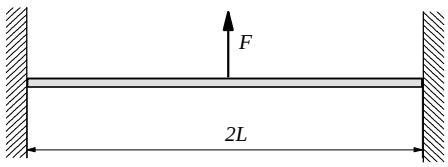
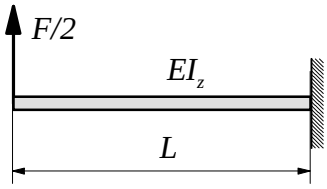
Tentti I 10.12.2013 Ratkaisut



1. Laske kuvan palkin (E Iz) siirtymäfunktion v(x) likiarvo potentiaalienergian minimin periaatteella käyttämällä kinemaattisesti käypää yritettä rakenteen puolikkaalle. Valitse likiarvo polynomeista $p(x)=\alpha_0+\alpha_1\left(\frac{x}{L}\right)+\alpha_2\left(\frac{x}{L}\right)^2+\alpha_3\left(\frac{x}{L}\right)^3$

Tehtävä olisi helpompi jos ottaisi vasemmanpuoleisen puolikkaan, jolloin reunaehtoja olisi helpompi soveltaa, mutta menee näinkin.



symmetria $\Rightarrow \alpha_1=0 \quad \tilde{v}(x)=\alpha_0+\alpha_2\left(\frac{x}{L}\right)^2+\alpha_3\left(\frac{x}{L}\right)^3$

$$\tilde{v}(L)=\alpha_0+\alpha_2+\alpha_3=0 \Rightarrow \alpha_0=-\alpha_2-\alpha_3$$

$$\tilde{v}_{,x}=\alpha_2\frac{2x}{L^2}+\alpha_3\frac{3x^2}{L^3} \Rightarrow \tilde{v}_{,x}(L)=2\frac{\alpha_2}{L}+3\frac{\alpha_3}{L}=0 \Rightarrow \alpha_2=-\frac{3}{2}\alpha_3$$

$$\alpha_0=-\alpha_2-\alpha_3=\frac{3}{2}\alpha_3-\alpha_3=\frac{\alpha_3}{2}$$

$$\tilde{v}(x)=\frac{\alpha_3}{2}-\frac{3}{2}\alpha_3\left(\frac{x}{L}\right)^2+\alpha_3\left(\frac{x}{L}\right)^3=\frac{\alpha_3}{2}\left[1-3\left(\frac{x}{L}\right)^2+2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$$

$$\tilde{v}_{,x}(x)=\frac{\alpha_3}{2}\left[-6\frac{x}{L^2}+6\frac{x^2}{L^3}\right] \qquad \tilde{v}_{,xx}(x)=\frac{\alpha_3}{L^3}[6x-3L] \qquad \tilde{v}_{,xx}^2=\frac{\alpha_3^2}{L^6}\left[36x^2-36Lx+9L^2\right]$$

$$U=\frac{EI_z}{2L^6}\alpha_3^2\int_0^L\left[36x^2-36Lx+9L^2\right]dx=\frac{EI_z}{2L^6}\alpha_3^2\left[12x^3-18Lx^2+9L^2x\right]_0^L=\frac{3EI_z}{2L^3}\alpha_3^2$$

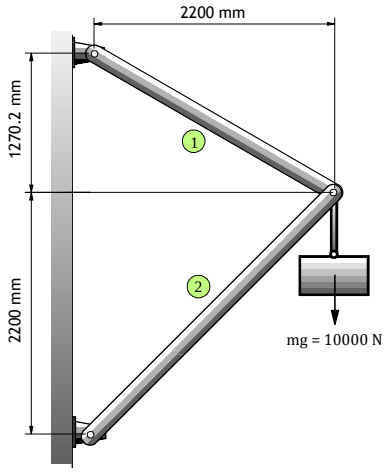
$$WP=-\frac{F}{2}\alpha_0=-\frac{F}{4}\alpha_3$$

$$\Pi=U+WP\rightarrow\min\Rightarrow\frac{\partial U}{\partial\alpha_3}=-\frac{\partial WP}{\partial\alpha_3}\Rightarrow\frac{3EI_z}{L^3}\alpha_3=\frac{F}{4}\Rightarrow\alpha_3=\frac{F\,L^3}{12EI_z}$$

Taipuma keskellä

$$\tilde{v}(0)=\alpha_0=\frac{F\,L^3}{24EI_z}$$

2. Laske kuvan kannattimen sauvavoimat sekä sauvan 2 normaalivoima elementtimenetelmällä, kun rakenteeseen kohdistuu vain taakan *mg* aiheuttama kuormitus. Kimmomoduuli: E = 200 GPa. Sauvojen pinta-ala: A = 200 mm^2.



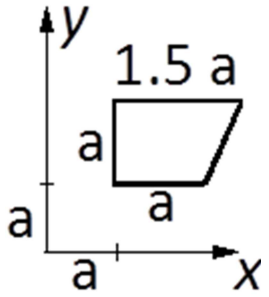
Elementti1 (Lokaalisolmu 2 on globaalisolmu 1)							
				Solmu 1		Solmu 2	
A_1	200		Kalle	11809.44	-6818.18	-11809.44	6818.18
x_21	2200			-6818.18	3936.48	6818.18	-3936.48
y_21	-1270.2		Solmu2	-11809.44	6818.18	11809.44	-6818.18
Pituus	2540.341			6818.18	-3936.48	-6818.18	3936.48
l_1	0.866026	suuntakosinit					
m_1	-0.5						
E*A/L	15745.92						

Elementti2 (Lokaalisolmu 2 on globaalisolmu 1)							
				Solmu 1		Solmu 2	
A_2	200		Kalle	6428.24	6428.24	-6428.24	-6428.24
x_21	2200			6428.24	6428.24	-6428.24	-6428.24
y_21	2200		Solmu2	-6428.24	-6428.24	6428.24	6428.24
Pituus	3111.27			-6428.24	-6428.24	6428.24	6428.24
l_2	0.707107	suuntakosinit					
m_2	0.707107						
E*A/L	12856.49						

$$\mathbf{k}_e = \frac{EA}{l_e}\begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}$$

Jäykkyysmatriisi (sijoittelusummattu sininen osuus)						
K	18237.68	-389.94		$\mathbf{K}^{-1}$	5.49E-05	2.06E-06
	-389.94	10364.72			2.06E-06	9.66E-05
annettu solmukuormitus						
P	0.00	N		**Q**	-0.02065	mm
	-10000.00	N			-0.96559	mm

Sauvavoimat							
$\mathbf{f}_1 = \mathbf{k}_1 * \mathbf{q}_1$		$\mathbf{q}_1$	0	mm	$\mathbf{f}_1$	-6339.7	N
			0	mm		3660.3	N
			-0.02065	mm		6339.7	N
			-0.96559	mm		-3660.3	N
$\mathbf{f}_2 = \mathbf{k}_2 * \mathbf{q}_2$		$\mathbf{q}_2$	0	mm	$\mathbf{f}_2$	6339.7	N
			0	mm		6339.7	N
			-0.02065	mm		-6339.7	N
			-0.96559	mm		-6339.7	N
Normaalivoima = E A **B q**2							
B	-0.00023	-0.00023	0.000227	0.000227	N =	-8965.76	N



3. Laske kuvan nelisolmuisen elementin neliömomentti I_y numeerisesti Gauss'in integroinnilla käyttäen 2·2 näytteenottoa. Mitta a = 100 mm.
Vihje: $I_y = \int_A x^2 dA$

$$x = (N_1 + N_4)a + N_2 \cdot 2a + N_3 \frac{5}{2}a = \frac{a}{2}(1-\xi) + \frac{a}{2}(1-\eta)(1+\xi) + \frac{5a}{8}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$= \frac{a}{8}\left[13 + \eta + (5+\eta)\xi\right]$$

$$y = \frac{a}{2}(3+\eta)$$

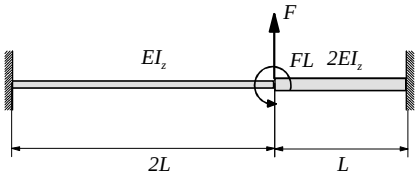
$$\begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} a(5+\eta) & 0 \\ a(1+\xi) & 4a \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow J = \frac{a^2}{16}(5+\eta)$$

Piste	ξ	η	x	x^2	J	Wi	Wj	Ip
1	-0.57735	-0.57735	123.3654	15219.02	2764.1561	1	1	42067750
2	0.57735	-0.57735	187.2008	35044.16	2764.1561	1	1	96867520
3	0.57735	0.57735	209.9679	44086.53	3485.8439	1	1	153678778
4	-0.57735	0.57735	129.4658	16761.4	3485.8439	1	1	58427619
Yht Iy								**3.5104E+08**

Tarkastus

Osa	Ioma	A	x	Isteiner	Iy
Neliö	8333333	10000	150	2.25E+08	2.33E+08
Kolmio	347222.2	2500	216.6667	1.17E+08	1.18E+08
Yht					**3.5104E+08**



4. Määritä kuvan palkkirakenteen siirtymät ulkoisen voiman kohdalla ja taivutusmomenttikuvio. Käytä kahden elementin laskentamallia ja kahden solmuvapausasteen palkkielementtejä.

Elementti 1 (vasen palkki)

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EI}{8L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 12L & -12 & 12L \\ 12L & 16L^2 & -12L & 8L^2 \\ -12 & -12L & 12 & -12L \\ 12L & 8L^2 & -12L & 16L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} = \frac{EI}{2L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 3L & -3 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & 2L^2 \\ -3 & -3L & 3 & -3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

Elementti 2 (oikenpuoleinen)

$$\mathbf{k}_2 = \frac{2EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} = \frac{EI}{2L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 48 & 24L & x & x \\ 24L & 16L^2 & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

Globaali jäykkyysmatriisi, globaali kuormitusvektori ja globaali siirtymävektori

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{2L^3}\begin{bmatrix} 51 & 21L \\ 21L & 20L^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \qquad \mathbf{K}^{-1} = \frac{L}{579EI}\begin{bmatrix} 40L^2 & -42L \\ -42L & 102 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} F \\ FL \end{bmatrix}$$

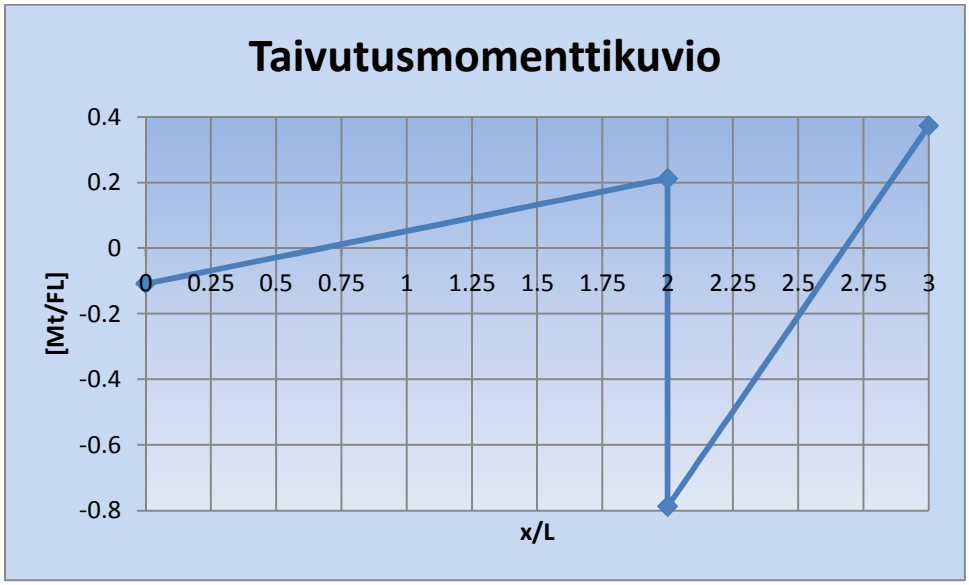
$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} = \frac{FL^2}{579EI}\begin{bmatrix} -2L \\ 60 \end{bmatrix}$$

Elementin 1 solmuvoimavektori

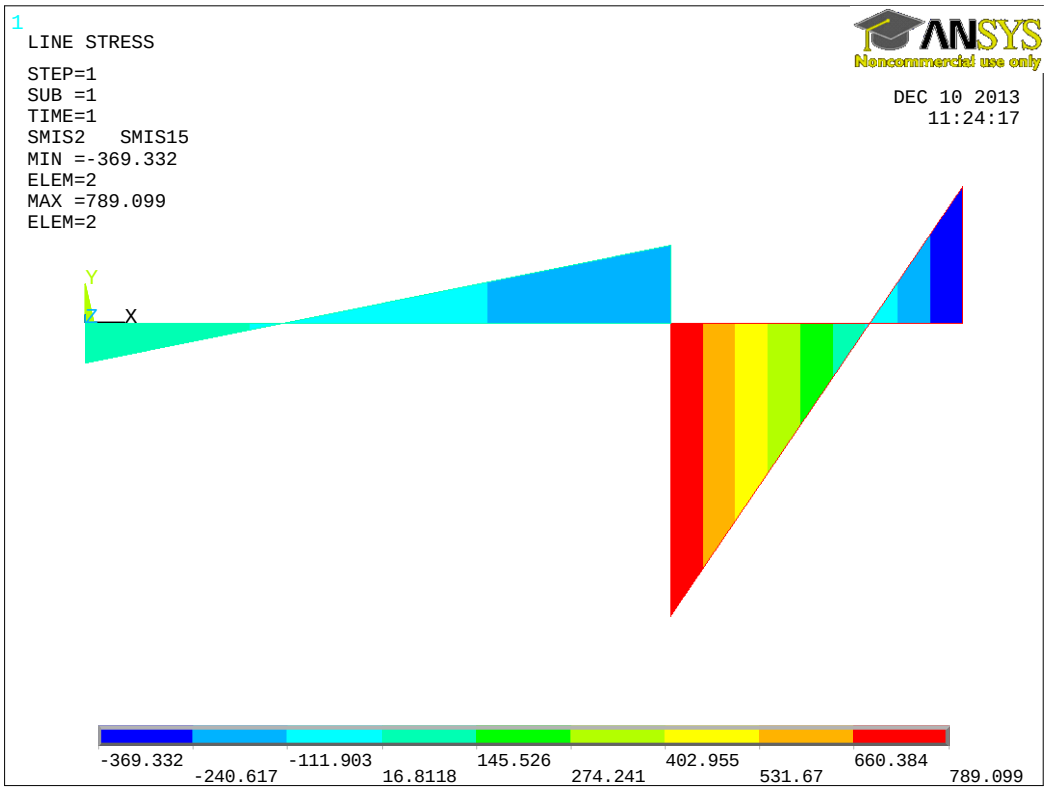
$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{k}_1\mathbf{q}_1 = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 3 & 3L & -3 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & 2L^2 \\ -3 & -3L & 3 & -3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \frac{FL^2}{579EI}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L \\ 30 \end{bmatrix} = \frac{F}{579}\begin{bmatrix} 93 \\ 63L \\ -93 \\ 123L \end{bmatrix}$$

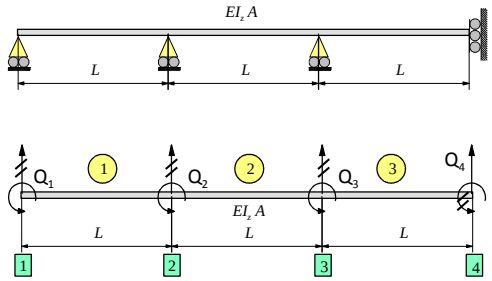
Elementin 2 solmuvoimavektori

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{k}_2\mathbf{q}_2 = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \frac{FL^2}{579EI}\begin{bmatrix} -4L \\ 120 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{F}{579}\begin{bmatrix} 672 \\ 456L \\ -672 \\ 216L \end{bmatrix}$$



Tarkastus ANSYS Beam188 kaksi elementtiä (ratkaisu poikkeaa hieman yllä lasketusta, koska Beam188 ei vastaa käsilaskennassa käytettyä EB-palkkia ja palkin lokaali z-akseli on ylöspäin ja y-akseli katsojasta poispäin, joka vaihtaa momentin merkin)





5. Määritä kuvan rakenteen globaali jäykkyys- ja massamatriisi. Käytä kahden solmuvapausasteen palkkielementtejä ja konsistenttia massamatriisia (se täydempi). Lähtöarvot ovat:

Suure	Arvo	Yksikkö
ρ	8000	kg/m^3
E	200	GPa
Iz	2 10^{-5}	m^4
A	0.02	m^2

Elementti 1

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} \qquad \mathbf{m}_1 = \frac{\rho A L}{420}\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{array}$$

Elementti 2

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 2 & 0 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{array} \qquad \mathbf{m}_2 = \frac{\rho A L}{420}\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{array}$$

Elementti 3

$$\mathbf{k}_3 = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 3 & 4 & 0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{array} \qquad \mathbf{m}_3 = \frac{\rho A L}{420}\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{array}$$

Globaali jäykkyys- ja massamatriisi

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 & 0 & 0 \\ 2L^2 & 8L^2 & 2L^2 & 0 \\ 0 & 2L^2 & 8L^2 & -6L \\ 0 & 0 & -6L & 12 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \frac{\rho A L}{420}\begin{bmatrix} 4L^2 & -3L^2 & 0 & 0 \\ -3L^2 & 8L^2 & -3L^2 & 0 \\ 0 & -3L^2 & 8L^2 & 13L \\ 0 & 0 & 13L & 156 \end{bmatrix}$$