Voiman potentiaalienergia

Potentiaalienergiasta puhutaan, kun kappaleeseen vaikuttaa jokin konservatiivinen voima. Voima on konservatiivinen, jos sen tekemä työ vaikutuspiseen siirtyessä tietystä paikasta toiseen on riippumaton kuljetusta reitistä. Tällöin se ei muuta energiaa lämmöksi. Konservatiivisia voimia ovat muun muassa gravitaatiovoima ja jousivoima. Sitä vastoin esimerkiksi kitka ei ole konservatiivinen voima, sillä se muuttaa liike-energiaa lämmöksi.

Tällä kurssilla käsitellään voimia, joiden suuruus ja suunta pysyvät vakioina niiden siirtyessä. Tällöin pistevoiman *F* tekemä työ *W* = *F u* ja sen potentiaalienergia *WP* = - *W* = -*F u*, jolloin potentiaalienergian nollataso on valittu kappaleen kuormittamattomaan asemaan ja siirtymä *u* on voiman suuntainen. Potentiaalienergiasta on myös käytössä muun muassa seuraavat merkinnät *V* ja E_p.

Viivakuormituksen potentiaalienergia saadaan summaamalla viivan pituuden yli

$$WP = -\int_s q_u(s)\,u(s)\,ds \qquad (1)$$

missä q_u on viivakuormitus siirtymän *u* suuntaan. Vastavasti painekuormitus summataan sen vaikutusalueen yli. Tilavuusvoiman potentiaalienergia saadaan

$$WP = -\int_V f_x\,u\,dV = -\int_s A\,f_x\,u\,ds \qquad (2)$$

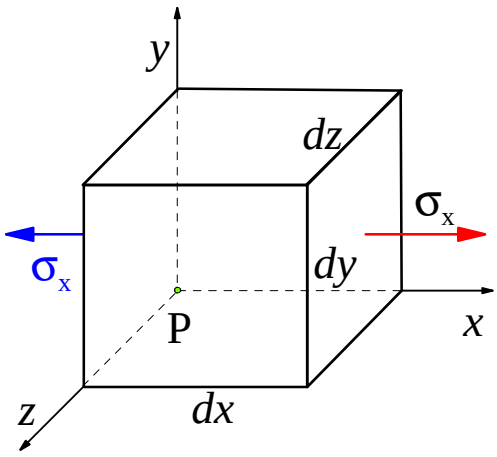
Koottuna yhteen ja siirryttäessä yleiseen kolmiulotteiseen tapaukseen voidaan ulkoisen voiman potentiaalienergia lausua

$$WP = -\int_V \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\;dV - \int_{S_p} \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}\;dS - \sum_i \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_i \qquad (3)$$

missä on käytetty merkintöjä: siirtymä $\mathbf{u} = (u \quad v \quad w)^{\mathrm{T}}$, tilavuusvoima $\mathbf{f} = (f_x \quad f_y \quad f_z)^{\mathrm{T}}$, paine $\mathbf{p} = (p_x \quad p_y \quad p_z)^{\mathrm{T}}$ ja pistevoima $\mathbf{F} = (F_x \quad F_y \quad F_z)^{\mathrm{T}}$. Merkinnät Chandrupatlan kirjassa ovat hieman eri kirjaimilla, mutta muuten energialauseke on täsmälleen sama.

Kimmoenergia

Tarkastellaan kuvan aksiaalista jännitystilaa



Elementin *x*-suuntaiseen tahkoon kohdistuva voima $F = \sigma_x \, dy \, dz$. Voiman *F* tilavuuselementtiin tekemä muodonmuutostyö

$$dW_\sigma = \int_0^s F(s)\, ds \tag{4}$$

missä $s = dx\,\varepsilon$ eli

$$dW_\sigma = \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon)\, dx\, dy\, dz\, d\varepsilon = \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon)\; d\varepsilon\, dV \tag{5}$$

Kimmoisella materiaalilla muodonmuutostyötä kutsutaan kimmoenergiaksi d*U*. Osamäärää

$$U_0 = \frac{dW_\sigma}{dV} = \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{6}$$

sanotaan tilavuuselementtiin kuuluvan pisteen kimmoenergiatiheydeksi. Jos materiaali on lineaarisesti kimmoista, niin $\sigma_x = E\,\varepsilon_x$ ja $U_0 = \frac{1}{2} E\,\varepsilon_x^2$.

Kappaleen kimmoenergia saadaan summaamalla

$$U = \int_V U_0\, dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x\, \varepsilon_x\, dV \tag{7}$$

Homogeenisen, suoran sauvan, jonka pituus on *L* ja poikkileikkausala *A*, keskeisessä vedossa tai puristuksessa saadaan sauvan kimmoenergialle lauseke ($\varepsilon_x = u_{,x}$)

$$U = \frac{1}{2} \int_L EA\, u_{,x}^2\, dx \tag{8}$$

Otetaan tässä toistaiseksi ilman perusteluja myös suoran tasopalkin taivutusongelman kimmoenergia, kun palkin materiaali on lineaarisesti kimmoista

$$U = \frac{1}{2}\int_L EI_z \, v_{,xx}^2 \, dx \tag{9}$$

Lineaarisesti kimmoisen kappaleen, jossa on yleinen jännitystila, kimmoenergia saadaan

$$U = \int_V U_0 \, dV = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \tag{10}$$

missä

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\right)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \left(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}\right)^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{11}$$

Potentiaalienergian minimin periaate

Kimmoisen kappaleen, johon vaikuttaa konservatiivinen ulkoinen voimakuormitus, kokonaispotentiaalienergia on

$$\Pi = U + WP \tag{12}$$

Lause: Kaikista kinemaattisesti käyvistä siirtymäkentistä **u**(*x*,*y*,*z*) se, joka tuottaa kokonaispotentiaalienergialle $\Pi = \Pi(\mathbf{u})$ minimin, toteuttaa myös tasapainoehdot ja on tarkka ratkaisu. Kinemaattisesti käypä siirtymäkenttä toteuttaa oleelliset reunaehdot, jotka yleensä ovat annettuja siirtymiä (tai kiertymiä), kuten kappaleen kiinnitys.

Jos kappaleen siirtymäkenttä yritetään määrittää likimääräisesti käyttäen yritettä

$$\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} Q_i \, G_i(x, y, z) \tag{13}$$

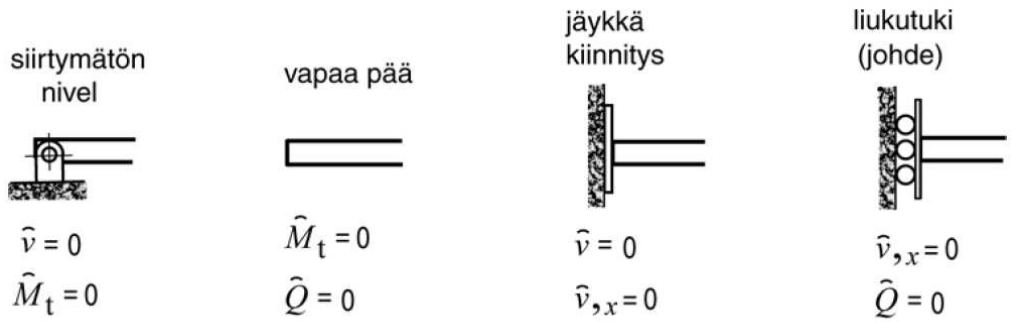
niin kantafunktiot G_i tulee valita niin, että yrite toteuttaa oleelliset reunaehdot. Näistä reunaehdoista on siis itse huolehdittava yritettä (estimaattia) valittaessa. Tuntemattomat kertoimet Q_i voidaan ratkaista ääriarvoehdoista

$$\frac{\partial \Pi(\tilde{\mathbf{u}})}{\partial Q_i} = 0 \tag{14}$$

jotka johtavat lujuusopin tehtävissä lineaariseen yhtälöryhmään, jossa on *n* kappaletta tuntemattomia.

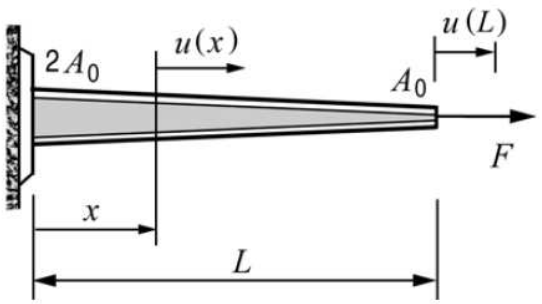
Määritettäessä kappaleen siirtymäkenttä likimääräisesti käyttäen yritettä (13), niin menettelyä kutsutaan **Rayleigh-Ritzin** menetelmäksi.

Mainittakoon tässä yhteydessä vielä, että palkkirakenteella myös yritteen derivaatta voi olla oleellinen reunaehto. Esimerkiksi palkin pää voi olla jäykästi kiinnitetty, jolloin siirtymäestimaatin derivaatta tulee olla nolla palkin ko. päässä. Alla olevassa kuvassa on palkkirakenteen erilaisia kiinnityksiä. Huomaa, että kuvassa $\hat{Q}$ on leikkausvoima.



Ensimmäisessä tapauksessa oleellinen reunaehto on v(0) = 0. Toisessa tapauksessa oleellista siirtymäreunaehtoa ei ole. Jäykästä kiinnityksestä seuraa ehdot v(0) = 0 ja $v_{,x}(0) = 0$. Liukujohteesta saadaan ehto $v_{,x}(0) = 0$.

Esimerkki 1.



ESIMERKKI 1

Kuvan ulokesauvan poikkileikkauksen ala muuttuu lineaarisesti arvosta $2A_0$ arvoon A_0. Valitaan aksiaaliselle siirtymälle estimaatti

$$\tilde{u}(x) = C\,x$$

Määritä ulokepään siirtymän likiarvo *RAYLEIGH-RITZ*in menetelmällä.

RATKAISU

Siirtymäestimaatti $\tilde{u}(x)$ on kinemaattisesti käypä, sillä se toteuttaa siirtymäreunaehdon $\tilde{u}(0) = 0$. Poikkileikkauksen pinta-alalla on lauseke $A(x) = A_0(2 - x/L)$. Sauvan potentiaalienergia on

$$\Pi(\tilde{\mathbf{u}}) = U + WP = \frac{1}{2}\int_0^L EA\tilde{u}_{,x}^2\,dx - F\,\tilde{u}(L)$$

$$\Rightarrow \quad \Pi(\tilde{\mathbf{u}}) = \Pi(C) = \frac{1}{2}EA_0\int_0^L (2 - x/L)C^2\,dx - F\,C\,L \qquad (15)$$

$$\Rightarrow \quad \Pi(C) = \frac{3}{4}EA_0C^2L - F\,C\,L$$

Potentiaalienergian minimin välttämätön ehto on

$$\frac{d\Pi}{dC} = \frac{6}{4} EA_0 CL - F\,L = 0 \;\Rightarrow\; C = \frac{2F}{3EA_0}$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{u}(L) = C\,L = \frac{2F\,L}{3EA_0} \approx 0.66667 \frac{F\,L}{EA_0} \qquad (16)$$

Tarkka tulos ulokepään siirtymälle on

$$u(L) = \ln 2 \frac{F\,L}{E\,A_0} \approx 0{,}6931 \frac{F\,L}{E\,A_0}$$

joten likituloksen virhe on $-3{,}81\,\%$. Lisäksi nähdään, että $\tilde{u}(L) < u(L)$, kuten pitääkin.

Sauvan vasemman pään poikkileikkauksen normaalivoimalla on lauseke

$$N(0) = (E\,A\,u_{,x})_{x=0} = 2\,E\,A_0\,C = 2\,E\,A_0 \cdot \tfrac{2}{3} F / EA_0 = \tfrac{4}{3} F \qquad \Leftarrow$$

Tarkka tulos olisi $N(0) = F$, joten virhe tukireaktiossa sauvan vasemman pään tuella on $33{,}3\,\%$.