

1. Laske $\int_2^8 x e^{-x} dx$ numeerisesti Gaussin integrointina käyttäen 1,2 ja kolmea integrointipistettä. Vertaa tulosta tarkkaan arvoon.

$$\int u dv = uv - \int v du \quad u = x \quad du = dx \quad dv = e^{-x} dx \quad v = -e^{-x} \Rightarrow$$

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -(1+x) e^{-x} \Rightarrow$$

$$\int_2^8 x e^{-x} dx = -9e^{-8} + 3e^{-2} \approx 0.4029867$$

$$x(\xi) = N_1(\xi)a + N_2(\xi)b$$

1-pisteen integrointi					Virhe	-49.8399 %
(b-a)/2		3				
ξ	x	f(x)	w	I		
0	5	0.03369	2	0.202138	Yht	0.202138
2-pisteen integrointi					Virhe	-1.37399 %
ξ	x	f(x)	w	I		
-0.57735	3.267949	0.124458	1	0.373374		
0.57735	6.732051	0.008025	1	0.024076	Yht	0.39745
3-pisteen integrointi					Virhe	0.466889 %
ξ	x	f(x)	w	I		
-0.7746	2.67621	0.184186	0.555556	0.306977		
0	5	0.03369	0.888889	0.089839		
0.774597	7.32379	0.004831	0.555556	0.008052	Yht	0.404868
4-pisteen integrointi					Virhe	0.040562 %
ξ	x	f(x)	w	I		
-0.86114	2.416591	0.215621	0.347855	0.225014		
-0.33998	3.980057	0.074366	0.652145	0.145492		
0.339981	6.019943	0.014627	0.652145	0.028617		
0.861136	7.583409	0.003859	0.347855	0.004027	Yht	0.40315

EDE 21100 H11 T1 MathCad

ORIGIN := 1

Esimerkki: Laske numeerisesti integraali

$$\int_2^8 x e^{-x} dx$$

$$\underline{\underline{W}} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{9} & \frac{8}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

Painokertoimet

$$\underline{\underline{GP}} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \end{pmatrix}$$

Gaussin pisteet

$$f(x) := x \cdot e^{-x}$$

$$N_1(\xi) := \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$N_2(\xi) := \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

$$x(\xi) := N_1(\xi) a + N_2(\xi) b$$

$$a := 2 \quad b := 8$$

$$\text{DetJ} := \frac{b - a}{2} = 3$$

1. pisteen Gauss integrointi

$$I_1 := \text{DetJ} \cdot \sum_{i=1}^1 \left(W_{1,i} \cdot f(x(GP_{1,i})) \right) = 0.202$$

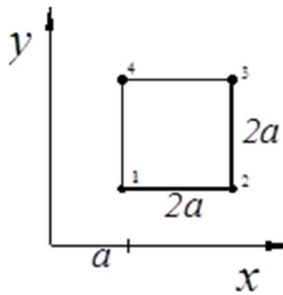
2. pisteen Gauss integrointi

$$I_2 := \text{DetJ} \cdot \sum_{i=1}^2 \left(W_{2,i} \cdot f(x(GP_{2,i})) \right) = 0.397$$

3. pisteen Gauss integrointi

$$I_3 := \text{DetJ} \cdot \sum_{i=1}^3 \left(W_{3,i} \cdot f(x(GP_{3,i})) \right) = 0.405$$

$$\text{Tarkka} := \int_a^b f(x) dx = 0.40299 \quad \int_a^b f(x) dx \rightarrow 3 \cdot e^{-2} - 9 \cdot e^{-8}$$



2. Kuvan nelisolmuisen elementin paksuus on t ja se pyörii y -akselin ympäri vakiokulmanopeudella ω . Laske tilavuusvoimasta $f_x = \rho \omega^2 x$ syntyvä ekvivalenttinen solmukuormitusvektori.

Vihje: $N_i(\xi, \eta) = 1/4(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)$

$$\mathbf{f}^V = \iiint_V \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV = t \iint_A \mathbf{N}^T \mathbf{f} dA = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_4 \\ 0 \end{bmatrix} f_x J d\xi d\eta = t J \rho \omega^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_4 \\ 0 \end{bmatrix} x d\xi d\eta$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \Rightarrow J = a^2$$

$$\begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix}$$

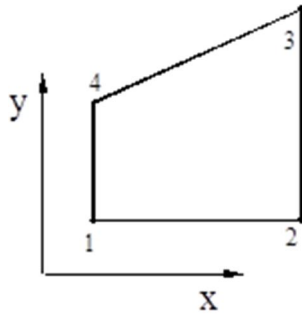
Integraalista huomataan, että se tuottaa vain x -akselin suuntaisia voimakomponentteja f_{xi}^V , missä alaindeksi i viittaa solmuun. Solmun i muotofunktio on muotoa

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)$$

pisteen x -koordinaatti saadaan ko. elementille $x = 2a + a\xi = a(2 + \xi)$, joten solmun i ekvivalenttinen solmukuormitus on

$$\begin{aligned} f_{xi}^V &= \frac{t a^2 \rho \omega^2 a}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(2 + \xi) d\xi d\eta \\ &= \frac{t a^3 \rho \omega^2}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) d\xi d\eta + \frac{t a^3 \rho \omega^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\xi + \xi_i \xi^2)(1 + \eta_i \eta) d\xi d\eta \\ &= 2t a^3 \rho \omega^2 + \frac{t a^3 \rho \omega^2}{4} \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{3} \xi_i \right) (1 + \eta_i \eta) d\eta \\ &= 2t a^3 \rho \omega^2 + t a^3 \rho \omega^2 \left(\frac{1}{3} \xi_i \right) = \frac{t a^3 \rho \omega^2}{3} (6 + \xi_i) \end{aligned}$$

missä ξ_i saa arvon -1 solmuilla $i=1$ ja $i=4$ tai $+1$ solmuilla $i=2$ ja $i=3$.



3. Laske kuvan nelisolmuisen elementin neliömomentti

$$I_x = \iint_A y^2 dA \text{ numeerisesti Gauss'in integroinnilla}$$

käyttäen 2:2 näytteenottoa.

Solmu	x [mm]	y [mm]
1	10	10
2	50	10
3	50	55
4	10	40

$$x_{21} = 40; x_{34} = 40; x_{32} = 0; x_{41} = 0$$

$$y_{21} = 0; y_{34} = 15; y_{32} = 45; y_{41} = 30$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 40 - 40\eta + 40 + 40\eta & 15 + 15\eta \\ 0 & 30 - 30\xi + 45 + 45\xi \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 80 & 15 + 15\eta \\ 0 & 75 + 15\xi \end{bmatrix} \Rightarrow J = 375 + 75\xi$$

$$\begin{aligned} y &= 10N_1 + 10N_2 + (15 + 40)N_3 + 40N_4 \\ &= 10(N_1 + N_2) + 40(N_3 + N_4) + 15N_3 \\ &= 5(1 - \eta) + 20(1 + \eta) + 15N_3 \\ &= 25 + 15\eta + 15N_3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2(\xi, \eta) = N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) = N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) = N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{cases}$$

Gaussin integrointi

Piste	ξ	η	J	y	y^2	wi	wj	Ip
1	-0.57735	-0.57735	331.6987	17.00962	289.3271	1	1	95969.44
2	0.57735	-0.57735	418.3013	18.83975	354.936	1	1	148470.2
3	0.57735	0.57735	418.3013	42.99038	1848.173	1	1	773093.1
4	-0.57735	0.57735	331.6987	36.16025	1307.564	1	1	433717.3
I_x								1451250

Tark. (dimensio on tietysti mm⁴)

```
In[24]:= Ix = Integrate[Y*Y*DetJ, {xi, -1, 1}, {eta, -1, 1}]
```

```
Out[24]:= 1451250
```

MathCad

ORIGIN := 1

Muotofunktiot

$$N(i, \xi, \eta) := \frac{1}{4} (1 + k_{s,i} \xi) (1 + e_{t,i} \eta)$$

+

$$k_s := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad e_t := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X := \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 55 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$x(\xi, \eta) := \sum_{i=1}^4 (N(i, \xi, \eta) \cdot X_i) \quad y(\xi, \eta) := \sum_{i=1}^4 (N(i, \xi, \eta) \cdot Y_i)$$

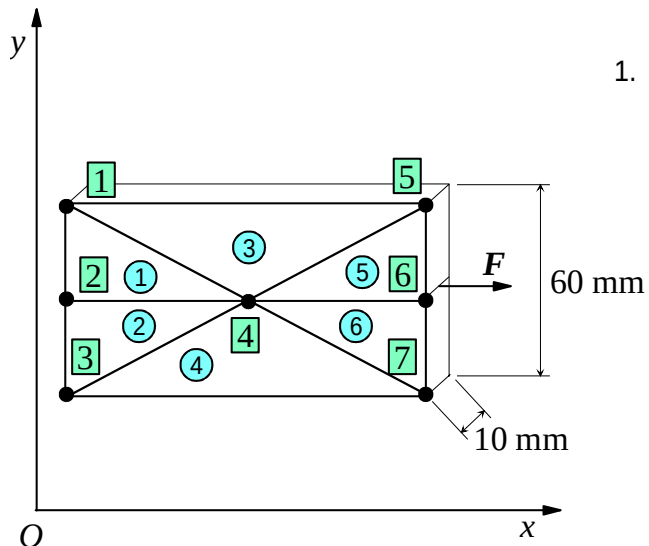
$$\text{MatJ}(\xi, \eta) := \begin{pmatrix} \frac{d}{d\xi} x(\xi, \eta) & \frac{d}{d\xi} y(\xi, \eta) \\ \frac{d}{d\eta} x(\xi, \eta) & \frac{d}{d\eta} y(\xi, \eta) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 20 & \frac{15 \cdot \eta}{4} + \frac{15}{4} \\ 0 & \frac{15 \cdot \xi}{4} + \frac{75}{4} \end{pmatrix} \quad J(\xi, \eta) := |\text{MatJ}(\xi, \eta)| \rightarrow 75 \cdot \xi + 375$$

$$W := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{9} & \frac{8}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \quad \text{Painokertoimet} \quad GP := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \end{pmatrix} \quad \text{Gaussin pisteet}$$

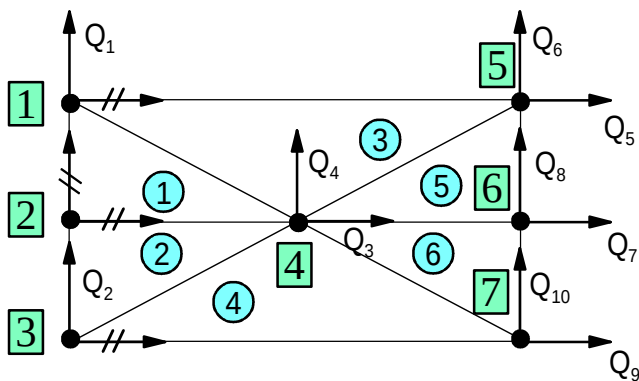
$$I_x := \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(W_{2,i} \cdot W_{2,j} \cdot y(GP_{2,i}, GP_{2,j})^2 \cdot J(GP_{2,i}, GP_{2,j}) \right) = 1.45125 \times 10^6$$

$$\text{Tark} \quad I := \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 y(\xi, \eta)^2 \cdot J(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = 1.45125 \times 10^6$$

Esitetty luennolla



1. Kuvan rakenne mallinnetaan CST-elementeillä. Solmu 2 on täysin kiinnitetty ja solmujen 1 ja 3 vaakaliike on estetty. Laskentamallin oikeaan reunaan kohdistuu resultanttivoima 10 kN. Korvaa resultanttivoima tasaisella paineella, joka kohdistuu oikeaan reunaan ja määritä laskentamallin globaali kuormitusvektori F .



ID-taulukko

Node	Qx	Qy
1	0	1
2	0	0
3	0	2
4	3	4
5	5	6
6	7	8
7	9	10

Solmut

Elem.	n1	n2	n3
1	2	4	1
2	3	4	2
3	4	5	1
4	3	7	4
5	4	6	5
6	4	7	6

F	10000	N
Leveys b	60	mm
Paksuus t	10	mm
Paine p	16.67	MPa
Viivakuorma	166.67	N/mm

F/A
rx

$$\mathbf{f}^p = \frac{l_s}{2} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_x \\ r_y \end{bmatrix}$$

Elementti 5	ls	30	mm	Elementti 6	ls	30	mm
-------------	----	----	----	-------------	----	----	----

fp	2500	N	7	2500	N	9
	0	N	8 fp	0	N	10
	2500	N	5	2500	N	7
	0	N	6	0	N	8

Sijoittelusummaus

F =	Elementti 5 osuus				Elementti 5 ja elementti 6 osuus		
	0	N		1	0	N	1
	0	N		2	0	N	2
	0	N		3	0	N	3
	0	N		4	0	N	4
	2500	N		5	2500	N	5
	0	N		6	0	N	6
	2500	N		7	5000	N	7
	0	N		8	0	N	8
	0	N		9	2500	N	9
	0	N		10	0	N	10

Alla on vielä elementin 1 jäykkymatriisin sijoittelusummausnumerointi

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$