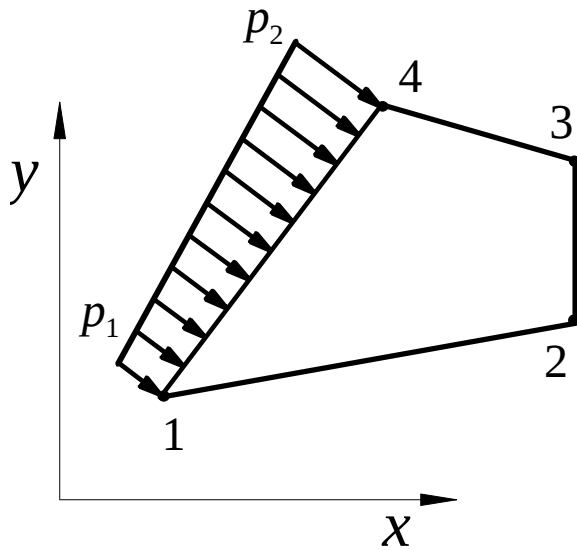




2. Määritä integroimalla kuvan nelisolmuiseen elementtiin ulkoisesta paineesta $\mathbf{p}$, joka on kohtisuorassa solmujen 1 ja 4 määrittämää pintaa vastaan, aiheutuva ekvivalenttinen solmukuormitusvektori. Levyn paksuus on 5 mm. Paineen intensiteetti solmulla 1 $p_1 = 50$ MPa ja solmulla 4 $p_2 = 100$ MPa ja se muuttuu lineaarisesti. Solmukoordinaatit ovat:

Solmu	x [mm]	y [mm]
1	100	100
2	700	200
3	700	400
4	400	500

Koska riittää kun interpolointi koskee vain reunaviivaa 1-4, niin sovitetaan viivalle yksiulotteinen interpolointi.

$$\mathbf{u}(\xi) = \begin{bmatrix} u_s \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^s & 0 & N_2^s & 0 \\ 0 & N_1^s & 0 & N_2^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_7 \\ q_8 \end{bmatrix} = \mathbf{N}_s \mathbf{q}_s$$

$$\mathbf{f}^p = \iint_A \mathbf{N}^T \mathbf{p} dA$$

$$\mathbf{f}^V = \iiint_V \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV$$

missä $N_1^s = \frac{1}{2}(1-\xi)$, $N_2^s = \frac{1}{2}(1+\xi)$. Reunaviivan pituus on $l_s = \sqrt{x_{41}^2 + y_{41}^2} = 500 \text{ mm}$, joten

$$ds = \frac{l_s}{2} d\xi \quad \text{Painepinnan suuntainen vektori } \vec{t} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Painepinnan normaalivektori } \vec{n} = \vec{e}_z \times \vec{t} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Painevektori $\mathbf{p}$ xy-koordinaatistossa

$$\vec{p} = -p \vec{n} = (N_1^p p_1 + N_2^p p_2) \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \text{ missä paineen lineaariset muotofunktiot ovat}$$

$$N_1^p = \frac{1}{2}(1-\xi); \quad N_2^p = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Harjoitus 12 Syksy 2013.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}^p &= \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{p} dA = t \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{p} ds = \frac{t l_s}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} (N_1^p p_1 + N_2^p p_2) d\xi = \frac{t l_s}{10} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 4N_1 \\ -3N_1 \\ 4N_2 \\ -3N_2 \end{bmatrix} (N_1^p p_1 + N_2^p p_2) d\xi \\
 &= p_1 \frac{t l_s}{40} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 4(1-\xi)^2 \\ -3(1-\xi)^2 \\ 4(1-\xi^2) \\ -3(1-\xi^2) \end{bmatrix} d\xi + p_2 \frac{t l_s}{40} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 4(1-\xi^2) \\ -3(1-\xi^2) \\ 4(1+\xi)^2 \\ -3(1+\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi = p_1 \frac{t l_s}{40} \begin{bmatrix} 4(8/3) \\ -3(8/3) \\ 4(4/3) \\ -3(4/3) \end{bmatrix} + p_2 \frac{t l_s}{40} \begin{bmatrix} 4(4/3) \\ -3(4/3) \\ 4(8/3) \\ -3(8/3) \end{bmatrix} \\
 &= p_1 \frac{t l_s}{30} \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} + p_2 \frac{t l_s}{30} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{t l_s}{30} \begin{bmatrix} 8p_1 + 4p_2 \\ -6p_1 - 3p_2 \\ 4p_1 + 8p_2 \\ -3p_1 - 6p_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Lasketaan numeroarvoilla

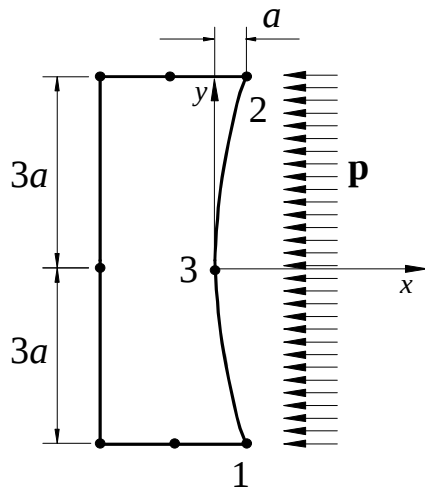
Vap.aste fp

1	66666.67	N
2	-50000	N
3	0	N
4	0	N
5	0	N
6	0	N
7	83333.33	N
8	-62500	N

Tark.

Rx 150000 N
Ry -112500 N
R 187500 N

resultantti $R = \frac{p_1 + p_2}{2} l_s t$ OK



2. Kuvan kvadraattisen elementin sivulle kohdistuu painekuorma. Määritä tästä aiheutuva ekvivalenttinen solmukuormitusvektori.

- numeerisesti (2p) kun paine on globaalisuuntainen
- tarkasti, kun paine on hydrostaattinen

Solmujen asemat ovat:

Solmu	X	Y	N
1	a	$-3a$	$-\xi/2(1-\xi)$
2	a	$+3a$	$\xi/2(1+\xi)$
3	0	0	$1-\xi^2$

Koska riittää kun interpolointi koskee vain reunaviivaa 1-3-2, niin sovitetaan viivalle yksiulotteinen interpolointi.

$$\mathbf{f}^p = \iint_A \mathbf{N}^T \mathbf{p} dA$$

$$\mathbf{f}^v = \iiint_V \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV$$

$$\mathbf{u}(\xi) = \begin{bmatrix} u_s \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^s & 0 & N_2^s & 0 & N_3^s & 0 \\ 0 & N_1^s & 0 & N_2^s & 0 & N_3^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \mathbf{N}_s \mathbf{q}_s$$

Reunaviivan pisteet interpoloidaan

$$x_s = N_1^s x_2 + N_2^s x_2 + N_3^s x_3 = \frac{a}{2} [-\xi + \xi^2 + \xi + \xi^2] = a\xi^2 \quad \Rightarrow dx = 2a\xi d\xi = J_x d\xi$$

$$y_s = N_1^s y_1 + N_2^s y_2 + N_3^s y_3 = \frac{3a}{2} [\xi - \xi^2 + \xi + \xi^2] = 3a\xi \quad \Rightarrow dy = 3a d\xi = J_y d\xi$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} d\xi = a\sqrt{4\xi^2 + 9} d\xi \quad dA = t ds$$

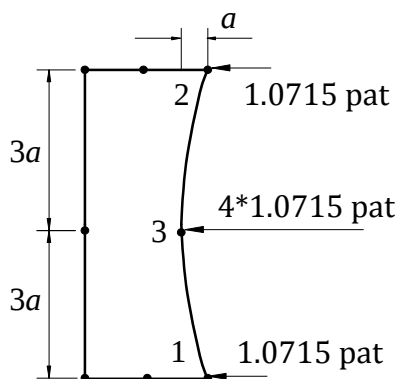
missä t on elementin paksuus

$$\mathbf{f}^p = \iint_A \mathbf{N}^T \mathbf{p} dA = -t \cdot a \cdot p \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sqrt{4\xi^2 + 9} d\xi = -t \cdot a \cdot p \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \\ N_2 \\ 0 \\ N_3 \\ 0 \end{bmatrix} \sqrt{4\xi^2 + 9} d\xi$$

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Harjoitus 12 Syksy 2013.

Lasketaan integraali numeerisesti

ξ	Det(J)	N1	N2	N3	Wi	I1	I2	I3
-0.57735	3.21455	0.455342	-0.12201	0.666667	1	1.463719	-0.3922	2.143034
0.57735	3.21455	-0.12201	0.455342	0.666667	1	-0.3922	1.463719	2.143034
Yht						1.071517	1.071517	4.286067



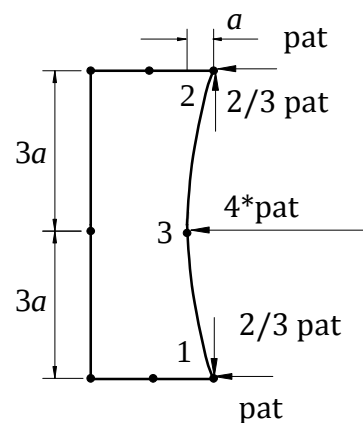
b) pinnan suuntavektori $\mathbf{t}$ ja normaalivektori $\mathbf{n}$

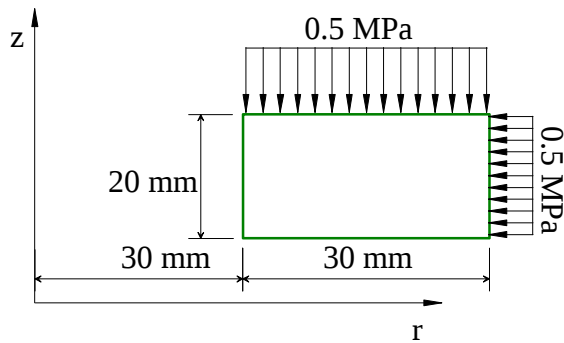
$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{J_x^2 + J_y^2}} \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4\xi^2 + 9}} \begin{bmatrix} 2\xi \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{4\xi^2 + 9}} \begin{bmatrix} 3 \\ -2\xi \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p} = -p\mathbf{n} = \frac{p}{\sqrt{4\xi^2 + 9}} \begin{bmatrix} -3 \\ 2\xi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}^p = \iint_A \mathbf{N}^T \mathbf{p} dA = \mathbf{t} \cdot a \cdot p \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2\xi \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4\xi^2 + 9}} \sqrt{4\xi^2 + 9} d\xi = \mathbf{t} \cdot a \cdot p \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -3N_1 \\ 2\xi N_1 \\ -3N_2 \\ 2\xi N_2 \\ -3N_3 \\ 2\xi N_3 \end{bmatrix} d\xi = \frac{\mathbf{t} \cdot a \cdot p}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 3\xi - 3\xi^2 \\ -2\xi^2 + 2\xi^3 \\ -3\xi - 3\xi^2 \\ 2\xi^2 + 2\xi^3 \\ -6 + 6\xi^2 \\ 4\xi - 4\xi^3 \end{bmatrix} d\xi =$$

$$= \frac{\mathbf{t} \cdot a \cdot p}{2} \begin{bmatrix} -2 \\ -4/3 \\ -2 \\ 4/3 \\ -12 + 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{t} \cdot a \cdot p \begin{bmatrix} -1 \\ -2/3 \\ -1 \\ 2/3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$





3. Laske kuvan nelisolmuisen rotaatiosymmetrisen elementin ekvivalenttiset solmukuormitukset kun solmunumerointi alkaa vasemmasta alakulmasta.

Sovelletaan rotaatiosymmetrisen levyn kaavaa (55) eli nyt

r_1 on ensimmäinen säde ja r_2 toinen säde ja kuljetaan järjestyksessä solmu 1,2 tai 2,3 tai 3,4 tai 4,1 siis vastapäivään.

$$\mathbf{f}^p = \frac{\pi l_s}{3} \begin{bmatrix} p_r (2r_1 + r_2) \\ p_z (2r_1 + r_2) \\ p_r (r_1 + 2r_2) \\ p_z (r_1 + 2r_2) \end{bmatrix}$$

Sivu 2 (pystyreuna solmulta 2 solmulle 3)

$$p_z = 0 \quad p_r = -0.5 \text{ MPa}$$

$$\mathbf{f}^p = \frac{\pi 20 \text{ mm}}{3} \begin{bmatrix} -0.5 \frac{N}{\text{mm}^2} (2 \cdot 60 + 60) \text{ mm} \\ 0 \\ -0.5 \frac{N}{\text{mm}^2} (60 + 2 \cdot 60) \text{ mm} \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1884.96 \\ 0 \\ -1884.96 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N}$$

Sivu 3 (yläreuna solmulta 3 solmulle 4)

$$p_z = -0.5 \text{ MPa} \quad p_r = 0$$

$$\mathbf{f}^p = \frac{\pi 30 \text{ mm}}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \frac{N}{\text{mm}^2} \cdot (2 \cdot 60 + 30) \text{ mm} \\ 0 \\ -0.5 \frac{N}{\text{mm}^2} \cdot (60 + 2 \cdot 30) \text{ mm} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -2356.19 \\ 0 \\ -1884.96 \end{bmatrix} \text{ N}$$

