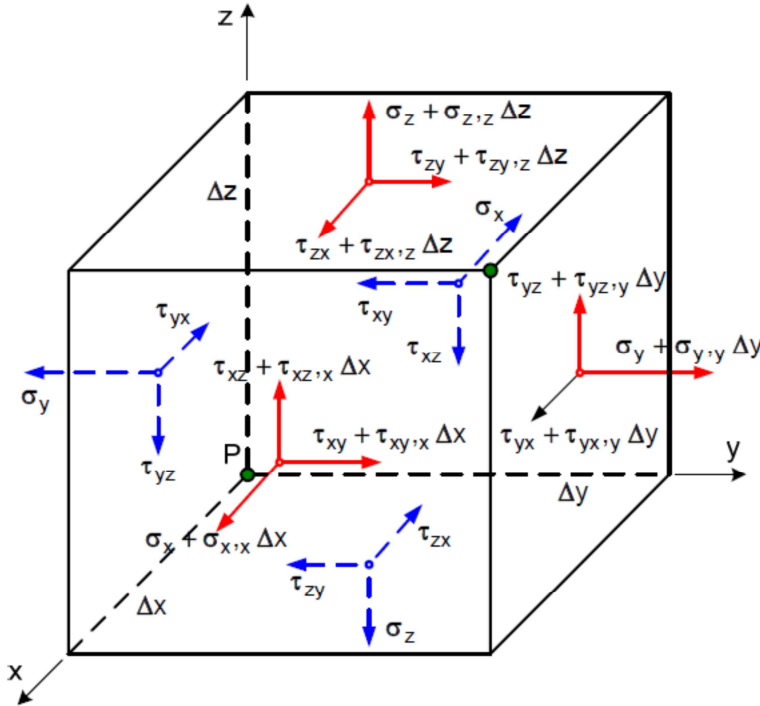
josta seuraa yhtälön (9) avulla kaavan (10) ensimmäinen yhtälö. Voimatasapainoyhtälöstä y-suunnassa saadaan vastaavalla tavalla kaavan (10) toinen yhtälö.

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + f_x = 0 \quad \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + f_y = 0 \quad (10)$$

Yhtälöt (10) ovat jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt tasojännitystilassa.

Yleinen jännitystila

Yleisessä kolmiulotteisessa tapauksessa tarkastellaan kuvan 7 mukaista suorakulmaisen särmiön muotoista materiaaliälykiötä, johon vaikuttavat tilavuusvoimat x- ja y- ja z-suunnissa ovat f_x , f_y ja f_z .



Kuva 7. Tasapainoyhtälöt yleisessä tapauksessa

Momenttiyhtälöistä x-, y- ja z-akselien suhteen seuraavat leikkausjännitysten parittaiset yhtäsuuruudet

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (11)$$

Jännitysmatriisi on symmetrinen ja sille voidaan kirjoittaa lauseke

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (12)$$

Voimatasapainoista x-, y- ja z-akselien suunnissa saadaan jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt

$$\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} + f_x &= 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} + f_y &= 0 \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + f_z &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Kappaleen jännitystilakenttä on siis statiikan kannalta mahdollinen vain, jos se toteuttaa osittais-differentiaaliyhtälöt (13).

Jännityskomponenttien transformointi

Kuten kohdassa 1 esitettiin, riittää pisteen P jännitystilan hallitsemiseen kolmen siihen liittyvän toisiaan vastaan kohtisuoran pintaelementin jännitysvektorien $\mathbf{p}$ tunteminen. Tämä merkitsee jännityselementin positiivisten tahojen yhdeksän jännityskomponentin tuntemista. Kohdassa 2 näytettiin leikkausjännitysten parittainen yhtäsuuruus, joten tarvitaan vain kuusi jännityskomponenttia. Seuraavassa näytetään, miten pisteeseen P liittyvän mielivaltaisen pintaelementin jännityskomponentit voidaan määrittää, kun nämä kuusi jännityskomponenttia tunnetaan.

Tasojännitystila

Tutkitaan aluksi kuvan 8 tasojännitystilaa xy-tasossa. Määritetään jännityskomponentit pintaelementissä BC, jonka normaali $\mathbf{n}$ on x' -akselin suuntaan, kun jännityskomponentit σ_x , σ_y ja τ_{xy} tunnetaan.

Pintaelementin BC ykkösnormaali olkoon

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{n}, x) \\ \cos(\mathbf{n}, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} \quad (14)$$

Elementin BC jännitysvektori on

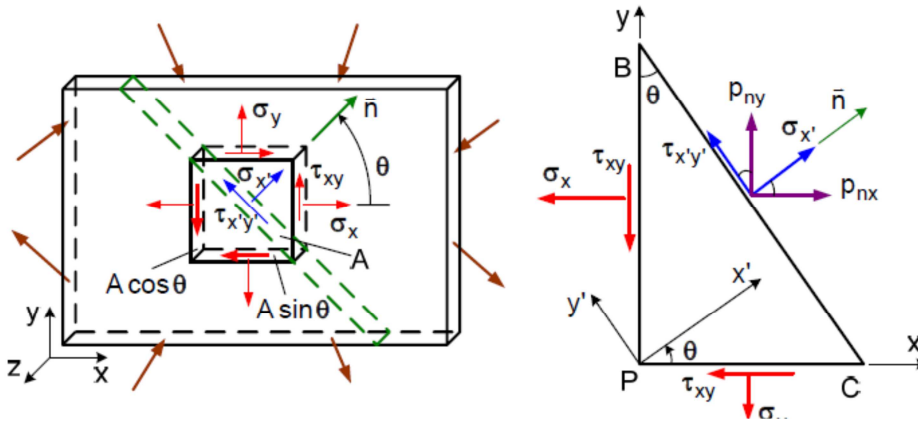
$$\mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Kun pintaelementin BC alaa merkitään A, ovat pintaelementtien PC ja PB alat $A \sin \theta$ ja $A \cos \theta$. Kuvan 8 kolmioelementin tasapainosta x- ja y-suunnissa saadaan

$$\begin{cases} p_{nx} \cdot A - \sigma_x A \cdot \cos \theta - \tau_{xy} A \cdot \sin \theta = 0 \\ p_{ny} \cdot A - \tau_{xy} A \cdot \cos \theta - \sigma_y A \cdot \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (16)$$

joista ratkeaa jännitysvektorin vaaka- ja pystykomponentille lausekkeet

$$\begin{cases} p_{nx} = \sigma_x l + \tau_{xy} m \\ p_{ny} = \tau_{xy} l + \sigma_y m \end{cases} \quad (17)$$



Kuva 8. Jännityskomponenttien transformointi

Kaavojen (15) ja (17) perusteella ykkösvektorin $\mathbf{n}$ suuntaiseksi jännitysvektoriksi saadaan

$$\mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} \sigma_x l + \tau_{xy} m \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m \end{bmatrix} \quad (18)$$

Kaavassa (18) mielivaltaisen suunnan $\mathbf{n}$ jännitysvektori $\mathbf{p}$ on lausuttu jännityskomponenttien σ_x , σ_y ja τ_{xy} sekä vektorin $\mathbf{n}$ suuntakosinien l ja m avulla. Kuvasta 8 saadaan lisäksi pintaelementin BC normaali- ja leikkausjännitys $\sigma_{x'}$ ja $\tau_{x'y'}$

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = p_{nx} l + p_{ny} m \\ \tau_{x'y'} = -p_{nx} m + p_{ny} l \end{cases} \quad (19)$$

Sijoittamalla p_{nx} ja p_{ny} kaavasta (17) kaavaan (19) saadaan tulos

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = \sigma_x l^2 + 2\tau_{xy} lm + \sigma_y m^2 \\ \tau_{x'y'} = -\sigma_x lm + \sigma_y lm + \tau_{xy} (l^2 - m^2) \end{cases} \quad (20)$$

yhtälöt (20) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2 & m^2 & 2lm \\ m^2 & l^2 & -2lm \\ -lm & lm & l^2 - m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (21)$$

jossa $\sigma_{y'}$:n lauseke on saatu sijoittamalla komponentin $\sigma_{x'}$ lausekkeeseen kulman θ paikalle kulma $\theta + \pi/2$. Kaavat (21) ovat tasojännitystilän jännityskomponenttien transformointikaavat, joilla voidaan laskea jännityskomponentit kulman θ kiertyneessä x' y' - koordinaatistossa, kunhan xy -koordinaatiston komponentit tunnetaan.

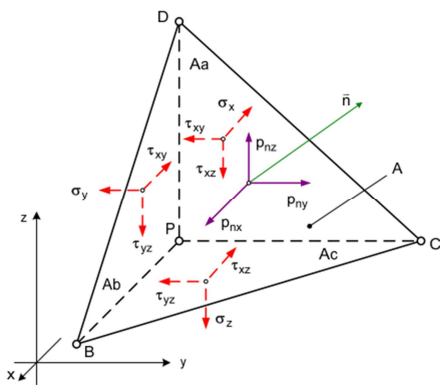
Yleinen jännitystila

Tarkastellaan yleistä kolmiulotteista tapausta. Kuvan 8 kolmioelementin sijasta käytetään kuvan 9 kappaleesta pisteen P kohdalta leikattua tetraedrielementtiä, jolloin tunnetaan sen koordinaattitasojen suuntaisten pintaelementtien PCD, PBD ja PBC jännityskomponentit ja määritetään xyz-koordinaatistoon nähden vinossa asennossa olevan pintaelementin BCD jännitysvektori. Pintaelementin BCD yksikkönormaali on

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (22)$$

missä suuntakosinit $l = \cos(\mathbf{n}, x)$, $m = \cos(\mathbf{n}, y)$, $n = \cos(\mathbf{n}, z)$ sekä

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (23)$$



Kuva 9. Jännityskomponenttien transformointi

Pintaelementin BCD jännitysvektori on komponenttimuodossa

$$\mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Kun elementin BCD alaa merkitään A, ovat pintaelementtien PCD, PBD ja PBC alat vastaavasti Aa, Ab ja Ac. Tetraedrin tasapainoyhtälöistä x-, y- ja z-suunnissa seuraa

$$\begin{cases} p_{nx} \cdot A - \sigma_x \cdot Aa - \tau_{xy} \cdot Ab - \tau_{xz} \cdot Ac \\ p_{ny} \cdot A - \tau_{xy} \cdot Aa - \sigma_y \cdot Ab - \tau_{yz} \cdot Ac \\ p_{nz} \cdot A - \tau_{xz} \cdot Aa - \tau_{yz} \cdot Ab - \sigma_z \cdot Ac \end{cases} \quad (25)$$

joista ratkeaa jännitysvektorin komponentille lausekkeet

$$\begin{cases} p_{nx} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ p_{ny} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ p_{nz} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{cases} \quad (26)$$

Kaavojen (22) ja (26) perusteella saadaan jännitysvektorille $\mathbf{p}_n$ lauseke

$$\mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{bmatrix} \quad (27)$$

joka voidaan edelleen tulkita matriisituloksi

$$\mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (28)$$

tai lyhyesti (12) ja (22)

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \quad (29)$$

jossa $\mathbf{S}$ on tarkastelupisteeseen liittyvä jännitysmatriisi ja $\mathbf{n}$ on tarkasteltavan suunnan normaalin suuntainen ykkösvektori, jonka suunta on materiaalista ulospäin.

Vektorin $\mathbf{p}$ komponentti normaalin $\mathbf{n}$ suuntaan on

$$\sigma_n = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{n} \quad (30)$$

ja tason ABC suuntainen leikkausjännityskomponentti

$$\tau_n = \|\mathbf{p}_n - \sigma_n \mathbf{n}\| \quad (31)$$

Valitsemalla $x'y'z'$ -koordinaatisto siten, että x' -akseli on vektorin $\mathbf{n}$ suuntaan sekä y' - ja z' -akseli ovat pintaelementin BCD määräämässä tasossa, voidaan merkitä $\sigma_{x'} = \sigma_n$. Leikkausjännitykset $\tau_{y'x'}$ ja $\tau_{z'x'}$ saadaan jakamalla τ_n komponentteihin y' - ja z' -akselien suunnissa. Yllä esitetyllä tavalla voidaan laskea muutkin $x'y'z'$ -koordinaatiston jännityskomponentit $\sigma_{y'}$, $\sigma_{z'}$ ja $\tau_{yz'}$. Ne voidaan kuitenkin laskea systemaattisemmin, kun käytetään apuna koordinaatiston kiertomatriisia

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & \cos(x', z) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & \cos(y', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', y) & \cos(z', z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (32)$$

voidaan osoittaa, että

$$\mathbf{S}' = \mathbf{L} \mathbf{S} \mathbf{L}^T \quad (33)$$

jolloin $\mathbf{S}'$ on $x'y'z'$ -koordinaatiston jännitysmatriisi.

Pääjännitykset ja -suunnat

Edellä johdettiin mielivaltaisen suunnan normaali-jännitykselle lausekkeet (21) tasojännitystilalle ja (30) yleiselle jännitystilalle. Näiden avulla voidaan tutkia normaali-jännityksen ääriarvoja eli pääjännityksiä ja niiden esiintymissuuntia eli pääsuuntia. Osoittautuu lisäksi, että pääsuunnissa leikkausjännitys on nolla.

Tasojännitystila

Käyttämällä kaavoja

$$l^2 = \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$lm = \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$m^2 = \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

voidaan yhtälöt (18) kirjoittaa muotoon

$$\sigma_{x'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Normaali-jännityksen ääriarvoehdoksi tulee kaavasta (21)

$$\sigma_{x',\theta} = 0 \Rightarrow -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \quad (34)$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (35)$$

koska $\tan 2\theta = \tan(2\theta + \pi/2)$ tulee kaavasta (35) kaksi ääriarvokohtaa

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \text{ja} \quad \theta_2 = \theta_1 + \pi/2 \quad (36)$$

Normaalijännityksellä on kaksi ääriarvoa, jotka esiintyvät toisiaan vastaan kohtisuorissa suunnissa. Näitä suuntia sanotaan pääsuunniksi. Kaavoista (21) ja (34) seuraa, että leikkausjännitys $\tau_{x'y'}$ on pääsuunnissa nolla. Pääsuuntien normaalijännitykset ovat pääjännitykset, jotka saadaan kaavasta (21) sijoittamalla siihen tulos (35). Kaavasta (21) seuraa

$$\sigma_{x'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta \left(1 + \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tan 2\theta \right) \quad (37)$$

josta välivaiheiden jälkeen

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (38)$$

Pääjännitys σ_1 esiintyy siinä kaavasta (36) saatavassa suunnassa θ , joka toteuttaa ehdon $\tau_{xy} \sin 2\theta \geq 0$.

Kaavasta (19) voidaan vastaavalla tavalla löytää leikkausjännityksen $\tau_{y'x'}$ ääriarvot τ_1 ja τ_2 sekä niiden esiintymissuunnat. Tulokseksi saadaan

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} & \text{kun } \theta &= \theta_1 - \pi/4 \\ \tau_2 &= -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} & \text{kun } \theta &= \theta_1 + \pi/4 \end{aligned} \quad (39)$$

Yleinen jännitystila

Tutkitaan sitten yleisen kolmiulotteisen tapauksen n -akselin suuntaista normaalijännitystä σ_n , joka on yhtälön (30) mukaan

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy} lm + \tau_{yz} mn + \tau_{xz} ln) \quad (40)$$

Tavoitteena on tämän jännityksen ääriarvojen löytäminen, kun tutkitaan sen vaihtelua suuntakosinien l , m ja n funktiona. Ääriarvoja etsittäessä on otettava huomioon, että l , m ja n eivät ole riippumattomia muuttujia, vaan niitä sitoo yhtälö (23). Olkoot seuraavassa l ja m riippumattomat muuttujat, jolloin ääriarvoehdoksi tulee

$$\sigma_{n,l} = 0 \text{ ja } \sigma_{n,m} = 0 \quad (41)$$

Edellä olevasta tulevat vaatimukset

$$\begin{cases} 2\sigma_x l + 2\sigma_z n n_{,l} + 2(\tau_{xy} m + \tau_{yz} m n_{,l} + \tau_{xz} n + \tau_{xz} l n_{,l}) = 0 \\ 2\sigma_y m + 2\sigma_z n n_{,m} + 2(\tau_{xy} l + \tau_{yz} n + \tau_{yz} m n_{,m} + \tau_{xz} l n_{,m}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (42)$$

$$\begin{cases} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n + (\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n) n_{,l} = 0 \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n + (\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n) n_{,m} = 0 \end{cases} \quad (43)$$

Yhtälön (26) perusteella tästä seuraa

$$\begin{cases} p_{nx} + p_{nz} n_{,l} = 0 \\ p_{ny} + p_{nz} n_{,m} = 0 \end{cases} \quad (44)$$

Koska $n^2 = 1 - l^2 - m^2 \Rightarrow 2n n_{,l} = -2l \Rightarrow n_{,l} = -l / n$. Samalla tavalla $n_{,m} = -m / n$, joten kaavasta (44) tulevat ehdot

$$\frac{p_{nx}}{l} = \frac{p_{ny}}{m} = \frac{p_{nz}}{n} \quad (45)$$

joka merkitsee sitä, että pääjännitysvektori $\mathbf{p}$ on normaalin $\mathbf{n}$ suuntainen ja siis pääsuunnan leikkausjännitys on nolla. Näytetään, että jokaisella jännitystilalla on ainakin kolme pääsuuntaa. Merkitään pääjännitystä σ_p , jolloin pääsuunnalle pätee

$$\mathbf{p}_n = \sigma_p \mathbf{n} \quad (46)$$

joka yhtälön (28) mukaan voidaan lausua

$$\mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{bmatrix} = \sigma_p \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (47)$$

ja edelleen

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Yhtälöt (48) ovat suuntakosinien l, m ja n homogeeninen yhtälöryhmä. Koska $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, ei triviaaliratkaisu $l = m = n = 0$ kelpaa. Ei-triviaaleja ratkaisuja on olemassa vain, jos ryhmän (48) kerroindeterminantti on nolla eli

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_p \end{vmatrix} = 0 \quad (49)$$

Kehittämällä determinantti päädytään yhtälöön

$$\sigma_p^3 - I_1 \sigma_p^2 + I_2 \sigma_p - I_3 = 0 \quad (50)$$

jossa on merkitty

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{Tr}(\mathbf{S}) \quad I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2$$

$$I_3 = \det(\mathbf{S}) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (51)$$

Yhtälön (50) juuret σ_1 , σ_2 ja σ_3 ovat pääjännitykset. Kutakin pääjännitystä vastaa yhtälöiden (48) mukaisesti pääsuunta. Kaavasta (49) näkyy, että pääjännitykset ovat jännitysmatriisin $\mathbf{S}$ ominaisarvot. Koska $\mathbf{S}$ on reaalinen ja symmetrinen matriisi, on sillä reaaliset ominaisarvot eli pääjännitykset ovat reaaliset. Ne voivat erityistapauksissa olla keskenään yhtä suuria. Voidaan osoittaa, että symmetrisen matriisin ominaisvektorit ovat ortogonaaliset eli pääsuunnat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Pääjännitykset ovat riippumattomia siitä, minkä koordinaatiston jännityskomponenteista ne on laskettu. Tästä seuraa, että kertoimet I_1 , I_2 ja I_3 eivät riipu käytettävästä koordinaatistosta. Näitä kertoimia sanotaan jännitysmatriisin pääinvariantteiksi.

Kun pääjännitykset on laskettu, saadaan pääsuunnat yhtälöistä (48) ja (23). Jos pääjännitykset ovat eri suuria, vastaa kutakin pääjännitystä yksikäsitteinen pääsuunta. Jos kaksi pääjännitystä on yhtä suuria, saadaan kolmatta pääjännitystä vastaava pääsuunta yksikäsitteisesti määräytyksi ja kaikki tätä vastaan kohtisuorat suunnat ovat myös pääsuuntia. Tätä tapausta sanotaan sylinterimäiseksi jännitystilaksi. Jos kaikki kolme pääjännitystä ovat yhtä suuria, ovat kaikki suunnat pääsuuntia eikä leikkausjännitystä esiinny missään suunnassa. Kyseessä on pallomainen jännitystila.

Kun pääjännitykset σ_1 , σ_2 ja σ_3 järjestetään algebralliseen suuruusjärjestykseen (etumerkki otetaan huomioon), käytetään merkinnöissä roomalaisia alaindeksejä eli σ_I , σ_{II} ja σ_{III} , jolloin σ_I on suurin pääjännitys.

Leikkausjännityksen τ_n ääriarvot ja niiden esiintymissuunnat saadaan vastaavalla tavalla kaavasta (31). Ääriarvoiksi tulee

$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad \tau_2 = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \quad \tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (52)$$

ja ne esiintyvät pääsuuntien puolella välissä. Ääriarvoista suurin esiintyy I- ja III-suunnan puolella välissä ja se on

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \quad (53)$$

Jännityskomponenttien reunaehdot

Tarkastellaan jännityskomponenttien ja kappaleen reunapinnalla vaikuttavien tunnettujen pintavoimien yhteyttä. Kappaleen sisäpisteissä on jännityskomponenttien tasapainoyhtälöiden oltava voimassa, kuten kohdassa 1.2 esitettiin. Näiden yhtälöiden toteuttamisen lisäksi kappaleen jännitystilakentän on oltava reunan pisteissä tasapainossa pintakuormitusten kanssa. Tästä vaatimuksesta seuraavien yhtälöiden johtamiseksi tarkastellaan vielä kuvan 1.8 kappaleesta leikattua tetraedrielementtiä olettaen kuitenkin, että taho BCD yhtyy kappaleen ulkopintaan. Oletetaan lisäksi, että tahon BCD pintavoimavektori $\mathbf{t}$ tunnetaan eli

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad (54)$$

Kuvan 8 tetraedrin tasapainoehdoista koordinaattiakseleiden suunnissa saadaan analogisesti kaavojen (24) kanssa

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (55)$$

Kun tetraedriä pienennetään rajatta niin, että taho BCD pysyy kappaleen ulkopinnalla, tulee piste P kappaleen reunalle ja yhtälöt (53) koskevat näin ollen reunan pisteen jännityskomponentteja. xy-tason suuntaisessa tasojännitystilassa yhtälöt (53) yksinkertaistuvat muotoon

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} \quad (56)$$

Yhtälöt (55) ovat jännityskomponenttien reunaehdot, jotka kappaleen jännitystilakentän on toteutettava niissä kappaleen ulkopinnan pisteissä, joissa vaikuttavia pintavoimia tunnetaan.