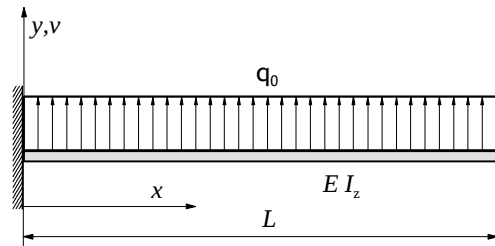


1. Solve the deflection curve $v(x)$ exactly for the beam shown

$$EI_z v_{,xxxx} = q_0$$



Integroidaan yhtälö neljä kertaa

$$EI_z v_{,xxxx} = q_0$$

$$EI_z v_{,xxx} = q_0 x + C_1$$

$$EI_z v_{,xx} = \frac{q_0 x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$EI_z v_{,x} = \frac{q_0 x^3}{6} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI_z v(x) = \frac{q_0 x^4}{24} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Tehtävällä on neljä reunaehto, joista vasemmassa päässä on ehdot (siirtymäreunaehdot eli ns. kinemaattiset reunaehdot)

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 0$$

$$v_{,x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = 0$$

Oikean pään reunaehdot ovat (voimareunaehdot eli ns. kineettiset reunaehdot)

$$EI_z v_{,xxx}(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_0 L + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -q_0 L$$

$$EI_z v_{,xx}(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_0 L^2}{2} - q_0 L^2 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{q_0 L^2}{2}$$

sijoittamalla taipuman lausekkeeseen saadaan

$$v(x) = \frac{q_0}{EI_z} \left[\frac{x^4}{24} - \frac{Lx^3}{6} + \frac{L^2 x^2}{4} \right] \quad \text{tai}$$

$$v(x) = \frac{q_0 L^4}{24 EI_z} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^4 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

Tehtävä 2

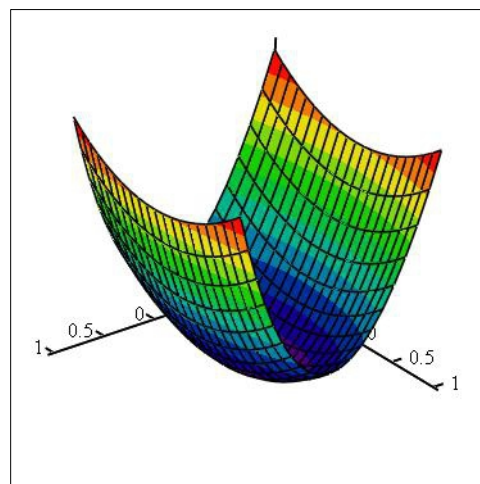
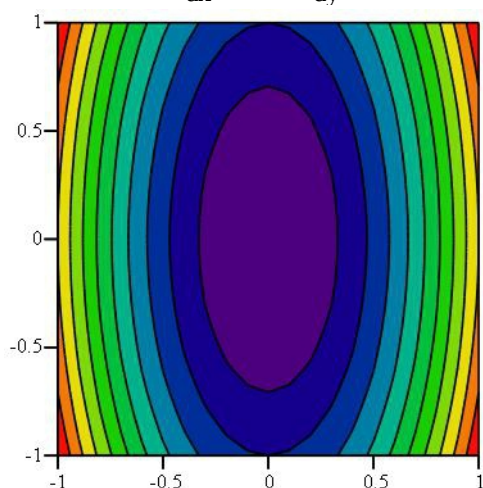
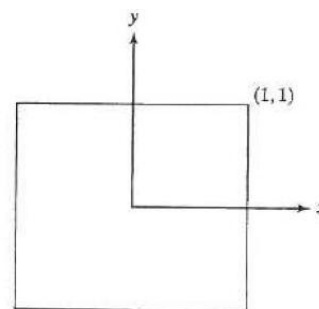
$$u(x, y) := 0.1 + 0.2 \cdot x + 0.3 \cdot x^3 + 0.2 \cdot x \cdot y^2$$

$$v(x, y) := 0.25 \cdot x \cdot y + 0.2 \cdot x^2$$

$$\epsilon_x(x, y) := \frac{d}{dx} u(x, y) \rightarrow 0.9 \cdot x^2 + 0.2 \cdot y^2 + 0.2$$

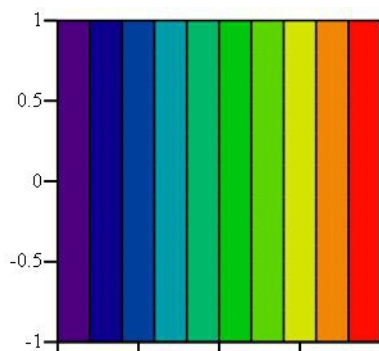
$$\epsilon_y(x, y) := \frac{d}{dy} v(x, y) \rightarrow 0.25 \cdot x$$

$$\gamma_{xy}(x, y) := \frac{d}{dx} v(x, y) + \frac{d}{dy} u(x, y) \rightarrow 0.4 \cdot x + 0.25 \cdot y + 0.4 \cdot x \cdot y^{-1}$$



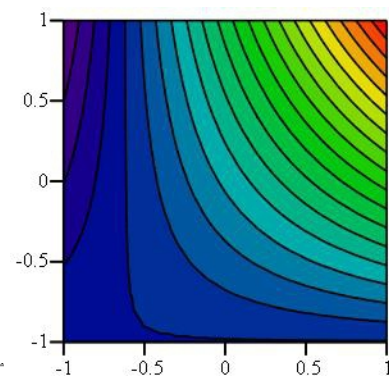
ϵ_x

$$\epsilon_x(0, 0) = 0.2 \quad \epsilon_x(1, 1) = 1.3$$

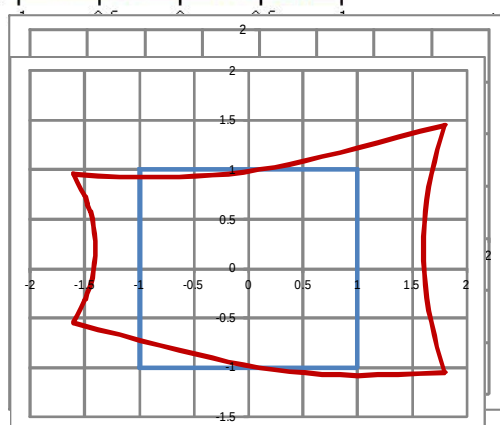


ϵ_x

Maksimit kulmissa, minimi keskellä



ϵ_y



γ_{xy}

Tehtävä 3

a) Ratkaistaan differentiaaliyhtälö ensin tarkasti

$$\begin{cases} u_{,xx} = x & x \in [0, 1] & \text{s.e.} \\ u(0) = 0 & \text{(RE1)} \\ u(1) = 1 & \text{(RE2)} \end{cases} \quad (1)$$

Integroidaan ylläolevaa yhtälöä kahdesti jolloin saadaan

$$u = \iint u_{,xx} \, dx \, dx = \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2 \quad (2)$$

Soveltamalla reunaehtoa 1 saadaan $C_2 = 0$ ja tämän jälkeen reunaehtoa 2 josta saadaan $C_1 = 5/6$. Differentiaaliyhtälön (1) ratkaisuksi saadaan siten

$$u(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x \quad (3)$$

b) Ratkaistaan tehtävä likimääräisesti soveltamalla Galerkinin menetelmää. Valitaan yritteeksi toisen asteen polynomi

$$\tilde{u} = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 \quad (4)$$

Sovelletaan tähän oleellisia reunaehtoja jolloin ensimmäisestä ehdosta (RE1) saadaan $\alpha_0 = 0$ ja toisesta (RE2) saadaan kahdelle muulle kertoimelle relaatio $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$. Nyt yrite $\tilde{u}$ saa muodon

$$\tilde{u} = (1 - \alpha_1)x^2 + \alpha_1x = x^2 + (x - x^2)\alpha_1 \quad (5)$$

Varioidaan yritefunkio tuntemattoman parametrin α_1 suhteen ja lasketaan sille samalla myös derivaatta

$$\delta\tilde{u} = (x - x^2)\delta\alpha_1 \quad \tilde{u}_{,xx} = 2(1 - \alpha_1) \quad (6)$$

Sovelletaan nyt Galerkinin menetelmää, jossa $\mathcal{L}$ tarkoittaa tässä tehtävässä lineaarista differentiaalioperaattoria $d^2 \bullet / dx^2$

$$\int_0^1 \delta \tilde{u}(\mathcal{L}(\tilde{u}) - x) dx = 0 \quad (7)$$

Sijoitetaan tähän yhtälöstä (6) derivaatta ja variaatio, jolloin saadaan

$$\int_0^1 \delta \alpha_1 (x - x^2) (2(1 - \alpha_1) - x) dx = 0 \quad \forall \delta \alpha_1 \quad (8)$$

Koska yhtälön on toteuduttava kaikilla variaatioilla $\delta \alpha_1$ on integraalilausekkeen oltava nolla jolloin saadaan integroinnin jälkeen

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x - x^2) (2(1 - \alpha_1) - x) dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \left(\frac{2}{3}\alpha_1 - 1\right)x^3 + (1 - \alpha_1)x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\alpha_1 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

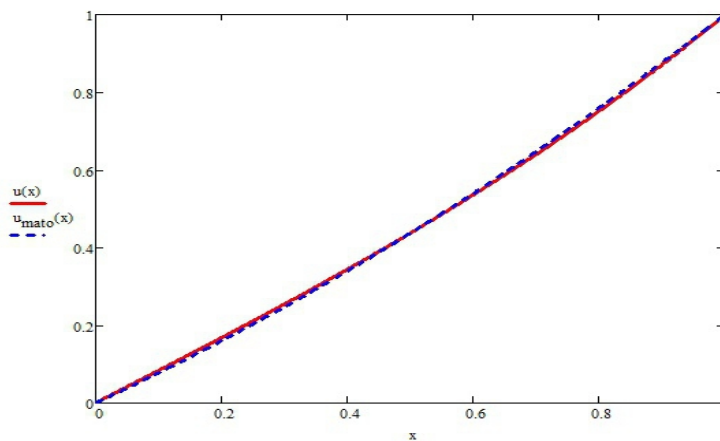
Josta ratkaisemalla kerroin α_1 ja sijoittamalla yhtälöön $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ saadaan kertoimiksi

$$\alpha_1 = \frac{3}{4} \quad \alpha_2 = \frac{1}{4} \quad (10)$$

joten Galerkinin menetelmällä saatu likiratkaisu $\tilde{u}$ siirtymälle u on

$$\tilde{u} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x \quad (11)$$

Tarkka ratkaisu ja likiratkaisu ovat piirustettuina allaolevassa kuvassa.



Tehtävä 4

a) Tehtävän tarkka ratkaisu. Tasapaino differentiaaliselle palalle antaa:

$$\sigma_{,x} + \rho g = 0 \quad (12)$$

Olettamalla materiaali lineaarisesti kimmoiseksi ja venymät pieniksi $\sigma = E\varepsilon = Eu_{,x}$ saadaan

$$EAu_{,xx} = -A\rho g \quad (13)$$

Ratkaisu saadaan integroimalla kahdesti ja huomioimalla reunaehdot

$$\begin{cases} u(0) = 0 & \text{RE1} \\ u_{,x}(L) = 0 & \text{RE2} \end{cases} \quad (14)$$

saadaan differentiaaliyhtälön tarkaksi ratkaisuksi

$$u(x) = \frac{\rho g}{E} \left(-\frac{1}{2}x^2 + Lx \right) \quad (15)$$

Ensimmäinen reunaehto liittyy tuentaan sauvan alkupäässä ja toinen reunaehdo kertoo, että sauvan loppupäässä ei ole kuormitusta.

b) Ratkaistaan nyt tehtävä käyttämällä Galerkinin menetelmää. Kinemaattisesti käypä ($\tilde{u}(0) = 0$) yritefunktio on

$$\tilde{u} = Q_1 \left(\frac{x}{L} \right) + Q_2 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \quad (16)$$

Lasketaan valmiiksi derivaatat ja variaatiot tuntemattomien suureiden Q_1 ja Q_2 suhteen

$$\tilde{u}_{,x} = \frac{Q_1}{L} + 2Q_2 \frac{x}{L^2} \quad \tilde{u}_{,xx} = \frac{2Q_2}{L^2} \quad \delta \tilde{u} = \delta Q_1 \left(\frac{x}{L} \right) + \delta Q_2 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \quad (17)$$

Ulkoinen kuormitus saadaan yhtälön (13) oikealta puolelta $P = -A\rho g$. Tässä tehtävässä lineaarinen differentiaalioperaattori on $\mathcal{L} = EA \, d^2 \bullet / dx^2$. Galerkinin menetelmää soveltaen saadaan ja sopimalla merkintä $\delta \tilde{u}|_{x=L} = \delta \tilde{u}_L$

$$\int_0^L \delta \tilde{u} (\mathcal{L}(\tilde{u}) - P) + \sigma A \delta \tilde{u}_L = 0 \quad (18)$$

jossa viimeinen termi upottaa sauvan loppupään voimareunaehdon systeemiin (RE2). Tämä lisätermi saadaan siirtymän funktioksi olettamalla lineaarisesti kimmoinen materiaali ja pienet siirtymät ja venymät

$$\sigma A \delta \tilde{u}_L = E \varepsilon A \delta \tilde{u}_L = EA \tilde{u}_{,x}(L) \delta \tilde{u}_L \quad (19)$$

Integraalilauseke yhtälössä (22) voidaan jakaa kahteen lausekkeeseen valitsemalla vuorotellen $\delta Q_2 = 0$ ja $\delta Q_1 \neq 0$ ja vastaavasti toisinpäin.

$$\begin{aligned} \delta Q_1 \int_0^L \frac{x}{L} \left(\frac{2EA}{L^2} Q_2 + A \rho g \right) dx + \delta Q_1 \left(\frac{EA}{L} (Q_1 + 2Q_2) \right) &= 0 \quad \forall \delta Q_1 \\ \delta Q_2 \int_0^L \frac{x^2}{L^2} \left(\frac{2EA}{L^2} Q_2 + A \rho g \right) dx + \delta Q_2 \left(\frac{EA}{L} (Q_1 + 2Q_2) \right) &= 0 \quad \forall \delta Q_2 \end{aligned} \quad (20)$$

Laskemalla integraalit ja ratkaisemalla tuntemattomat $Q_1 = \rho g L^2 / E$ ja $Q_2 = -\rho g L^2 / 2E$ saadaan ratkaisuksi

$$\tilde{u} = \frac{\rho g L^2}{E} \left(\frac{x}{L} \right) - \frac{\rho g L^2}{2E} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \quad (21)$$

Vertaamalla tarkkaan ratkaisuun yhtälössä (15) huomataan, että ratkaisu on sama.

c) Lähdetään liikkeelle liikkeelle Galerkinin menetelmästä jolloin saadaan.

$$\int_0^L \delta \tilde{u} (\mathcal{L}(\tilde{u}) - P) dx = 0 \quad (22)$$

Kirjoitetaan differentiaalioperaattori auki ja osittaisintegroidaan¹ differentiaaliyhtälöä

$$\begin{aligned} \int_0^L \delta \tilde{u} (EA \tilde{u}_{,xx} - P) dx &= 0 \\ \int_0^L EA \delta \tilde{u} \tilde{u}_{,xx} dx - \int_0^L \delta \tilde{u} P dx &= 0 \\ EA [\delta \tilde{u} \tilde{u}_{,x}]_0^L - \int_0^L EA \delta \tilde{u}_{,x} \tilde{u}_{,x} dx - \int_0^L \delta \tilde{u} P dx &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Ensimmäinen termi ylläolevassa yhtälössä on sijoitustermi josta tiedetään, että alarajalla $\delta \tilde{u}(0) = 0$ ja ylärajalla $\tilde{u}_{,x}(L) = 0$ sillä vapaaseen päähän ei kohdistu kuormitusta. Nyt integraalilauseke on

¹ $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int_0^L EA \delta \tilde{u}_{,x} \tilde{u}_{,x} dx = - \int_0^L \delta \tilde{u} P dx \quad (24)$$

Käytetään nyt siirtymäyritteenä alempaa astetta kuin **b)** kohdassa eli otetaan vain lineaarinen termi yritteeksi

$$\tilde{u} = Q_1 \left(\frac{x}{L} \right) \quad (25)$$

Lasketaan valmiiksi yritteelle derivaatat ja variaatio tuntemattoman muuttujan suhteen

$$\tilde{u}_{,x} = \frac{Q_1}{L} \quad \delta \tilde{u} = \delta Q_1 \left(\frac{x}{L} \right) \quad (26)$$

Sijoitetaan nämä integraalilausekkeeseen (24) ja integroidaan

$$\delta Q_1 \left(\frac{EA}{L} Q_1 \right) = \frac{1}{2} LA \rho g \quad \forall \delta Q_1 \quad (27)$$

josta ratkaisemalla $Q_1 = L^2 \rho g / 2E$ saadaan yritteeksi

$$\tilde{u} = \frac{L^2 \rho g}{2E} \left(\frac{x}{L} \right) \quad (28)$$

Huomaa, että yhtälön tarkka ratkaisu kohdassa **a)** sekä molemmat likiarvot **b)** ja **c)** antavat tismalleen saman siirtymän sauvan loppupäälle, eli 0.77 m. Tarkka sekä **b)**-kohdan ratkaisu ovat neliöllisiä kun taas **c)**-kohdassa ratkaisu on lineaarinen. Tästä huolimatta pään siirtymä toteutuu tarkasti.

Kun lasketaan jännitykset, huomataan että kohtien **a)** ja **b)** ratkaisut antavat nollajännityksen sauvan loppupäähän. Kohdan **c)** ratkaisu antaa jännitystä sauvan loppupäähän 76 MPa.

Toinen mainittava seikka on, että suorittamalla osittaisintegroinnin, luonnolliset reunaehdot (RE2) tulevat automaattisesti peliin. Jos ratkaisua haetaan ilman osittaisintegrointia, on Galerkinin menetelmään tuotava lisäehtoja, joilla luonnolliset reunaehdot tulevat huomioiduiksi.

Täydennys Harj. 3

Tehtävässä 4 kohdassa b) on siirrytty yhtälöstä (20) yhtälöön (21) muutaman välivaiheen kautta eli (20)->:

$$\begin{cases} \int_0^L \frac{x}{L} \left(\frac{2E}{L} Q_2 + \rho g \right) dx - \frac{E}{L} (Q_1 + 2Q_2) = 0 \\ \int_0^L \frac{x^2}{L^2} \left(\frac{2E}{L^2} Q_2 + \rho g \right) dx - \frac{E}{L} (Q_1 + 2Q_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\frac{x^2}{2L} \left(\frac{2E}{L^2} Q_2 + \rho g \right) \right]_0^L + \frac{E}{L} (Q_1 + 2Q_2) = 0 \\ \left[\frac{x^3}{3L^2} \left(\frac{2E}{L^2} Q_2 + \rho g \right) \right]_0^L + \frac{E}{L} (Q_1 + 2Q_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L \left(\frac{2E}{L^2} Q_2 + \rho g \right) + \frac{2E}{L} (Q_1 + 2Q_2) = 0 \\ L \left(\frac{2E}{L^2} Q_2 + \rho g \right) + \frac{3E}{L} (Q_1 + 2Q_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2E}{L} Q_2 + \rho g L + \frac{2E}{L} Q_1 + \frac{4E}{L} Q_2 = 0 \\ \frac{2E}{L} Q_2 + \rho g L + \frac{3E}{L} Q_1 + \frac{6E}{L} Q_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{E}{L} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rho g L$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = - \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\rho g L^2}{E} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{\rho g L^2}{2E} \quad \rightarrow (21)$$

Jännitys tyvässä saa saman arvon kohdassa a) ja b) eli

$$\sigma(0) = E \varepsilon(0) = E \tilde{u}_{,x}(0) = E \frac{\rho g L}{E} = \frac{7850 \text{ kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2000 \text{ m} \approx 154 \text{ MPa}$$

Huom1. Kaavan (19) jälkeen: Integraalilauseke yhtälössä (22) pitäisi olla yhtälössä (18).

Huom2. Yhtälön (5) variaatio (6 a) eli pieni muutos kun parametri α_1 muuttuu, ei riipu "vakiotermistä" x^2 . Tehtävä 4 ei kuulu välikoealueeseen, mutta tehtävä 3 kuuluu. Kaavakokoelmassa Galerkin'in menetelmä tulee olemaan muodossa

$$\int_{\Omega} G_i (\mathcal{L}\tilde{u} - P) d\Omega = 0$$

joten termiä $\delta \tilde{u}$ ei tarvitse sisäistää. (hum 13.9.13)