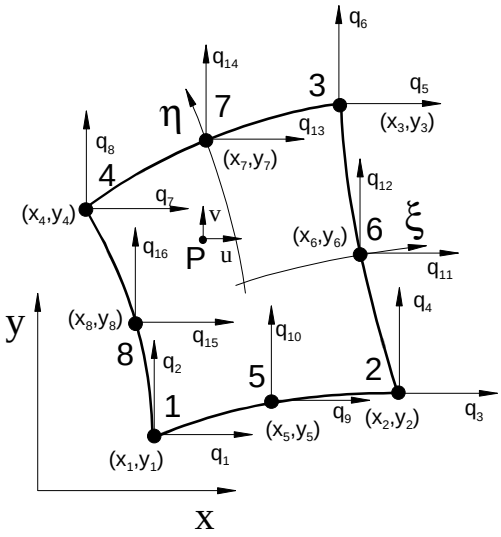
Kahdeksansolmuinen levyelementti

Tarkastellaan kuvan kahdeksansolmuista levyelementtiä.



Pisteen **P** koordinaatit voidaan lausua emokoordinaattien ξ ja η avulla, jotka ovat normeerattu välille $\xi \in [-1 \quad 1], \eta \in [-1 \quad 1]$

$$
\begin{aligned}
x(\xi,\eta) &= N_1(\xi,\eta)x_1 + N_2(\xi,\eta)x_2 + N_3(\xi,\eta)x_3 + \cdots + N_8(\xi,\eta)x_8 \\
y(\xi,\eta) &= N_1(\xi,\eta)y_1 + N_2(\xi,\eta)y_2 + N_3(\xi,\eta)y_3 + \cdots + N_8(\xi,\eta)y_8
\end{aligned}
\tag{1}
$$

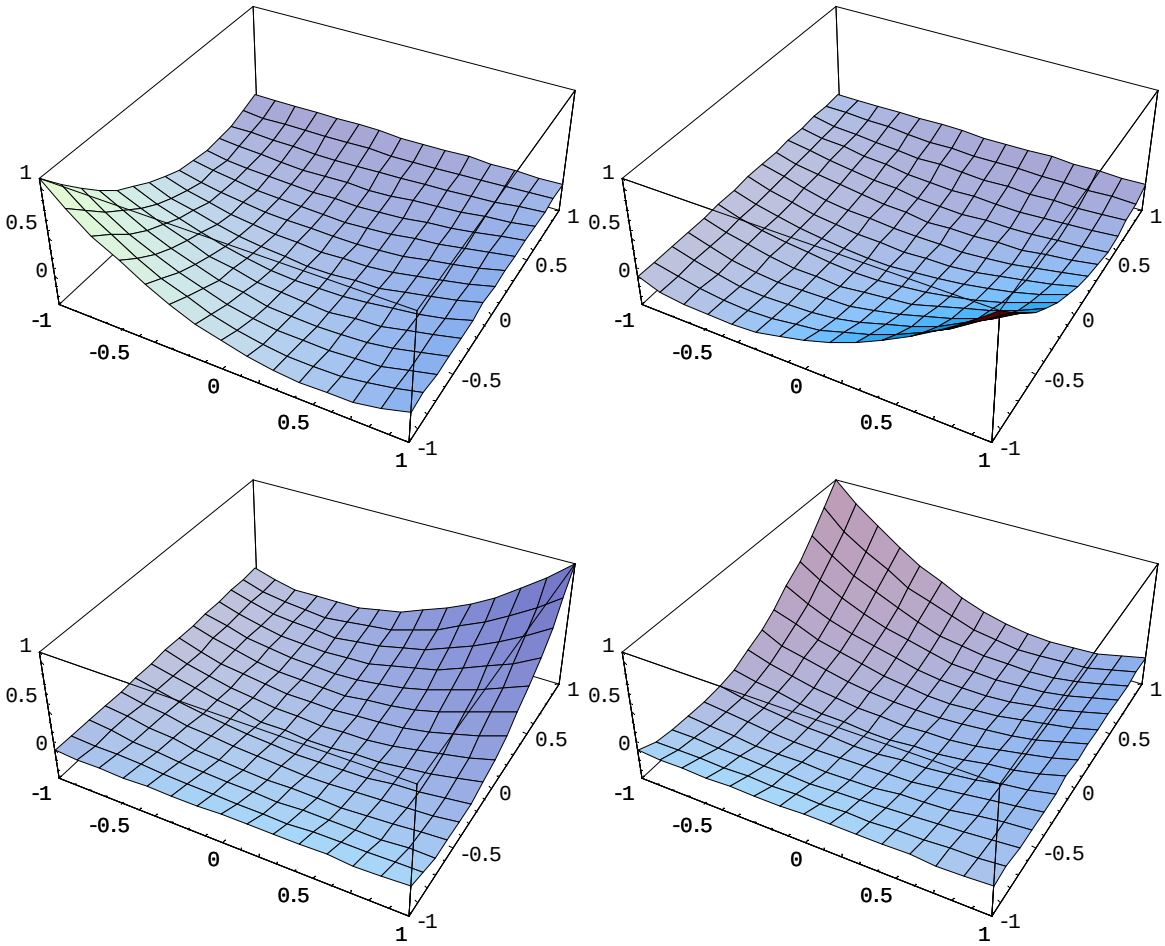
missä funktiot N_1, N_2 , N_3, N_4, N_5 , N_6, N_7 ja N_8 ovat levyelementin kvadraattiset muotofunktiot, jotka koostuvat nurkkafunktioista

$$
\begin{cases}
N_1(\xi,\eta) = N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta) \\
N_2(\xi,\eta) = N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta) \\
N_3(\xi,\eta) = N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta) \\
N_4(\xi,\eta) = N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta)
\end{cases}
\tag{2}
$$

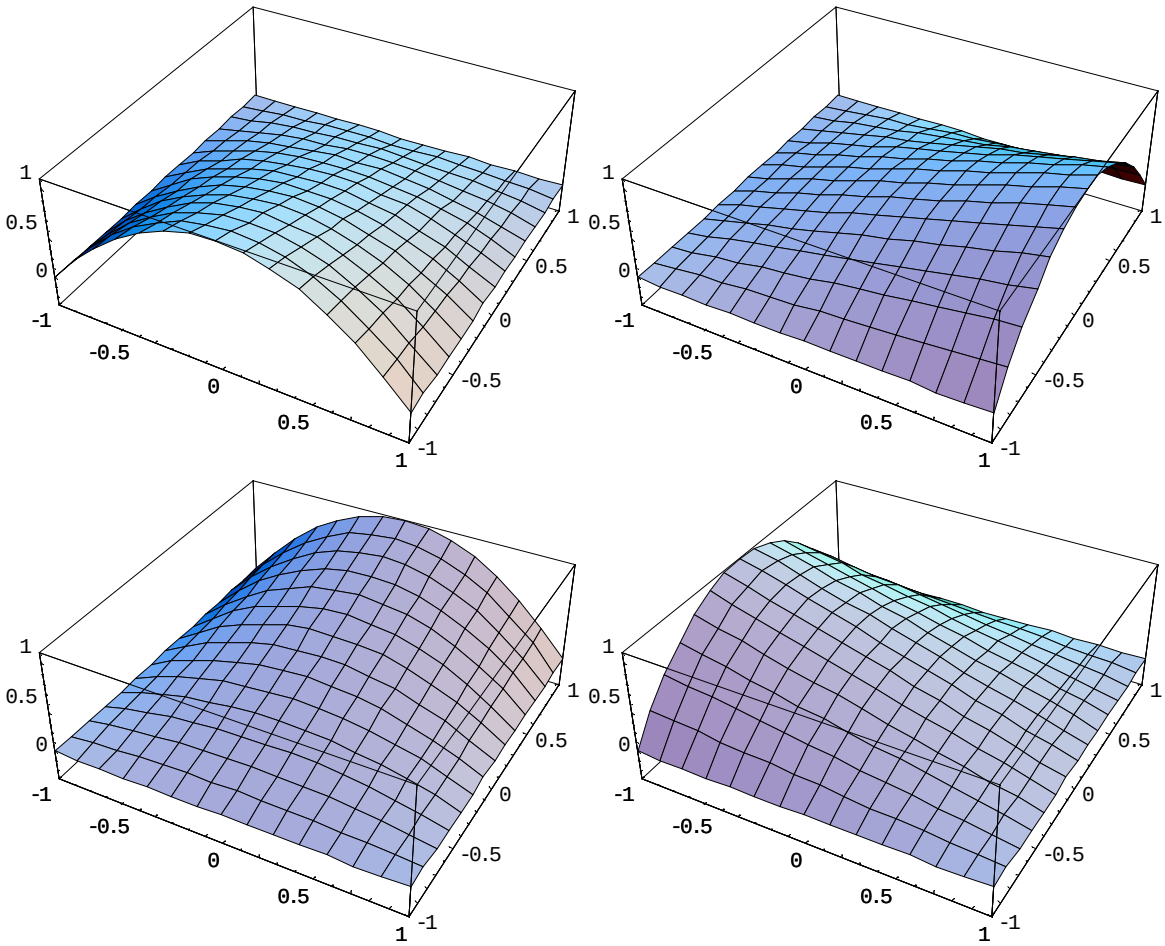
ja sivufunktioista

$$\begin{cases} N_5(\xi,\eta) = N_5 = \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta) \\ N_6(\xi,\eta) = N_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)\left(1-\eta^2\right) \\ N_7(\xi,\eta) = N_7 = \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1+\eta) \\ N_8(\xi,\eta) = N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)\left(1-\eta^2\right) \end{cases} \tag{3}$$

Alla on nurkkafunktioiden kuvaajat



ja sitten sivufunktioiden N_5, N_6, N_7 ja N_8 kuvaajat



Helposti huomaat, että edellä olevilla funktioilla on taaskin ominaisuus, että niiden arvo omalla solmulla on 1 ja muilla solmuilla 0. Lisäksi kaikkien muotofunktioiden summa elementin alueella on 1.

Vastaavasti elementin alueella siirtymäkenttä lausutaan solmusiirtymien avulla

$$
\begin{aligned}
u(\xi,\eta) &= N_1(\xi,\eta)q_1 + N_2(\xi,\eta)q_3 + \cdots + N_8(\xi,\eta)q_{15} \\
v(\xi,\eta) &= N_1(\xi,\eta)q_2 + N_2(\xi,\eta)q_4 + \ldots + N_8(\xi,\eta)q_{16}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Lähdetään sitten etsimään venymän lauseketta elementin alueella. Tätä varten derivoidaan siirtymän *u* lauseke emokoordinaattien suhteen

$$
\begin{cases}
u_{,\xi} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\
u_{,\eta} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \eta} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \eta}
\end{cases}
\tag{5}
$$

joka voidaan lausua matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix} \tag{6}$$

missä matriisi **J** on kuvauksen Jacobin matriisi. Kahdeksansolmuisen levyelementin tapauksessa

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{8} N_i x_i \qquad & x_{,\xi} &= \sum_{i=1}^{8} N_{i,\xi}\, x_i \qquad & x_{,\eta} &= \sum_{i=1}^{8} N_{i,\eta}\, x_i \\ y &= \sum_{i=1}^{8} N_i y_i \qquad & y_{,\xi} &= \sum_{i=1}^{8} N_{i,\xi}\, y_i \qquad & y_{,\eta} &= \sum_{i=1}^{8} N_{i,\eta}\, y_i \end{aligned} \tag{7}$$

joten Jacobin matriisi kahdeksansolmuiselle levyelementille on

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{8} N_{i,\xi}\, x_i & \sum_{i=1}^{8} N_{i,\xi}\, y_i \\ \sum_{i=1}^{8} N_{i,\eta}\, x_i & \sum_{i=1}^{8} N_{i,\eta}\, y_i \end{bmatrix} \tag{8}$$

Matriisi ei ole vakio elementin alueella. Vastaavasti siirtymille *u* ja *v* saadaan

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} \\ u_{,\xi} &= \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & \dots & N_{8,\xi} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} \\ u_{,\eta} &= \begin{bmatrix} N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & \dots & N_{8,\eta} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} \\ v(\xi,\eta) &= \begin{bmatrix} 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_8 \end{bmatrix} \mathbf{q} \\ v_{,\xi} &= \begin{bmatrix} 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & \dots & 0 & N_{8,\xi} \end{bmatrix} \mathbf{q} \\ v_{,\eta} &= \begin{bmatrix} 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & \dots & 0 & N_{8,\eta} \end{bmatrix} \mathbf{q} \end{aligned} \tag{9}$$

joten siirtymien derivaatat emokoordinaattien suhteen voidaan kirjoittaa

$$\begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & \cdots & N_{8,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & \cdots & N_{8,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & \cdots & 0 & N_{8,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & \cdots & 0 & N_{8,\eta} \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{G}\,\mathbf{q} \tag{10}$$

koska siirtymän *u* derivaatta koordinaattien *x* ja *y* suhteen on

$$\begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & \dots & N_{8,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & \dots & N_{8,\eta} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} \tag{11}$$

missä *J* on Jacobin matriisin determinantti ja vastaavasti siirtymän *v* derivaatta koordinaattien *x* ja *y* suhteen

$$\begin{bmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{1,\xi} & 0 & \dots & 0 & N_{8,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & \dots & 0 & N_{8,\eta} \end{bmatrix}\mathbf{q} \tag{12}$$

Laskemalla edellä olevat matriisitulot saadaan

$$\begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & \dots & N_{8,x} & 0 \\ N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & \dots & N_{8,y} & 0 \end{bmatrix}\mathbf{q} \tag{13}$$

ja vastaavasti

$$\begin{bmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & N_{1,x} & 0 & N_{1,x} & 0 & \dots & 0 & N_{8,x} \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & \dots & 0 & N_{8,y} \end{bmatrix}\mathbf{q} \tag{14}$$

joten venymäkomponentit elementin alueella saadaan edellä esitetyn perusteella muotoon

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & \dots & N_{8,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & \dots & 0 & N_{8,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & \cdots & N_{8,y} & N_{8,x} \end{bmatrix}\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{q} \tag{15}$$

Matriisia **B** kutsutaan elementin kinemaattiseksi matriisiksi, jonka avulla saadaan pisteen **P** venymäkomponentit kun elementin solmusiirtymät tunnetaan. Huomaa myös, että edellä oleva esitys poikkeaa Chandrupatlan kirjan mukaisesta esityksestä. Tämä johtuu siitä, etten heti keksinyt, miten kirjan notaatio sopii rotaatiosymmetriseen tapaukseen.

Jäykkyysmatriisi

Lineaarisesti kimmoisen kappaleen, jossa on yleinen jännitystila, kimmoenergia saadaan lausekkeesta

$$U = \int_V U_0 \, dV = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \tag{16}$$

Jos pisteen **P** jännityskomponentit voidaan lausua

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{q} = \frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2} \end{bmatrix}\mathbf{B}\mathbf{q} \tag{17}$$

niin saadaan elementin kimmoenergia lausuttua muodossa

$$U = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\,\mathbf{B}\,\mathbf{q}\,dV = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}t\int_A \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\,\mathbf{B}\,dA\,\mathbf{q} = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\,\mathbf{B}\,J\,d\xi d\eta\;\mathbf{q} \tag{18}$$

joten elementin jäykkyysmatriisi (16·16) on

$$\mathbf{k}_e = t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\,\mathbf{B}\,J\,d\xi d\eta \tag{19}$$

missä t on elementin vakioksi oletettu paksuus. Jäykkyysmatriisi lasketaan numeerisesti käyttäen yleensä Gaussin integrointia ja 2x2 pisteen näytteenottoa.

Ekvivalenttiset solmukuormitukset

Tilavuuskuormituksen aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitus

Lasketaan ensin tilavuuskuormituksen **f** aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitus. Tätä varten lausutaan tilavuuskuormituksen potentiaali

$$WP = -\int_V \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\,dV = -t\int_A \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\,dA \tag{20}$$

missä t on elementin vakiopaksuus. Siirtymä **u** elementin alueella voidaan lausua

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(\xi,\eta) \\ v(\xi,\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & \cdots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ \vdots \\ q_{16} \end{bmatrix} = \mathbf{N}\,\mathbf{q} \tag{21}$$

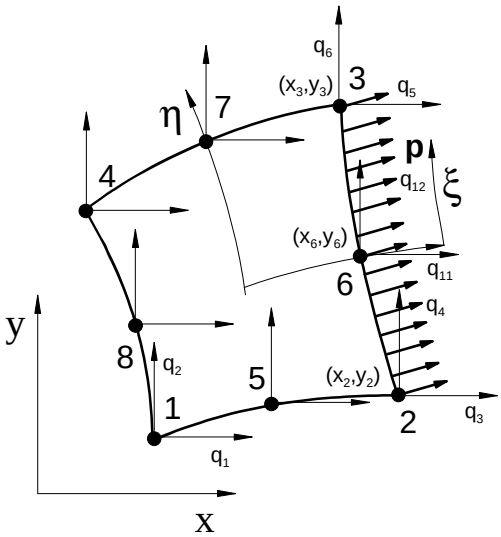
joten tilavuuskuormituksen potentiaali

$$WP = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} t \int_A \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{f}\, dA = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} t \int_A \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ N_8 & 0 \\ 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} dA = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} t \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} N_1 f_x \\ N_1 f_y \\ N_2 f_x \\ N_2 f_y \\ N_3 f_x \\ \vdots \\ N_8 f_x \\ N_8 f_y \end{bmatrix} J\, d\xi d\eta = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \mathbf{f}^V \qquad (22)$$

Ekvivalenttinen solmukuormitus lasketaan numeerisesti käyttäen Gaussin integrointia ja tavallisesti 2x2 pisteen näytteenottoa.

Tasaisen reunapaineen aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitus

Tarkastellaan elementin, jonka paksuus t oletetaan vakioksi, reunaa solmulta 2 solmulle 3. Muut reunat menevät vastaavalla tavalla.



Elementille kohdistuu reunapaine, jonka komponentit globaalissa koordinaatistossa ovat $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x & p_y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Kuormituksen potentiaali on

$$WP = -\int_A \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{p}\, dA = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \int_A \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{p}\, dA = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \int_s \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{p}\, t\, ds \qquad (23)$$

missä integrointi ulotetaan nyt reunaviivan 2-6-3 yli. Koska riittää kun interpolointi koskee vain reunaviivaa, niin sovitetaan viivalle yksiulotteinen interpolointi.

$$\mathbf{u}(\xi)=\begin{bmatrix} u_s \\ v_s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} N_1^s & 0 & N_2^s & 0 & N_3^s & 0 \\ 0 & N_1^s & 0 & N_2^s & 0 & N_3^s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix}=\mathbf{N}_s\mathbf{q}_s \tag{24}$$

missä yksiulotteiset kvadraattiset muotofunktiot ovat

$$\begin{aligned} N_1^s &= -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \\ N_2^s &= \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \\ N_3^s &= 1-\xi^2 \end{aligned} \tag{25}$$

Reunaviivan pisteet interpoloidaan

$$x_s = N_1^s x_2 + N_2^s x_3 + N_3^s x_6 = \sum_{i=1}^{3} N_i^s x_i^s$$

$$y_s = N_1^s y_2 + N_2^s y_3 + N_3^s y_6 = \sum_{i=1}^{3} N_i^s y_i^s$$

differentioimalla saadaan

$$dx_s = N_{1,\xi}^s x_2 d\xi + N_{2,\xi}^s x_3 d\xi + N_{3,\xi}^s x_6 d\xi = \sum_{i=1}^{3} N_{i,\xi}^s x_i^s \, d\xi = J_x \, d\xi$$

$$dy_s = N_{1,\xi}^s y_2 d\xi + N_{2,\xi}^s y_3 d\xi + N_{3,\xi}^s y_6 d\xi = \sum_{i=1}^{3} N_{i,\xi}^s y_i^s \, d\xi = J_y \, d\xi$$

koska $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, niin

$$ds = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} \, d\xi$$

$$WP = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} t \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} N_1^s & 0 \\ 0 & N_1^s \\ N_2^s & 0 \\ 0 & N_2^s \\ N_3^s & 0 \\ 0 & N_3^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \sqrt{J_x^2 + J_y^2} \, d\xi \tag{26}$$

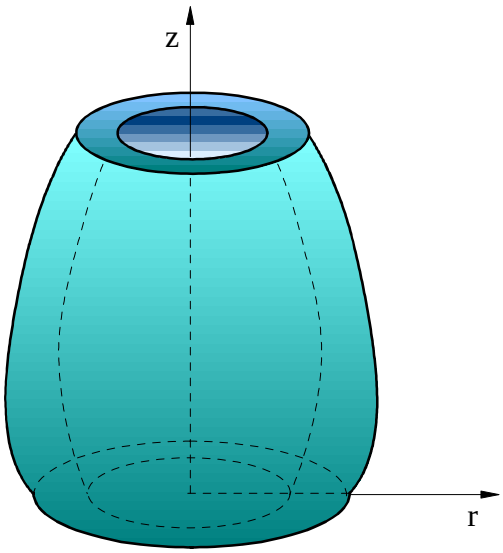
joten tasaisen reunapaineen aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitusvektori saadaan

$$\mathbf{f}^p = t\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} N_1^s p_x \\ N_1^s p_y \\ N_2^s p_x \\ N_2^s p_y \\ N_3^s p_x \\ N_3^s p_y \end{bmatrix} \sqrt{J_x^2 + J_y^2}\, d\xi \tag{27}$$

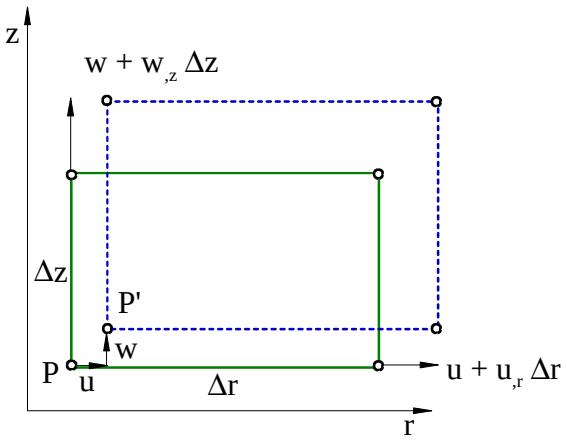
jonka komponentit lasketaan yleensä numeerisesti kahden tai kolmen pisteen näytteenotolla. Kuormituksen voimakomponentit sijoittelusummataan reunaviivan 2-6-3 tapauksessa elementin vapausasteita $\left(q_3\ q_4\ q_5\ q_6\ q_{11}\ q_{12}\right)^{\mathrm{T}}$ vastaaville globaalivapausasteille.

Rotaatiosymmetrinen elementti

Jos laskettavan kappaleen muoto on pyörähdyssymmetrinen ja myös siihen kohdistuva ulkoinen kuormitus on pyörähdyssymmetrinen, niin käyttämällä rotaatiosymmetrisiä elementtejä, säästetään laskentamallissa huomattavasti aitoon kolmiulotteiseen laskentamalliin verrattuna.



Kuten kuvasta huomataan, on x-akseli nyt korvattu r-akselilla ja y-akseli z-akselilla. Tarkastellaan sitten pyörähdyssymmetrisen mallin venymäkomponenttien määritystä.

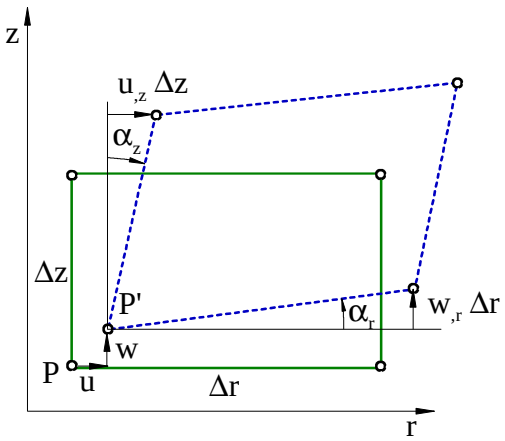


Kuvassa yhtenäisellä viivalla on merkitty suorakaidetta, jonka pituus on kuormittamattomana Δr ja korkeus on Δz . Ulkoisen kuormituksen vaikutuksesta pisteen P siirtymä on (u,w). Venymän määritelmän nojalla

$$\varepsilon_r = \frac{u + u_{,r}\Delta r - u}{\Delta r} = u_{,r}$$

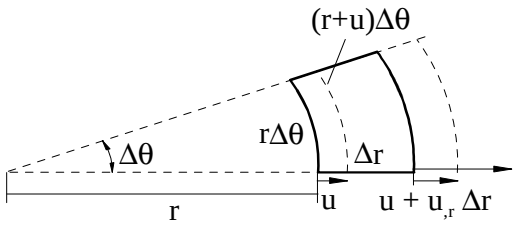
$$\varepsilon_z = \frac{w + w_{,z}\Delta z - w}{\Delta z} = w_{,z} \tag{28}$$

Koska käytetään pienten venymien teoriaa, jolloin $\alpha \approx \tan\alpha$, niin leikkausmuodonmuutos saadaan saadaan laskemalla yhteen alla olevan kuvan kulmat α_r ja α_z, joten



$$\gamma_{rz} = \frac{w_{,r}\Delta r}{\Delta r} + \frac{u_{,z}\Delta z}{\Delta z} = w_{,r} + u_{,z} \tag{29}$$

Venymäkomponentit ovat täysin samat kuin tasotapauksessa, mutta vielä pitää huomioida kehän suuntainen venymä. Kuvan perusteella



$$\varepsilon_\theta = \frac{(r+u)\Delta\theta - r\Delta\theta}{r\Delta\theta} = \frac{u}{r} \tag{30}$$

Huomataan, että kehän suuntainen venymäkomponentti saa epämääräisen muodon origossa. Yhdistämällä edellä olevat komponentit saadaan ne ladottuna

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} u_{,r} \\ w_{,z} \\ u_{,z} + w_{,r} \\ u/r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix} \tag{31}$$

Joissain elementtimenetelmän kirjoissa latomisjärjestys on erilainen eli kaksi viimeistä komponenttia on vaihtanut paikkaa.

Pisteen P jännityskomponentit saadaan nyt yhteydestä

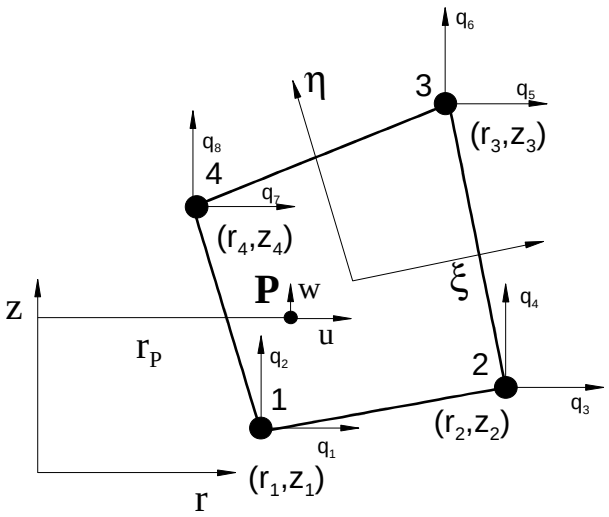
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} & 0 & \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} \\ \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} & 1 & 0 & \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\upsilon}{2(1-\upsilon)} & 0 \\ \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} & \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \tag{32}$$

missä kimmomatriisi **D** saadaan kolmiulotteisesta kimmomatriisista poistamalla kaksi riviä ja kaksi saraketta sekä vaihtamalla leikkausjännityksen ja kehäjännityksen paikkaa.

Käsitellään tässä nelisolmuisen rotaatiosymmetrisen levyelementin lausekkeet. Kahdeksansolmuisen elementin vastaavat lausekkeet on helppo johtaa vertaamalla 4- ja 8-solmuisen tasoelementin lausekkeita.

Nelisolmuinen pyörähdyssymmetrinen levyelementti

Tarkastellaan kuvan nelisolmuista pyörähdyssymmetristä levyelementtiä.



Pisteen **P** koordinaatit voidaan lausua emokoordinaattien ξ ja η avulla

$$
\begin{aligned}
r(\xi,\eta) &= N_1(\xi,\eta)r_1 + N_2(\xi,\eta)r_2 + N_3(\xi,\eta)r_3 + N_4(\xi,\eta)r_4 \\
z(\xi,\eta) &= N_1(\xi,\eta)z_1 + N_2(\xi,\eta)z_2 + N_3(\xi,\eta)z_3 + N_4(\xi,\eta)z_4
\end{aligned}
\tag{33}
$$

missä funktiot N_1, N_2 , N_3 ja N_4 ovat levyelementin bi-lineaariset muotofunktiot

$$
\begin{cases}
N_1(\xi,\eta) = N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
N_2(\xi,\eta) = N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
N_3(\xi,\eta) = N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
N_4(\xi,\eta) = N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)
\end{cases}
\tag{34}
$$

Vastaavasti elementin alueella siirtymäkenttä lausutaan solmusiirtymien avulla

$$
\begin{aligned}
u(\xi,\eta) &= N_1(\xi,\eta)q_1 + N_2(\xi,\eta)q_3 + N_3(\xi,\eta)q_5 + N_4(\xi,\eta)q_7 \\
w(\xi,\eta) &= N_1(\xi,\eta)q_2 + N_2(\xi,\eta)q_4 + N_3(\xi,\eta)q_6 + N_4(\xi,\eta)q_8
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Lähdetään sitten etsimään venymän lauseketta elementin alueella. Tätä varten derivoidaan siirtymän *u* lauseke emokoordinaattien suhteen

$$\begin{cases} u_{,\xi} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ u_{,\eta} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial \eta} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{cases} \tag{36}$$

Derivaatat voidaan lausua matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{,\xi} & z_{,\xi} \\ r_{,\eta} & z_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,r} \\ u_{,z} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} u_{,r} \\ u_{,z} \end{bmatrix} \tag{37}$$

missä matriisi **J** on kuvauksen Jacobin matriisi

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (1-\eta)r_{21} + (1+\eta)r_{34} & (1-\eta)z_{21} + (1+\eta)z_{34} \\ (1-\xi)r_{41} + (1+\xi)r_{32} & (1-\xi)z_{41} + (1+\xi)z_{32} \end{bmatrix} \tag{38}$$

Matriisi on sama kuin tasotapauksessa kunhan x korvataan säteellä r ja y korkeudella z. Vastaavasti siirtymille *u* ja w saadaan

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) &= N_1 q_1 + N_2 q_3 + N_3 q_5 + N_4 q_7 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{q} \\ u_{,\xi} &= \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \end{bmatrix}\mathbf{q} \\ u_{,\eta} &= \begin{bmatrix} N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \end{bmatrix}\mathbf{q} \\ w(\xi,\eta) &= N_1 q_2 + N_2 q_4 + N_3 q_6 + N_4 q_8 = \begin{bmatrix} 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}\mathbf{q} \\ w_{,\xi} &= \begin{bmatrix} 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \end{bmatrix}\mathbf{q} \\ w_{,\eta} &= \begin{bmatrix} 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix}\mathbf{q} \end{aligned} \tag{39}$$

koska siirtymän *u* derivaatta koordinaattien *r* ja *z* suhteen on

$$\begin{bmatrix} u_{,r} \\ u_{,z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1}\begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1}\begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \end{bmatrix}\mathbf{q} \tag{40}$$

niin laskemalla matriisitulo saadaan

$$\begin{bmatrix} u_{,r} \\ u_{,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,r} & 0 & N_{2,r} & 0 & N_{3,r} & 0 & N_{4,r} & 0 \\ N_{1,z} & 0 & N_{2,z} & 0 & N_{3,z} & 0 & N_{4,z} & 0 \end{bmatrix}\mathbf{q} \tag{41}$$

missä *J* on Jacobin matriisin determinantti ja vastaavasti siirtymän *w* derivaatta koordinaattien *r* ja *z* suhteen

$$\begin{bmatrix} w_{,r} \\ w_{,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & N_{1,r} & 0 & N_{2,r} & 0 & N_{3,r} & 0 & N_{4,r} \\ 0 & N_{1,z} & 0 & N_{2,z} & 0 & N_{3,z} & 0 & N_{4,z} \end{bmatrix} \mathbf{q} \tag{42}$$

joten venymäkomponentit elementin alueella saadaan edellä esitetyn perusteella muotoon

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,r} \\ w_{,z} \\ u_{,z} + w_{,r} \\ u/r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,r} & 0 & N_{2,r} & 0 & N_{3,r} & 0 & N_{4,r} & 0 \\ 0 & N_{1,z} & 0 & N_{2,z} & 0 & N_{3,z} & 0 & N_{4,z} \\ N_{1,z} & N_{1,r} & N_{2,z} & N_{2,r} & N_{3,z} & N_{3,r} & N_{4,z} & N_{4,r} \\ N_1/r & 0 & N_2/r & 0 & N_3/r & 0 & N_4/r & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{q} \tag{43}$$

Matriisia **B** kutsutaan elementin kinemaattiseksi matriisiksi, jonka avulla saadaan pisteen **P** venymäkomponentit kun elementin solmusiirtymät tunnetaan. Kinemaattisen matriisin viimeisellä rivillä oleva *r* on pisteen P *r*-koordinaatti, joka lasketaan interpoloimalla

$$r(\xi,\eta) = N_1 r_1 + N_2 r_2 + N_3 r_3 + N_4 r_4$$

Jäykkyysmatriisi

Lineaarisesti kimmoisen kappaleen, jossa on yleinen jännitystila, kimmoenergia saadaan lausekkeesta

$$U = \int_V U_0 \, dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \tag{44}$$

ja jos pisteen **P** jännityskomponentit voidaan lausua

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{q} = \frac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} & 0 & \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} \\ \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} & 1 & 0 & \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\upsilon}{2(1-\upsilon)} & 0 \\ \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} & \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{q} \tag{45}$$

niin saadaan elementin kimmoenergia lausuttua muodossa

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{q}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} \, dV = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{\mathrm{T}} 2\pi \int_A \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \mathbf{B} \, r \, dA \, \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{\mathrm{T}} 2\pi \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \mathbf{B} \, r \, J \, d\xi d\eta \, \mathbf{q} \tag{46}$$

joten elementin jäykkyysmatriisi on

$$\mathbf{k}_e = 2\pi \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\,\mathbf{B}\, J\, r\, d\xi d\eta \tag{47}$$

Jäykkyysmatriisi lasketaan numeerisesti käyttäen yleensä Gaussin integrointia ja 2x2 pisteen näytteenottoa.

Ekvivalenttiset solmukuormitukset

Tilavuuskuormituksen aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitus

Lasketaan ensin tilavuuskuormituksen **f** aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitus. Tätä varten lausutaan tilavuuskuormituksen potentiaali

$$WP = -\int_V \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\, dV = -2\pi \int_A \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\, r\, dA \tag{48}$$

Siirtymä **u** elementin alueella voidaan lausua

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(\xi,\eta) \\ w(\xi,\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{bmatrix} = \mathbf{N}\,\mathbf{q} \tag{49}$$

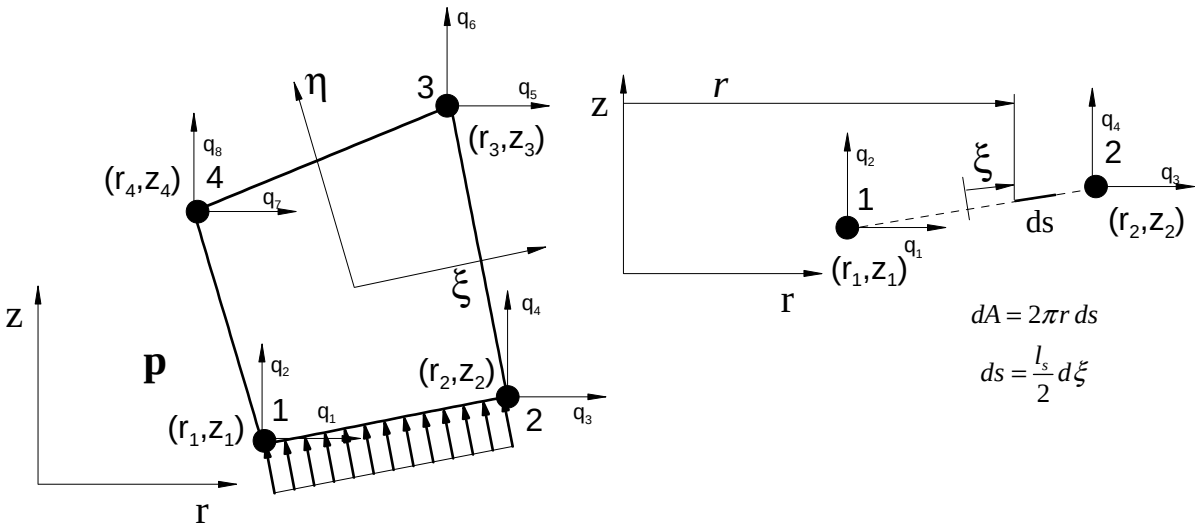
joten tilavuuskuormituksen potentiaali

$$WP = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\, 2\pi \int_A \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\, r\, dA = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\, 2\pi \int_A \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_r \\ f_z \end{bmatrix} r\, dA = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\, 2\pi \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} N_1 f_r \\ N_1 f_z \\ N_2 f_r \\ N_2 f_z \\ N_3 f_r \\ N_3 f_z \\ N_4 f_r \\ N_4 f_z \end{bmatrix} J\, r\, d\xi d\eta = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}^{V} \tag{50}$$

Ekvivalenttinen solmukuormitus lasketaan numeerisesti käyttäen Gaussin integrointia ja 2x2 pisteen näytteenottoa.

Tasaisen reunapaineen aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitus

Tarkastellaan elementin reunaa solmulta 1 solmulle 2. Muut reunat menevät vastaavalla tavalla.



Elementille kohdistuu reunapaine, jonka komponentit globaalissa koordinaatistossa ovat $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_r & p_z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Kuormituksen potentiaali on

$$WP = -\iint_A \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}\, dA = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} 2\pi \int_s \mathbf{N}(s)^{\mathrm{T}} \mathbf{p}\, r\, ds \tag{51}$$

missä integrointi ulotetaan reunaviivan 1-2 yli, joka siis pyörähtää z-akselin ympäri. Koska riittää kun interpolointi koskee vain tätä reunaviivaa, niin sovitetaan viivalle yksiulotteinen interpolointi.

$$\mathbf{u}(\xi) = \begin{bmatrix} u_s \\ w_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^s & 0 & N_2^s & 0 \\ 0 & N_1^s & 0 & N_2^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \mathbf{N}_s \mathbf{q}_s \tag{52}$$

$$r(\xi) = N_1^s r_1 + N_2^s r_2$$

missä

$$N_1^s = \frac{1}{2}(1-\xi)$$
$$N_2^s = \frac{1}{2}(1+\xi) \tag{53}$$

Reunaviivan pituus on $l_s = \sqrt{r_{21}^2 + z_{21}^2}$, joten $ds = \frac{l_s}{2} d\xi$ ja potentiaali

$$WP = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \pi l_s \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\xi) & 0 \\ 0 & (1-\xi) \\ (1+\xi) & 0 \\ 0 & (1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_r \\ p_z \end{bmatrix} \left[(1-\xi) r_1 + (1+\xi) r_2 \right] d\xi = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \mathbf{f}^p \tag{54}$$

joten tasaisen reunapaineen aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitusvektori saadaan

$$\mathbf{f}^p = \frac{\pi l_s}{3} \begin{bmatrix} p_r (2r_1 + r_2) \\ p_z (2r_1 + r_2) \\ p_r (r_1 + 2r_2) \\ p_z (r_1 + 2r_2) \end{bmatrix} \tag{55}$$

Kuormituksen voimakomponentit sijoittelusummataan reunaviivan 1-2 tapauksessa elementin vapausasteita $\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ vastaaville globaalivapausasteille.