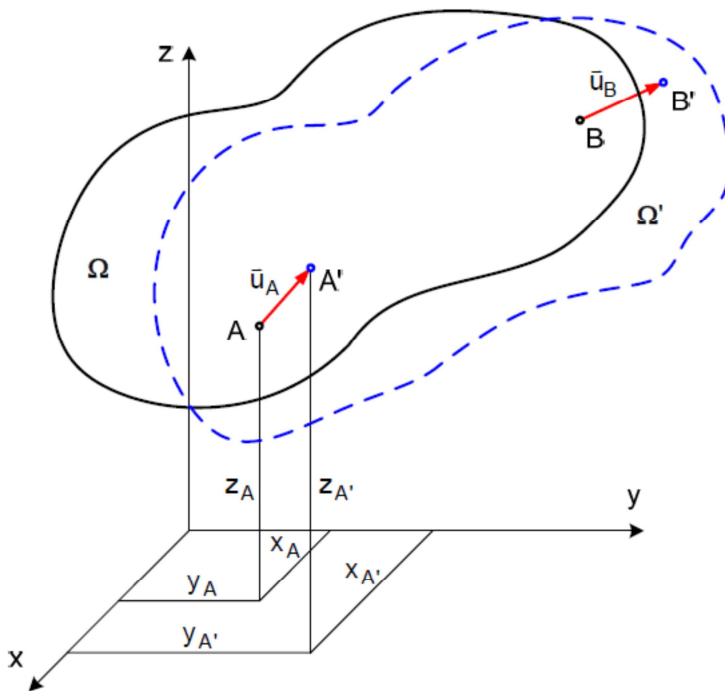


## Muodonmuutostila

Tarkastellaan kuvan 1 kappaletta  $\Omega$ , jonka pisteet siirtyvät ulkoisen kuormituksen johdosta siten, että siirtymien tapahduttua ne muodostavat kappaleen  $\Omega'$ . Esimerkiksi piste A siirtyy asemaan A' ja piste B asemaan B'. Siirtymät voivat aiheutua jäykän kappaleen liikkeestä (translaatio ja rotaatio) ja/tai kappaleen muodon muuttumisesta. Jäykän kappaleen liikkeessä kappaleen pisteiden asemat toisiinsa nähden eivät muutu. Kappaleen muodon muuttuessa sen pisteet siirtyvät toisiinsa nähden. Seuraavassa tutkitaan vain muodon muuttumisesta aiheutuvia siirtymiä.



Kuva 1. Siirtymävektori

Kuvan 1 pisteen A koordinaatit ovat alkutilassa  $(x_A, y_A, z_A)$  ja lopputilassa  $(x_{A'}, y_{A'}, z_{A'})$ . Pisteen A siirtymävektori on

$$\vec{u}_A = (x_{A'} - x_A) \vec{i} + (y_{A'} - y_A) \vec{j} + (z_{A'} - z_A) \vec{k} \quad (1)$$

Pisteen A siirtymäkomponentit koordinaattiakselien suunnissa ovat

$$u_A = x_{A'} - x_A \quad v_A = y_{A'} - y_A \quad w_A = z_{A'} - z_A \quad (2)$$

Kappaleen kaikkien pisteiden siirtymävektorit muodostavat sen siirtymäkentän

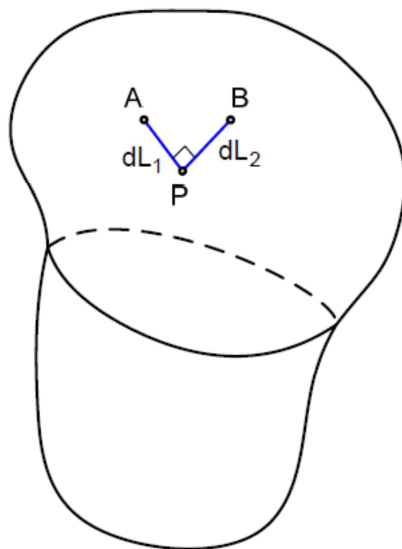
$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (3)$$

jossa siirtymäkentän komponentit  $u(x,y,z)$ ,  $v(x,y,z)$  ja  $w(x,y,z)$  sisältävät kappaleen kaikkien pisteiden koordinaattiakseleiden suuntaiset siirtymät.

Tavanomaisen lineaarisen lujuusopin tehtävissä tarkastellaan vain pieniä siirtymiä. Kuvassa 1 on siirtymiä havainnollisuussyistä suuresti liioiteltu.

## Muodonmuutostilan käsite ja komponentit

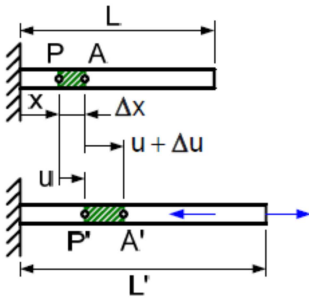
Kuten edellä mainittiin, kappaleen muodon muuttuessa sen pisteiden keskinäiset asemat muuttuvat. Tällöin kappaleen pisteiden väliset etäisyydet ja sen pisteitä yhdistävien janojen väliset kulmat muuttuvat muodonmuutosten seurauksena. Muodonmuutosten tarkastelemiseksi määritellään kappaleen pisteen P muodonmuutostila niin, että se sisältää kaikkien pisteestä P sen lähinaapuripisteisiin (A,B) piirrettyjen viivaelementtien ( $dL_1, dL_2$ ) venymät ja kaikkien pisteestä P alkavien kohtisuorien viivaelementtiparien ( $dL_1$  ja  $dL_2$ ) välisten suorien kulmien liukumät. Näitä venymiä ja liukumia on ääretön määrä. Kuten myöhemmin osoitetaan, riittää pisteen muodonmuutostilan hallitsemiseen kuitenkin koordinaattiakseleiden suuntaisten viivaelementtiparien venymien ja niiden välisten liukumien tunteminen. Kappaleen kaikkien pisteiden muodonmuutostilat muodostavat sen muodonmuutostilakentän.



Kuva 2. Muodonmuutostila

## Aksiaalinen muodonmuutostila

Tutkitaan aluksi kuvan 3 yksiulotteista tapausta, jossa pisteestä P alkavan viivaelementin PA pituus ennen muodonmuutosta on  $\Delta x$ .



Kuva 3. Aksiaalinen venymä

Kuormituksen seurauksena piste P siirtyy asemaan P' ja A asemaan A' siirtymäkomponenttien ollessa x-suunnassa u ja u + Δu vastaavasti. Viivaelementin pituus on muuttunut määrän Δu ja sen suhteellinen pituuden muutos on Δu/Δx. Tällöin x-akselin suuntainen venymä  $\epsilon_x$  pisteessä P on määritelmän mukaan

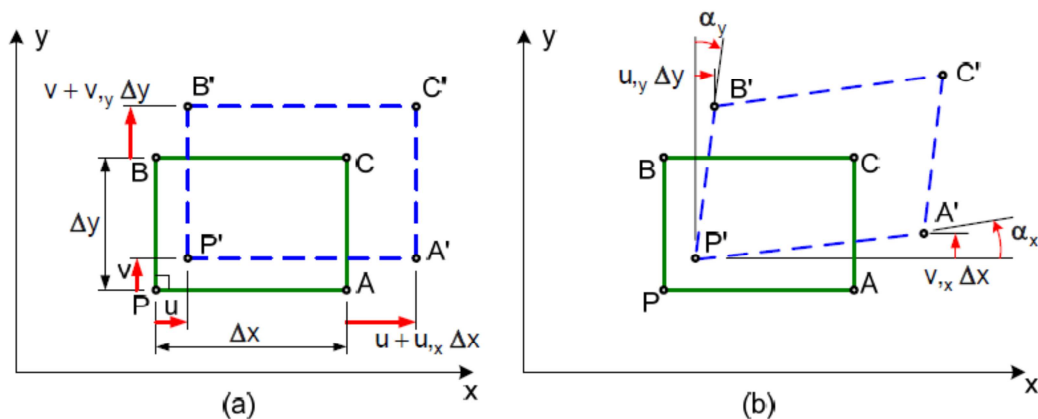
$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{,x} \Delta x}{\Delta x} = u_{,x} \quad (4)$$

jossa  $\Delta x \rightarrow 0$  siten, että piste  $P \rightarrow A$ . Kaava (4) on kinemaattinen yhtälö, joka antaa venymän ja siirtymän välisen yhteyden.

### Tasomuodonmuutostila

Tarkastellaan seuraavaksi yleisen muodonmuutostilan erityistapausta, jossa muodonmuutoksia on vain xy-tasossa eli tasomuodonmuutostilaa. Huomattakoon, että kyseessä ei ole tasojännitystilaa.

Muodonmuutoskomponenttien lausekkeiden johtamiseksi tutkitaan kuvan 4 mukaisia tarkastelupisteistä P alkavia koordinaattiakselien suuntaisia viivaelementtejä Δx ja Δy.



Kuva 4. Tasomuodonmuutostila

Kun pisteen P siirtymäkomponentteja x- ja y-suunnissa merkitään u ja v, ovat pisteiden A ja B siirtymäkomponentit vastaavasti

$$A: u + u_{,x} \Delta x \text{ ja } v + v_{,x} \Delta x \quad B: u + u_{,y} \Delta y \text{ ja } v + v_{,y} \Delta y \quad (5)$$

jossa siirtymien muutoksia on approksimoitu differentiaaleilla. Siirtymistä aiheutuvat muodonmuutokset voidaan jakaa kahteen osaan kuvan 4 mukaisesti. Koska pisteet P ja A siirtyvät x-suunnassa erisuuret matkat, aiheutuu tästä viivaelementin  $\Delta x$  venymä x-suunnassa. Samoin pisteet P ja B siirtyvät y-suunnassa erisuuret matkat, joten viivaelementtiin  $\Delta y$  syntyy venymä y-suunnassa. Kuvassa 4 (a) on siirtymäeroista syntyvät viivaelementtien venymät. Näin saadaan x- ja y-akselien suuntaisiksi venymäkomponenteiksi  $\epsilon_x$  ja  $\epsilon_y$  pisteessä P analogisesti kaavan (4) kanssa

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{,x} \Delta x}{\Delta x} = u_{,x} \quad \epsilon_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{v_{,y} \Delta y}{\Delta y} = v_{,y} \quad (6)$$

Pisteet P ja A siirtyvät myös y-suunnassa eri matkat, josta aiheutuu viivaelementin  $\Delta x$  kääntymisen kuvan 4 (b) mukaisesti. Samoin pisteet P ja B siirtyvät x-suunnassa eri matkat ja tästä aiheutuu viivaelementin  $\Delta y$  kääntymisen. Viivaelementtien  $\Delta x$  ja  $\Delta y$  kääntymisestä aiheutuu niiden välisen suoran kulman APB muutos, jota sanotaan x- ja y-akselien väliseksi liukumaksi  $\gamma_{xy}$ . Koska kulma  $\alpha_x$  kuvassa 4 (b) on todellisuudessa hyvin pieni, voidaan käyttää arviota  $\alpha_x \approx \tan \alpha_x$ . Myös venymä  $\epsilon_x$  on hyvin pieni, joten voidaan käyttää myös arviota  $PA \approx P'A'$ . Näistä oletuksista seuraa

$$\alpha_x \approx \tan \alpha_x \approx \frac{v_{,x} \Delta x}{\Delta x} = v_{,x} \quad (7)$$

Vastaavalla tavalla saadaan tulos  $\alpha_y \approx u_{,y}$ . Voidaan näin ollen kirjoittaa tulos

$$\gamma_{xy} = \alpha_x + \alpha_y = u_{,y} + v_{,x} \quad (8)$$

Näin saadaan tasomuodonmuutostilalle kinemaattiset yhtälöt, jotka antavat muodonmuutos- ja siirtymäkomponenttien välisen yhteyden.

$$\epsilon_x = u_{,x} \quad \epsilon_y = v_{,y} \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad (9)$$

Tasomuodonmuutostilassa pisteen muodonmuutoskomponentit ovat x- ja y-akselin suuntaisten viivaelementtien venymät  $\epsilon_x$  ja  $\epsilon_y$  sekä näiden viivaelementtien välisen suoran kulman liukuma  $\gamma_{xy}$ . Myöhemmin osoitetaan, että näiden avulla voidaan laskea kaikkien tarkastelupisteestä alkavien viivaelementtien venymät ja minkä tahansa siitä alkavan kohtisuoran viivaelementtiparin välisen suoran kulman liukuma. Komponentit  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  ja  $\gamma_{xy}$  riittävät pisteen tasomuodonmuutostilan hallitsemiseen.

## Yleinen muodonmuutostila

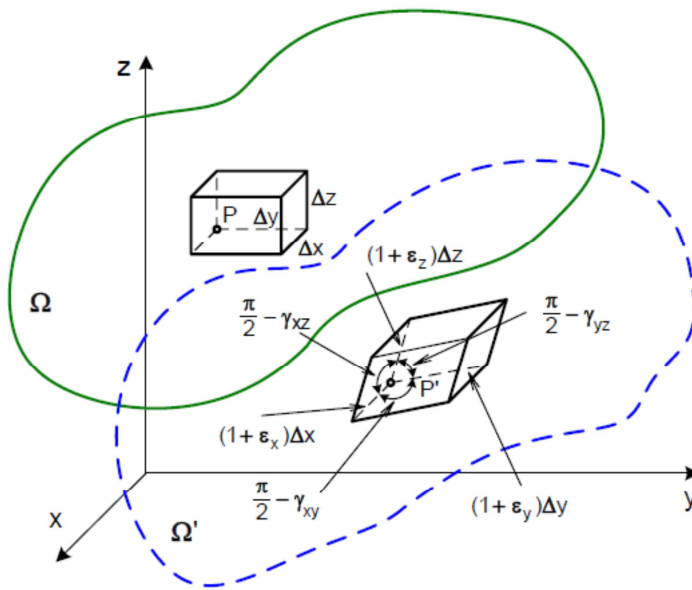
Yleisessä kolmiulotteisessa tapauksessa pisteen muodonmuutostilaa voidaan tarkastella kuvan 5 tarkastelupisteestä P alkavien koordinaattiakselien suuntaisten viivaelementtien  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  ja  $\Delta z$  avulla. Muodonmuutoksessa viivaelementit venyvät venymien ollessa  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  ja  $\epsilon_z$ . Samalla viivaelementit kääntyvät niin, että niiden väliset suorien kulmien liukummat ovat  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$  ja  $\gamma_{xz}$ , jossa alaindeksit ilmaisevat, minkä kahden viivaelementin välisen suoran kulman liukumasta on kysymys. Yleisessä tapauksessa pisteen

hum (muutettu alkuperäisestä ©Matti Lähteenmäki)

muodonmuutoskomponentit ovat venymät  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  ja  $\epsilon_z$ , sekä liukumien  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$  ja  $\gamma_{xz}$ . Myöhemmin osoitetaan, että nämä kuusi komponenttia riittävät pisteen muodonmuutostilan hallitsemiseen. Siirtymäkomponenttien yhteys muodonmuutoskomponentteihin löydetään, kun suoritetaan tasomuodonmuutostilan yhteydessä esitetty tarkastelu kaikissa kolmessa koordinaattitasossa. Tulokseksi saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= u_{,x} & \epsilon_y &= v_{,y} & \epsilon_z &= w_{,z} \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} & \gamma_{yz} &= v_{,z} + w_{,y} & \gamma_{xz} &= u_{,z} + w_{,x} \end{aligned} \quad (10)$$

Yhtälöitä (10) sanotaan kinemaattisiksi yhtälöiksi. Ne ilmaisevat näiden suureiden välisen geometrisen yhteyden, mutta eivät sisällä mitään tietoa siitä, mistä nämä suureet aiheutuvat.



Kuva 5. Yleinen muodonmuutostila

Liukumien  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  ja  $\gamma_{yz}$  sijasta käytetään myös muodonmuutoskomponentteja

$\epsilon_{xy}$ ,  $\epsilon_{xz}$  ja  $\epsilon_{yz}$ , jotka määritellään yhtälöillä

$$\epsilon_{xy} = \gamma_{xy} / 2 \quad \epsilon_{yz} = \gamma_{yz} / 2 \quad \epsilon_{xz} = \gamma_{xz} / 2 \quad (11)$$

Muodonmuutoskomponentit voidaan järjestää (symmetriseksi) muodonmuutosmatriisiksi  $\epsilon$ , jonka kukin vaakarivi sisältää samaan viivaelementtiin liittyvät komponentit eli

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (12)$$

## Muodonmuutoskomponenttien yhteensopivuusyhtälöt

Tämän kohdan voinet hypätä ensimmäisellä lukemalla ylitse ja palata jos aihetta on. Jos sinulla on nimittäin käytössä siirtymäfunktio, niin yhteensopivuusyhtälöt toteutuvat automaattisesti.

Tasomuodonmuutostilan kolme muodonmuutoskomponenttia  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  ja  $\gamma_{xy}$  saadaan kinemaattisten yhtälöiden (9) mukaan laskettua kahdesta siirtymäkomponentista  $u$  ja  $v$ . Näin ollen on ilmeistä, että muodonmuutoskomponentit eivät ole toisistaan riippumattomia, vaan niiden välille on johdettavissa yhteys. Kaavoista (9) seuraa

$$\varepsilon_{x,yy} = u_{,xyy} \quad \varepsilon_{y,xx} = v_{,xxy} \quad \gamma_{xy,xy} = u_{,xyy} + v_{,xxy} \quad (13)$$

joten on oltava voimassa

$$\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} = \gamma_{xy,xy} \quad (14)$$

Yhtälö (14) on muodonmuutoskomponenttien yhteensopivuusyhtälö tasomuodonmuutostilassa. Yhtälön (14) toteutuminen takaa, että kappale selviytyy ehjänä muodonmuutoksesta eli kuvan 4 mukaiset muotoansa muuttaneet suorakulmioelementit PACB muodostavat yhtenäisen kappaleen muodonmuutoksen jälkeenkin. Yleisessä kolmiulotteisessa tapauksessa kuusi muodonmuutoskomponenttia  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  ja  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$  ja  $\gamma_{xz}$  saadaan kinemaattisten yhtälöiden (10) mukaan kolmesta siirtymäkomponentista  $u$ ,  $v$ , ja  $w$ . Taaskin on ilmeistä, että muodonmuutoskomponentit eivät ole toisistaan riippumattomia, vaan niiden välille voidaan johtaa kolme yhteensopivuusyhtälöä. Nämä saadaan käsittelemällä kaavoja (10) samaan tapaan kuin edellä. Tulos voidaan esittää kahdessa vaihtoehtoisessa muodossa

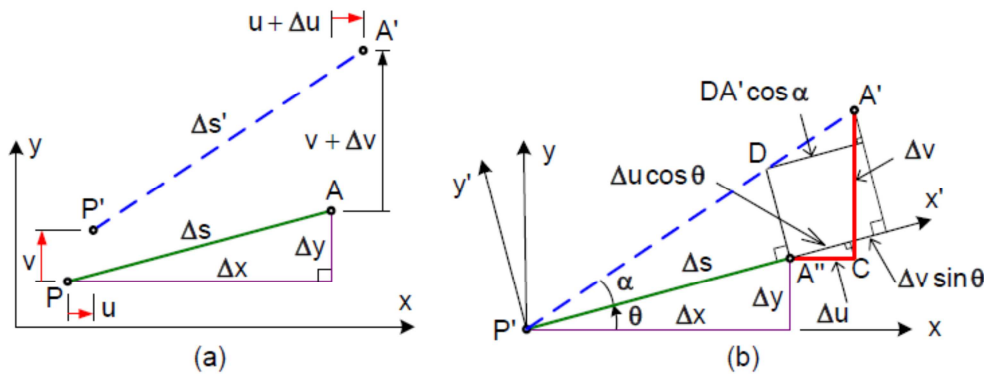
$$\begin{aligned} A: \quad & \varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} = \gamma_{xy,xy} \\ & \varepsilon_{y,zz} + \varepsilon_{z,yy} = \gamma_{yz,yz} \\ & \varepsilon_{z,xx} + \varepsilon_{x,zz} = \gamma_{xz,xz} \end{aligned} \quad \begin{aligned} B: \quad & 2\varepsilon_{x,yz} = (-\gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y} + \gamma_{xy,z})_{,x} \\ & 2\varepsilon_{y,xz} = (\gamma_{yz,x} - \gamma_{xz,y} + \gamma_{xy,z})_{,y} \\ & 2\varepsilon_{z,xy} = (\gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y} - \gamma_{xy,z})_{,z} \end{aligned} \quad (15)$$

## Muodonmuutoskomponenttien transformointi

Kohdassa 2 todettiin, että pisteen tasomuodonmuutostila hallitaan muodonmuutoskomponenttien  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  ja  $\gamma_{xy}$  avulla. Seuraavassa esitetään, miten tämä tapahtuu. Tarkastellaan kuvan 2.6 mukaista viivaelementtiä PA, jonka pituus on ennen muodonmuutosta  $\Delta s$  ja koordinaattiakseleiden suuntaiset projektiot  $\Delta x$  ja  $\Delta y$ . Muodonmuutoksen seurauksena PA tulee asemaan P'A', jossa sen pituus on  $\Delta s'$ . Pisteen P siirtymäkomponentit ovat  $u$  ja  $v$  sekä pisteen A siirtymäkomponentit  $u + \Delta u$  ja  $v + \Delta v$ . Lisäyksille  $\Delta u$  ja  $\Delta v$  käytetään approksimaatioita

$$\Delta u \approx u_{,x} \Delta x + u_{,y} \Delta y \quad \Delta v \approx v_{,x} \Delta x + v_{,y} \Delta y \quad (16)$$

Kuvassa 6 (b) viivaelementti PA on siirretty suuntansa säilyttäen niin, että pisteet P ja P' yhtyvät eli PA on asemassa P'A''. Silloin  $\Delta u = A''C$  ja  $\Delta v = CA'$ . Tavoitteena on löytää kuvan 6 (b)  $x'y'$ -koordinaatiston muodonmuutoskomponentit  $\epsilon_{x'}$ ,  $\epsilon_{y'}$  ja  $\gamma_{x'y'}$ .



Kuva 6. Muodonmuutoskomponenttien transformointi

Määritetään ensin venymäkomponentti  $\epsilon_{x'}$ . Koska kulma  $\alpha$  on hyvin pieni, voidaan käyttää arviota  $DA' \cos \alpha \approx DA'$ , jolloin saadaan

$$DA' \approx DA' \cos \alpha = \Delta u \cos \alpha + \Delta v \sin \alpha \quad (17)$$

Venymä  $\epsilon_{x'}$  on määritelmänsä ja kaavojen (16) ja (17) mukaan

$$\epsilon_{x'} = \frac{DA'}{\Delta s} = \left( u_{,x} \frac{\Delta x}{\Delta s} + u_{,y} \frac{\Delta y}{\Delta s} \right) \cos \theta + \left( v_{,x} \frac{\Delta x}{\Delta s} + v_{,y} \frac{\Delta y}{\Delta s} \right) \sin \theta \quad (18)$$

Kun kaavaan (18) sijoitetaan  $\Delta x / \Delta s = \cos \theta$  ja  $\Delta y / \Delta s = \sin \theta$  sekä otetaan lisäksi huomioon yhtälö (9), saadaan tulos

$$\epsilon_{x'} = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (19)$$

Venymä  $\epsilon_{y'}$  saadaan kaavasta (2.19) sijoittamalla kulman  $\theta$  paikalle  $\theta + \pi / 2$ . Lasketaan vielä liukuman  $\gamma_{x'y'}$  lauseke.  $x'$ -akselin suuntaisen viivaelementin kääntymiskulma on  $\alpha$ . Kuvan 6 (b) perusteella saadaan

$$\alpha \approx \tan \alpha \frac{A''D}{\Delta s} \text{ ja } A''D = \Delta v \cos \theta - \Delta u \sin \theta - DA' \sin \alpha \quad (20)$$

jossa  $DA' \sin \alpha \approx \epsilon_{x'} \Delta s \cdot \alpha \approx 0$ . Yhtälön (16) avulla saadaan tulokseksi

$$\alpha = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + v_{,x} \cos^2 \theta - u_{,y} \sin^2 \theta \quad (21)$$

$y'$ -akselin suuntaisen viivaelementin kääntymiskulma  $\beta$  saadaan kulman  $\alpha$  lausekkeesta sijoittamalla kulman  $\theta$  paikalle  $\theta + \pi / 2$ . Tällöin seuraa tulos

$$\beta = (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} \sin^2 \theta - \gamma_{xy} \cos^2 \theta \quad (22)$$

Liukuma  $\gamma_{x'y'}$  on  $\alpha - \beta$ , joten

$$\gamma_{x'y'} = -2(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (23)$$

Käyttämällä suuntakosineja ja liukuman puolikasta  $\varepsilon_{xy}$  saadaan transformointikaavat muotoon

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{x'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2 & m^2 & 2lm \\ m^2 & l^2 & -2lm \\ -lm & lm & l^2 - m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Vertaamalla saatuja transformointiyhtälöitä tasojännitystilan jännityskomponenttien vastaaviin yhtälöihin havaitaan niiden olevan täsmälleen samaa muotoa.

### Yleinen muodonmuutostila

Edellä saatu vastaavuus jännitystilan ja muodonmuutostilan välillä on voimassa myös yleisessä kolmiulotteisessa tapauksessa. Tämä merkitsee sitä, että kappaleessa 1 jännityksille johdetuista tuloksista saadaan vastintulokset muodonmuutoksille korvaamalla kaavoissa jännityskomponentit vastaavilla muodonmuutoskomponenteilla. Esimerkiksi vektorin  $\mathbf{n}$  suuntaisen viivaelementin venymäksi  $\varepsilon_n$  saadaan kaavan (Jännitystila 30) perusteella

$$\varepsilon_n = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \quad (25)$$

Vastaavasti  $x'y'z'$ -koordinaatiston muodonmuutoskomponentit voidaan laskea xyz-koordinaatiston komponenteista kaavan (33) perusteella seuraavasti

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{L}^T \quad (26)$$

jossa  $\mathbf{L}$  on kiertomatriisi (Jännitystila yht. 32) ja  $\boldsymbol{\varepsilon}$  muodonmuutosmatriisi (12).

### Päävenymät ja -suunnat

Jännitystilan ja muodonmuutostilan analogiasta seuraa, että muodonmuutostilalle voidaan esittää pääjännityksiä ja -suuntia vastaavat käsitteet.

### Tasomuodonmuutostila

Tasomuodonmuutostilassa venymäkomponentilla  $\epsilon_x$  on kaksi ääriarvoa  $\epsilon_1$  ja  $\epsilon_2$ , jotka esiintyvät toisiaan vastaan kohtisuorissa suunnissa  $\theta_1$  ja  $\theta_2$ . Päävenymät  $\epsilon_1$  ja  $\epsilon_2$  ovat kaavan (Jännitystila 38) nojalla

$$\epsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2} \quad (27)$$

Vastaavat pääsuunnat ovat yhtälön (Jännitystila 36) perusteella

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\epsilon_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad \text{ja} \quad \theta_2 = \theta_1 + \pi / 2 \quad (28)$$

$\epsilon_1$  on venymäkomponentin  $\epsilon_x$  suurin arvo ja  $\epsilon_2$  sen pienin arvo. Pääsuuntien välinen liukuma on nolla. Pääsuuntien viivaelementit säilyttävät muodonmuutoksessa suuntansa eli pysyvät kohtisuorassa toisiaan vastaan, ne ainoastaan venyvät tai kutistuvat pituussuunnassa.

### Yleinen muodonmuutostila

Yleisessä kolmiulotteisessa tapauksessa muodonmuutostilalla on kolme päävenymää toisiaan vastaan kohtisuorissa pääsuunnissa eli pääsuuntien väliset liukumukset ovat nollia. Päävenymät saadaan kaavan (Jännitystila 50) perusteella yhtälöstä

$$\epsilon_p^3 - J_1 \epsilon_p^2 + J_2 \epsilon_p - J_3 = 0 \quad (29)$$

jossa kaavan (Jännitystila 51) mukaisesti

$$J_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \text{Tr}(\epsilon) \quad J_2 = \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x - \epsilon_{xy}^2 - \epsilon_{yz}^2 - \epsilon_{xz}^2$$

$$J_3 = \det(\epsilon) = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{vmatrix} \quad (30)$$

Pääsuunnat saadaan kaavan (Jännitystila 48) mukaisesti ratkaisemalla kutakin päävenymää vastaava yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_p & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y - \epsilon_p & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z - \epsilon_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

jossa lisäksi  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ . Päävenymät ovat muodonmuutosmatriisin  $\epsilon$  ominaisarvot ja pääsuunnat sen ominaisvektorit. Koska  $\epsilon$  on reaalinen ja symmetrinen matriisi, ovat päävenymät reaaliset. Yhtälön (29)

kertoimet  $J_1$ ,  $J_2$  ja  $J_3$  ovat muodonmuutostilan pääinvariantit, jotka eivät riipu käytettävästä koordinaatistosta.

Jos kaikki päävenymät ovat erisuuria, saadaan ryhmästä (31) kutakin päävenymää vastaava yksikäsitteinen pääsuunta. Jos kaksi päävenymistä on yhtä suuria, saadaan kolmatta päävenymää vastaava pääsuunta yksikäsitteisesti määräytyksi ja kaikki tätä vastaan kohtisuorat suunnat ovat myös pääsuuntia. Kyseessä on sylinterimäinen muodonmuutostilatila. Jos kaikki päävenymät ovat yhtä suuria, ovat kaikki suunnat pääsuuntia ja liukumaa ei esiinny minkään suuntien välillä. Tällaista tapausta sanotaan pallomaiseksi muodonmuutostilaksi.

### Siirtymäkomponenttien reunaehdot

Jos kappaleen pinnan pisteessä tunnetaan pintavoimavektori  $\mathbf{t}$ , on jännityskomponenttien reunaehtojen (Jännitystila 55) oltava voimassa. Toinen mahdollisuus on, että tunnetaan reunan pisteessä sen siirtymävektori. Tästä seuraa tarkastelupisteen  $P$  siirtymäkomponenteille reunaehdot

$$u = u_0 \quad v = v_0 \quad w = w_0 \quad (32)$$

jossa  $u_0$ ,  $v_0$  ja  $w_0$  ovat tunnetut siirtymäkomponentit. Siirtymäkomponenttien reunaehdot liittyvät tavallisesti kappaleen tuentaan ja usein annetut tukisiirtymät ovat  $u_0=0$ ,  $v_0=0$ ,  $w_0=0$ .

Kolmannen reunaehtotapauksen muodostavat sekareunaehdot, jolloin kappaleen pinnan pisteessä on kunkin koordinaattiakselin suunnassa annettu joko pintavoimakomponentti tai siirtymäkomponentti. Tarkastelupisteen reunaehdotyhtälöiksi tulee tällöin yhdistelmä yhtälöistä (Jännitystila 55) ja (32). Tietyn koordinaattiakselin suuntaan ei voida antaa sekä siirtymä- että pintavoimakomponenttia vaan jompikumpi niistä. Edellä oletettiin reunaehtojen liittyvän xyz-koordinaatiston akseleiden suuntiin. Yleisessä tapauksessa reunaehdot liittyvät kussakin reunan pisteessä xyz-koordinaatistoon nähden kiertyneeseen  $x'y'z'$ -koordinaatistoon. Tällaiset vinot reunaehdot voidaan muuntaa xyz-koordinaatistoon koordinaatiston kierrolla tai käyttää erillistä reunaehtoelementtiä.