

Numeerinen integrointi

Numeerisia integrointimenetelmiä on useita. Käsitellään tässä yhteydessä kuitenkin vain Gauss'in integrointia, joka on elementtimenetelmän yhteydessä osoittautunut tehokkaimmaksi.

Yksiulotteinen Gauss-Legendren integrointikaava

Tarkastellaan ensin integraalia

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Lausutaan x emokoordinaatin ξ avulla

$$x(\xi) = N_1(\xi)a + N_2(\xi)b \quad (2)$$

missä muotofunktiot ovat

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi) \\ N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) \end{cases} \quad (3)$$

Differentioimalla x :n lauseke

$$dx = \frac{b-a}{2} d\xi \quad (4)$$

joten integraali voidaan lausua normeerattuna symmetrisesti origon suhteen

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f[x(\xi)] d\xi \quad (5)$$

jossa integroimisvälin pituus on 2. Koitetaan löytää integraalille likiarvo kaavasta

$$I \approx I_n = \frac{b-a}{2} [w_1 f[x(\xi_1)] + w_2 f[x(\xi_2)] + \dots + w_n f[x(\xi_n)]] \quad (6)$$

missä $f[x(\xi_i)]$ on kohdassa $\xi = \xi_i$ otettu näyte integroitavasta funktiosta ja w_i on vastaava painoluku

(weight). Määritetään emokoordinaattien ξ_i arvot ja painokertoimet w_i siten, että integrointimenetelmällä

voidaan integroida mahdollisimman korkeasteinen polynomi tarkasti. Aloitetaan yhdestä integrointipisteestä, jolloin kaavalla voidaan integroida tarkasti ensimmäisen asteen polynomi

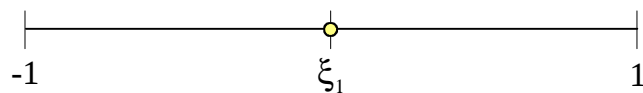
$$\int_{-1}^1 A + B\xi \, d\xi = 2A \quad (7)$$

Ehdosta

$$w_1 (A + \xi_1 B) = 2A \quad (8)$$

saadaan

$$\begin{cases} w_1 = 2 \\ \xi_1 = 0 \end{cases} \quad (9)$$



Otetaan sitten käsittelyyn kaksi pistettä ja koitetaan kolmannen asteen polynomia

$$\int_{-1}^1 A + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 \, d\xi = 2A + \frac{2}{3}C \quad (10)$$

Ehdosta

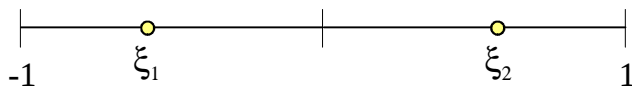
$$w_1 (A + B\xi_1 + C\xi_1^2 + D\xi_1^3) + w_2 (A + B\xi_2 + C\xi_2^2 + D\xi_2^3) = 2A + \frac{2}{3}C \quad (11)$$

saadaan, ottamalla huomioon symmetria

$$\begin{aligned} w_1 &= w_2 \\ \xi_1 &= -\xi_2 \end{aligned} \quad (12)$$

joten

$$2w_1 (A + C\xi_1^2) = 2A + \frac{2}{3}C \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} w_1 = 1 \\ \xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (13)$$



Koitetaan vielä kolmea pistettä ja viidennen asteen polynomia

$$\int_{-1}^1 A + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 + E\xi^4 + F\xi^5 d\xi = 2A + \frac{2}{3}C + \frac{2}{5}E \quad (14)$$

Ehdosta ja symmetriasta saadaan

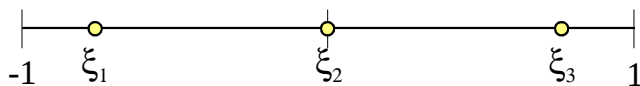
$$2w_1(A + C\xi_1^2 + E\xi_1^4) + w_2A = 2A + \frac{2}{3}C + \frac{2}{5}E \quad (15)$$

josta seuraa ehdot

$$\begin{cases} 2w_1 + w_2 = 2 \\ w_1\xi_1^2 = \frac{1}{3} \\ w_1\xi_1^4 = \frac{1}{5} \end{cases} \quad (16)$$

sijoittamalla toinen yhtälö kolmanteen saadaan

$$\xi_1 = -\sqrt{3/5} \text{ ja } w_1 = 5/9 \quad (17)$$



Jos integrointipisteiden lukumäärä kasvaa, tulee edellä esitetty menetelmä työlääksi. Laskenta helpottuu, jos johdossa käytetään hyväksi Legendren polynomeja, mistä johtuu menetelmän nimi. Tavallisimmin käytetään kuitenkin lyhyempää nimeä Gaussin integrointi. Integrointipisteitä ja painokertoimia löytyy valmiiksi taulukoituna kirjallisuudesta. Alla on vielä taulukko, jossa on tiedot integrointiasteeseen $n = 5$ saakka. Elementtimenetelmässä integrointiaste on tavallisimmin 1, 2 tai 3.

Taulukko 1. Gauss-Legendre integrointipisteet ja painokertoimet

n	ξ_i	w_i
1	0	2
2	± 0.577350269189626	1
3	0 ± 0.774596669241483	0.888888888888889 0.555555555555556
4	± 0.339981043584856 ± 0.861136311594053	0.652145158462546 0.347854845137454
5	0 ± 0.538469310105683 ± 0.906179845938664	0.568888888888889 0.478628670499366 0.236926885056189

Kaksiulotteinen Gaussin integrointi

Tarkastellaan sitten kaksiulotteista integraalia, jossa integrointialue A on siten määrätty, että muuttujien vaihto onnistuu mukavasti

$$\mathbf{I} = \iint_A \mathbf{f}(x, y) dA = \iint_A \mathbf{f}(\mathbf{x}) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{f}[\mathbf{x}(\xi, \eta)] \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (18)$$

kun vaihdetaan uusiin muuttujiin (ξ, η) saadaan ketjuderivoinnin avulla

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \quad (19)$$

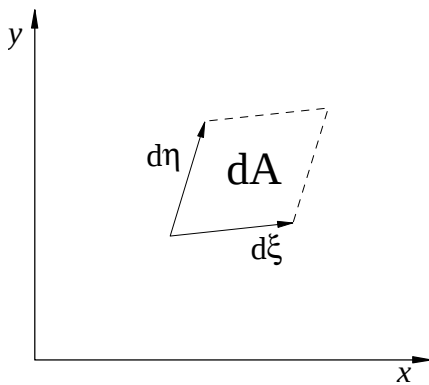
tai matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (20)$$

Jos ajattelemme differentiaaleja $d\xi$ ja $d\eta$ vektoreina

$$d\xi = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \end{bmatrix} \quad d\eta = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{bmatrix} \quad (21)$$

niin kuvassa näkyvän pintadifferentiaalın pinta-ala dA



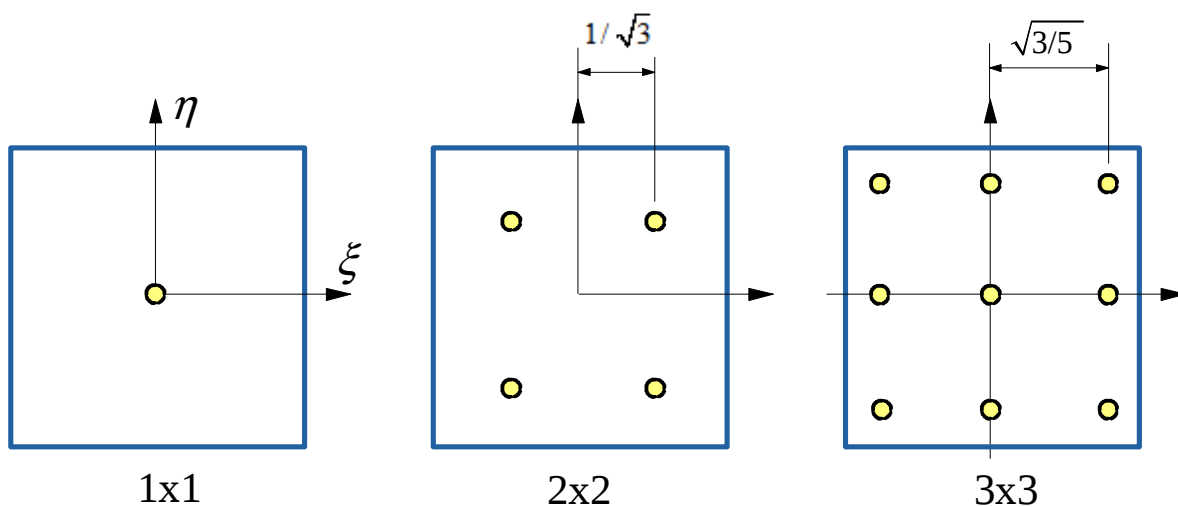
voidaan laskea ristitulon avulla

$$dA = |d\xi \times d\eta| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta & 0 \end{vmatrix} = |x_{,\xi} y_{,\eta} - x_{,\eta} y_{,\xi}| d\xi d\eta = \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (22)$$

Gaussin integroinnissa integraalia approksimoidaan summalla

$$\mathbf{I} \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \mathbf{f}[\mathbf{x}(\xi_i, \eta_j)] \det \mathbf{J}(\xi_i, \eta_j)$$

Integrointipisteet ξ_i, η_j ja painokertoimet saadaan edellä esitetystä taulukosta. Seuraavassa kuvassa on vielä havainnollistettu integrointipisteet kaksiulotteisessa tapauksessa.



Kolmeulotteinen Gaussin integrointi

Kolmeulotteisessa tapauksessa integraali on muotoa

$$\mathbf{I} = \int_V \mathbf{f}(x, y, z) dV = \int_V \mathbf{f}(\mathbf{x}) dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{f}(\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta)) \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \quad (23)$$

kun vaihdetaan uusiin muuttujiin (ξ, η, ζ) saadaan ketjuderivoinnin avulla

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta \end{aligned} \quad (24)$$

tai matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} \quad (25)$$

Jos ajattelemme taas differentiaaleja $d\xi$, $d\eta$ ja $d\zeta$ vektoreina

$$d\xi = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi \end{bmatrix} \quad d\eta = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta \end{bmatrix} \quad d\zeta = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta \end{bmatrix} \quad (26)$$

niin vastaavalla tavalla kuin tasotapauksessa saadaan tilavuusdifferentiaalın tilavuus dV vektorikolmitulosta eli

$$dV = \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta = J d\xi d\eta d\zeta$$

Integraalia approksimoidaan summalla

$$\mathbf{I} \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n w_i w_j w_k \mathbf{f} \left[\mathbf{x}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \right] \det \mathbf{J}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (27)$$

Integrointipisteet ξ_i, η_j, ζ_k ja painokertoimet saadaan taas edellä esitetystä taulukosta. Integrointipisteitä on nyt yleensä 1,8 tai 27 kappaletta.