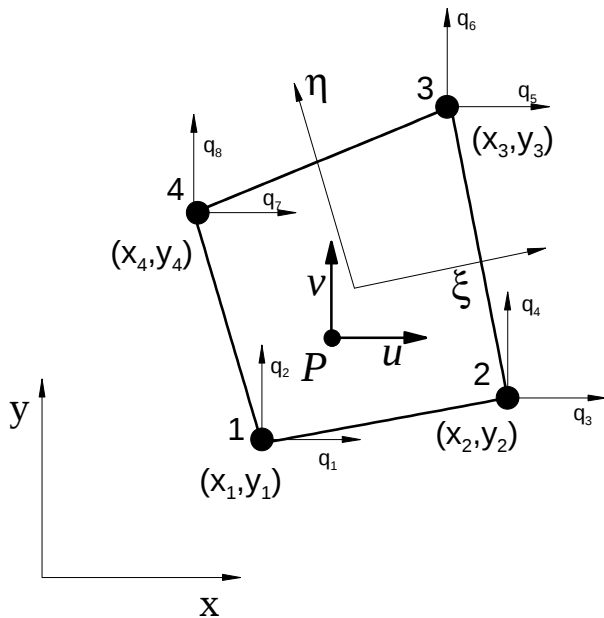


Nelisolmuinen levyelementti

Tarkastellaan kuvan nelisolmuista levyelementtiä.



Pisteen **P** koordinaatit voidaan lausua emokoordinaattien ξ ja η avulla, jotka ovat normeerattu välille $\xi \in [-1 \ 1], \eta \in [-1 \ 1]$

$$x(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta)x_1 + N_2(\xi, \eta)x_2 + N_3(\xi, \eta)x_3 + N_4(\xi, \eta)x_4 \quad (1)$$

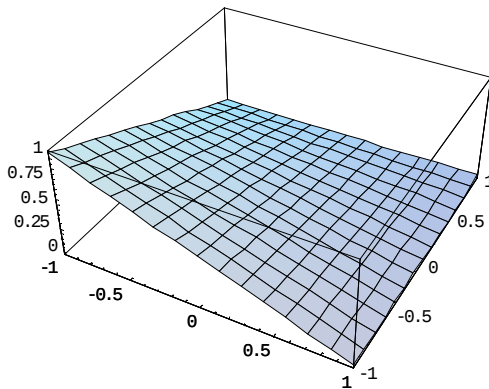
$$y(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta)y_1 + N_2(\xi, \eta)y_2 + N_3(\xi, \eta)y_3 + N_4(\xi, \eta)y_4$$

missä funktiot N_1, N_2, N_3 ja N_4 ovat levyelementin bi-lineaariset muotofunktiot

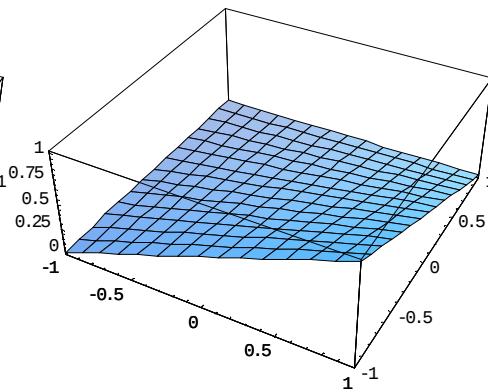
$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2(\xi, \eta) = N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3(\xi, \eta) = N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4(\xi, \eta) = N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{cases} \quad (2)$$

Helposti huomaa, että edellä olevilla funktioilla on taaskin ominaisuus, että niiden arvo omalla solmulla on 1 ja muilla solmuilla 0. Lisäksi kaikkien muotofunktioiden summa elementin alueella on 1.

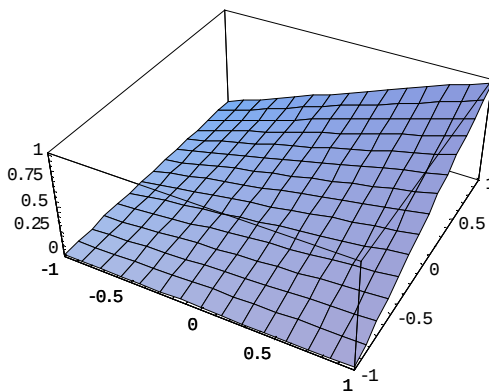
$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$



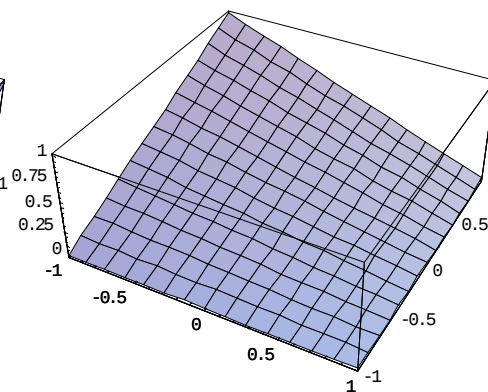
$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$



$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$



$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$



Vastaavasti elementin alueella siirtymäkenttä lausutaan solmushiirtymien avulla

$$u(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta)q_1 + N_2(\xi, \eta)q_3 + N_3(\xi, \eta)q_5 + N_4(\xi, \eta)q_7 \quad (3)$$

$$v(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta)q_2 + N_2(\xi, \eta)q_4 + N_3(\xi, \eta)q_6 + N_4(\xi, \eta)q_8$$

Lähdetään sitten etsimään venymän lauseketta elementin alueella. Tätä varten derivoidaan siirtymän u lauseke emokoordinaattien suhteen

$$\begin{cases} u_{,\xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ u_{,\eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \quad (4)$$

joka voidaan lausua matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix} \quad (5)$$

missä matriisi $\mathbf{J}$ on kuvauksen Jacobin matriisi. Nelisolmuisen levyelementin tapauksessa

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{4} \left[(1-\xi)(1-\eta)x_1 + (1+\xi)(1-\eta)x_2 + (1+\xi)(1+\eta)x_3 + (1-\xi)(1+\eta)x_4 \right] \\
 x_{,\xi} &= \frac{1}{4} \left[(1-\eta)(x_2 - x_1) + (1+\eta)(x_3 - x_4) \right] = \frac{1}{4} \left[(1-\eta)x_{21} + (1+\eta)x_{34} \right] \\
 x_{,\eta} &= \frac{1}{4} \left[(1-\xi)(x_4 - x_1) + (1+\xi)(x_3 - x_2) \right] = \frac{1}{4} \left[(1-\xi)x_{41} + (1+\xi)x_{32} \right] \\
 y &= \frac{1}{4} \left[(1-\xi)(1-\eta)y_1 + (1+\xi)(1-\eta)y_2 + (1+\xi)(1+\eta)y_3 + (1-\xi)(1+\eta)y_4 \right] \\
 y_{,\xi} &= \frac{1}{4} \left[(1-\eta)(y_2 - y_1) + (1+\eta)(y_3 - y_4) \right] = \frac{1}{4} \left[(1-\eta)y_{21} + (1+\eta)y_{34} \right] \\
 y_{,\eta} &= \frac{1}{4} \left[(1-\xi)(y_4 - y_1) + (1+\xi)(y_3 - y_2) \right] = \frac{1}{4} \left[(1-\xi)y_{41} + (1+\xi)y_{32} \right]
 \end{aligned} \tag{6}$$

joten Jacobin matriisi nelisolmuiselle levyelementille on

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\eta)x_{21} + (1+\eta)x_{34} & (1-\eta)y_{21} + (1+\eta)y_{34} \\ (1-\xi)x_{41} + (1+\xi)x_{32} & (1-\xi)y_{41} + (1+\xi)y_{32} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Matriisista huomataan, että se ei ole enää vakio elementin alueella. Vastaavasti siirtymille u ja v saadaan

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \left[(1-\xi)(1-\eta)q_1 + (1+\xi)(1-\eta)q_3 + (1+\xi)(1+\eta)q_5 + (1-\xi)(1+\eta)q_7 \right] \\
 u_{,\xi} &= \frac{1}{4} \left[(1-\eta)(q_3 - q_1) + (1+\eta)(q_5 - q_7) \right] \\
 u_{,\eta} &= \frac{1}{4} \left[(1-\xi)(q_7 - q_1) + (1+\xi)(q_5 - q_3) \right] \\
 v(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \left[(1-\xi)(1-\eta)q_2 + (1+\xi)(1-\eta)q_4 + (1+\xi)(1+\eta)q_6 + (1-\xi)(1+\eta)q_8 \right] \\
 v_{,\xi} &= \frac{1}{4} \left[(1-\eta)(q_4 - q_2) + (1+\eta)(q_6 - q_8) \right] \\
 v_{,\eta} &= \frac{1}{4} \left[(1-\xi)(q_8 - q_2) + (1+\xi)(q_6 - q_4) \right]
 \end{aligned} \tag{8}$$

joten siirtymien derivaatat emokoordinaattien suhteen voidaan kirjoittaa

$$\begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \mathbf{q} \tag{9}$$

koska siirtymän u derivaatta koordinaattien x ja y suhteen on

$$\begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ -J_{21} & J_{11} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (10)$$

missä J on Jacobin matriisin determinantti. Yhtälön jälkimmäinen muoto on tarkoitettu selventämään, miten yhtälö (12) on muodostettu. Vastaavasti siirtymän v derivaatta koordinaattien x ja y suhteen

$$\begin{bmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_{22} & -J_{12} \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (11)$$

joten venymäkomponentit elementin alueella saadaan edellä esitetyn perusteella muotoon

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \mathbf{G} \mathbf{q} = \mathbf{A} \mathbf{G} \mathbf{q} = \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (12)$$

missä matriisi $\mathbf{G}$ näkyy yhtälössä (9). Matriisia $\mathbf{B}$ kutsutaan elementin kinemaattiseksi matriisiksi, jonka avulla saadaan pisteen $\mathbf{P}$ venymäkomponentit kun elementin solmusiirtymät tunnetaan.

Jäykkyysmatriisi

Lineaarisesti kimmoisen kappaleen, jossa on yleinen jännitystila, kimmoenergia saadaan lausekkeesta

$$U = \int_V U_0 dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (13)$$

jos pisteen $\mathbf{P}$ jännityskomponentit voidaan lausua

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (14)$$

niin saadaan elementin kimmoenergia lausuttua muodossa

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} dV = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T t \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} J d\xi d\eta \mathbf{q} \quad (15)$$

joten elementin jäykkyysmatriisi on

$$\mathbf{k}_e = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} J d\xi d\eta \quad (16)$$

missä t on elementin vakioksi oletettu paksuus. Jäykkyysmatriisi lasketaan numeerisesti käyttäen yleensä Gaussin integrointia ja 2x2 pisteen näytteenottoa.

Ekvivalenttiset solmukuormitukset

Tilavuuskuormituksen aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitus

Lasketaan ensin tilavuuskuormituksen $\mathbf{f}$ aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitus. Tätä varten lausutaan tilavuuskuormituksen potentiaali

$$WP = - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV = -t \int_A \mathbf{u}^T \mathbf{f} dA \quad (17)$$

missä t on elementin vakio paksuus. Siirtymä $\mathbf{u}$ elementin alueella voidaan lausua

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (18)$$

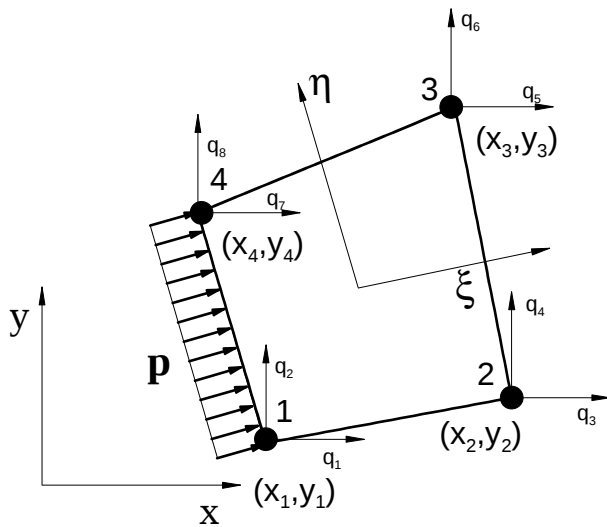
joten tilavuuskuormituksen potentiaali

$$WP = -\mathbf{q}^T t \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{f} dA = -\mathbf{q}^T t \int_A \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} dA = -\mathbf{q}^T t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 f_x \\ N_1 f_y \\ N_2 f_x \\ N_2 f_y \\ N_3 f_x \\ N_3 f_y \\ N_4 f_x \\ N_4 f_y \end{bmatrix} J d\xi d\eta = -\mathbf{q}^T \mathbf{f}^V \quad (19)$$

Ekvivalenttinen solmukuormitus lasketaan numeerisesti käyttäen Gaussin integrointia ja 2x2 pisteen näytteenottoa.

Tasaisen reunapaineen aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitus

Tarkastellaan elementin reunaa solmulta 4 solmulle 1. Muut reunat menevät vastaavalla tavalla.



Elementille kohdistuu reunapaine, jonka komponentit globaalissa koordinaatistossa ovat $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x & p_y \end{pmatrix}^T$.

Paine voidaan muuttaa viivakuormitukseksi kertomalla elementin paksuudella t . Kuormituksen potentiaali on

$$WP = - \int_s \mathbf{u}(s)^T \mathbf{p} t ds = - \int_s \mathbf{u}(s)^T \mathbf{r} ds = - \mathbf{q}^T \int_s \mathbf{N}(s) \mathbf{r} ds \quad (20)$$

missä integrointi ulotetaan reunaviivan 4-1 yli. Koska riittää kun interpolointi koskee vain reunaviivaa, niin sovitetaan viivalle yksiulotteinen interpolointi.

$$\mathbf{u}(\xi) = \begin{bmatrix} u_s \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^s & 0 & N_2^s & 0 \\ 0 & N_1^s & 0 & N_2^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_7 \\ q_8 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}_s \mathbf{q}_s \quad (21)$$

missä

$$\begin{aligned} N_1^s &= \frac{1}{2}(1-\xi) \\ N_2^s &= \frac{1}{2}(1+\xi) \end{aligned} \quad (22)$$

Reunaviivan pituus on $l_s = \sqrt{x_{14}^2 + y_{14}^2}$, joten $ds = \frac{l_s}{2} d\xi$ ja potentiaali

$$WP = -\mathbf{q}^T \frac{l_s}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1-\xi) & 0 \\ 0 & (1-\xi) \\ (1+\xi) & 0 \\ 0 & (1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} d\xi = -\mathbf{q}^T \frac{l_s}{2} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_x \\ r_y \end{bmatrix} \quad (23)$$

joten tasaisen reunapaineen aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitusvektori saadaan

$$\mathbf{f}^p = \frac{l_s}{2} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_x \\ r_y \end{bmatrix} \quad (24)$$

Kuormituksen voimakomponentit sijoittelusummataan elementin vapausasteita $(q_7 \quad q_8 \quad q_1 \quad q_2)^T$ vastaaville globaalivapausasteille.

Lämpötilan muutoksen vaikutus

Mikäli elementin lämpötila muuttuu niin sanottuun referenssilämpötilaan verrattuna määrän ΔT , niin siitä aiheutuu tasojännitystilan elementtiin venymä $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (\alpha \Delta T \quad \alpha \Delta T \quad 0)^T$. Koska kiinnittämättömään elementtiin ei aiheudu lämpötilan muutoksesta jännityksiä, niin jännityksen lauseke on

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \quad (25)$$

Elementin kimmoenergian lauseke on nyt

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int_{V_e} \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - t \int_{A_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dA + \frac{1}{2} \int_{V_e} \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k}_e \mathbf{q} - \mathbf{q}^T t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 J d\xi d\eta + U_e^\theta \end{aligned} \quad (26)$$

Huomataan, että viimeinen termi on vakio, jolloin se häviää derivoitaessa. Keskimäinen termi voidaan lausua muodossa

$$-\mathbf{q}^T t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 J d\xi d\eta = -\mathbf{q}^T \boldsymbol{\Theta}_e \quad (27)$$

missä vektoria

$$\Theta_e = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 J d\xi d\eta = (\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6 \quad \theta_7 \quad \theta_8)^T \quad (28)$$

kutsutaan lämpötilan muutoksen aiheuttamaksi ekvivalenttiseksi solmukuormitusvektoriksi, joka taas saadaan numeerisella integroinnilla. Kaavassa α on pituuden lämpölaajenemiskerroin [$1/K$] tai [$1/^\circ C$] ja ΔT [K] tai [$^\circ C$] on lämpötilan muutos referenssilämpötilaan verrattuna.

Laskentamallin globaali solmukuormitusvektori $\mathbf{F}$ sijoittelusummataan vastaavasti kuin aiemmin on esitetty

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \sum_e \left(\mathbf{f}_e^V + \Theta_e + \mathbf{f}_e^P \right) \quad (29)$$

Annettu solmukuormitus

Kaksiulotteisilla elementeillä annettua solmukuormitusta $\mathbf{P}$ tulisi yleensä välttää, koska elementtijakoa tihennettäessä kuormitusalueen jännitykset nousevat suuriksi. Kuormitus tulisi korvata äärelliselle matkalle asetetulla painekuormituksella.