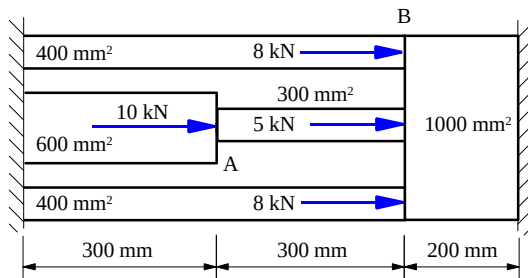
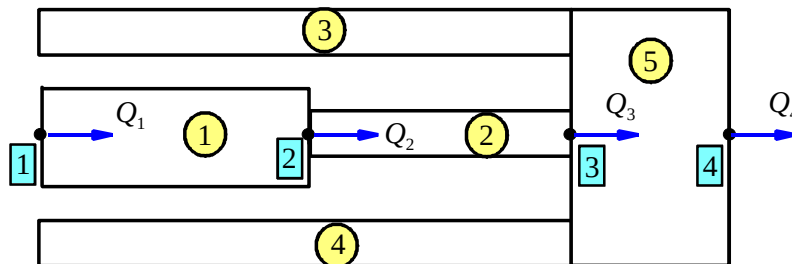


EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Harjoitus 5r Syksy 2013.



1. Määritä pisteiden A ja B siirtymät elementtimenetelmällä, kun kaikkien sauvojen materiaalin kimmokerroin on 70 GPa. Missä sauvassa on suurin jännitys?

PS. Kaikki neljä elementtiä pisteen B kohdalla siirtyvät saman määrän. Käytä eliminointimenetelmää oleellisten reunaehtojen hoitamiseksi. Voit käyttää myös ID- taulukkoa, jossa on nollia



Elementti	Kimmokerroin E [MPa]	Pituus l_e [mm]	Pinta-ala A [mm ²]	Solmu n1	Solmu n2
1	70000	300	600	1	2
2	70000	300	300	2	3
3	70000	600	400	1	3
4	70000	600	400	1	3
5	70000	200	1000	3	4

$$\mathbf{k}_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jäykkyysmatriisit

$E \cdot A / l_e$ 1.400E+05	$\mathbf{k}_1$	1	2 ID		
		1.400E+05	-1.400E+05	1	N/mm
$E \cdot A / l_e$ 7.000E+04	$\mathbf{k}_2$	2	3 ID		
		-7.000E+04	7.000E+04	2	N/mm
$E \cdot A / l_e$ 4.667E+04	$\mathbf{k}_3$	1	3 ID		
		-4.667E+04	4.667E+04	1	N/mm
$E \cdot A / l_e$ 4.667E+04	$\mathbf{k}_4$	1	3 ID		
		-4.667E+04	4.667E+04	3	N/mm
$E \cdot A / l_e$ 3.500E+05	$\mathbf{k}_5$	3	4 ID		
		-3.500E+05	3.500E+05	3	N/mm

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Harjoitus 5r Syksy 2013.

ID-tilukko

(tuottaa 4*4 matriisin)

Solmu	ID
1	1
2	2
3	3
4	4

Vaihtoehtoinen ID-tilukko

(tuottaisi 2*2 matriisin Kr)

Solmu	ID
1	0
2	1
3	2
4	0

Kokonaisjäykkymatriisi K

	1	2	3	4	
	2.333E+05	-1.400E+05	-9.333E+04	0	1
	-1.400E+05	2.100E+05	-7.000E+04	0	2
	-9.333E+04	-7.000E+04	5.133E+05	-3.500E+05	3
	0	0	-3.500E+05	3.500E+05	4

	elementin 3 ja 4 osuus
	elementit 1,3 ja 4 solmu 1
	elementti 5 solmu 2
	elementti 1 solmu 2 ja elementti 2 solmu 1
	elementin 2,3 ja 4 solmu 2 sekä elementin 5 solmu 1

Eliminointimenetelmä (poistetaan rivit 1 ja 4 ja vastaavat sarakkeet)

Jäykkymatriisi Kr

2.100E+05	-7.000E+04
-7.000E+04	5.133E+05

Käänteismatriisi

4.98866E-06	6.80272E-07
6.80272E-07	2.04082E-06

Solmukuormitusvektori P Kuormitusvektori (nyt ei ole kenttäkuormituksia, jotenka F=P)

P	10000 N	F	10000 N
	21000 N		21000 N

Siirtymävektori

Q	0.064 mm	$Q = K_r^{-1} F$
	0.050 mm	

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Harjoitus 5r Syksy 2013.

Jälkilaskenta										
Elementtivoimat					Siirtymät					
Ele1	k ₁	1.400E+05		-1.400E+05	q1					
		-1.400E+05		1.400E+05	0 mm					
	f ₁	-8984.1		N	σ = f ₂ /A	0.064 mm				
		8984.1		N		15.0 MPa				
Ele2	k1*q1				q2					
	k ₂	7.000E+04		-7.000E+04	0.064 mm					
		-7.000E+04		7.000E+04	0.050 mm					
	f ₂	1015.9		N	σ = f ₂ /A	-3.4 MPa				
-1015.9		N								
Ele3	k ₃	4.667E+04		-4.667E+04	q3					
		-4.667E+04		4.667E+04	0.000 mm					
	f ₃	-2317.5		N	σ = f ₂ /A	0.050 mm				
		2317.5		N		5.8 MPa				
Ele4	k ₄	4.667E+04		-4.667E+04	q4					
		-4.667E+04		4.667E+04	0.000 mm					
	f ₄	-2317.5		N	σ = f ₂ /A	0.050 mm				
		2317.5		N		5.8 MPa				
Ele5	k ₅	3.500E+05		-3.500E+05	q5					
		-3.500E+05		3.500E+05	0.050 mm					
	f ₅	17381.0		N	σ = f ₂ /A	0.000 mm				
		-17381.0		N		-17.4 MPa				
Vasen tukireaktio (f11+f31+f41)										
Rv	-13619.0		N							
Oikea tukireaktio (f52)										
Ro	-17381.0		N							
Tukireaktioiden summa										
	-31000.0		N							
Ulkoinen kuorma (Sum F)										
Sum(F)	31000		N (tasapaino OK)							
Vasemman tukireaktion saisi myös kokonaisjäykkymatriisiin ensimmäisen rivin avulla										
K1	2.333E+05	-1.400E+05	-9.333E+04	0						
alla on koko mallin siirtymävektorin transpoosi										
QT	0	0.064	0.050	0						
Rv	-13619.0		N = K1*Q							
Oikean tukireaktion saisi myös kokonaisjäykkymatriisiin viimeisen rivin avulla										
K4	0.000	0.000	-350000.000	350000.00						
QT	0.000	0.064	0.050	0.00						
Ro	-17381.0		N = K4*Q							

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Harjoitus 5r Syksy 2013.

- 3.9. An axial load $P = 385 \text{ kN}$ is applied to the composite block shown in Fig. P3.9. Determine the stress in each material. (*Hint: You may name the nodes 1-2 for both the elements.*)

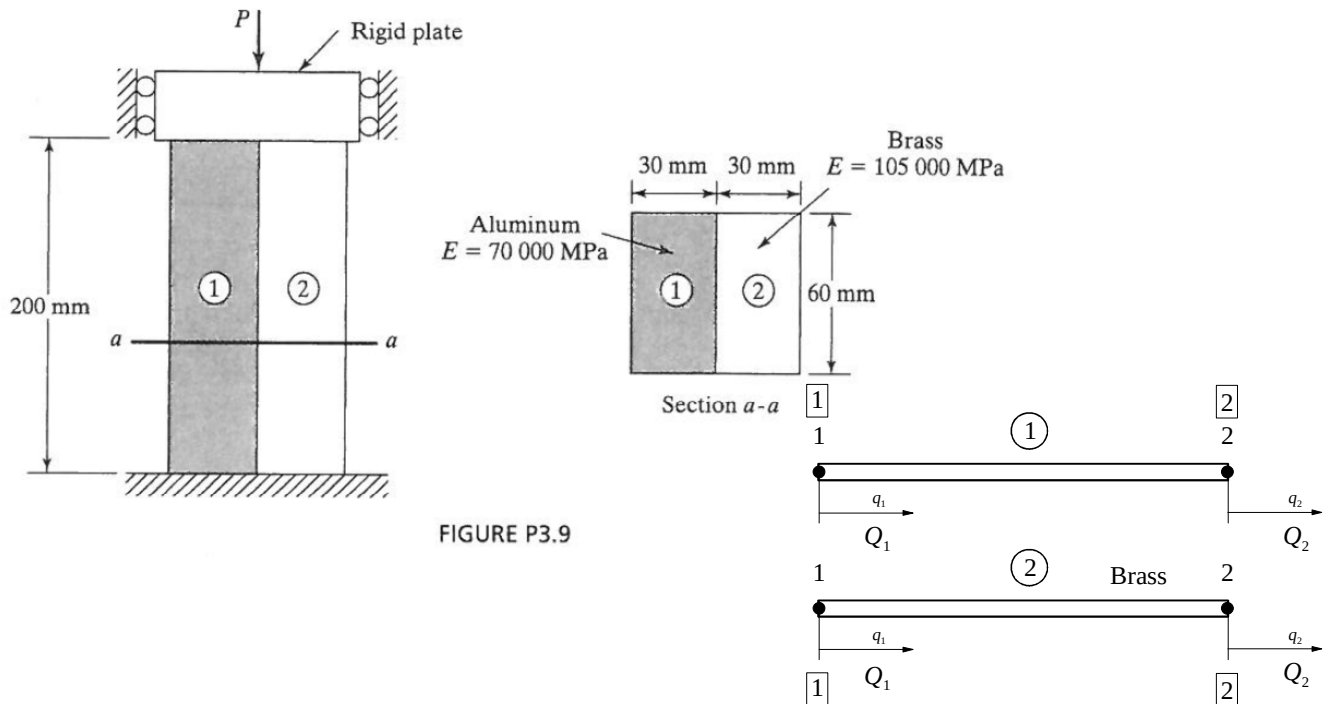


FIGURE P3.9

Elementin 1 jäykkyyismatriisi

$$\mathbf{k}_1 = \frac{E_1 A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

630000	-630000
-630000	630000

Elementin 2 jäykkyyismatriisi

$$\mathbf{k}_2 = \frac{E_2 A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

945000	-945000
-945000	945000

Globaali jäykkyyismatriisi

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 1000 \begin{bmatrix} 1575 & -1575 \\ -1575 & 1575 \end{bmatrix} \frac{N}{mm}$$

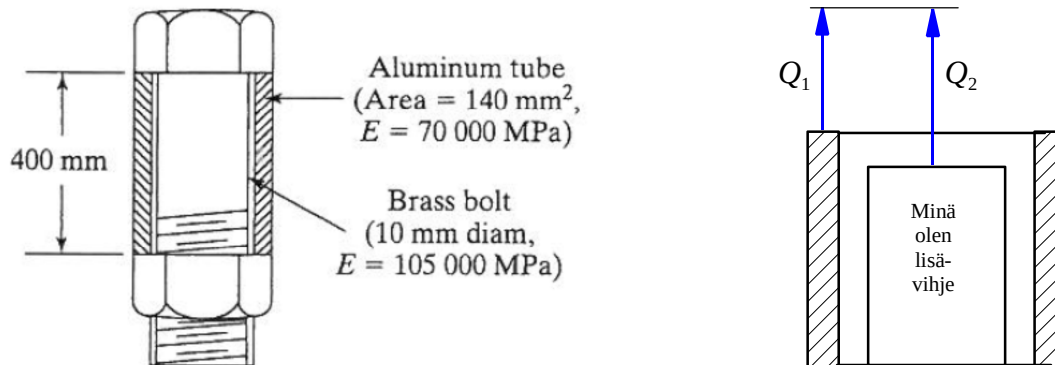
Koska siirtymä $Q_1 = 0$, niin eliminoidaan rivi 1 ja sarake 1

$$\mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{F} \Rightarrow 1000 \cdot 1575 \frac{N}{mm} \cdot Q_2 = -385000 N \Rightarrow Q_2 = \frac{-385 N \cdot mm}{1575 N} = -0.244 mm$$

$$\sigma_1 = E_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{q}_1 = 70000 \frac{N}{mm^2} \cdot \frac{1}{200 mm} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2444 \end{bmatrix} mm = -85.56 MPa$$

$$\sigma_2 = E_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{q}_2 = 105000 \frac{N}{mm^2} \cdot \frac{1}{200 mm} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2444 \end{bmatrix} mm = -128.33 MPa$$

- 3.15.** A brass bolt is fitted inside an aluminum tube, as shown in Fig. P3.15. After the nut has been fitted snugly, it is tightened one-quarter of a full turn. Given that the bolt is single threaded with a 2-mm pitch, determine the stress in bolt and tube. (*Hint: The boundary condition is of the multipoint constraint type.*)



Kierteen nousu on 2 mm, joten saadaan siirtymille Q_1 ja Q_2 rajoiteyhtälö.

$$Q_2 = Q_1 + \Delta$$

missä Δ on 0.5 mm. Hoidellaan rajoiteyhtälö sakkomenetelmällä (Penalty Method) eli lisätään laskentamallin kimmoenergiaan neliöllinen termi U_p .

$$U_{\text{kok}} = U + U_p = \sum_e U_e + \frac{1}{2} C (Q_2 - Q_1 - \Delta)^2$$

missä C = sakkokerroin, jonka tulee olla huomattavasti suurempi kuin suurin jäykkyyssmatriisin diagonaalilla oleva suurin termi esim $C = 10^5 \max\{K_{ii}\}$ käy hyvin. Nyt rajoiteyhtälö toteutuu vain likimääräisesti, mutta sitä paremmin, mitä suurempi sakkokerroin on. Toisaalta suuri sakkokerroin vaikeuttaa yhtälöryhmän ratkaisua, joten eo. sakkokerroin on hyvä kompromissi. Derivoimalla kimmoenergian lisätermiä saadaan

$$D_{Q_1} \left[\frac{1}{2} C (Q_2 - Q_1 - \Delta)^2 \right] = C (Q_1 - Q_2 + \Delta)$$

$$D_{Q_2} \left[\frac{1}{2} C (Q_2 - Q_1 - \Delta)^2 \right] = C (Q_2 - Q_1 - \Delta)$$

joten rajoiteyhtälön lisävaikutus yhtälöryhmään on

$$\begin{bmatrix} C & -C \\ -C & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C\Delta \\ C\Delta \end{bmatrix}$$

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Harjoitus 5r Syksy 2013.

Elementti	Kimmokerroin E [MPa]	Pituus l_e [mm]	Pinta-ala A [mm ²]	Solmu n1
1 (Holkki)	70000	400	140	1
2 (Pultti)	105000	399.5	78.54	1

ID-tilukko

(tuottaa 2*2 matriisin)

Solmu	ID
1	0
2	1
3	2

Mutterin kiristys

Δ	0.5
----------	-----

Jäykkymatriisit

$$\mathbf{k}_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$E \cdot A / l_e \quad \mathbf{k}_1$

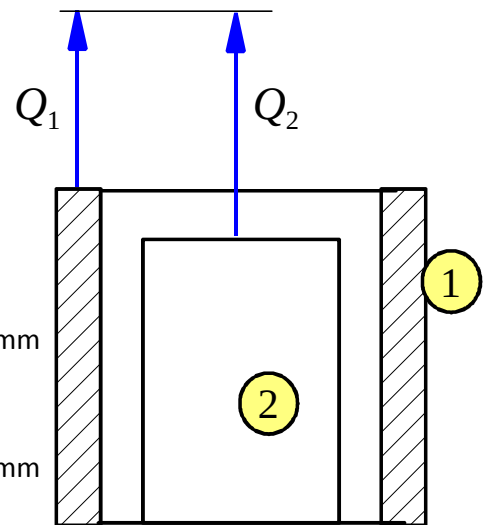
2.450E+04

2.450E+04	-2.450E+04	N/mm
-2.450E+04	2.450E+04	

$E \cdot A / l_e \quad \mathbf{k}_2$

2.064E+04

2.064E+04	-2.064E+04	N/mm
-2.064E+04	2.064E+04	



Kokonaisjäykkymatriisi K (ilman rajoiteyhtälön vaikutusta)

2.450E+04	0.000E+00	N/mm
0.000E+00	2.064E+04	

C 2.450E+09 N/mm (=10⁵*2.45*10⁴)

Kokonaisjäykkymatriisi K

2.45002E+09	-2.45000E+09	N/mm
-2.45000E+09	2.45002E+09	

Ulkoinen kuormitus

Ilman sakkotermejä

Sakkotermit

F

0	N
0	N

-1225000000
1225000000

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Harjoitus 5r Syksy 2013.

Siirtymä

K^{-1}

2.21522E-05	2.2152E-05
2.2152E-05	2.21522E-05

Q

-0.228636	mm
0.271362	mm

Tark. Q2-Q1
0.499997714 OK

Pultin lokaalisiirtymävektori

q_2

0
0.271362

Kinemaattinen matriisi B

-0.00250313	0.002503129
-------------	-------------

Venymä $B \cdot q_2$

0.00068

$\sigma = E \cdot B \cdot q_2$

71.32	MPa
-------	-----

Normaalivoima

5601.6	N
--------	---

Holkin lokaalisiirtymävektori

q_1

0
-0.228636

Kinemaattinen matriisi B

-0.0025	0.0025
---------	--------

Venymä $B \cdot q_1$

-0.00057

$\sigma = E \cdot B \cdot q_1$

-40.01	MPa
--------	-----

Normaalivoima

-5601.6	N
---------	---