Matematiikan ja matriisilaskennan kertausta

Yleistä

Kirjoittelen tänne joitain kurssin keskeisiä asioita niille, jotka eivät aio investoida tarvittavaa pääomaosuutta oppikirjan hankintaan, vaan aikovat hyödyntää sen jollain paremmalla tavalla. Tässä esityksessä on varmasti joitain virheitä, joista toivon valppaan lukijan ilmoittavan minulle.

Notaatiosta (Notation)

Nimike	Merkintä tekstissä	Muu merkintä
Sarakevektori tai pystyvektori	$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$	$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$
Matriisi, jossa on m riviä ja n saraketta	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$	$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$
Derivaatta	$\frac{dy(x)}{dx} = D_x\left[y(x)\right] = \frac{\partial y(x)}{\partial x}$	$y_{,x}(x) = y'(x)$
Determinantti	$\det(\mathbf{A})$	$\lvert\mathbf{A}\rvert$
Matriisin jälki (toistuva indeksi, joten automaattinen summaus)	$Trace(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$	$Trace(\mathbf{A}) = a_{ii}$
Määrätty integraali	$I = \int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b$	$I = \int_a^b f(x)\,dx = {}^{b}\!/_{a} F(x)$
Virtuaalinen siirtymä (oik. Chandrupatla)	$\delta u(x),\ \delta u = \mathbf{N}\ \delta\mathbf{Q}$	$\phi(x),\ \phi = \mathbf{N}\,\boldsymbol{\psi}$
Virtuaalinen venymä (oik. Chandrupatla)	$\delta\varepsilon(x),\ \delta\varepsilon = \mathbf{B}\ \delta\mathbf{Q}$	$\varepsilon(\phi),\ \varepsilon(\phi) = \mathbf{B}\,\boldsymbol{\psi}$
Viivakuorma [N/m, N/mm]	$\begin{bmatrix} q_x & q_y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \mathbf{q}$	$\begin{bmatrix} p_x & p_y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \mathbf{p}$
Painekuorma [N/m^2, N/mm^2]	$\begin{bmatrix} p_x & p_y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \mathbf{p}$	$\begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \mathbf{T}$
Tilavuuskuorma [N/m^3, N/mm^3]	$\begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \mathbf{f}$	$\begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \mathbf{f}$

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Luento vk 1 Syksy 2013.

Rivi- ja sarakevektorit (Row and column vectors)

Rivivektori $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$

Sarakevektori $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

Yhteenlasku (Addition and subtraction)

$$\mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} \qquad eli \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Skalaarilla kertominen (Multiplication by a scalar)

$$\alpha\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Kertolasku (Multiplication)

$$\mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times p} \cdot \mathbf{B}_{p\times n} \qquad eli \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{ik} b_{kj}$$

Huom. Matriisien välissä voidaan käyttää tai olla käyttämättä ns. pisteoperaattoria. Vertaa kahden vektorin pistetuloa, jossa pistettä on syytä käyttää. Lisäksi voidaan käyttää myös ns. kaksoispistetuloa (Double Dot Product)

$$\alpha = \mathbf{A}_{m\times n} : \mathbf{B}_{m\times n} \qquad eli \qquad \alpha = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = a_{ij} b_{ij} \ , \alpha \in R$$

Transpoosi (Transpose)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Luento vk 1 Syksy 2013.

Derivointi ja integrointi (Differentation and integration)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x+y & x^2-xy \\ 6+x & y \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dx}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2x-y \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\iint_A \mathbf{B}\,dA = \int_0^b\int_0^a \begin{bmatrix} x+y & x^2-xy \\ 6+x & y \end{bmatrix} dx\,dy = \int_0^b \begin{bmatrix} \frac{x^2}{2}+yx & \frac{x^3}{3}-\frac{x^2y}{2} \\ 6x+\frac{x^2}{2} & yx \end{bmatrix}_0^a dy = \int_0^b \begin{bmatrix} \frac{a^2}{2}+ya & \frac{a^3}{3}-\frac{a^2y}{2} \\ 6a+\frac{a^2}{2} & ya \end{bmatrix} dy$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{a^2y}{2}+\frac{y^2a}{2} & \frac{a^3y}{3}-\frac{a^2y^2}{4} \\ 6ay+\frac{a^2y}{2} & \frac{y^2a}{2} \end{bmatrix}_0^b = \begin{bmatrix} \frac{a^2b}{2}+\frac{b^2a}{2} & \frac{a^3b}{3}-\frac{a^2b^2}{4} \\ 6ab+\frac{a^2b}{2} & \frac{b^2a}{2} \end{bmatrix}$$

Huom ! Integrointialueena oletetaan olevan suorakaide, jonka leveys on a ja korkeus on b. Yleisemmillä integrointirajoilla integrointi hankaloituu.

Diagonaalimatriisi (Diagonal matrix)

$$\mathbf{D}_{n\times n} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

Identiteettimatriisi (Identity matrix)

$$\mathbf{I}_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Symmetrinen matriisi (Symmetric matrix)

$$\mathbf{A}_{n\times n} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{n\times n}$$

Yläkolmiomatriisi (Upper triangular matrix)

$$\mathbf{U}_{n\times n} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Huom ! $\det\left(\mathbf{U}_{n\times n}\right) = u_{11}\cdot u_{22}\cdot\cdots\cdot u_{nn}$

Determinantti (Determinant)

Kurssilla käsitellään neliömatriiseja, joiden rivien lukumäärä on 1,2 tai 3, mikäli on tarkoitus laskea determinantti käsipelin.

$$\mathbf{A} = \left[a_{11}\right] \qquad \Rightarrow \det\left(\mathbf{A}\right) = \left|\mathbf{A}\right| = a_{11}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \det\left(\mathbf{A}\right) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \det\left(\mathbf{A}\right) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Käänteismatriisi (Inverse matrix)

Kurssilla käsitellään neliömatriiseja, joiden rivien lukumäärä on 1,2 tai 3, mikäli on tarkoitus laskea käänteismatriisi käsipelin. Neliömatriisin käänteismatriisi määritellään yhteydellä:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A} = \left[a_{11}\right] \qquad \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$C_{11}=+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad C_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad C_{13}=+\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$C_{21}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad C_{22}=+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad C_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$C_{31}=+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad C_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad C_{33}=+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Huom ! $\exists \mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow \det(\mathbf{A}_{n\times n}) \neq 0$

Yhtälöryhmä (System of simultaneous equations)

Tällä kurssilla laskentamallin solmusiirtymät ratkaistaan yhtälöryhmästä

$$\mathbf{K}\,\mathbf{Q}=\mathbf{F}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{m1} & K_{m2} & \dots & K_{mm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}$$

yhtälöryhmä voidaan ratkaista käsipelillä m<4 käyttäen käänteismatriisia

$$\mathbf{Q}=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$$

jos m>3, niin voidaan käyttää esimerkiksi Gaussin eliminaatiomenetelmää tai jotain valmisohjelman yhtälöryhmän ratkaisufunktiota, jolloin (yleensä) ei olla kiinnostuneita käänteismatriisista vaan ainoastaan ratkaisuvektorista **Q**.

Ominaisarvot ja vektorit (Eigenvalues and eigenvectors)

Yhtälöryhmän

$$\mathbf{A}_{mxm}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$$

ratkaisu λ_i on matriisin A ominaisarvo, jos ryhmällä on ei-triviaaliratkaisu ts. $\mathbf{x}=[x_1, x_2 \cdots x_m]^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$. Tällöin vektori **x** on ominaisarvoon λ_i liittyvä ominaisvektori. Symmetrisellä positiividefiniitillä neliömatriisilla $\mathbf{A}_{mxm}$ on m kappaletta positiivisia (ei välttämättä erisuuria) ominaisarvoja ja sille voidaan valita m kappaletta keskenään ortogonaalisia ominaisvektoreita.

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Luento vk 1 Syksy 2013.

Matriisin A ominaisarvot saadaan ratkaisemalla karakteristisen yhtälön

$$\det\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

juuret. Ominaisarvoon λ_i liittyvä ominaisvektori $\mathbf{x}^i$ on homogeenisen ryhmän

$$\left(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}\right)\mathbf{x}^i=\mathbf{0}$$

ei-triviaali ratkaisu. (Ominaisvektorissa $\mathbf{x}^i$ i on yläindeksinä, jotta alaindeksiä voidaan käyttää ominaisvektorin komponentille $\mathbf{x}^i_j$).
Esimerkki:

Erään levyrakenteen (tasojännitystila) pisteen P jännityskomponentit ovat:

$$\underline{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}114 & -95 & -65\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\ \mathrm{MPa}$$

Jännitystilaa vastaava jännitysmatriisi on

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}114 & -65 \\ -65 & -95\end{bmatrix}\mathrm{MPa}$$

Lasketaan jännitysmatriisin ominaisarvot (ilman dimensioita) ja ominaisvektorit.

$$\det\begin{vmatrix}114-\lambda & -65 \\ -65 & -95-\lambda\end{vmatrix}=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\lambda^2-19\lambda-15055=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\lambda_1=132.57 \\ \lambda_2=-113.57\end{cases}$$

Ensimmäiseen ominaisarvoon liittyvä (eräs) ominaisvektori saadaan

$$\begin{bmatrix}114-132.57 & -65 \\ -65 & -95-132.57\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^1 \\ x_2^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}-18.57 & -65 \\ -65 & -277.57\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^1 \\ x_2^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$18.57\cdot x_1^1+65\cdot x_2^1=0$$

Viimeinen yhtälö saatiin ensimmäiseltä riviltä. Sama yhtälö saataisiin myös alemmalta riviltä (totea). Koska ominaisvektorin pituutta ei ole annettu, niin valitaan (paremman tiedon puutteessa) ominaisvektorin ensimmäisen komponentin pituus ykköseksi, jolloin

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2856 \end{bmatrix}$$

Vastaavalla tavalla toiseen ominaisarvoon liittyvä ominaisvektori saadaan

$$\begin{bmatrix} 114+113.57 & -65 \\ -65 & -95+113.57 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

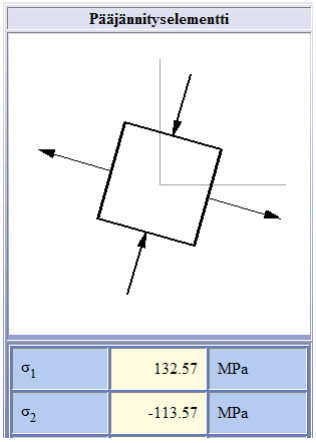
$$\begin{bmatrix} 227.57 & -65 \\ -65 & 18.57 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$-65 \cdot x_1^2 + 18.57 \cdot x_2^2 = 0$$

joten

$$\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3.5 \end{bmatrix}$$

käy toiseksi ominaisvektoriksi. Alla olevassa kuvassa on vielä havainnollistettu ominaisarvoja λ_1 ja λ_2 nuolilla ja ominaisvektoreita elementin kiertymisellä.



Ominaisongelmaa käsitellään tällä kurssilla ominaisvärähtelytehtävän yhteydessä.

Positiividefiniitti matriisi (Positive definite matrix)

Symmetristä neliömatriisia $\mathbf{A}_{mxm}$ sanotaan positiividefiniitiksi, jos sen kaikki ominaisarvot ovat aidosti positiivisia (>0).

Toinen määritelmä positiividefiniittisyydelle: Symmetristä matriisia **A** sanotaan positiividefiniitiksi, jos kaikilla vektoreilla $\mathbf{x} = \left[x_1, x_2 \cdots x_m\right]^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\,\mathbf{x} > 0$$

Tällä kurssilla oletetaan, että jos laskentamallin jäykän kappaleen liike on estetty ja materiaaliarvot ovat ”järkevät”, niin laskentamallin globaali jäykkyysmatriisi **K** on symmetrinen ja positiividefiniitti.

Gaussin eliminaatio (Gauss elimination)

Gaussin eliminaatio on tehokas menetelmä ratkaista yhtälöryhmä

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

jos neliömatriisin **A**:n dimensio on pienehkö. Gaussin eliminaation ideana on suorittaa yhtälöryhmälle vaakarivimuunnoksia siten, että jäljelle jää yhtälöryhmä, jossa kerroinmatriisi **A** on muuttunut yläkolmiomatriisiksi.

Gaussin eliminaatiota käytetään myös matriisin **A** determinantin laskentaan.

http://people.revoledu.com/kardi/tutorial/LinearAlgebra/RREF.html#RREF