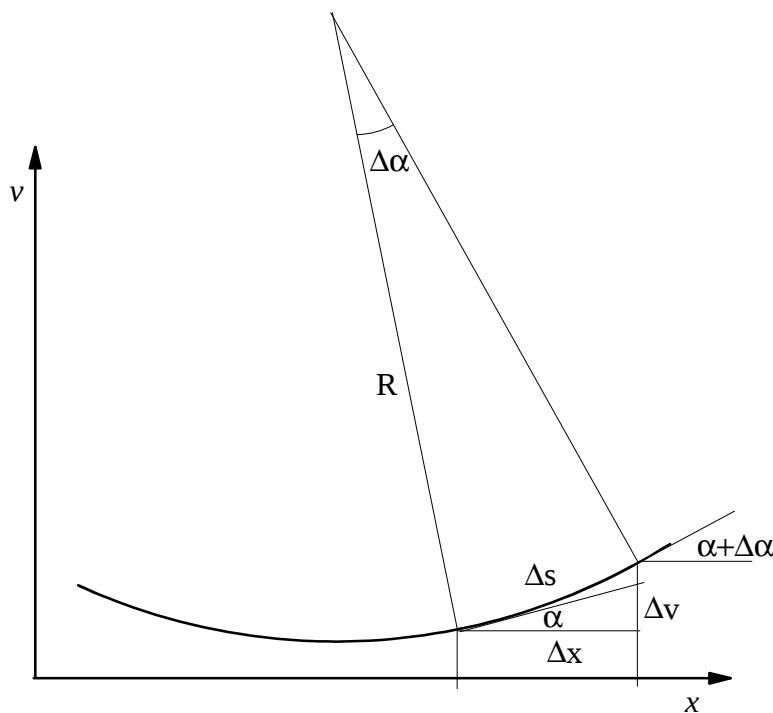


Palkkielementtejä

Tarkastellaan tässä esityksessä vain Euler-Bernoullin palkkiteoriaan perustuvia palkkielementtejä. Tässä palkkiteoriassa oletetaan, että palkin poikkileikkaus säilyy taivutettunakin tasona, joka on kohtisuorassa palkin pituussäikeitä vastaan. Elementti soveltuu sellaisenaan pienille siirtymille ja kiertymille, mutta sitä voidaan soveltaa myös suurille siirtymille ja kiertymille, kunhan vain venymä on pieni. Kerrataan aluksi kaarevuuden käsite.

Kaarevuus



määritellään tasokäyrän kaarevuus raja-arvona

$$\kappa = \frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} \quad (1)$$

kuvasta huomataan, että

$$\tan \alpha = \frac{dv}{dx} \quad (2)$$

josta differentioimalla

$$(1 + \tan^2 \alpha) d\alpha = v_{,xx} dx \quad \Rightarrow$$

$$d\alpha = \frac{v_{,xx}}{1 + v_{,x}^2} dx \quad (3)$$

vastaavasti

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta v^2$$

$$\Delta v \approx v_{,x} \Delta x \quad \Rightarrow$$

$$\Delta s^2 = (1 + v_{,x}^2) \Delta x^2 \quad \Rightarrow$$

$$ds = \sqrt{1 + v_{,x}^2} dx \quad (4)$$

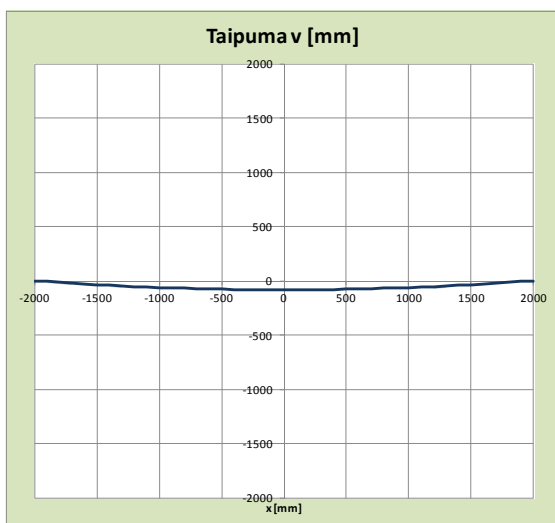
yhdistämällä tulokset saadaan kaarevuuden lausekkeeksi

$$\kappa = \frac{v_{,xx}}{(1 + v_{,x}^2)^{3/2}} \quad (5)$$

Käytettäessä pienten siirtymien ja venymien teoriaa, kuten tällä kurssilla, voidaan kaarevuuden lauseke korvata sen likilausekkeella

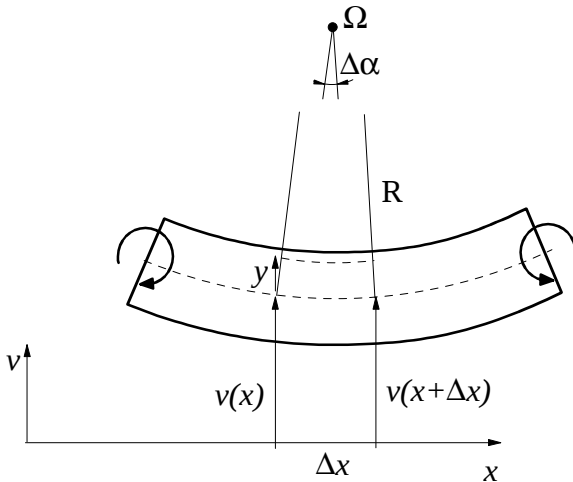
$$\kappa = v_{,xx} \quad (6)$$

Alla olevassa kuvassa on vielä havainnollistettu millainen ympyränkaari on kyseessä, jossa kaarevuuden likilauseke tuottaa 1%:n virheen kaarevuudelle.



Kuva 1. Palkin kaarevuus

Venymä



Kuva 2. Palkin kaareutuminen taivutusrasituksesta johtuen

Puhtaassa taivutuksessa palkin kuormittamattomana suora kimmoviiva (kuvassa katkoviiva) muuttuu R-säteiseksi ympyränkaareksi säilyttäen alkuperäisen pituutensa. Kuvassa 2 kimmoviivalta korkeudella y olevien säikeiden alkuperäinen pituus on siis $R \Delta\alpha$. Palkin taivutuksen johdosta säikeiden pituus kuormitettuna on $(R - y)\Delta\alpha$, joten säikeiden venymä on

$$\varepsilon = \frac{(R - y)\Delta\alpha - R\Delta\alpha}{R\Delta\alpha} = -\frac{y}{R} \approx -y v_{,xx} \quad (7)$$

Kimmoenergia

Jos palkin materiaali on lineaarisesti kimmoista, niin sen kimmoenergian lauseke saadaan yllä olevaa venymän lauseketta käyttäen

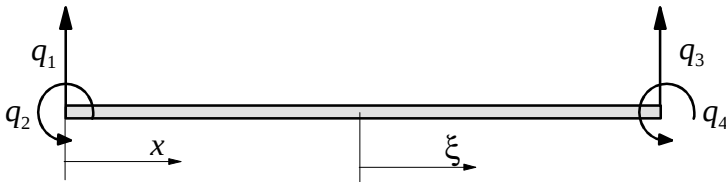
$$U = \int_V U_0 dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_x^2 dV = \frac{1}{2} \int_V E y^2 v_{,xx}^2 dV \quad (8)$$

Olettamalla kimmokerroin vakioksi poikkipinnan alueella saadaan kimmoenergia vielä muotoon

$$U = \frac{1}{2} \int_L E v_{,xx}^2 \int_A y^2 dA dx = \frac{1}{2} \int_L EI_z v_{,xx}^2 dx \quad (9)$$

Kahden solmuvapausasteen palkkielementti

Olettamalla palkin neutraaliakselin korkeudella olevat säikeet venymättömiksi, voidaan tasopalkkielementin solmulle valita kaksi vapausastetta, jotka ovat solmun siirtymä palkin paikalliskoordinaatiston y -akselin suunnassa sekä palkin kiertymä z -akselin ympäri. Koska käytetään pienten siirtymien teoriaa, niin palkin kiertymä α ja taipuman derivaatta $v_{,x}$ voidaan samaistaa.



Kuva 3. Kahden solmuvapausasteen palkkielementti

Käytetään elementin alueella lisäksi niin sanottua emokoordinaatistoa, jossa emokoordinaatti ξ saa arvoja välillä $[-1, 1]$. Tällöin elementin pisteen ξ vastaava x -koordinaatti, jonka mittauksen origo on solmussa 1, saadaan

$$x(\xi) = N_2^x(\xi)l_e \quad (10)$$

missä interpolaatiofunktio x -akselin suunnassa on

$$N_2^x(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (11)$$

Lähdetään sitten etsimään interpolaatiofunktioita H_i emokoordinaatin ξ avulla palkin taipumafunktiolle $v(\xi)$. Etsitään funktioita siten, että kukin interpolaatiofunktio antaa arvon 1 omalla solmuvapausasteellaan ja arvon 0 muilla solmuvapausasteilla. Näin saadaan kullekin funktiolle neljä ehtoa, joten etsitään funktioita kolmannen asteen polynomien joukosta.

$$H_i(\xi) = \alpha_0^i + \alpha_1^i \xi + \alpha_2^i \xi^2 + \alpha_3^i \xi^3 \quad (12)$$

missä indeksi i viittaa vapausasteisiin 1..4.

Interpolaatiofunktion ehdoista vapausasteelle q_1 saadaan

$$\begin{cases} \alpha_0^1 - \alpha_1^1 + \alpha_2^1 - \alpha_3^1 = 1 \\ \alpha_1^1 - 2\alpha_2^1 + 3\alpha_3^1 = 0 \\ \alpha_0^1 + \alpha_1^1 + \alpha_2^1 + \alpha_3^1 = 0 \\ \alpha_1^1 + 2\alpha_2^1 + 3\alpha_3^1 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

joka voidaan lausua matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{a}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Ratkaisemalla yhtälöryhmä saadaan kertoimille arvot

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{4} (2 \quad -3 \quad 0 \quad 1)^T \quad (15)$$

vastaavalla tavalla saadaan muut interpolaatiofunktiot, joten

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{4} (2 - 3\xi + \xi^3) \\ H_2 &= \frac{1}{4} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ H_3 &= \frac{1}{4} (2 + 3\xi - \xi^3) \\ H_4 &= \frac{1}{4} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{aligned} \quad (16)$$

Funktiot H_1 ja H_3 kelpaavat sellaisenaan palkkielementin taipumaviivan approksimaatioksi, mutta koska

$$v_{,x} = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = v_{,\xi} \frac{2}{l_e} \quad (17)$$

niin tehdään tarvittavat korjaukset funktioihin H_2 ja H_4 , jotta taipuman derivaatta $v_{,x}$ saa oikeat arvot (1 ja 0) solmuissa 1 ja 2, joten kahden solmuvapausasteen palkkielementin muotofunktiot ovat

$$\mathbf{N}(\xi) = \begin{bmatrix} H_1 & \frac{l_e}{2} H_2 & H_3 & \frac{l_e}{2} H_4 \end{bmatrix} \quad (18)$$

ja palkin taipumaviivan approksimaatio on

$$\begin{aligned} v(\xi) &= H_1 q_1 + \frac{l_e}{2} H_2 q_2 + H_3 q_3 + \frac{l_e}{2} H_4 q_4 \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & \frac{l_e}{2} H_2 & H_3 & \frac{l_e}{2} H_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (19)$$

Jäykkyysmatriisi

Jäykkyysmatriisin lausekkeen johtamiseksi määritetään ensin taipumaviivan v toinen derivaatta

$$\begin{aligned} v_{,xx} &= \frac{d^2 v}{d\xi^2} \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 = \mathbf{N}_{,\xi\xi} \mathbf{q} \frac{4}{l_e^2} = \frac{4}{l_e^2} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6\xi & \frac{l_e}{2}[-2+6\xi] & -6\xi & \frac{l_e}{2}[2+6\xi] \end{pmatrix} \mathbf{q} \\ &= \frac{1}{l_e^2} \begin{pmatrix} 6\xi & l_e[-1+3\xi] & -6\xi & l_e[1+3\xi] \end{pmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{N}_{,xx} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (20)$$

Palkkielementin kimmoenergia on

$$U = \frac{1}{2} \int_L EI_z v_{,xx}^2 dx = \frac{EI_z}{2} \int_L \mathbf{q}^T \mathbf{N}_{,xx}^T \mathbf{N}_{,xx} \mathbf{q} dx \quad (21)$$

Koska muotofunktiot on lausuttu emokoordinaatin avulla, niin muutetaan integrointirajat sijoittamalla

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T EI_z \int_L \mathbf{N}_{,xx}^T \mathbf{N}_{,xx} dx \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T EI_z \frac{l_e}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{N}_{,xx}^T \mathbf{N}_{,xx} d\xi \mathbf{q} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{EI_z}{2l_e^3} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -6\xi \\ l_e(-1+3\xi) \\ 6\xi \\ l_e(1+3\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6\xi & l_e(-1+3\xi) & -6\xi & l_e(1+3\xi) \end{bmatrix} d\xi \mathbf{q} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{EI_z}{2l_e^3} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 36\xi^2 & 6l_e\xi(-1+3\xi) & -36\xi^2 & 6l_e\xi(1+3\xi) \\ 6l_e\xi(-1+3\xi) & l_e^2(-1+3\xi)^2 & -6l_e\xi(1+3\xi) & l_e^2(-1+9\xi^2) \\ -36\xi^2 & -6l_e\xi(1+3\xi) & 36\xi^2 & -6l_e\xi(1+3\xi) \\ 6l_e\xi(1+3\xi) & l_e^2(-1+9\xi^2) & -6l_e\xi(1+3\xi) & l_e^2(1+3\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k}_e \mathbf{q} \end{aligned} \quad (22)$$

jäykkyysmatriisin lausekkeeksi saadaan suorittamalla integroinnit

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_e &= \frac{EI_z}{2l_e^3} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 36\xi^2 & 6l_e\xi(-1+3\xi) & -36\xi^2 & 6l_e\xi(1+3\xi) \\ 6l_e\xi(-1+3\xi) & l_e^2(-1+3\xi)^2 & -6l_e\xi(1+3\xi) & l_e^2(-1+9\xi^2) \\ -36\xi^2 & -6l_e\xi(1+3\xi) & 36\xi^2 & -6l_e\xi(1+3\xi) \\ 6l_e\xi(1+3\xi) & l_e^2(-1+9\xi^2) & -6l_e\xi(1+3\xi) & l_e^2(1+3\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi \\ &= \frac{EI_z}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

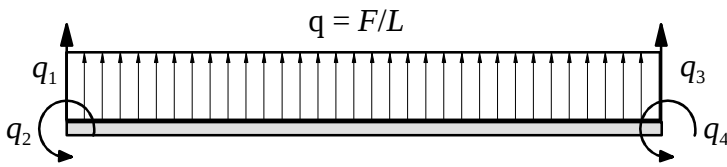
Kaavakokoelmassa elementin pituus l_e on korvattu mitalla L , joten kahden solmuvapausasteen palkkielementin jäykkyysmatriisi on

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Ekvivalenttiset solmukuormitukset

Viivakuormituksen aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitus

Palkin tilavuuskuormitus tai sen pintaan kohdistuva painekuormitus voidaan käsitellä samalla tavalla viivakuormituksena q , jonka yksikkö on N/mm tai N/m. Tarkastellaan tässä yhteydessä tasaista viivakuormitusta q , jonka positiivinen suunta on palkin y -akselin positiivinen suunta



Kuva 4. Palkki, johon kohdistuu tasainen viivakuorma q

Viivakuormituksen potentiaali

$$\begin{aligned} WP &= - \int_L v^T q dx = - \frac{ql_e}{2} \int_{-1}^1 v(\xi)^T d\xi = -\mathbf{q}^T \frac{ql_e}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T d\xi \\ &= -\mathbf{q}^T \frac{ql_e}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T d\xi = -\mathbf{q}^T \frac{ql_e}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2-3\xi+\xi^3 \\ \frac{l_e}{2}(1-\xi-\xi^2+\xi^3) \\ 2+3\xi-\xi^3 \\ \frac{l_e}{2}(-1-\xi+\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix} d\xi \\ &= -\mathbf{q}^T \begin{bmatrix} ql_e/2 \\ ql_e^2/12 \\ ql_e/2 \\ -ql_e^2/12 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

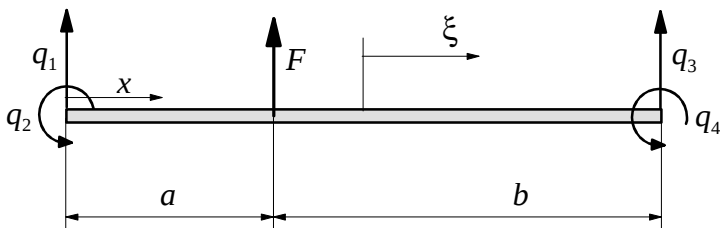
joten tasaisen viivakuormituksen ekvivalenttinen solmukuormitusvektori

$$\mathbf{f}^p = \begin{bmatrix} \frac{ql_e}{2} \\ \frac{ql_e^2}{12} \\ \frac{ql_e}{2} \\ -\frac{ql_e^2}{12} \end{bmatrix} = \mathbf{f}^v \quad (26)$$

missä yläindeksi p viittaa painekuormaan ja V tilavuuskuormitukseen. Koska kuormituksen viivatiheys on tässä skalaarisuure, niin on käytetty viivatiheyden symbolina q kirjainta erotuksena vektoriarvoisesta viivakuormituksesta, jota on merkitty symbolilla $\mathbf{r}$, jotta sitä ei sekoiteta elementin solmusiirtymävektoriin $\mathbf{q}$.

Pistevoiman aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitusvektori

Toinen käsilaskennassa usein käytetty kuormitus on pistekuormitus elementin alueella



Kuva 5. Elementin alueella oleva pistekuorma

Pistekuormituksen potentiaali

$$WP = -\mathbf{v}^T \mathbf{F} = -\mathbf{q}^T \mathbf{F} \mathbf{N}(\xi)^T = -\mathbf{q}^T \frac{F}{4} \begin{bmatrix} 2 - 3\xi + \xi^3 \\ \frac{l_e}{2}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ 2 + 3\xi - \xi^3 \\ \frac{l_e}{2}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{bmatrix} \quad (27)$$

emokoordinaatin arvo voidaan ratkaista yhteydestä

$$a = \frac{1}{2}(1 + \xi)l_e \Rightarrow \xi = \frac{2a}{l_e} - 1 \quad (28)$$

ottamalla vielä käyttöön lyhenteet

$$\bar{a} = \frac{a}{l_e} \quad \bar{b} = \frac{b}{l_e} \quad (29)$$

ja sijoittamalla ne potentiaalin lausekkeeseen saadaan

$$WP = -\mathbf{q}^T F \begin{bmatrix} \bar{b}^2 (1 + 2\bar{a}) \\ a\bar{b}^2 \\ \bar{a}^2 (1 + 2\bar{b}) \\ -b\bar{a}^2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

joten elementin alueella olevan pistekuormituksen ekvivalenttinen solmukuormitusvektori on

$$\mathbf{f}^p = F \begin{bmatrix} \bar{b}^2 (1 + 2\bar{a}) \\ a\bar{b}^2 \\ \bar{a}^2 (1 + 2\bar{b}) \\ -b\bar{a}^2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

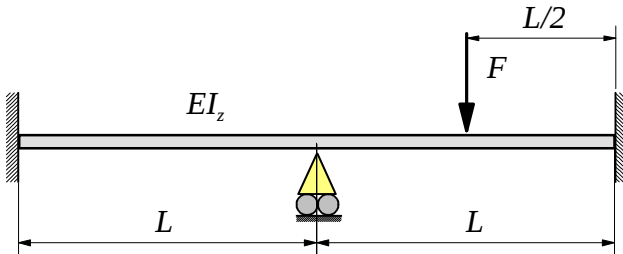
missä yläindeksi p viittaa nyt "yleistettyyn" paineeseen eli pistevoimaan. Jos pistevoima on elementin keskellä, niin ekvivalenttinen solmukuormitusvektori on

$$\mathbf{f}^p = \begin{bmatrix} \frac{F}{2} \\ \frac{FL}{8} \\ \frac{F}{2} \\ -\frac{FL}{8} \end{bmatrix} \quad (32)$$

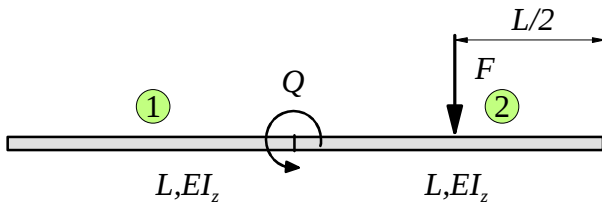
Välikokeen I alue vuonna 2013 päättyy seuraavaan esimerkkiin.

Laskentaesimerkki

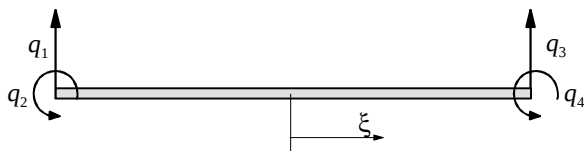
Laske oikean palkkirakenteen taivutusmomenttikuvio ja tukireaktiot.



Jaetaan malli käsilaskennan helpottamiseksi vain kahteen elementtiin. Kuvassa on esitetty elementtijako sekä ainoa globaalivapausaste Q .

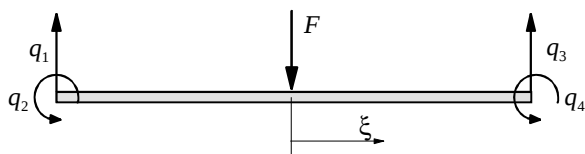


Elementti 1



$$\mathbf{k}_1 = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Elementti 2



$$\mathbf{k}_2 = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^P = \begin{bmatrix} -\frac{F}{2} \\ -\frac{FL}{8} \\ -\frac{F}{2} \\ +\frac{FL}{8} \end{bmatrix}$$

Koko rakenteen laskentamallin jäykkyyismatriisi saadaan sijoittelusummamalla elementtien jäykkyyismatriisit

$$\mathbf{K} = [\mathbf{k}_{44}^1 + \mathbf{k}_{22}^2] = \frac{EI_z}{L} (4 + 4) = \frac{8EI_z}{L}$$

Jäykkyyismatriisin käänteismatriisi

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{L}{8EI_z}$$

Koska elementillä 2 on kenttäkuormitus, niin siitä aiheutuu koko rakenteen laskentamallin kuormitusvektoriin $\mathbf{F}$ termejä (yksi termi).

$$\mathbf{F} = [-FL/8]$$

Lasketaan globaali siirtymävektori $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} = -\frac{L}{8EI_z} \frac{FL}{8} = -\frac{FL^2}{64EI_z}$$

Elementti 1

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{k}_1 \mathbf{q}_1 = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{FL^2}{64EI_z} = \begin{bmatrix} -6L \\ -2L^2 \\ 6L \\ -4L^2 \end{bmatrix} \frac{F}{64L} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{32}F \\ \frac{-FL}{32} \\ \frac{3}{32}F \\ \frac{-2FL}{32} \end{bmatrix}$$

Elementti 2

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{k}_2 \mathbf{q}_2 - \mathbf{f}_2^p = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{FL^2}{64EI_z} - \begin{bmatrix} \frac{-F}{2} \\ \frac{-FL}{8} \\ \frac{-F}{2} \\ \frac{FL}{8} \end{bmatrix}$$

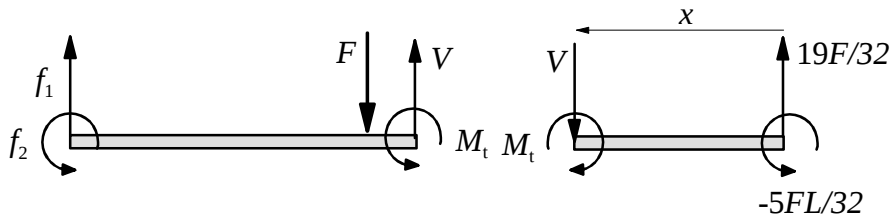
$$= \begin{bmatrix} -6L \\ -4L^2 \\ 6L \\ -2L^2 \end{bmatrix} \frac{F}{64L} + \begin{bmatrix} \frac{F}{2} \\ \frac{FL}{8} \\ \frac{F}{2} \\ \frac{FL}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3F}{32} \\ \frac{-2FL}{32} \\ \frac{3F}{32} \\ \frac{-FL}{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{16F}{16 \cdot 2} \\ \frac{4FL}{4 \cdot 8} \\ \frac{16 \cdot F}{16 \cdot 2} \\ \frac{4 \cdot FL}{4 \cdot 8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13F}{32} \\ \frac{2FL}{32} \\ \frac{19F}{32} \\ \frac{-5FL}{32} \end{bmatrix}$$

Taivutusmomenttikuvio

Taivutusmomenttien arvot elementtien solmuilla on nyt selvitetty ja jos elementin alueella ei ole kenttäkuormituksia, voidaan taivutusmomenttikuvio piirtää suorana solmuarvolta 1 solmuarvolle 2.

Solmulla 1 oleva solmuarvo $\mathbf{f}_2^e$ on taivutusmomentin vastaluku ja solmulla 2 oleva solmuarvo $\mathbf{f}_4^e$ on suoraan taivutusmomentti.

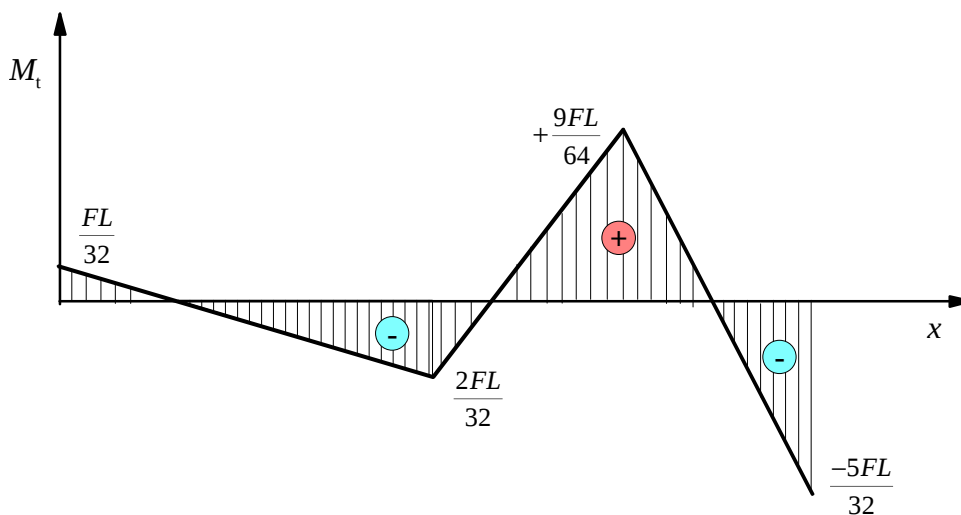
Jos elementin alueella on kenttäkuormituksia, niin niiden vaikutus taivutusmomenttikuvioon elementin alueella tulee ottaa huomioon. Selkeimmin tämä tapahtuu elementin palasen vapaakappalekuvan avulla. Alla olevassa kuvassa on elementin 2 oikeanpuoleinen osuus ennen pistekuormitusta F ja vasen puolisko havainnollisuuden vuoksi.



Momenttitasapainosta pisteen x suhteen saadaan

$$\begin{aligned} \curvearrowleft \quad +\frac{19F}{32}x - \frac{5FL}{32} - M_t(x) &= 0 \quad \Rightarrow \\ M_t(x) &= +\frac{19F}{32}x - \frac{5FL}{32} \quad \Rightarrow \\ M_t(L/2) &= +\frac{19FL}{64} - \frac{10FL}{64} = +\frac{9FL}{64} \end{aligned}$$

Koska muita kenttäkuormituksia ei ole, niin taivutusmomenttikuvio voidaan nyt piirtää.



Tukireaktiot

	Vasen tuki	Oikea tuki	Keskituki
Pystyreaktio R_y	$-\frac{3}{32}F$	$\frac{19F}{32}$	$\frac{3}{32}F + \frac{13F}{32} = \frac{F}{2}$
Momentti	$-\frac{FL}{32}$	$-\frac{5FL}{32}$	

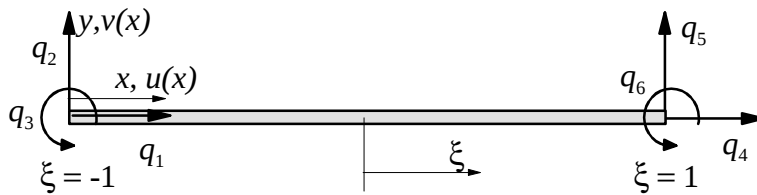
Tasapainotarkastus

Pystyreaktio + Ulkoinen pystykuormitus $\frac{-3F}{32} + \frac{19F}{32} + \frac{16F}{32} - F = 0$ OK

Momenttitasapaino oikealla tuella $-\frac{FL}{32} - \frac{5FL}{32} + \frac{FL}{2} - \frac{FL}{2} + \frac{3F}{32}2L = 0$ OK

Kolmen solmuvapausasteen palkkielementti

Lisäämällä edellä esiteltyyn kahden solmuvapausasteen palkkielementtiin aksiaalsiirtymät ja numeroimalla elementin vapausasteet solmuittain eteneneväksi saadaan kuvan mukainen kolmen solmuvapausasteen palkkielementti. Koska tyydytään linearisoituun teoriaan, niin suoran palkin veto ja puristus eivät ole kytkennässä taivutukseen ja leikkaukseen, joten koostetaan kolmen solmuvapausasteen palkkielementti yhdistämällä kahden vapausasteen sauvaelementti ja kahden solmuvapausasteen palkkielementti.



Elementin jäykkyyismatriisi saadaan sijoittelusummaamalla neljän vapausasteen palkkielementin $\mathbf{k}_1$ ja kahden vapausasteen sauvaelementin $\mathbf{k}_2$ jäykkyyismatriisit

$$\mathbf{k}_e = \sum_{i=1}^2 \mathbf{k}_i \quad (33)$$

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} = \kappa \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad (34)$$

ja

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (35)$$

suorittamalla sijoittelusummaus saadaan

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 12 \cdot \kappa & 6L \cdot \kappa & 0 & -12 \cdot \kappa & -6L \cdot \kappa \\ 0 & 6L \cdot \kappa & 4L^2 \cdot \kappa & 0 & -6L \cdot \kappa & 2L^2 \cdot \kappa \\ -k & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & -12 \cdot \kappa & -6L \cdot \kappa & 0 & 12 \cdot \kappa & -6L \cdot \kappa \\ 0 & 6L \cdot \kappa & 2L^2 \cdot \kappa & 0 & -6L \cdot \kappa & 4L^2 \cdot \kappa \end{bmatrix} \quad (36)$$

Solmumittausjärjestelmän kierto

Kuten neljän vapausasteen sauvaelementin yhteydessä oli esillä, on kolmen solmuvapausasteen palkkielementti vielä sijoitettava mielivaltaiseen asentoon globaalisen xy-koordinaatiston suhteen. Tällöin palkin lokaalikoordinaatiston siirtymät $\mathbf{q}'$ voidaan lausua globaalisen xy-koordinaatiston siirtymien $\mathbf{q}$ avulla

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{q} \quad (37)$$

missä l ja m ovat palkin suuntakosinit

Globaalista solmumittausta vastaava jäykkyyismatriisi on

$$\mathbf{k}_{xy} = \mathbf{L}^T \mathbf{k}_e \mathbf{L} \quad (38)$$

missä $\mathbf{k}_e$ saadaan kaavalla (36). Ekvivalenttiset solmukuormitusvektorit tulee koota palkin paikalliskoordinaatistossa sauva- ja palkkiosalle ja ne muunnetaan globaaliin xy-koordinaatistoon kaavalla

$$\mathbf{f}_{xy}^{ekv} = \mathbf{L}^T \mathbf{f}_{ekv} \quad (39)$$

Laskuharjoituksissa tulee olemaan yksi esimerkki em. muunnoksista.

Kehäarakenteet

Kehäarakenteen osina olevat palkit voivat ottaa vastaan kaikkia kannattimen rasituksia, jotka ovat normaali- ja leikkausvoima sekä taivutus- ja vääntömomentti. Kehäarakenteessa taivutuksella ja/tai väännöllä on oleellinen merkitys ainakin rakenteen jossakin osassa. Kehäarakenteen laskentamallissa on siis momenttien ja leikkausvoimien kuormittamia palkkeja, mutta mukana voi myös olla vain normaalivoimaa vastaanottavia sauvoja. Yleensä kehäarakenteen palkkien oletetaan kiinnittyvän toisiinsa jäykästi kehän nurkissa. Tällöin palkkien päät eivät kierry toisiinsa nähden vaan kokevat saman nurkkaan liittyvän rotaation. Kehäarakennemallissa voi joskus esiintyä sisäisiä niveliä tai luisteja. Niillä voidaan mallintaa palkin pään kiinnityksiä, jotka eivät ota merkittävästi vastaan taivutusmomenttia tai leikkausvoimaa tietyssä suunnassa. Kehäarakenteen palkkien geometria mallinnetaan niiden pintakeskiöviivoilla, jotka liittyvät toisiinsa kehän nurkissa joko suoraan tai tietyllä epäkeskeisyydellä. Palkit ovat yleensä tasapaksuja, jolloin niille tarvitaan kannattimen teorian mukaiset poikkileikkauksen pintasuureet. Muuttuvan poikkileikkauksen omaavan kannattimen käsittely ei onnistu kovin yleisesti peruslujuusopilla, mutta elementtimenetelmässä se voidaan mallintaa halutulla tarkkuudella jakamalla palkki riittävän moneen tasapaksuun osaan. Kehäarakenteen kineettinen kuormitus koostuu palkkeihin tai nurkkiin kohdistuvista pistemäisistä voima- ja momenttikuoormituksista sekä palkkeihin kohdistuvista viivakuormituksista ja lämpötilakuormituksista. Kinemaattinen kuormitus sisältää tukipisteiden tunnetut translaatio- ja rotaatiosiirtymät. Laskennan tuloksena saadaan palkkien rasituskuvat ja vastaavat jännitykset sekä nurkkien translaatio- ja rotaatiosiirtymät ja palkkien kimmoviivojen lausekkeet.

Tavallisesti kehäarakenteen nurkkiin syntyy kuormituksen vaikutuksesta sekä translaatiosiirtymiä että rotaatiosiirtymiä. Joissakin tapauksissa nurkkiin tulee translaatiosiirtymiä vain normaalivoimista johtuvien pituudenmuutosten takia. Koska kehässä palkkien pituudenmuutokset ovat yleensä niiden taipumiin verrattuna pieniä, ei tehdä suurta virhettä, vaikka ne oletetaan nolliksi. Tällä oletuksella kyseessä oleva kehä on nurkistaan siirtymätön ja sen nurkkiin voi syntyä vain rotaatioita. Nurkistaan siirtymätön kehä on harvinainen erityistapaus ja yleensä kehät ovat siirtyvänurkkaisia. Tässä tarkastellaan kuitenkin nurkistaan siirtymätöntä kehäarakennetta, koska vastaavalla palkkielementillä tarvitaan vain kaksi rotaatiovapausastetta, joten siitä on yksinkertaisinta aloittaa palkkielementtien teorian kehittäminen.

Ristikkorakenteiden yhteydessä esitetty suoran elementtimenetelmän formulointi soveltuu sellaisenaan kehäarakenteisiin. Uutena piirteenä on rotaatiovapausasteiden käyttö solmumittauksessa. Laskennassa tarvitaan yleisen tasokehän ja avaruuskehän käsittelyyn sopivat elementit ja on tunnettava niiden jäykkyysmatriisien ja ekvivalenttien solmukuormitusvektoreiden lausekkeet. Palkkielementit ryhmitellään sen mukaan, miten ne ottavat huomioon leikkausvoiman vaikutuksen taipumaan. Hoikan palkin elementti ei ota leikkausvoimaa huomioon lainkaan ja korkean palkin elementti ottaa sen huomioon likimääräisesti poikkileikkauksen leikkauskertoimen avulla. Leikkausvoiman vaikutus on yleensä pieni. Tässä käsitellään yksityiskohtaisesti vain hoikan palkin elementtejä ja korkean palkin elementin tulokset esitetään ilman johtoa.

Edellä johdetut palkkielementtien jäykkyysmatriisit perustuivat tekniseen taivutusteoriaan, jolloin on otettu huomioon vain taivutusmomentin vaikutus palkin taipumaan. Palkin leikkausvoima aiheuttaa myös taipumista, joka varsinkin korkeilla palkeilla vaikuttaa hieman tuloksiin. Leikkausvoiman vaikutuksen

määrittäminen yleiselle poikkileikkaukselle ei onnistu tarkasti kannattimen teorialla, mutta riittävän tarkka likiratkaisu saadaan käyttämällä leikkauskerrointa ϕ , joka riippuu palkin materiaalista ja geometriasta.

Monille poikkileikkauksille voidaan johtaa leikkauskertoimen likiarvo esimerkiksi teknisen taivutusteorian tai energiaperiaatteen avulla. Voidaan osoittaa, että leikkauskerrointa käytettäessä kuuden vapausasteen palkkielementin lokaali jäykkyydsmatriisi muuttuu muotoon

$$[k] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\kappa}{(1+\phi)L^2} & \frac{6\kappa}{(1+\phi)L} & 0 & -\frac{12\kappa}{(1+\phi)L^2} & \frac{6\kappa}{(1+\phi)L} \\ 0 & \frac{6\kappa}{(1+\phi)L} & \frac{(4+\phi)\kappa}{(1+\phi)} & 0 & -\frac{6\kappa}{(1+\phi)L} & \frac{(2-\phi)\kappa}{(1+\phi)} \\ -k & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\kappa}{(1+\phi)L^2} & -\frac{6\kappa}{(1+\phi)L} & 0 & \frac{12\kappa}{(1+\phi)L^2} & -\frac{6\kappa}{(1+\phi)L} \\ 0 & \frac{6\kappa}{(1+\phi)L} & \frac{(2-\phi)\kappa}{(1+\phi)} & 0 & -\frac{6\kappa}{(1+\phi)L} & \frac{(4+\phi)\kappa}{(1+\phi)} \end{bmatrix}$$

Leikkauskertoimen ϕ lauseke voidaan esittää muodossa

$$\phi = \frac{12EI}{GA_s L^2} = 24(1+\nu) \frac{A}{A_s} \left(\frac{i}{L} \right)^2 \quad (40)$$

jossa E , G ja ν ovat materiaalivakiot, A_s tehollinen leikkauspinta-ala (leikkausvoiman vastaanottava pinta-ala) ja i poikkileikkauksen neliösäde. Leikkauspinta-aloja löytyy lujuusopin kirjallisuudesta, esimerkiksi suorakulmiolle $A_s = 5A/6$, ympyrälle $A_s = 9A/10$ ja I-profiilille uuman pinta-ala. Kaavasta näkyy, että leikkausmuodonmuutoksen vaikutus on pieni, jos palkin hoikkuusluku $\lambda = L/i$ ei ole kovin pieni.

Kun $\nu = 0,3$ ja arvioidaan karkeasti, että $A_s = A$, saadaan seuraavia arvoja

λ	10	20	40	100
ϕ	0,3120	0,0780	0,0195	0,00312

joista näkyy selvästi, että tavanomaisen hoikkuuden omaavalla palkilla leikkausvoiman vaikutus taipuman arvoon on vähäinen.

Edelle esitelty kolmen solmuvapausasteen palkkielementti (Beam3) on vielä mukana ANSYS10-ohjelmassa ja sitä voi käyttää vaihtoehtoisena elementtinä harjoitustyön 1 ratkaisussa. Versiossa 14 elementtinä pitänee käyttää esimerkiksi palkkia *Beam188*, jolla on kuusi solmuvapausastetta. Palkin *Beam188* muotofunktiot eivät ole Hermite'n polynomeja vaan palkin kiertymät on interpoloitu erillisinä translaatiosiirtymiin nähden. Aihealuetta on käsitelty esimerkiksi kurssilla: Mekaniikan erityiskysymyksiä: Monikappalemekaniikka.

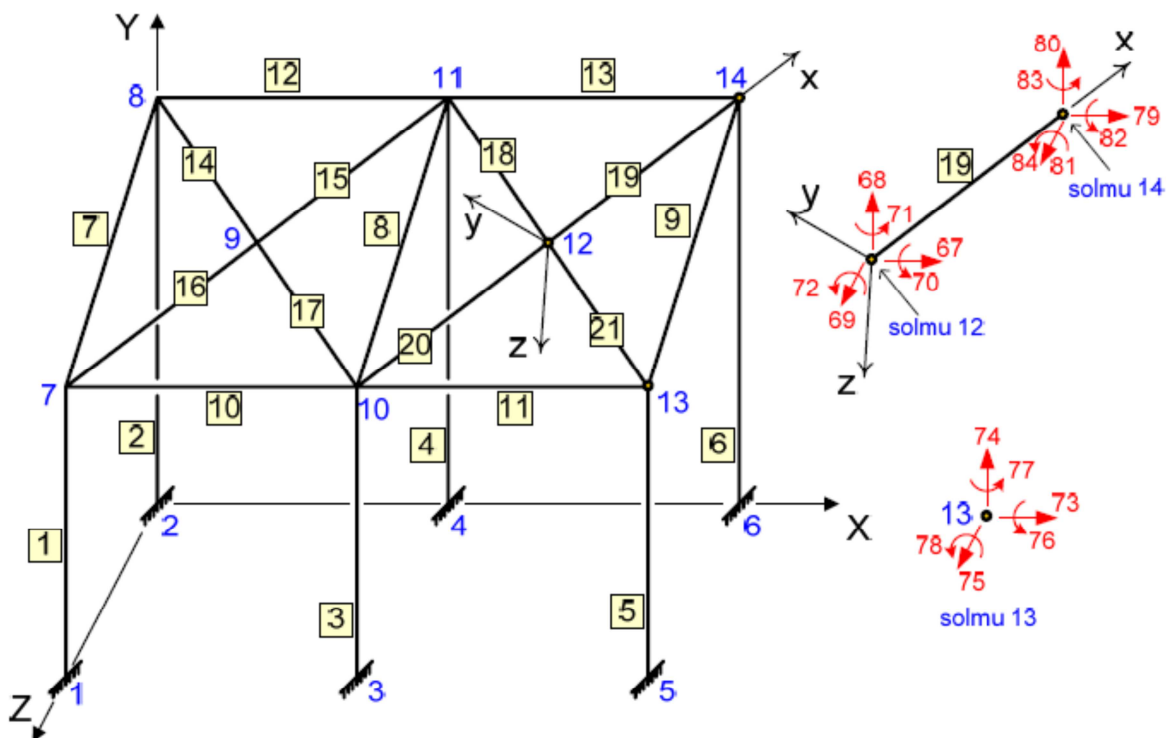
Avaruuskehät

Vain tasapaksuja ja suoria osia sisältävän avaruskehän tarkka ratkaisu saadaan elementtiverkolla, jossa solmut sijoittuvat nurkkiin, tukipisteisiin, ulokepäihin ja poikkileikkauksen muutoskohtiin. Avaruskehän elementit ovat suoria kaksisolmuisia palkkielementtejä.

Kuvassa 6 on esimerkki avaruskehän elementtiverkosta, jossa on 14 solmua ja 21 elementtiä. Avaruskehälle sovitaan globaali xyz-koordinaatisto, jonka akselien suhteen solmumittaus suoritetaan. Solmumittaus sisältää translaatiot ja solmuvoimat globaalisuunnissa ja rotaatiot ja momentit globaalisuuntien ympäri.

Solmulla on 6 ja elementillä 12 vapausastetta. Elementin solmuvoimavektoreiden dimensio on 12 ja jäykkyyssmatriisi on 12x12 matriisi. Kuvassa 6 on esitetty nuolisymboleilla solmun 13 vapausasteet. Kullakin elementillä on oma lokaali x'y'z'-koordinaatisto, jonka x-akseli on elementin suuntainen ja yz-koordinaatisto on sen poikkileikkauksen pääkoordinaatisto. Kuvassa 6 on elementin 19 lokaalikoordinaatisto ja globaali solmumittaus.

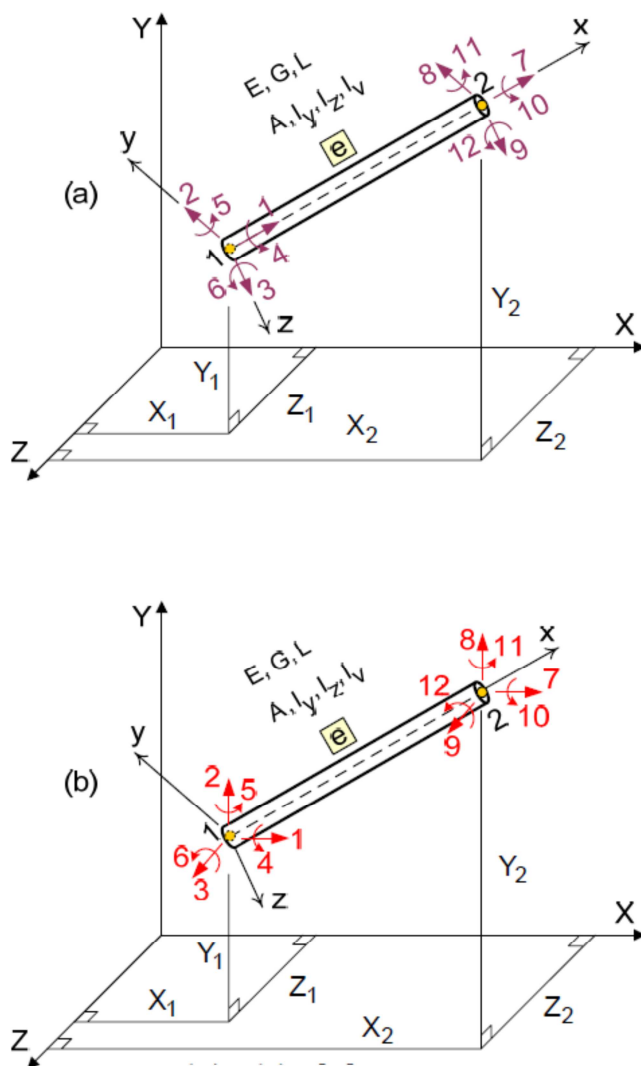
Avaruskehän elementtejä rasittaa taivutusmomentti ja leikkausvoima sen poikkileikkauksen päätasoissa ja lisäksi normaalivoima ja vääntömomentti. Näiden käsittelemiseen tarvitaan poikkileikkauksen pintasuureet eli ala A, pääneliömomentit I_y ja I_z sekä vääntöneliömomentti I_ω , mikäli leikkausmuodonmuutosta ei oteta huomioon ja rajoitutaan vapaan väännön teoriaan olettaen lisäksi pintakeskiön ja vääntökeskiön yhtyvän. Leikkausmuodonmuutos voidaan tarvittaessa ottaa likimääräisesti huomioon kumpaankin päätasoon liittyvien leikkauskertoimen ϕ_z ja ϕ_y avulla.



Kuva 6. Avaruskehän elementtiverkko ja sen elementti

Elementin lokaali jäykkyyismatriisi

Avaruuskehän käsittelyyn elementtimenetelmällä tarvitaan kuvan 7 (b) globaalkoordinaatistossa mielivaltaisessa asennossa olevan 12 vapausasteen palkkielementin jäykkyyismatriisi, jonka solmumittaus liittyy globaalkoordinaatiston akselien suuntiin. Se voidaan johtaa koordinaatiston kiertoa käyttäen, jolloin lähdetään liikkeelle kuvan 7 (a) lokaalkoordinaatiston solmumittauksesta. Lineaarisen lujuusopin teorian mukaan veto/puristus, vääntö sekä poikkileikkauksen kummankin päätason taivutus ja leikkaus ovat toisistaan riippumattomia. Tästä seuraa, että lokaalkoordinaatiston jäykkyyismatriisi k voidaan muodostaa sijoittelusummaamalla kuvassa 8 esitetyt veto/puristuksen, väännön sekä poikkileikkauksen kummankin päätason taivutuksen ja leikkauksen jäykkyyismatriisit. Tulokseksi sijoittelusummauksesta tulee elementin jäykkyyismatriisi.



Kuva 7. Avaruuskehän elementin lokaali- ja globaalimittaus

Kuvassa 8 esitetty vääntökuormituksen jäykkyyismatriisi seuraa vapaan väännön teoriasta, jolloin lokaali x-akseli on vääntökeskiön kohdalla. Koska kuvan 8 muissa kuormitustapauksissa lokaali x-akseli on pintakeskiön kohdalla, on jäykkyyismatriisi tarkasti voimassa vain, kun vääntökeskiö yhtyy pintakeskiöön, kuten esimerkiksi kaksoissymmetrisillä poikkileikkauksilla. Leikkausvoimien vaikutus taipumaan voidaan

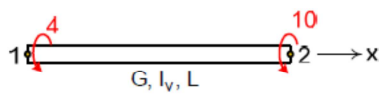
ottaa likimääräisesti huomioon leikkauskertoimilla ϕ_z ja ϕ_y muuttamalla jäykkyyismatriisissa kummankin päätason taivutusta ja leikkausta vastaavat alkiot kaavan (40) mukaisiksi.

Veto/puristus



$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 7 \end{matrix}$$

Vääntö



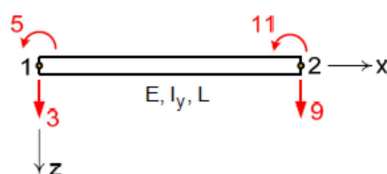
$$[k] = \frac{GI_v}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 10 \end{matrix}$$

xy-tason taivutus ja leikkaus



$$[k] = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 & 6/L \\ 6/L & 4 & -6/L & 2 \\ -12/L^2 & -6/L & 12/L^2 & -6/L \\ 6/L & 2 & -6/L & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 6 \\ 8 \\ 12 \end{matrix}$$

xz-tason taivutus ja leikkaus



$$[k] = \frac{EI_y}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & -6/L & -12/L^2 & -6/L \\ -6/L & 4 & 6/L & 2 \\ -12/L^2 & 6/L & 12/L^2 & 6/L \\ -6/L & 2 & 6/L & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 9 \\ 11 \end{matrix}$$

Kuva 8. Sijoittelusummattavat jäykkyyismatriisit

Suorittamalla sijoittelusummaus saadaan 12 vapausasteen palkkielementin jäykkyyismatriisi.

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_v}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_v}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_v}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_v}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Palkkielementin globaali jäykkyysmatriisi

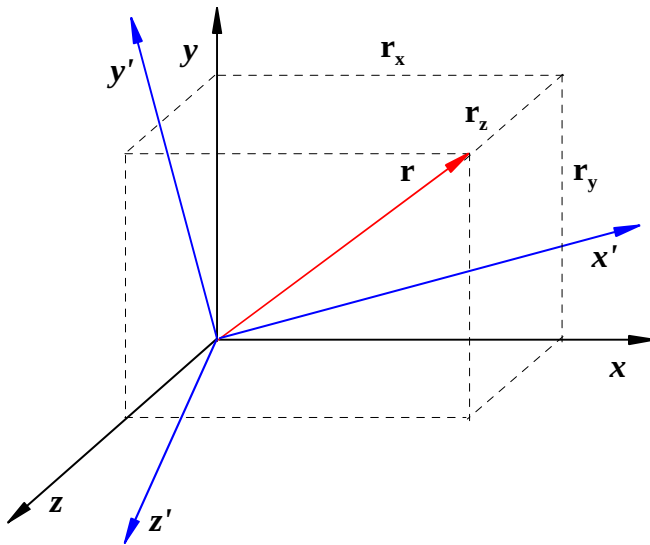
Palkkielementin lokaalikoordinaatiston jäykkyysmatriisi $\mathbf{k}_e$ on muunnettava globaalkoordinaatistoon. Tällöin saadaan jäykkyysmatriisi $\mathbf{k}_{xyz}$, joka antaa globaalkoordinaatiston solmusuurevektoreiden välisen yhteyden.

Koordinaatiston muunnos avaruuden pisteelle

Tarkastellaan ensin avaruuden pistettä $\mathbf{r}$, jonka komponentit $(r_x \ r_y \ r_z)^T$ tunnetaan xyz-koordinaatistossa. Tarkoituksena on lausua pisteen komponentit $(r'_x \ r'_y \ r'_z)^T$ x'y'z'-koordinaatistossa. Merkitään x'y'z'-koordinaatiston kantavektoreita $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ja $\mathbf{e}_3$, joiden komponentit (suuntakosinit)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (l_1 \ m_1 \ n_1)^T \\ \mathbf{e}_2 &= (l_2 \ m_2 \ n_2)^T \\ \mathbf{e}_3 &= (l_3 \ m_2 \ n_3)^T \end{aligned} \tag{41}$$

tunnetaan xyz-koordinaatistossa.



Kuva 9. Avaruuden piste $\mathbf{r}$

Halutut komponentit saadaan pisteen $\mathbf{r}$ pistetuloina kantavektoreiden suhteen

$$\begin{aligned} r'_x &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1 = r_x l_1 + r_y m_1 + r_z n_1 \\ r'_y &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_2 = r_x l_2 + r_y m_2 + r_z n_2 \\ r'_z &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_3 = r_x l_3 + r_y m_3 + r_z n_3 \end{aligned} \quad (42)$$

joka voidaan lausua matriisimuodossa

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{r} \quad (43)$$

Koordinaatiston muunnos palkkielementin siirtymälle

Palkkielementin siirtymä xyz-koordinaatistossa on

$$\mathbf{q} = (q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7 \quad q_8 \quad q_9 \quad q_{10} \quad q_{11} \quad q_{12})^T \quad (44)$$

Ryhmittelemällä termejä siirtymä voidaan lausua

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \phi_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

missä siirtymätermi on lausuttu solmuittain erottaen translaatiosiihtymät $\mathbf{d}$ ja kiertymät $\boldsymbol{\varphi}$.
Kantavektoreiden $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ja $\mathbf{e}_3$ määräämässä suunnassa siirtymäkomponentit saadaan

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} \mathbf{d}'_1 \\ \varphi'_1 \\ \mathbf{d}'_2 \\ \varphi'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \varphi_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{q} \quad (46)$$

Globaalista solmumittausta vastaava jäykkyyismatriisi on

$$\mathbf{k}_{xyz} = \mathbf{L}^T \mathbf{k}_e \mathbf{L} \quad (47)$$

missä $\mathbf{k}_e$ palkkielementin lokaali jäykkyyismatriisi. Ekvivalenttiset solmukuormitusvektorit tulee koota palkin paikalliskoordinaatistossa sauva- ja palkkiosille ja ne muunnetaan globaaliseen xyz-koordinaatistoon kaavalla

$$\mathbf{f}_{xyz}^{ekv} = \mathbf{L}^T \mathbf{f}_{ekv} \quad (48)$$