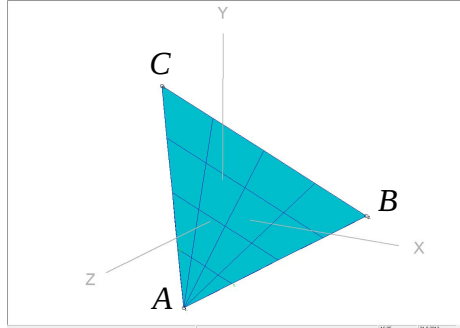


EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Harjoitus 2 Syksy 2013.

1. Avaruuden kolme pistettä $(0, -40, 40)^T$, $(70, 0, -40)^T$, $(-40, 70, 0)^T$ määrittelevät kolmion. a) Määritä sen pinta-ala. b) Onko piste $(5, 5, 5)^T$ pinnan ylä- vai alapuolella kun pinnan yläpuoli näkyy kuvassa



Kolmion kärjet

A	0
	-40
	40

B	70
	0
	-40

C	-40
	70
	0

r_{AB}	70
	40
	-80

r_{AC}	-40
	110
	-40

$r_{AB} \times r_{AC}$	7200
	6000
	9300

Ristitulovektorin pituus

Pituus 13203.41

Kolmion ala 6601.704

= 1/2 * Pituus

n	0.545314
	0.454428
	0.704364

Pinnan normaalivektori
katsojaan päin
($r_{AB} \times r_{AC}$ jaettuna pituudella)

P	5
	5
	5

Piste P

r_{AP}	5
	45
	-35

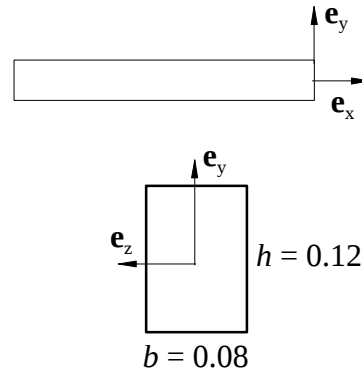
Pistetulo

$r_{AP} \cdot n = -1.47689$

Projektio on negatiivinen eli
piste on alapuolella

2. Kuormitettu palkki on kuviteltu jaetuksi kahteen osaan siten, että vasemmanpuoleisen osan (kuva) leikkauspinnan jännitysvektori palkin määrittämässä koordinaatistossa on

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 + 12 \frac{y}{h} \\ 3 - 12 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$



Laske poikkileikkauksen normaalivoima N , leikkausvoima Q ja taivutusmomentti M_t .

Koska jännitysvektori ei riipu z -koordinaatista, niin pintadifferentiaaliksi voidaan valita: $dA = b dy$

Normaalivoima:

$$N = \int_A p_x dA = b \int_{-h/2}^{h/2} \left(2 + 12 \frac{y}{h} \right) dy \cdot \text{MPa} = b \left[2y + 6 \frac{y^2}{h} \right]_{-h/2}^{h/2} \cdot \text{MPa} = 2bh \cdot \text{MPa} = 19200 \text{ N}$$

Leikkausvoima:

$$Q_y = \int_A p_y dA = b \int_{-h/2}^{h/2} \left(3 - 12 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right) dy \cdot \text{MPa} = b \left[3y - 4 \frac{y^3}{h^2} \right]_{-h/2}^{h/2} \cdot \text{MPa} = 2bh \cdot \text{MPa} = 19200 \text{ N}$$

Taivutusmomentti:

$$\begin{aligned} M_{tz} &= \int_A -y p_x dA = -b \int_{-h/2}^{h/2} \left(2y + 12 \frac{y^2}{h} \right) dy \cdot \text{MPa} \\ &= -b \left[y^2 + 4 \frac{y^3}{h} \right]_{-h/2}^{h/2} \cdot \text{MPa} = -bh^2 \cdot \text{MPa} = -1152 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Jännityskomponentit voidaan lausua

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)] & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_x + \epsilon_z)] & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)] & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}\end{aligned}$$

ja

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad G = E/[2(1+\nu)]$$

Johda edellä olevista lausekkeista yhteys

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{jos oletetaan, että } \sigma_z = 0, \tau_{yz} = 0, \tau_{xz} = 0$$

$$\sigma_z = 0 \Rightarrow (1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y) = 0 \quad \Rightarrow \epsilon_z = -\frac{\nu}{(1-\nu)}(\epsilon_x + \epsilon_y)$$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\epsilon_x + \nu\epsilon_y - \frac{\nu^2}{(1-\nu)}(\epsilon_x + \epsilon_y) \right] \\ &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{(1-\nu)^2 - \nu^2}{(1-\nu)}\epsilon_x + \frac{\nu(1-\nu) - \nu^2}{(1-\nu)}\epsilon_y \right] \\ &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{1-2\nu}{(1-\nu)}\epsilon_x + \frac{\nu(1-2\nu)}{(1-\nu)}\epsilon_y \right] \\ &= \frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{1}{(1-\nu)}\epsilon_x + \frac{\nu}{(1-\nu)}\epsilon_y \right] \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_x + \nu\epsilon_y]\end{aligned}$$

vastaavasti

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\epsilon_y + \nu\epsilon_x - \frac{\nu^2}{(1-\nu)}(\epsilon_x + \epsilon_y) \right] \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_y + \nu\epsilon_x]\end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{(1-\nu)}{2} \gamma_{xy}$$

joten

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Harjoitus 2 Syksy 2013.

- 1.4. Develop a deformation field $u(x, y)$, $v(x, y)$ that describes the deformation of the finite element shown. From this determine ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} . Interpret your answer.

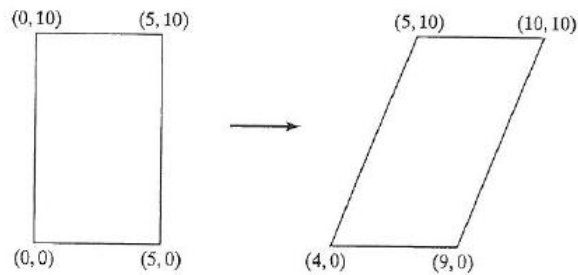


FIGURE P1.4

$$\epsilon_x = u_{,x}$$

$$\epsilon_y = v_{,y}$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}$$

Kuvasta päätellään

$$u(x, y) := 4 + \frac{y}{10} \qquad v(x, y) := 0$$

Venymät

$$\epsilon_x(x, y) := \frac{d}{dx}u(x, y) \rightarrow 0$$

$$\epsilon_y(x, y) := \frac{d}{dy}v(x, y) \rightarrow 0$$

$$\gamma_{xy}(x, y) := \frac{d}{dy}u(x, y) + \frac{d}{dx}v(x, y) \rightarrow \frac{1}{10}$$

Elementti kokee jäykän kappaleen liikkeen x-akselin suunnassa ja puhtaan leikkausmuodonmuutoksen. Liukukulma on

$$\gamma := \operatorname{atan}\left(\frac{1}{10}\right) = 0.099669 \qquad \gamma = 5.711 \cdot \text{deg}$$