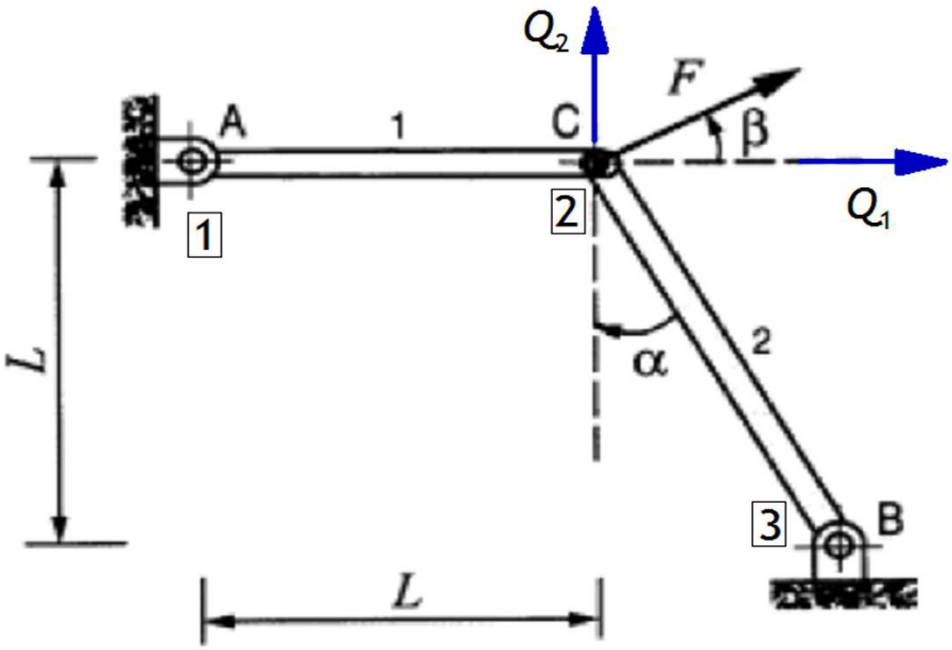
Tampereen teknillinen yliopisto
Teknisen suunnittelun laitos

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Harjoitus 6 Syksy 2013.



F	11000	N
L	1800	mm
Δ*T*	85	K
E	205000	MPa
Kulmat ja pituuden lämpölaajenemiskerroin		
α	0.610865	rad
β	0.558505	rad
αFe	0.000012	1/K
Pinta-alat		
A_1	56.6625	mm^2
A_2	30.0677	mm^2

α	35	ast
β	32	ast

OpNro	83549
M	4
K	9

ID-taulukko

Solmu	dof1	dof2
1	0	0
2	1	2
3	0	0

Pisteet

Ax	0	mm	Bx	3060.374	mm	Cx	1800
Ay	0	mm	By	-1800	mm	Cy	0

Elementti1 (Lokaalisolmu 1 on globaalisolmu 1)

				Solmu 1		Solmu 2	
A_1	56.6625		$\mathbf{k}_1$	6453.229	0	-6453.229167	-0
x_21	1800			0	0	-0	-0
y_21	0		Solmu2	-6453.23	-0	6453.229167	0
Pituus	1800			-0	-0	0	0
l_1	1	suuntakosinit		0	0	1	2
m_1	0						
E*A/L	6453.229						

Elementti2 (Lokaalisolmu 1 on globaalisolmu 3)

A_2	30.0677
x_21	-1260.37
y_21	1800
Pituus	2197.394
l_2	-0.57358
m_2	0.819152
E*A/L	2805.085

$\mathbf{k}_2$

	Solmu 1		Solmu 2	
	922.8448	-1317.96	-922.8448363	1317.959014
	-1317.96	1882.241	1317.959014	-1882.240538
Solmu2	-922.845	1317.959	922.8448363	-1317.959014
	1317.959	-1882.24	-1317.959014	1882.240538
suuntakosinit	0	0	1	2

Jäykkyysmatriisi (sijoittelusummattu sininen osuus)

K

7376.074	-1317.96
-1317.96	1882.241

$\mathbf{K}^{-1}$

0.000154961	0.000108505
0.000108505	0.000607258

P

9328.529	N	F*COS(Beta)
5829.112	N	F*SIN(Beta)

annettu solmukuormitus

Lämpötilan muutoksen vaikutus (vain sauva 1 lämpiää)

$\mathbf{\Theta}_1$

-11848.1	N
0	N
11848.13	N
0	N

$$\mathbf{\Theta}_e = EA\alpha\Delta T \begin{bmatrix} -l \\ -m \\ l \\ m \end{bmatrix}$$

Sijoittelusummataan sininen osuus vektoriin yhdessä **P** vektorin kanssa

F

21176.66	N
5829.112	N

Siirtymät

ei lämpötilan muutosta $\mathbf{Q} = \mathbf{K}^{-1}*\mathbf{P}$

2.078048	mm
4.551965	mm

pelkkä lämpötilan muutos $\mathbf{Q} = \mathbf{K}^{-1}*(\mathbf{F}-\mathbf{P})$

1.836	mm
1.285581	mm

molempien yhteisvaikutus $\mathbf{Q} = \mathbf{K}^{-1}*\mathbf{F}$

3.914048	mm
5.837546	mm

Sauvavoimat elementti 1

Siirtymä ei lämpötilan muut.

$\mathbf{k}_1$

6453.229	0	-6453.23	-0
0	0	-0	-0
-6453.23	-0	6453.229	0
-0	-0	0	0

$\mathbf{q}_1$

0
0
2.078047565
4.551965199

$\mathbf{f}_1=\mathbf{k}_1*\mathbf{q}_1$

-13410.1	N
0	N
13410.1	N
0	N

pelkkä lämpötilan muutos

$\mathbf{q}_1$

0
0
1.836
1.28558104

$\mathbf{f}_1=\mathbf{k}_1*\mathbf{q}_1-\Theta_1$

0	N
0	N
0	N
0	N

ei sauvavoimia lämpötilan muutoksesta,
koska isostaattinen rakenne

Sauvavoimat elementti 2

Siirtymä ei lämpötilan muut

$\mathbf{k}_2$

922.8448	-1317.96	-922.845	1317.959
-1317.96	1882.241	1317.959	-1882.24
-922.845	1317.959	922.8448	-1317.96
1317.959	-1882.24	-1317.96	1882.241

$\mathbf{q}_2$

0
0
2.078047565
4.551965199

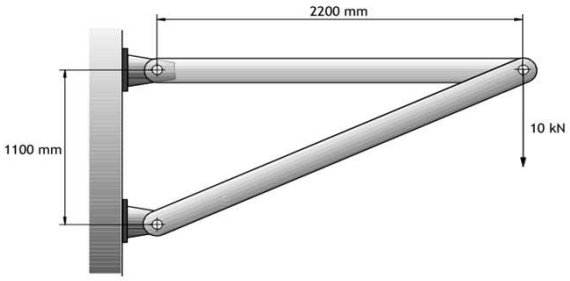
$\mathbf{f}_2=\mathbf{k}_2*\mathbf{q}_2$

4081.588	N
-5829.11	N
-4081.59	N
5829.112	N

normaalivoima

$$N_1 = -\mathbf{f}_1^e\, l - \mathbf{f}_2^e\, m$$

N_1 7116.032



2. Kuvan kannattimeen vaikuttaa pistevoiman **F** lisäksi kannattimen oma paino. Laske elementtimenetelmällä oikean pään siirtymät ja diagonaalisauvan lokaalisolmujen 1 ja 2 jännitykset sekä rakenteen tukireaktiot kun kannatinsauvojen pituustiheys on 100 kg/m ja poikkipinta-ala on 10000 mm^2. Materiaalin kimmokerroin on 70 GPa.

	Ele 1	Ele 2
Kimmokerroin E [MPa]	70000	70000
Pinta-ala A [mm^2]	10000	10000
x1 [mm]	0	0
x2 [mm]	2200	2200
y1 [mm]	0	-1100
y2 [mm]	0	0
x21 [mm]	2200	2200
y21 [mm]	0	1100
le [mm]	2200	2459.674775
Suuntakosinit		
l = x21 / le	1	0.894427191
m = y21 / le	0	0.447213595
E*A/Le	318181.8182	284590.4699
Solmu n1	1	3
Solmu n2	2	2

ID-taulukko
(tuottaa 2*2 matriisin Kr)

Solmu	dof1	dof2	
1	0	0	Vasen ylä
2	1	2	Oikea ylä
3	0	0	Vasen ala

$\mathbf{k}_1$

0	0	1	2	ID
318182	0	-318182	0	0
0	0	0	0	0
-318182	0	318182	0	1
0	0	0	0	2

$\mathbf{k}_2$

0	0	1	2	ID
227672	113836	-227672	-113836	0
113836	56918	-113836	-56918	0
-227672	-113836	227672	113836	1
-113836	-56918	113836	56918	2

Globaali jäykkyysmatriisi IsoK
sijoittelusummattu keltaisempi osuus

K

545854	113836
113836	56918

K^{-1}

3.14286E-06	-6.28571E-06
-6.28571E-06	3.01405E-05

Annettu solmukuormitusvektori P

P

0
-10000

Tilavuuskuormitus eli nyt viivakuormitus

rx	0	N
ry (-g * metripaino / 1000)	-0.981	N/mm

Elementti 1

f^{V1}

0	N
-1079.1	N
0	N
-1079.1	N

$$\mathbf{f}^V = \frac{l_e}{2}\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_x \\ r_y \end{bmatrix}$$

Elementti 2

f^{V2}

0	N
-1206.470477	N
0	N
-1206.470477	N

Globaali kuormitusvektori (sijoittelusummataan siniset osuudet)

F

0	N
-12285.57048	N

Siirtymä **Q** = **K^{-1}*F**

0.077223586	mm
-0.370293656	mm

Diagonaalisauvan (elementti 2) jännitykset

k2

227672	113836	-227672	-113836
113836	56918	-113836	-56918
-227672	-113836	227672	113836
-113836	-56918	113836	56918

Siirtymä **q2**

0	mm
0	mm
0.077223586	mm
-0.370293656	mm

$\mathbf{f}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{q} - \mathbf{f}_e^V - \mathbf{\Theta}_e - \mathbf{f}_e^P$

(k2*q2 - fV2)

f2

24571.1	N
13492.0	N
-24571.1	N
-11079.1	N

N1 (normaalivoima)	-28010.9	N
Jännitys sigma = N1/Ala2	-2.80	MPa

$N_1 = -\mathbf{f}_1^e\, l - \mathbf{f}_2^e\, m$

N2	-26931.8	N
Jännitys sigma = N2/Ala2	-2.69	MPa

Elementti 1

Siirtymä $\mathbf{q}_1$

0	mm
0	mm
0.077223586	mm
-0.370293656	mm

$\mathbf{f}_1 = \mathbf{k}_1 * \mathbf{q}_1 - \mathbf{f}^{V1}$

-24571.1	N
1079.1	N
24571.1	N
1079.1	N

Tukireaktiot

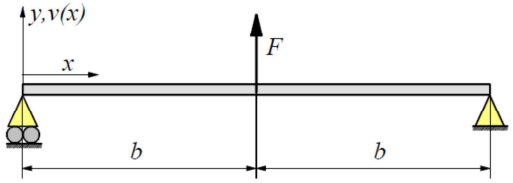
Ryx	-24571.1	N	Solmu 1
Ryy	1079.1	N	
Rax	24571.1	N	Solmu 3
Ray	13492.0	N	

Resultantit

Rx	0.0	N (OK)
Ry	14571.1	N

Kannattimen massa	465.97	kg
Kannattimen paino G	4571.14	N

Ulkoinen kuorma alaspäin	-14571.1	N
Ulkoinen kuorma alaspäin + Ry	0.0	N (OK)



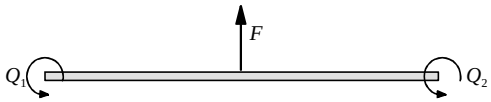
3. Määritä kuvan palkin keskipisteen taipuma jakaen malli yhteen palkkielementtiin. Jaa sitten malli symmetriseen puolikkaaseen ja laske tehtävä uudelleen. Palkin taivutusjäykkyys on EI_z.

Yhden elementin malli koko palkista

Jäykkyysmatriisi

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Globaalivapausasteet



Globaali jäykkyysmatriisi

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 12 & 6L & 12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \frac{EI_z}{L}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

keskellä olevasta pistevoimasta, joka voidaan muuntaa ekvivalenttiseksi solmuvoimavektoriksi elementin lokaalivapausasteille seuraavasti:

$$\mathbf{f}^p = \begin{bmatrix} F/2 \\ FL/8 \\ F/2 \\ -FL/8 \end{bmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

Globaali kuormitusvektori saadaan sijoittelusummaamalla

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}\frac{FL}{8}$$

Globaalisiirtymät voidaan nyt ratkaista yhteydestä

$$\frac{EI_z}{L}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}\frac{FL}{8} \Rightarrow \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}\frac{FL^2}{8EI_z} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}\frac{FL^2}{16EI_z}$$

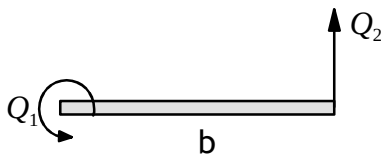
jolloin elementin lokaali solmusiirtymävektori on $\mathbf{q} = \dfrac{FL^2}{16EI_z}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Keskipisteen taipuma saadaan nyt emokoordinaatin ξ arvolla 0.

$$v(\xi) = H_1 q_1 + \frac{l_e}{2} H_2 q_2 + H_3 q_3 + \frac{l_e}{2} H_4 q_4 = \frac{l_e}{2} H_2 q_2 + \frac{l_e}{2} H_4 q_4$$
$$= \frac{FL^3}{32EI_z}\left[H_2(0) - H_4(0)\right] = \frac{FL^3}{64EI_z}$$

$$H_1 = \frac{1}{4}\left(2 - 3\xi + \xi^3\right)$$
$$H_2 = \frac{1}{4}\left(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3\right)$$
$$H_3 = \frac{1}{4}\left(2 + 3\xi - \xi^3\right)$$
$$H_4 = \frac{1}{4}\left(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3\right)$$

Kokeillaan sitten symmetristä puolikasta



Globaali jäykkyysmatriisi

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \frac{EI_z}{b^3}\begin{bmatrix} 4b^2 & -6b \\ -6b & 12 \end{bmatrix}$$

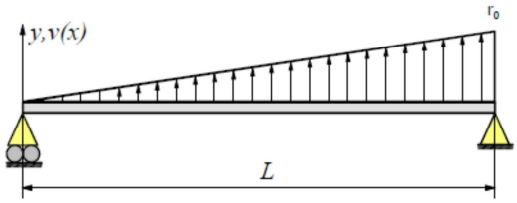
globaali kuormitusvektori on nyt

$$F_2(F) := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F}{2} \end{pmatrix}$$

Globaalisiirtymät voidaan ratkaista yhteydestä

$$\frac{8EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} L^2 & -3L \\ -3L & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{F}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} L^2 & -3L \\ -3L & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{FL^3}{16EI_z} \Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3L^2}\begin{bmatrix} 12 & 3L \\ 3L & L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{FL^3}{16EI_z} = \begin{bmatrix} 3L \\ L^2 \end{bmatrix}\frac{FL}{48EI_z} = \begin{bmatrix} 3 \\ L \end{bmatrix}\frac{FL^2}{48EI_z}$$

nyt saatiin tarkka siirtymän arvo, koska elementin alueella ei ole kenttäkuormituksia, kuten edellisessä mallissa.



4. Määritä kuvan kolmiokuormasta, jonka huippu-intensiteetti on r_0, aiheutuva ekvivalenttinen solmukuormitusvektori neljän vapausasteen palkkielementille.

Solmukuormitusvektori saadaan asettamalla viivakuormituksen potentiaali yhtäsuureksi kuin ekvivalenttisen solmukuormitusvektorin potentiaali eli

$$WP = -\int_s v^{\mathrm{T}} r \, ds = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \mathbf{f}^{S}$$

missä yläindeksi S viittaa painekuormitukseen (tässä on viivakuormitus). Ottamalla huomioon, että

$$v(\xi) = \mathbf{N}\mathbf{q} \qquad \Rightarrow v^{\mathrm{T}} = \mathbf{q}^{\mathbf{T}}\mathbf{N}^{\mathbf{T}}$$

ja

$$r(\xi) = N_2(\xi) r_0 = \frac{1}{2}(1+\xi) r_0$$

saadaan viivakuorman potentiaali muotoon

$$WP = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \int_s \mathbf{N}^{\mathrm{T}} r \, ds = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \frac{l_e}{2} \int_{-1}^{1} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} r \, d\xi = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \frac{l_e}{4} \int_{-1}^{1} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} (1+\xi) r_0 \, d\xi$$

$$= -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \frac{l_e r_0}{4} \left(\int_{-1}^{1} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \, d\xi + \int_{-1}^{1} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \xi \, d\xi \right) = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{f}^{S_{r0}} + \frac{l_e r_0}{4} \int_{-1}^{1} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \xi \, d\xi \right)$$

missä $\mathbf{f}^{S_{r0}}$ on puolet tasaisen kuormituksen aiheuttamasta ekvivalenttisesta solmukuormitusvektorista. Muotofunktioiden vektorin transpoosi voidaan lausua

$$\mathbf{N}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\left(2 - 3\xi + \xi^3\right) \\ \frac{1}{4}\left(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3\right)\frac{l_e}{2} \\ \frac{1}{4}\left(2 + 3\xi - \xi^3\right) \\ \frac{1}{4}\left(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3\right)\frac{l_e}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \left(4 - 6\xi + 2\xi^3\right) \\ \left(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3\right) l_e \\ \left(4 + 6\xi - 2\xi^3\right) \\ \left(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3\right) l_e \end{bmatrix}$$

joten

$$WP = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \left(\frac{1}{2}\mathbf{f}^{S_{r0}} + \frac{l_e r_0}{32} \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} \left(4 - 6\xi + 2\xi^3\right) \\ \left(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3\right) l_e \\ \left(4 + 6\xi - 2\xi^3\right) \\ \left(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3\right) l_e \end{bmatrix} \xi \, d\xi \right)$$

Integroimalla ja sijoittamalla arvot, saadaan

$$WP = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{r_0 l_e}{2} \\ \frac{r_0 l_0^2}{12} \\ \frac{r_0 l_e}{2} \\ -\frac{r_0 l_0^2}{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{r_0 l_e}{10} \\ -\frac{r_0 l_e^2}{120} \\ \frac{r_0 l_e}{10} \\ -\frac{r_0 l_e^2}{120} \end{bmatrix} \right)$$

Lopulta saadaan ekvivalenttinen solmukuormitusvektori

$$\mathbf{f}^{S} = \frac{l_e r_0}{60} \begin{bmatrix} 9 \\ 2l_e \\ 21 \\ -3l_e \end{bmatrix}$$

Niille (muutamalle) jota asia kiinnostaa, niin tässä esityksessä kuormitus on jaettu antimetriseen ja symmetriseen osuuteen. Taas niille, jotka eivät kiinnostuneet, niin tämä tehtävä ei kuulu välikoealueeseen.