

Lämmönsiirto (ei tenttialuetta)

Terminologiaa

Lämpötila T on suure, joka kuvaa, miten kuuma jokin esine tai aine on. Lämpötilaa (lat. temperatura) mitataan SI-järjestelmässä kelvineillä (K) tai celsiusasteilla (°C).

Lämmönsiirtymiskerroin h kuvaa, miten paljon tehoa siirtyy pinta-alaa kohti, kun pinnan ja väliaineen välillä on tietty lämpötilaero. Lämpötilaero on tässä väliaineen ja pinnan (esimerkiksi lämpöpatterin) lämpötilojen ero. Mitä suurempi kerroin on, sitä paremmin lämpö siirtyy. SI-järjestelmän mukaisesti lämmönsiirtymiskertoimen yksikkö on wattia kelviniä ja neliometriä kohti eli $W/(K \cdot m^2)$.

Lämmönjohtavuus k kuvaa, miten hyvin jokin materiaali johtaa lämpöä. Mitä suurempi lämmönjohtavuuslukema on, sitä paremmin lämpö johtuu. Lämmönjohtavuus ilmoittaa siirtyvän lämpötehon ϕ poikkipinta-alaa A ja tiettyä materiaalissa vallitsevaa lämpötilagradienttia dT/dx kohti. SI-järjestelmän mukaisesti lämmönjohtavuudelle tulee yksiköksi watti / kelvin-metriä kohti eli $W/(K \cdot m)$.

Ominaislämpökapasiteetti c kuvaa, kuinka paljon lämpöenergiaa materiaaliin sitoutuu lämpötilaeroa ja massaa kohti. SI-järjestelmän mukainen ominaislämpökapasiteetin yksikkö on joulea kelviniä ja kilogrammaa kohti eli $J/(K \cdot kg)$.

Lämpömäärä Q on fysikaalinen suure, joka ilmoittaa jossakin prosessissa kehittyvän tai kappaleesta toiseen siirtyvän lämpöenergian määrän. SI-järjestelmän mukainen lämpömäärän yksikkö on joule eli J.

Lämpövirran kehittymistiheys $\dot{Q}^{int}$

Tiheys ρ on suure, joka ilmaisee kappaleen massan suhteessa sen tilavuuteen. Tietyn lämpötilan ja paineen vallitessa tiheys on kullekin aineelle ominainen vakio. SI-järjestelmän mukainen tiheyden yksikkö on kg/m^3 .

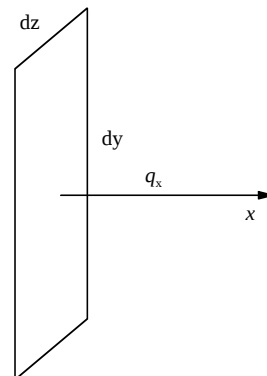
Yksiulotteinen lämmönjohtuminen

Tarkastellaan yksiulotteista lämmönjohtumista. Pintaelementin dA , joka on x -akselin normaalitasossa läpi virtaa ajassa dt lämpömäärä

$$dQ = q_x dA dt \quad (1)$$

missä q_x on lämpövirran tiheys elementin dA kohdalla suunnassa x .

$$q_x = -k_x T_{,x} \quad (2)$$

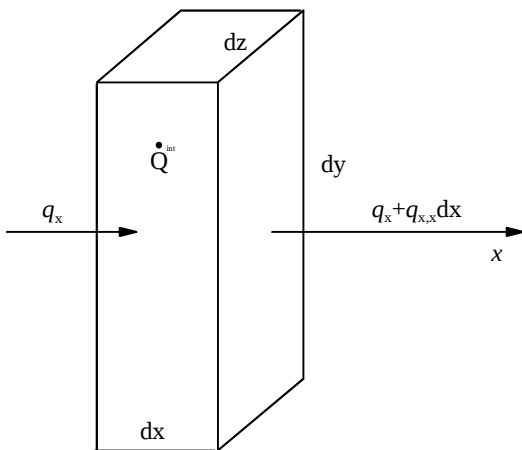


Tilavuuselementissä $dV = dA \, dx$ kehittyy ajassa dt lämpömäärä

$$dQ = \dot{Q}^{\text{int}} \, dV \, dt \quad (3)$$

Elementistä tulee x-akselin suunnassa lämpöä ulos

$$dQ = \left[(q_x + q_{x,x} dx) - q_x \right] dA \, dt = q_{x,x} \, dV \, dt = - \left(k_x T_{,x} \right)_{,x} \, dV \, dt \quad (4)$$



Elementin lämpötasapainoehdosta saadaan

$$\begin{aligned} \left(k_x T_{,x} \right)_{,x} \, dV \, dt + \dot{Q}^{\text{int}} \, dV \, dt &= c \rho \frac{dT}{dt} \, dV \, dt \quad \Rightarrow \\ \left(k_x T_{,x} \right)_{,x} + \dot{Q}^{\text{int}} &= c \rho T_{,t} \end{aligned} \quad (5)$$

Yhtälöä sanotaan lämmönjohtumisen Fourier- yhtälöksi.

Rajoittaudutaan tässä vain ajasta riippumattomaan lämmönsiirtoon, jolloin

$$\left(k_x T_{,x} \right)_{,x} + \dot{Q}^{\text{int}} = 0 \quad (6)$$

Reunaehdot

Käsitellään aluksi vain kahdentyyppisiä reunaehtoja eli reunaehto, jossa lämpötila on annettu x-koordinaatin arvolla 0 ($T(x=0) = T_0$) ja konvektioreunaehto ($q(x=L) = h(T - T_\infty)$), missä T_∞ on lämpötila kappaleen ulkopuolella riittävällä etäisyydellä.

Yhtälön ratkaisu Galerkin'in menetelmällä

Ratkaistaan yhtälö (6) likimäärin Galerkin'in menetelmällä eli

$$\int_0^L \delta T \left((k_x T_{,x})_{,x} + \dot{Q}^{\text{int}} \right) dx = 0 \quad (7)$$

missä virtuaalinen lämpötilan muutos δT lausutaan samojen muotofunktioiden avulla kuin lämpötila T ja lisäksi virtuaalinen lämpötilan muutosfunktio saa arvon 0 annetun lämpötilan ($x=0$) kohdalla. Jotta voidaan käyttää alempiasteisia muotofunktioita, niin osittaisintegroidaan ensimmäinen termi

$$\left[\delta T k_x \frac{dT}{dx} \right]_0^L - \int_0^L k_x \frac{d(\delta T)}{dx} \frac{dT}{dx} dx + \int_0^L \delta T \dot{Q}^{\text{int}} dx = 0 \quad (8)$$

koska $\delta T(0) = 0$ ja $q_x = -k_x \frac{dT(L)}{dx} = h(T(L) - T_\infty)$, niin

$$\left[\delta T k_x \frac{dT}{dx} \right]_0^L = -\delta T(L) h(T_L - T_\infty) \quad (9)$$

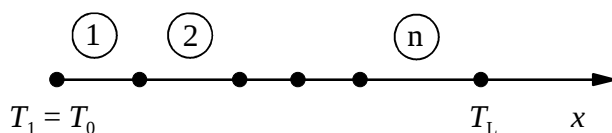
joten yhtälö (8) saadaan muotoon

$$-\delta T_L h(T_L - T_\infty) - \int_0^L k_x \frac{d(\delta T)}{dx} \frac{dT}{dx} dx + \int_0^L \delta T \dot{Q}^{\text{int}} dx = 0 \quad (10)$$

Yksiulotteinen elementti

Lämmönsiirron tehtävässä tuntemattomana (skalaari)kenttänä alueessa (nyt $x \in [0, L]$) on lämpötila T .

Jaetaan alue (viiva) elementteihin, joiden pituus on l_e .

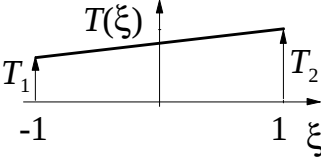


Elementin alueella kenttäfunktio interpoloidaan solmuarvoistaan

$$T^e(\xi) = N_1(\xi)T_1^e + N_2(\xi)T_2^e = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{T}^e \quad (11)$$

missä yksiulotteiset interpolaatiofunktiot ovat tutut

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$$


Lämpötilan derivaatta x-koordinaatin suhteen saadaan

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{bmatrix} = \mathbf{B}_T \mathbf{T}^e \quad (12)$$

Sijoitetaan edellä oleva kenttäfunktion interpolaatio yhtälöön (10), jolloin

$$-\delta T_L h(T_L - T_\infty) - \sum_e (\delta \mathbf{T}^e)^T \left(\frac{k_x l_e}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{B}_T^T \mathbf{B}_T d\xi \right) \mathbf{T}^e + \sum_e (\delta \mathbf{T}^e)^T \frac{\dot{Q}^{\text{int}} l_e}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T d\xi = 0 \quad (13)$$

missä summaus elementteittäin tehdään sijoittelusummauksena. Yhtälö voidaan kirjoittaa vielä muodossa

$$-\delta T_L h T_L + \delta T_L h T_\infty - \sum_e (\delta \mathbf{T}^e)^T \mathbf{k}_T \mathbf{T}^e + \sum_e (\delta \mathbf{T}^e)^T \mathbf{r}^e = 0 \quad (14)$$

tai sijoittelusummaus suoritettuna

$$-\delta T_L h T_L + \delta T_L h T_\infty - \delta \mathbf{T}^T \mathbf{K}_T \mathbf{T} + \delta \mathbf{T}^T \mathbf{R}^{\text{int}} = 0 \quad (15)$$

jonka tulee toteutua mielivaltaisella virtuaalisella solmulämpötilavektorilla $\delta \mathbf{T}$, jossa ensimmäinen termi on nolla (annettu lämpötila). Yhtälön (14) ensimmäinen termi eli konvektiotermi aiheuttaa lisäyksen viimeisen elementin matriisiin $\mathbf{K}_T$. Termi voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$(\delta \mathbf{T}^e)^T h \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{T}^e = (\delta \mathbf{T}^e)^T \mathbf{k}_h \mathbf{T}^e \quad (16)$$

missä matriisi

$$\mathbf{k}_h = h \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

jos konvektioreunaehto on solmulla 2 tai

$$\mathbf{k}_h = h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

jos konvektioreunaehto on ensimmäisen elementin solmulla 1. Lisäksi nähdään, että elementin ”johtavuusmatriisi” on

$$\mathbf{k}_T = \frac{k_e l_e}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{B}_T^T \mathbf{B}_T d\xi = \frac{k_e}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

ja ”lämmöntuottovektori” on

$$\mathbf{r}_Q = \frac{\dot{Q}^{\text{int}} l_e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Laskentamallin toimintamatriisi

Laskentamallin toimintamatriisi

$$\mathbf{K} = \sum_e (\mathbf{k}_T + \mathbf{k}_h) \quad (21)$$

sijoittelusummataan tavalliseen tapaan, kuten siirtymämenetelmän yhteydessä on ollut esillä. Yhtälöryhmän

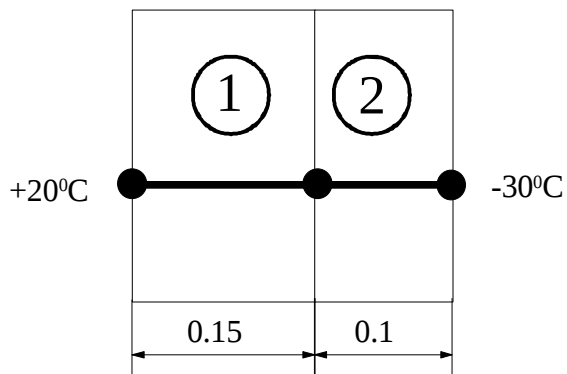
$$\mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{R} \quad (22)$$

oikeanpuolinen vektori sijoittelusummataan elementtien lämmöntuottovektoreista. Annetuista konvektioreunaehdoista saadaan termi $h T_\infty$ vektorin viimeiselle vapausasteelle ja/tai ensimmäiselle jos konvektioreunaehto on annettu ensimmäiselle solmulle. Luonnollisesti tällöin solmun lämpötila ei voi olla annettu, vaan se määräytyy konvektioehdon perusteella.

Esimerkki

Tarkastellaan 0.25m seinämää, jossa on kaksi elementtiä. Solmun 1 lämpötila on annettu $+20^\circ\text{C}$. Lämpö siirtyy ulkoilmaan, jonka lämpötila on -30°C . Seinämän kahden materiaalin lämmönjohtavuuskertoimet k on

annettu ja konvektiokerroin h elementin 2 ja väliaineen välisellä rajapinnalla on annettu. Lasketaan solmujen 2 ja 3 lämpötilat elementtimenetelmällä.



Elementti 1

k	0.05	W/Km
le	0.15	m

Elementti 2

k	0.15	W/Km
le	0.10	m

	1	2	
k_T	0.333333	-0.333333	1
	-0.333333	0.333333	2

	2	3	
k_T	1.5	-1.5	
	-1.5	1.5	

Konvektiokerroin h	5	W/Km ²
----------------------	---	-------------------

Sijoittelusummataan matriisi $\mathbf{K} = \mathbf{K}_T + \mathbf{K}_h$

	1	2	3	
$\mathbf{K}$	0.333333	-0.333333	0	
	-0.333333	1.833333	-1.5	
	0	-1.5	6.5	$\mathbf{K}_T(3,3)+h$

Koska seinämässä ei ole lämmöntuottoa, niin "kuormavektori" $\mathbf{R}$ on

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ hT_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -150 \end{bmatrix} \quad (23)$$

eli

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ hT_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -150 \end{bmatrix} \quad (24)$$

yhtälöryhmän solmun 1 lämpötila T_0 tunnetaan jo reunaehdon perusteella, joten eliminoidaan ensimmäinen rivi pois yhtälöryhmästä

$$\begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{21}T_0 \\ -150 - k_{31}T_0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

ja ratkaistaan tuntemattomat lämpötilat

T2	-18.8	ast.
T3	-27.4	ast.

Edellä esitetty yksiulotteinen malli soveltuu myös, mutta ei sellaisenaan, ns. ripatehtävään, jossa lämpöä siirtyy konvektion kautta koko matkalla, eikä vain viimeisestä (ja/tai ensimmäisestä) solmusta. Tällöin jokaiselle elementille tulee konvektiosta lisätermit elementin toimintamatriisiin.