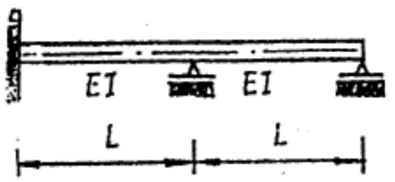
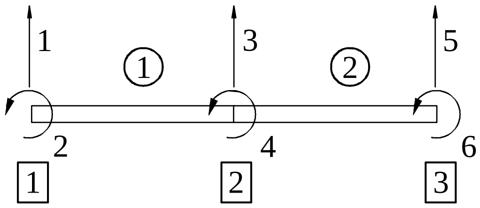
Tampereen teknillinen yliopisto
Teknisen suunnittelun laitos

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Harjoitus 8 Syksy 2013.



2. The midsupport of the beam undergoes a displacement Δ. Determine the rotations at the supports and the reaction force at the midsupport.

Now we divide the structure to two beam elements with two nodal degrees of freedom. The nodes, elements and global degrees of freedom are drawn in the figure below



The active degrees of freedom are presented by the ID-table below

Node	dof1	dof2
1	0	0
2	const.	1
3	0	2

Element	Node1	Node2
1	1	2
2	2	3

The element stiffness matrices are formed next.

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \text{const.} & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 0 \\ \text{c.} \\ 1 \end{array} \qquad \mathbf{k}_2 = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{const.} & 1 & 0 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{c.} \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{array}$$

The model stiffness matrix is scattered with the element stiffness matrix components. The constrained displacement is in the first row and column of the stiffness matrix **K**

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{k}_i = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 & 6L \\ 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 & 6L \\ 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_\Delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Harjoitus 8 Syksy 2013.

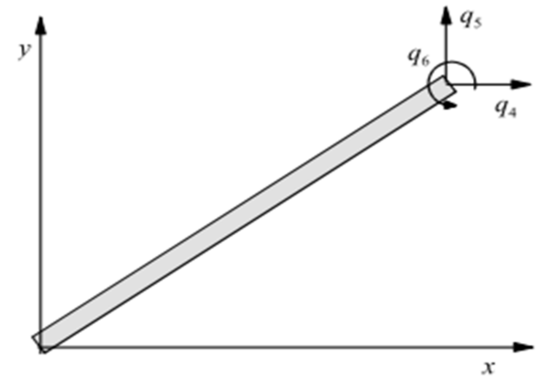
We solve first the second and third equations

$$\frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{EI}{L^2}6\Delta \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{3\Delta}{L} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{3\Delta}{L} \end{bmatrix} = \frac{\Delta}{7L}\begin{bmatrix} 3 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Finally we solve the support reaction in the direction of Δ.

$$F_\Delta = K_{11}\Delta + K_{12}Q_1 + K_{13}Q_2 = \frac{EI}{L^3}\left(24\Delta - 6L\frac{\Delta}{7L}12\right) = \Delta\frac{EI}{L^3}\frac{96}{7}$$



1. Kuvan palkki on jäykästi kiinni origossa. Sen toinen solmu on pisteessä (4,3) m. Palkin päähän kohdistuu alaspäin pistevoima F = 500 N ja palkin oma paino on 100 N/m. Painovoiman suunta on alaspäin. E = 200 GPa, Iz = 10^{-5} m^4 ja A = 0.01 m^2. Laske palkin normaalivoima- ja taivutusmomenttikuvio käyttäen elementtimenetelmää ja kuuden vapausasteen palkkielementtiä.

	Ele 1
Kimmokerroin E [Pa]	2E+11
Pinta-ala A [m^2]	0.01
Neliömomentti [m^4]	0.00001
x1 [mm]	0
x2 [mm]	4
y1 [mm]	0
y2 [mm]	3
x21 [mm]	4
y21 [mm]	3
le [mm]	5
Suuntakosinit	
l = x21 / le	0.8
m = y21 / le	0.6
E*A/Le	400000000
E*Iz/Le^3	16000
Solmu n1	1
Solmu n2	2

$$\mathbf{k}_e' = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 12\kappa & 6\kappa L & 0 & -12\kappa & 6\kappa L \\ 0 & 6\kappa L & 4\kappa L^2 & 0 & -6\kappa L & 2\kappa L^2 \\ -k & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & -12\kappa & -6\kappa L & 0 & 12\kappa & -6\kappa L \\ 0 & 6\kappa L & 2\kappa L^2 & 0 & -6\kappa L & 4\kappa L^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

k lokaali

tai ke'

400000000	0	0	-400000000	0	0
0	192000	480000	0	-192000	480000
0	480000	1600000	0	-480000	800000
-400000000	0	0	400000000	0	0
0	-192000	-480000	0	192000	-480000
0	480000	800000	0	-480000	1600000

L

(kannan vaihtomatriisi)

0.8	0.6	0	0	0	0
-0.6	0.8	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0.8	0.6	0
0	0	0	-0.6	0.8	0
0	0	0	0	0	1

k XY

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_e'\mathbf{L}$$

256069120	191907840	-288000	-256069120	-1.92E+08	-288000
191907840	144122880	384000	-191907840	-1.44E+08	384000
-288000	384000	1600000	288000	-384000	800000
-256069120	-191907840	288000	256069120	191907840	288000
-191907840	-144122880	-384000	191907840	144122880	-384000
-288000	384000	800000	288000	-384000	1600000

K

256069120	191907840	288000
191907840	144122880	-384000
288000	-384000	1600000

Globaali jäykkyysmatriisi **K**

Gravitaatiokuormitus globaalikoordinaatistossa

rx	0	N/m	
ry	-100	N/m	Pituuskoordinaatin funktio

Gravitaatiokuormitus lokaalikoordinaatistossa

rxp	-60	N/m	sauvaosuus
ryp (tämä on q alla)	-80	N/m	palkkiosuus

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \mathbf{r}$$

Ekvivalenttinen solmukuormitus sauvaosuudelle

	-150	N	lokaali vapausaste 1	(-60N/m * 5m / 2)
	-150	N	lokaali vapausaste 4	(rxp * le / 2)

Ekvivalenttinen solmukuormitus palkkiosuudelle

q le / 2	-200	N	lokaali vapausaste 2	(-80N/m * 5m / 2)
q le^2 / 12	-166.666667	Nm	lokaali vapausaste 3	
q le / 2	-200	N	lokaali vapausaste 5	(ryp * le / 2)
-q le^2 / 12	166.666667	Nm	lokaali vapausaste 6	

Lokaali ekvivalenttinen solmukuormitusvektori

f_ekv_l

$$\mathbf{f}_l^V$$

-150	N
-200	N
-166.666667	Nm
-150	N
-200	N
166.666667	Nm

Alaindeksi l viittaa lokaaliin mittaukseen (pilkkumittaukseen)

Globaali ekvivalenttinen solmukuormitusvektori

$$\mathbf{f}_{xy}^V = \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \mathbf{f}_l^V$$

0	N
-250	N
-166.666667	Nm
0	N
-250	N
166.666667	Nm

Globaali solmukuormitusvektori **F**

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + {}^{"}\sum_e{}^{"} \mathbf{f}_{xy}^V$$

0	N
-750	N
166.666667	Nm

$\mathbf{K}^{-1}$

7.5016E-06	-9.999E-06	-3.75E-06
-9.9988E-06	1.333E-05	5E-06
-3.75E-06	5E-06	2.5E-06

Siirtymä **Q**

0.0068741	m	6.874	mm	Q1
-0.00916734	m	-9.167	mm	Q2
-0.00333333	rad	-0.191	ast	Q3

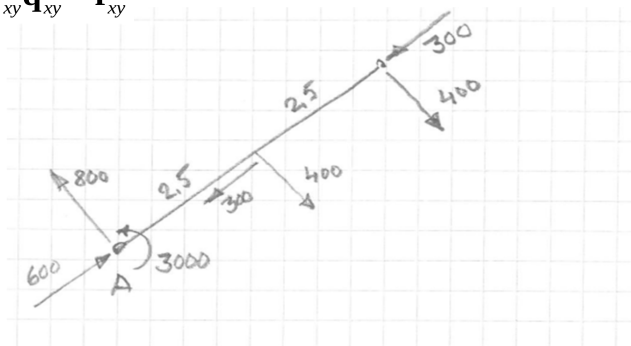
Elementin siirtymä $\mathbf{q}_{XY}$

0	m	q1
0	m	q2
0	rad	q3
0.0068741	m	q4
-0.00916734	m	q5
-0.00333333	rad	q6

$$\mathbf{f}_{xy} = \mathbf{k}_{xy}\mathbf{q}_{xy} - \mathbf{f}_{xy}^{V}$$

Elementin solmuvoimavektori

f1x	0.00	N
f1y	1000	N
m1	3000	Nm
f2x	0.00	N
f2y	-500	N
m2	0.00	Nm



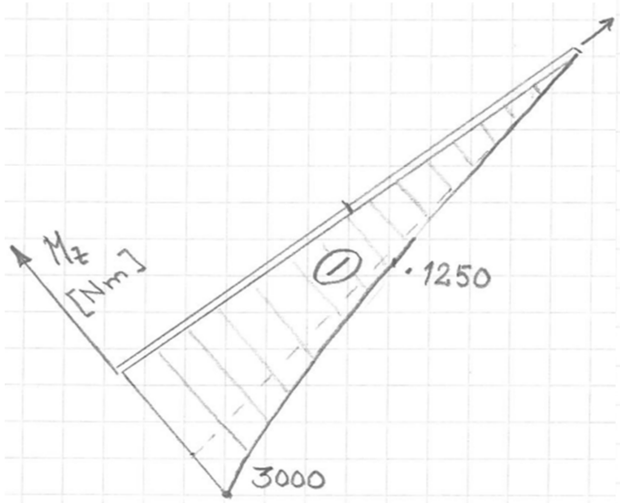
Lokaali solmuvoimavektori $\mathbf{f}_l = \mathbf{L}\,\mathbf{f}_{xy}$

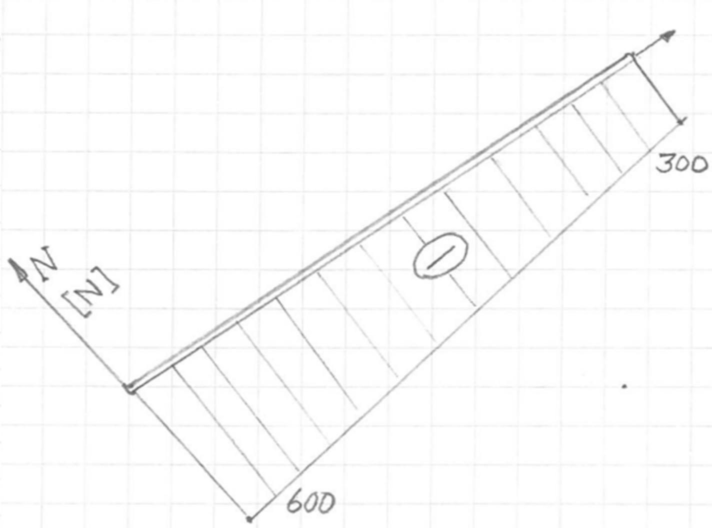
f1x	600.00	N
f1y	800	N
m1	3000	Nm
f2x	-300.00	N
f2y	-400	N
m2	0.00	Nm

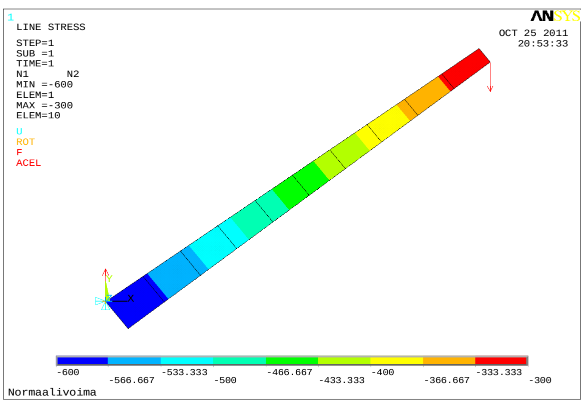
↗: +600 − 300 − 300 = 0 ok

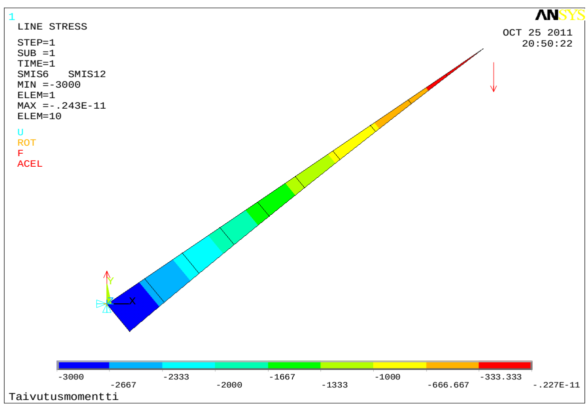
↖: +800 − 400 − 400 = 0 ok

↶A: +3000 − 400 · 2,5 − 400 · 5 = 0 ok









EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Harjoitus 8 Syksy 2013.

3. Pisteen P kohdalla CST-kolmioelementin muotofunktioiden N_1 ja N_2 arvot ovat 0.15 ja 0.25. Määritä pisteen P koordinaatit.

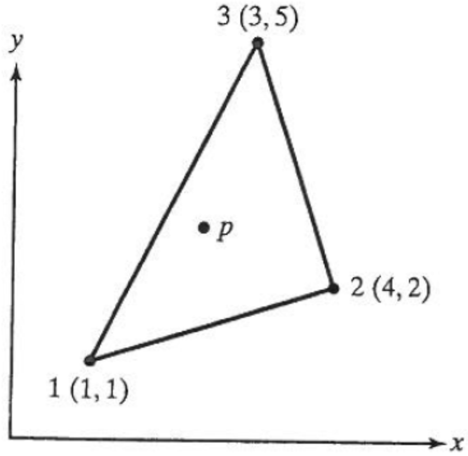


FIGURE P5.3

$N_1 = \xi \qquad N_2 = \eta \qquad N_3 = 1 - \xi - \eta$

$$x(\xi,\eta) = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 = 1 \cdot \xi + 4 \cdot \eta + 3(1 - \xi - \eta) = 3 - 2\xi + \eta$$

$$y(\xi,\eta) = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 = 1 \cdot \xi + 2 \cdot \eta + 5(1 - \xi - \eta) = 5 - 4\xi - 3\eta$$

$\xi = 0.15 \qquad \eta = 0.25$

$$x(0.15, 0.25) = 3 - 2 \cdot 0.15 + 0.25 = 2.95$$

$$y(0.15, 0.25) = 5 - 4 \cdot 0.15 - 3 \cdot 0.25 = 3.65$$