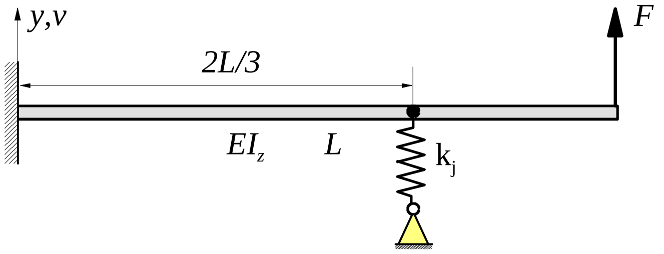
Exam III 10 Mar 2014 Solutions



1. Compute the deflection at right end of the structure using the potential energy $\Pi = U + WP$ minimum principle. Choose kinematically admissible trial function from the complete set $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{x}{L}\right) + \alpha_2\left(\frac{x}{L}\right)^2$. Given values: *E* = 100 GPa, I_z = 10^{-5} m^4, k_j = 10000 N/mm, *F* = 10000 N and *L* = 2 m.

Essential boundary cond. $\begin{cases} \tilde{v}(0) = 0 \\ \tilde{v}_{,x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \tilde{v}(x) = \alpha\left(\frac{x}{L}\right)^2 \Rightarrow \tilde{v}_{,xx} = \alpha\frac{2}{L^2} \qquad \tilde{v}(L) = \alpha$

Beam strain energy

$$U_p = \frac{EI_z}{2}\int_0^L \tilde{v}_{,xx}(x)^2 dx = \frac{EI_z}{2}\alpha^2\frac{4}{L^4}\int_0^L dx = \frac{2EI_z}{L^3}\alpha^2$$

Strain energy of the spring

$$U_j = \frac{1}{2}k_j\,\tilde{v}\left(\frac{2L}{3}\right)^2 = \frac{8}{81}k_j\,\alpha^2$$

Work potential of the external force

$$WP = -F\,\tilde{v}(L) = -F\alpha$$

Principle of the minimum potential energy $\Pi = U_j + U_p + WP \to \min \Rightarrow$

$$\frac{dU}{d\alpha} = -\frac{dWP}{d\alpha} \Rightarrow \frac{16}{81}k_j\alpha + \frac{4EI_z}{L^3}\alpha = F \Rightarrow$$

$$\frac{1}{81}\left(4k_j + \frac{EI_z}{L^3}\right)\alpha = \frac{F}{4} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{81F\,L^3}{\left(16\cdot k_j L^3 + 324EI_z\right)}$$

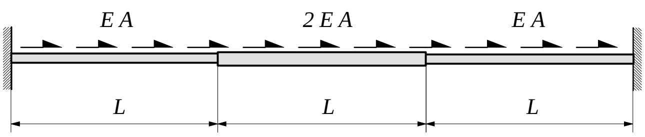
Numerical values

E	1E+11	Pa
Iz	1.00E-05	m^4
L	2	m
kj	10000	N/m
F	10000	N

α	0.019921	m	19.9213	mm

Exam III 10 Mar 2014

Solutions



$$\boldsymbol{f}_e^V = \frac{l_e}{2}\begin{bmatrix} A_e f_x \\ A_e f_x \end{bmatrix}$$

2. Määritä elementtimenetelmällä kuvan sauva-rakenteen solmusiirtymät sekä oikeanpuolisimman sauvan normaalivoimat. Rakenne siirtyy vain vaakasuunnassa ja sitä kuormittaa tilavuus-kuormitus $f_x = \rho g$ (omapaino vaikuttaa oikealle). Sauvojen kimmomoduuli E = 70 GPa, pinta-ala: A = 100 mm^2 tiheys ρ = 10000 kg/m^3, g = 10 m/s^2 ja pituus L = 2 m.

g	10	m/s^2
ρ	10000	kg/m^3
E	7.00E+10	Pa

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}^V = \frac{f_x A l_e}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Elementti 1 — Jäykkyysmatriisi — Ekv. Solmukuormitusvektori

A	0.0001	m^2
L	2	m

$\mathbf{k}_e$

3500000	-3500000
-3500000	3500000

$\mathbf{f}^V$

10	N
10	N

Elementti 2 — Jäykkyysmatriisi — Ekv. Solmukuormitusvektori

A	0.0002	m^2
L	2	m

$\mathbf{k}_e$

7000000	-7000000
-7000000	7000000

$\mathbf{f}^V$

20	N
20	N

Elementti 3 — Jäykkyysmatriisi — Ekv. Solmukuormitusvektori

A	0.0001	m^2
L	2	m

$\mathbf{k}_e$

3500000	-3500000
-3500000	3500000

$\mathbf{f}^V$

10	N
10	N

Globaali jäykkyysmatriisi — Käänteismatriisi — Globaali kuormitusvektori

K

10500000	-7000000
-7000000	10500000

Käänteismatriisi

1.71429E-07	1.14286E-07
1.14286E-07	1.71429E-07

F

30	N
30	N

Siirtymä **Q**

Q

8.571E-06	m
8.571E-06	m

Elementin 3 solmuvoimat

$$\boldsymbol{f}_e = \boldsymbol{k}_e \boldsymbol{q}_e - \boldsymbol{f}_e^V$$

$\mathbf{q}_e$

8.57E-06	m
0	m

$\mathbf{f}_e$

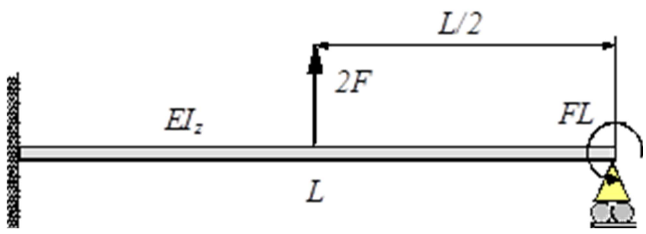
20	N	
-40	N	Tukireaktio (oikea)

Exam III 10 Mar 2014 Solutions

Elementin 1 solmuvoimat

q_e	0	m	**f_e**	-40	N	Tukireaktio (vasen)
	8.57E-06	m		20	N	

Ele	Massa		Paino		
1	2	kg	20	N	Reaktiot yht.
2	4	kg	40	N	-80 N
3	2	kg	20	N	
Yht	8	kg	80	N	



3. Määritä kuvan palkkirakenteen taivutusmomentti-kuvio käyttäen apuna elementtimenetelmää.
b) Laske siirtymän likiarvo ulkoisen voiman kohdalla.
Käytä yhden elementin laskentamallia ja kahden solmuvapausasteen palkkielementtiä.

Elementin jäykkyysmatriisi **k** ja sen ekvivalenttinen solmukuormitusvektori **f**^p

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \qquad \mathbf{f}_1^p = \begin{bmatrix} F \\ \frac{FL}{4} \\ F \\ \frac{-FL}{4} \end{bmatrix}$$

Globaali jäykkyysmatriisi, globaali kuormitusvektori ja globaali siirtymävektori

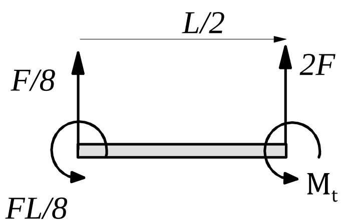
$$\mathbf{K} = \frac{4EI_z}{L} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}^{-1} = \frac{L}{4EI_z} \qquad \mathbf{F} = FL - \frac{FL}{4} = \frac{3FL}{4}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} = \frac{3FL^2}{16EI_z}$$

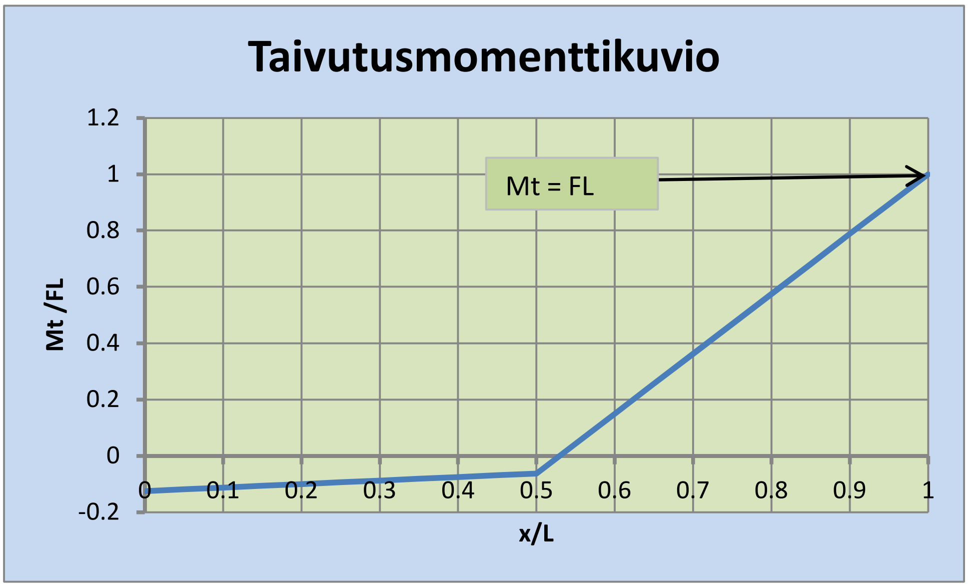
Elementin 1 solmuvoimavektori

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{k}_1\mathbf{q}_1 - \mathbf{f}_1^p = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\frac{3FL^2}{16EI}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F \\ \frac{FL}{4} \\ F \\ \frac{-FL}{4} \end{bmatrix} = \frac{F}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ L \\ -17 \\ 8L \end{bmatrix}$$

Alla olevan kuvion taivutusmomentti kohdassa L/ 2 on saatu elementin puolikkaan vapaakappalekuvan avulla



$$\sum M_{L/2} = 0 \Rightarrow \qquad +\frac{FL}{8} - \frac{F}{8}\frac{L}{2} + M_t = 0 \qquad \Rightarrow M_t = -\frac{FL}{16}$$



b) siirtymän likiarvo ulkoisen voiman kohdalla saadaan kaavakokoelman avulla

$$v(\xi) = H_1 q_1 + \frac{l_e}{2} H_2 q_2 + H_3 q_3 + \frac{l_e}{2} H_4 q_4$$

$$= \begin{bmatrix} H_1 & \frac{l_e}{2} H_2 & H_3 & \frac{l_e}{2} H_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \mathbf{N}\,\mathbf{q}$$

$$H_1 = \frac{1}{4}\left(2 - 3\xi + \xi^3\right)$$

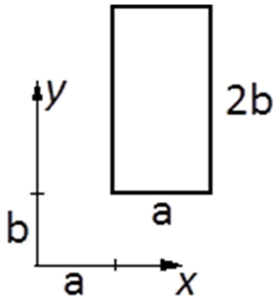
$$H_2 = \frac{1}{4}\left(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3\right)$$

$$H_3 = \frac{1}{4}\left(2 + 3\xi - \xi^3\right)$$

$$H_4 = \frac{1}{4}\left(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3\right)$$

eli ($\xi = 0$)

$$v(L/2) = \frac{l_e}{2} H_4 q_4 = \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{4}\left(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3\right) \frac{3FL^2}{16EI_z} = -\frac{L}{8} \cdot \frac{3FL^2}{16EI_z} = -\frac{3FL^3}{128EI_z}$$



4. Laske kuvan nelisolmuisen elementin, jonka paksuus t = 10 mm, hitausmomentti J_z numeerisesti Gauss'in integroinnilla käyttäen 2·2 näytteenottoa.
Mitta a = 100 mm ja b = 120 mm ja materiaalin tiheys ρ = 10000 kg/m³.
Vihje: $J_z = \int_V \rho\left(x^2+y^2\right)dV$

Kuvasta päätellään (tai käytetään kaavaa): $x(\xi,\eta) = N_1(\xi,\eta)x_1 + N_2(\xi,\eta)x_2 + N_3(\xi,\eta)x_3 + N_4(\xi,\eta)x_4$

$$x = \frac{a}{2}(3+\xi)$$
$$y = b(2+\eta)$$

$$\begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}\begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix}$$

joten Jacobin matriisi ja sen determinantti

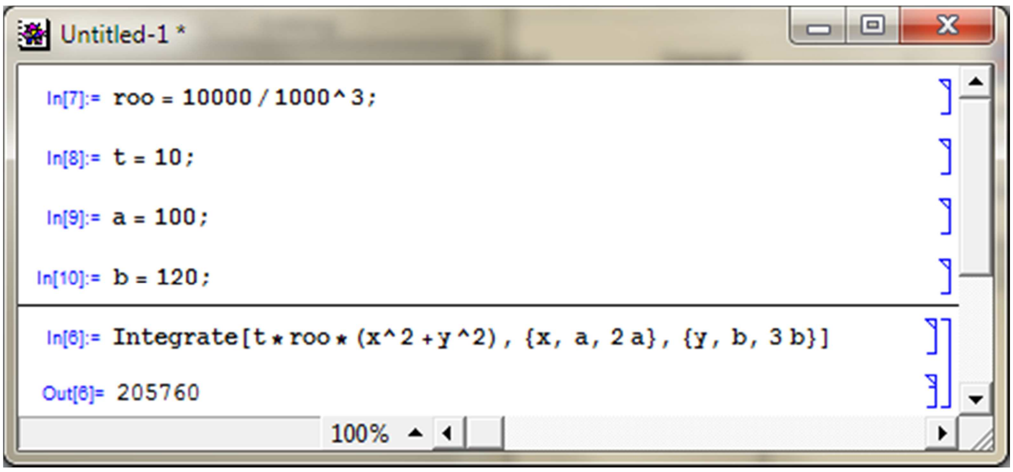
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a/2 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \Rightarrow J = \frac{ab}{2} = 6000\,mm^2 \qquad J_z = t\int_A \rho\left(x^2+y^2\right)dA = t\rho J\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(x^2+y^2\right)d\xi d\eta$$

a	100	mm
b	120	mm

ρ	0.00001	kg/mm³
t	10	mm

Piste	ξ	η	x^2 [mm²]	y^2 [mm²]	J	Wi	Wj	J_z
1	-0.57735	-0.57735	14673.08	29144.62	6000	1	1	26290.6223
2	0.57735	-0.57735	31993.59	29144.62	6000	1	1	36682.9271
3	0.57735	0.57735	31993.59	95655.38	6000	1	1	76589.3777
4	-0.57735	0.57735	14673.08	95655.38	6000	1	1	66197.0729
Yht								**205760.00**

TARKASTUS (laatu: kg mm²)



5. Määritä tehtävän 3 rakenteen ominaistaajuus ja hahmottele ominaismuoto, jossa solmun 2 derivaatta $v_{,x}$ on piirretty oikeassa suhteessa. Käytä kahden solmuvapausasteen palkkielementtiä ja konsistenttia massamatriisia.

Suure	Arvo	Yksikkö
ρ	7850	kg/m^3
E	200	GPa
I_z	10^{-5}	m^4
A	0.01	m^2
L	2	m

Mallin globaali jäykkyysmatriisi on

$$\mathbf{K} = \frac{4EI_z}{L}$$

ja globaali massamatriisi

$$\mathbf{m} = \frac{\rho A L}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{m}_k = \frac{\rho A L}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho AL}{420}4L^2 = \frac{mL^2}{105}$$

ratkaistaan ominaiskulmataajuus ja ominaisvektori (vektorin pituus on vapaa)

$$\det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) = 0 \Rightarrow \det\left(\frac{4EI_z}{L} - \lambda\frac{mL^2}{105}\right) = 0 \Rightarrow 1 - \lambda\frac{mL^3}{420EI_z} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{420EI_z}{mL^3} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{420EI_z}{mL^3}}$$

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \alpha \quad \alpha \in R$$

käytetään tehtävän numeroarvoja

m	157	kg

ω	817.7957	Hz
f	130.1562	Hz

Ominaismuoto (taulukkolaskentaohjelmalla kun ominaisvektorin pituus on 0.1)