# JÄNNITYS- JA MUODONMUUTOSTILAN YHTEYS

## Materiaalimalleista

Jännitys- ja muodonmuutostila ovat kytkennässä toisiinsa ja kytkennän antavia yhtälöitä sanotaan materiaaliyhtälöiksi eli konstitutiivisiksi yhtälöiksi. Materiaaliyhtälöt on etsittävä kokeellisesti ja ne ovat todellisilla aineilla mutkikkaita. Tästä johtuen lujuusopissa käytetään materiaalimalleja, joiden konstitutiiviset yhtälöt ovat yksinkertaisia ja analyyttisesti esitettävissä, mutta sisältävät aineiden tärkeimmät ominaisuudet.

Materiaalille oletetaan kontinuumimalli, jolloin aineen ajatellaan jakaantuvan jatkuvasti kappaleeseen. Kontinuumi on homogeeninen, jos sen materiaaliyhtälöt ovat samat kaikissa pisteissä ja isotrooppinen, jos materiaaliyhtälöt ovat suunnasta riippumattomat. Epäisotrooppisia ja epähomogeenisia materiaaleja ovat mm. puu, valssattu teräs ja lasikuituvahvisteinen muovi.

Jos konstitutiivisissa yhtälöissä on aika mukana, on materiaali ajasta riippuva. Ajasta riippuvia materiaaleja ovat esimerkiksi nesteet, muovit, asfaltti, lakat, tekstiilikuidut, yleensä orgaaniset aineet ja metallit korkeissa lämpötiloissa. Ajasta riippumattomat materiaalit voidaan jakaa niihin syntyvän muodonmuutoksen perusteella jäykkiin, kimmoisiin ja plastisiin materiaaleihin. Jäykässä materiaalissa ei ole muodonmuutoksia. Kimmoisen materiaalin muodonmuutokset palautuvat, mutta plastisen materiaalin muodonmuutoksista ainakin osa jää palautumatta, kun kuormitukset poistetaan.

Materiaali on lineaarinen, jos konstitutiiviset yhtälöt ovat jännitys- ja muodonmuutostilan suureiden välisiä lineaarisia yhtälöitä.

## Kimmoteoria

Tarkastellaan lineaarisesti kimmoista materiaalia, jolloin materiaaliyhtälöt ovat ajasta riippumattomia jännitys- ja muodonmuutoskomponenttien välisiä lineaarisia yhtälöitä. Kun lämpötilan vaikutusta ei oteta huomioon, materiaaliyhtälöt ovat tällöin muotoa:

$$\begin{cases} \sigma_x = E_{11}\varepsilon_x + E_{12}\varepsilon_y + E_{13}\varepsilon_z + E_{14}\gamma_{xy} + E_{15}\gamma_{yz} + E_{16}\gamma_{xz} \\ \sigma_y = E_{21}\varepsilon_x + E_{22}\varepsilon_y + E_{23}\varepsilon_z + E_{24}\gamma_{xy} + E_{25}\gamma_{yz} + E_{26}\gamma_{xz} \\ \sigma_z = E_{31}\varepsilon_x + E_{32}\varepsilon_y + E_{33}\varepsilon_z + E_{34}\gamma_{xy} + E_{35}\gamma_{yz} + E_{36}\gamma_{xz} \\ \tau_{xy} = E_{41}\varepsilon_x + E_{42}\varepsilon_y + E_{43}\varepsilon_z + E_{44}\gamma_{xy} + E_{45}\gamma_{yz} + E_{46}\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} = E_{51}\varepsilon_x + E_{52}\varepsilon_y + E_{53}\varepsilon_z + E_{54}\gamma_{xy} + E_{55}\gamma_{yz} + E_{56}\gamma_{xz} \\ \tau_{xz} = E_{61}\varepsilon_x + E_{62}\varepsilon_y + E_{63}\varepsilon_z + E_{64}\gamma_{xy} + E_{65}\gamma_{yz} + E_{66}\gamma_{xz} \end{cases} \tag{1}$$

jossa on otettu huomioon jännitys- ja muodonmuutosmatriisin symmetrisyys. Kun materiaali oletetaan homogeeniseksi, ovat kertoimet $E_{ij}$ yhtälössä (1) materiaalille ominaisia vakioita. Yhtälöissä (1) on 36 materiaalivakiota, joista vain 21 on erilaista, sillä voidaan osoittaa, että $E_{ij} = E_{ji}$ . Jos materiaalilla on symmetriaominaisuuksia, pienenee toisistaan riippumattomien materiaalivakioiden lukumäärä. Yksinkertaisinta tapausta edustaa isotrooppinen materiaali, jolla materiaaliominaisuudet ovat suunnasta riippumattomat. Seurauksena on, että isotrooppisella materiaalilla on vain kaksi vapaata materiaalivakiota.

Teknillisessä kirjallisuudessa näiksi valitaan tavallisesti kimmomoduuli *E* ja Poissonin vakio $\nu$ , jotka on helppo mitata. Usein käytetään apuna myös liukumoduulia $G = E/\,[2(1+\nu)]$ . Toinen sovelluskelpoinen materiaali on ortotrooppinen materiaali, jolla on kolmessa toisiaan vastaan kohtisuorassa suunnassa erilaiset ominaisuudet eli kullakin suunnalla on oma kimmomoduuli ja kullakin suuntaparilla oma liukumoduuli ja Poissonin vakio, jolloin materiaalivakioita on yhdeksän.

Rajoitutaan tässä esityksessä isotrooppisen materiaalin tarkasteluun, jolloin materiaaliyhtälöt ovat:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1+\nu)\varepsilon_x + \nu\left(\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)\right] & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\
\sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1+\nu)\varepsilon_y + \nu\left(\varepsilon_x+\varepsilon_z\right)\right] & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\
\sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1+\nu)\varepsilon_z + \nu\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right)\right] & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Yhtälöistä (2) saadaan jännityskomponentit, kun muodonmuutoskomponentit tunnetaan. Muodonmuutoskomponenttien suhteen ratkaistut materiaaliyhtälöt ovat

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right] & \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x+\sigma_z\right)\right] & \gamma_{yz} &= \tau_{yz}/G \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right] & \gamma_{xz} &= \tau_{xz}/G
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Ryhmää (2) tai (3) sanotaan yleistetyksi Hooken laiksi. Materiaaliyhtälöistä näkyy, että isotrooppisessa materiaalissa jännitys- ja muodonmuutostilojen pääsuunnat yhtyvät. Näin ei ole epäisotrooppisessa materiaalissa.

Yhtälöt (2) voidaan laittaa muotoon

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda e & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} & & \\
\sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda e & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} & e &= \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z \\
\sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda e & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} & \lambda &= \nu E/\left[(1+\nu)(1-2\nu)\right]
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Liukumoduuli *G* ja $\lambda$ ovat Lamén vakiot, joita käytetään vakioiden *E* ja $\nu$ asemesta. Suureelle e saadaan tulkinta tarkastelemalla kuvan (Muodonmuutostila 5) differentiaalisärmiön muodonmuutoksesta johtuvaa tilavuuden muutosta. Alkutilassa tilavuus on $V_0 = \Delta x\Delta y\Delta z$ ja muodonmuutostilassa $V_m = (1+\varepsilon_x)\Delta x(1+\varepsilon_y)\Delta y(1+\varepsilon_z)\Delta z$ . Saadaan siis

$$
V_m = V_0 + \Delta V = \left(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z\right)V_0 \tag{5}
$$

koska venymät oletetaan pieniksi saadaan

$$
V_m \approx \left(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)V_0 = V_0 + eV_0 \qquad \Rightarrow \tag{6}
$$

$$e = \frac{V_m - V_0}{V_0} = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{7}$$

joten e on suhteellinen tilavuuden muutos. Se voidaan lausua jännityskomponenttien avulla sijoittamalla venymäkomponentit yhtälöstä (3), jolloin saadaan

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) \tag{8}$$

Kun tarkastellaan jännityselementtiä, jonka tahoihin kohdistuu hydrostaattinen paine, eli $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ ja $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , saadaan yhtälöstä (8)

$$e = -3(1-2\nu)\frac{p}{E} \qquad \Rightarrow \qquad K = -\frac{p}{E} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{9}$$

Vakiota *K* sanotaan materiaalin puristusmoduuliksi. Jos materiaali on kokoonpuristumatonta eli sen $e = 0$ , on kaavan (8) mukaan silloin $\nu = 0{,}5$ . Koska toisaalta $K > 0$ , kun $e \neq 0$ , saadaan lisäksi ehto $\nu \leq 0{,}5$ ja edelleen $0 \leq \nu \leq 0{,}5$.

## Tasojännitystila

Tasojännitystilan (TJT) konstitutiiviset yhtälöt saadaan yhtälöistä (3) sijoittamalla $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , jolloin tasojännitystila on *xy*-tasossa. Tulokseksi saadaan

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) & \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) & \gamma_{xz} &= 0 \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) & \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned}} \tag{10}$$

Kaavasta (10) saadaan muodonmuutoskomponentit, kun jännityskomponentit tunnetaan. Ratkaisemalla yhtälöt (10) jännityskomponenttien suhteen saadaan

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) & \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} & \sigma_z &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{aligned}} \tag{11}$$

## Tasomuodonmuutostila

Tasomuodonmuutostilan (TMT) konstitutiiviset yhtälöt saadaan yhtälöistä (2) ottamalla huomioon, että $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ , jolloin tasomuodonmuutostila on *xy*-tason suuntainen. Tulokseksi saadaan

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right] & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right] & \tau_{xz} &= 0 \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) & \tau_{yz} &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Kaavasta (12) saadaan jännityskomponentit, kun muodonmuutoskomponentit tunnetaan. Ratkaisemalla yhtälöt (12) muodonmuutoskomponenttien suhteen saadaan

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y\right] \qquad \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x\right] \\ &\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

YHTEENVETO

Edellä esitetyssä lineaarisen lujuusopin perusteoriassa käytettävät tuntemattomat funktiot ovat

| | | |
|---|---|---|
| Jännityskomponentit | $\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}$ | 6 kpl |
| Muodonmuutoskomponentit | $\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}$ | 6 kpl |
| Siirtymäkomponentit | $u \quad v \quad w$ | 3 kpl |

joiden ratkaiseminen on lujuusopin tavoitteena. Tuntemattomien ratkaisemiseksi ovat käytettävissä seuraavat riippumattomat osittaisdifferentiaaliyhtälöt ja yhtälöt

Jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt 3 kpl

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} + f_x = 0$$
$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} + f_y = 0$$
$$\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + f_z = 0$$

Kinemaattiset yhtälöt 6 kpl

$$\varepsilon_x = u_{,x} \qquad \varepsilon_y = v_{,y} \qquad \varepsilon_z = w_{,z}$$
$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \qquad \gamma_{xz} = u_{,z} + w_{,x} \qquad \gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y}$$

Materiaaliyhtälöt 6 kpl

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \qquad \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \qquad \gamma_{xz} = \tau_{xz}/G$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \qquad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G$$

Yhteensä 15 kpl

Yhtälöitä ja tuntemattomia on siis sama määrä. Kun tilavuusvoimat sekä pintakuormitukset ja tuennat on annettu, on tehtävä matemaattisesti yksikäsitteinen. Kappaleen reunan pisteissä kysymykseen tulevat reunaehdot ovat

Pintavoimavektori on annettu. ⇒ Jännityskomponenttien reunaehdot.

Siirtymävektori on annettu. ⇒ Siirtymäkomponenttien reunaehdot.

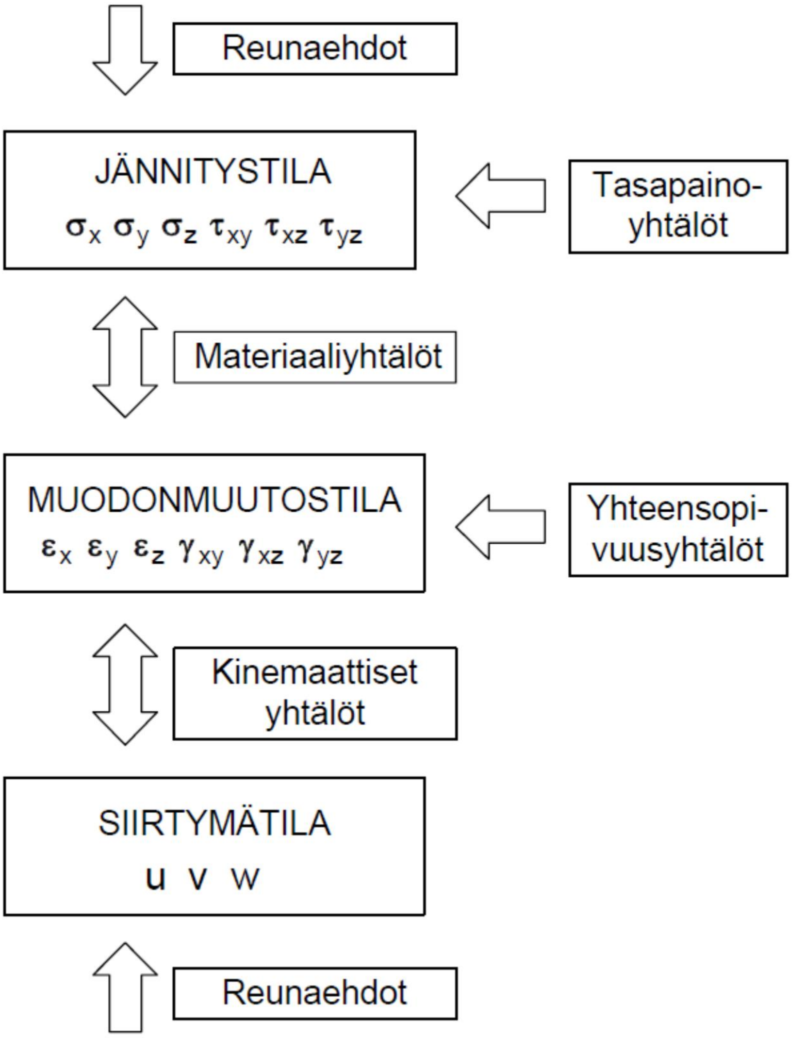
Sekareunaehdot. ⇒ Yhdistelmä jännitys- ja siirtymäkomponenttien reunaehtoja.

Kuvassa 1 on esitetty kaavio lujuusopin perussuureista sekä niitä koskevista ja kytkevistä

yhtälöistä.

Voidaan osoittaa, että jokaisella lineaarisen lujuusopin tehtävällä on aina olemassa yksikäsitteinen ratkaisu. Sen löytäminen analyyttisesti on kuitenkin usein hyvin vaikeaa, mutta onnistuu tavallisesti likimääräisesti numeerisilla menetelmillä, joista tärkein on elementtimenetelmä (FEM).

Lineaarisen lujuusopin ongelmassa on aina pohjimmiltaan kysymys edellä kuvatun yhtälöjärjestelmän reuna-arvotehtävän ratkaisemisesta. Sovellettaessa lujuusoppia eri rakennetyyppeihin kannattaa ottaa huomioon näiden erityispiirteet. Näin saadaan tiettyihin rakennetyyppeihin soveltuvia lujuusopin teorioita (palkkiteoria, laattateoria, kuoriteoria), joissa edellä esitettyjä perusyhtälöitä on kehitelty tarkoituksenmukaiseen muotoon, käytössä voi olla perustuntemattomista johdettuja suureita (taivutusmomentti, jännitysresultantti, suuntakulma) tai osa tuntemattomista on merkityksettöminä oletettu nolliksi. Nämä lujuusopin erityisteoriat eivät ulkoiselta olemukseltaan välttämättä muistuta enää kovinkaan paljon tässä käsiteltyjä perusyhtälöitä, mutta on hyvä muistaa, että niissä on joka tapauksessa sisään rakennettuna perusyhtälöiden mukaiset fysikaaliset ja geometriset lainalaisuudet.




Kuva 1. Lujuusopin yhtälöjärjestelmä

Aiheesta enemmän:

Kurssi: EDE-11100 Materiaalien mekaniikka. Luennoidaan keväällä 2014

Tapio Salmi, Simo Virtanen: Materiaalien mekaniikka, 2008. 413 s., ISBN 978-952-9835-66-5, Hinta 38,00 €

Ottosen N. S., Ristinmaa M.: The Mechanics of Constitutive Modeling, 2005 Elsevier. 745 s.